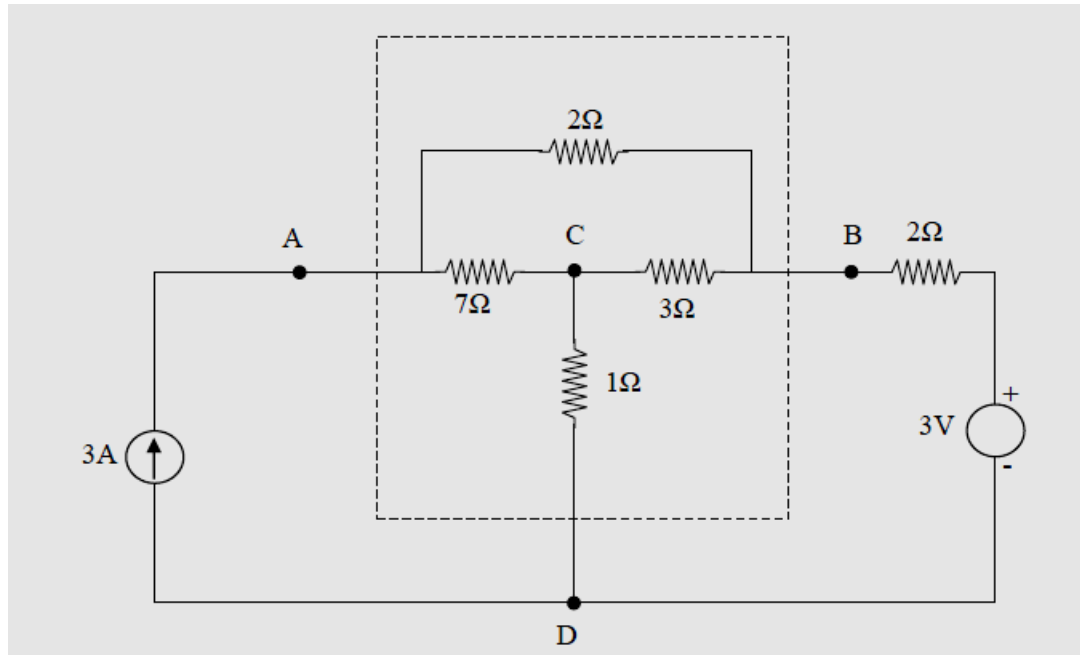


ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



Παναγιώτης Φράγκος
Καθηγητής Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Άννα Μαλάμου
Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών, M.Sc.

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Παναγιώτης Φράγκος
Καθηγητής Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Άννα Μαλάμου
Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών, M.Sc.

Αθήνα 2015

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή των συγγραφέων

ISBN :

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος του βιβλίου με οποιοδήποτε μέσο (φωτοτυπία, εκτύπωση, αποθήκευση σε αρχείο πληροφοριών ή άλλη μηχανική ή ηλεκτρονική μέθοδο) χωρίς έγγραφη άδεια του εκδότη.

No part of this publication may be reproduced or distributed in any form or by any means, or stored in data base or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

Copyright: © 2015, Παναγιώτης Φράγκος, Άννα Μαλάμου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό έχει σκοπό να καλύψει τις απαιτήσεις του μαθήματος ‘Εισαγωγή στα Κυκλώματα’ στα τριτοβάθμια εκπαιδευτικά ιδρύματα.

Πιστεύουμε ότι αποτελεί ένα χρήσιμο σύγγραμμα για οποιοδήποτε σπουδαστή ή μηχανικό, ο οποίος επιθυμεί να κατανοήσει και να εμβαθύνει στις βασικές αρχές των ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνει συνοπτική παρουσίαση της αντίστοιχης θεωρίας ηλεκτρικών κυκλωμάτων, σε συνδυασμό με παραδείγματα που συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών και των θεωρημάτων. Επί πλέον, σε κάθε κεφάλαιο παρατίθεται μία σειρά ασκήσεων που βασίζεται στη θεωρία του εκάστοτε κεφαλαίου, κλιμακωτής δυσκολίας, οι οποίες συνοδεύονται από αναλυτική περιγραφή της λύσης. Τέλος, κάθε κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μία επί πλέον σειρά ασκήσεων, όπου για κάθε άσκηση αναφέρεται μόνο το τελικό αποτέλεσμα (για επαλήθευση της ορθότητας της επίλυσης από τον αναγνώστη).

Σκοπός της διάρθρωσης του βιβλίου είναι η κατανόηση από τους σπουδαστές των βασικών αρχών, μεθόδων ανάλυσης και συμπεριφοράς ηλεκτρικών κυκλωμάτων, μέσω της αναλυτικής παρουσίασης πολλών παραδειγμάτων και ασκήσεων, στις οποίες προτείνονται μεθοδολογίες επίλυσης. Περαιτέρω, μέσω της παράθεσης άλυτων ασκήσεων, που περιλαμβάνουν τα τελικά αποτελέσματα αλλά όχι τη διαδικασία επίλυσης, ενθαρρύνονται οι φοιτητές στην επίλυση περισσότερο σύνθετων προβλημάτων ανάλυσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

Αθήνα, Μάιος 2015

Παναγιώτης Φράγκος
Άννα Μαλάμου

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή – Θεμελιώδεις αρχές.....	1
1.1. Βασικές ηλεκτρικές ποσότητες στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI)	1
1.2. Ηλεκτρικό Φορτίο και Ηλεκτρικό Ρεύμα	2
1.3. Τάση (Διαφορά Δυναμικού)	3
1.4. Ενέργεια και Ισχύς.....	4
1.5. Ενεργά και παθητικά στοιχεία	5
1.6. Φορές αναφοράς ρευμάτων και τάσεων	6
1.7. Σχέση τάσης και ρεύματος.....	6
1.8. Αντίσταση	7
1.9. Αυτεπαγωγή	9
1.10. Χωρητικότητα.....	11
1.11. Νόμος τάσεων Kirchhoff	13
1.12. Νόμος ρευμάτων Kirchhoff	14
1.13. Σύνδεση στοιχείων σε σειρά.....	14
1.14. Σύνδεση στοιχείων παράλληλα.....	16
1.15. Διαίρεση τάσης	18
1.16. Διαίρεση ρεύματος.....	19
1.17. Λυμένα προβλήματα	20
1.18. Άλυτες ασκήσεις	40
Κεφάλαιο 2: Σήματα - Κυματομορφές.....	49
2.1. Εισαγωγή.....	49
2.2. Περιοδικές συναρτήσεις	49
2.3. Ημιτονοειδείς συναρτήσεις.....	51
2.4. Μετατόπιση χρόνου και μετατόπιση φάσης	54
2.5. Συνδυασμοί περιοδικών συναρτήσεων.....	56
2.6. Μέση τιμή και ενεργός (rms) τιμή.....	58
2.7. Μη περιοδικές συναρτήσεις.....	61
2.8. Μοναδιαία βηματική συνάρτηση (unit step function)	62
2.9. Μοναδιαία ώθηση (unit impulse function)	64
2.10. Εκθετική συνάρτηση (exponential function)	68
2.11. Αποσβενύμενη ημιτονοειδής συνάρτηση (damped sinusoids).....	72
2.12. Τυχαία σήματα.....	73

2.13. Λυμένα προβλήματα	74
2.14. Άλυτες ασκήσεις	83

Κεφάλαιο 3: Μέθοδοι ανάλυσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων - Βασικά θεωρήματα
.....89

3.1. Μέθοδος ρευμάτων κλάδων.....	89
3.2. Μέθοδος ρευμάτων βρόχων.....	90
3.3. Πίνακες και ορίζουσες	91
3.4. Μέθοδος τάσεων κόμβου	94
3.5. Αντίσταση εισόδου/εξόδου.....	97
3.6. Αντίσταση μεταφοράς.....	97
3.7. Ισοδύναμο κύκλωμα	98
3.8. Αρχή της επαλληλίας.....	101
3.9. Θεωρήματα Thévenin και Norton.....	103
3.10. Θεώρημα μέγιστης μεταφορά ισχύος	106
3.11. Μετασχηματισμός πηγών	107
3.12. Εξαρτημένες πηγές	108
3.13. Λυμένες ασκήσεις.....	108
3.14. Άλυτες ασκήσεις	135

Κεφάλαιο 4: Δίκτυα στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση (ΗΜΚ).....147

4.1. Εισαγωγή.....	147
4.2. Απόκριση στοιχείων	147
4.3. Αναπαράσταση ημιτονοειδών συναρτήσεων με μιγαδικούς αριθμούς	152
4.4. Σύνθετη Αντίσταση – Σύνθετη Αγωγιμότητα.....	155
4.4.1. Υπολογισμός Σύνθετων Αντιστάσεων.....	157
4.4.2. Διάγραμμα Σύνθετων Αντιστάσεων	157
4.4.3. Σύνθετη αντίσταση σε ιδανικό ωμικό αντιστάτη.....	158
4.4.4. Σύνθετη αντίσταση σε ιδανικό επαγωγή (πηνίο)	159
4.4.5. Σύνθετη αντίσταση σε πυκνωτή	159
4.4.6. Υπολογισμός Σύνθετων Αγωγιμοτήτων	160
4.4.7. Διάγραμμα Σύνθετων Αγωγιμοτήτων.....	160
4.5. Διαίρεση τάσης και ρεύματος στο πεδίο της συχνότητας.....	161
4.6. Μέθοδος ανάλυσης ρευμάτων βρόχου	162
4.7. Μέθοδος ανάλυσης τάσεων κόμβου	164
4.8. Θεωρήματα Thevenin και Norton.....	165

4.9. Υπέρθεση ac πηγών (Θεώρημα της επαλληλίας)	166
4.10. Λυμένα προβλήματα	167
4.11. Άλυτες ασκήσεις	192
Κεφάλαιο 5: Ισχύς στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση (ΗΜΚ)	203
5.1. Ισχύς στο πεδίο του χρόνου	203
5.2. Ισχύς στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση (ΗΜΚ)	205
5.3. Πραγματική Ισχύς P	207
5.4. Αεργός Ισχύς Q	208
5.5. Συγκεντρωτική παρουσίαση εναλλασσόμενης ισχύος για φορτία R, L, C	210
5.6. Ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ πηνίου - πυκνωτή	213
5.7. Φαινόμενη/Μιγαδική Ισχύς – Τρίγωνο ισχύος	214
5.8. Δίκτυα συνδεδεμένα παράλληλα	220
5.9. Βελτίωση συντελεστή ισχύος	222
5.10. Μέγιστη μεταφορά ισχύος	226
5.11. Υπέρθεση πραγματικής ισχύος από διαφορετικές πηγές.....	228
5.12. Λυμένα προβλήματα	230
5.13. Άλυτες ασκήσεις	251
Κεφάλαιο 6: Τριφασικά δίκτυα	259
6.1. Εισαγωγή.....	259
6.2. Τριφασικά δίκτυα.....	259
6.3. Σύνδεση σε αστέρα (Y) και τρίγωνο (Δ)	261
6.4. Phasor τάσης σε τριφασικό δίκτυο	262
6.5. Συμμετρικό φορτίο με σύνδεση τριγώνου	264
6.6. Συμμετρικό φορτίο με σύνδεση αστέρα	266
6.7. Ισοδύναμες συνδέσεις σε αστέρα (Y) και τρίγωνο (Δ).....	268
6.8. Μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα για συμμετρικά τριφασικά φορτία	269
6.9. Μη συμμετρικό φορτίο με σύνδεση τριγώνου.....	270
6.10. Μη συμμετρικό φορτίο με σύνδεση αστέρα	272
6.11. Τριφασική ισχύς.....	276
6.12. Μέτρηση ισχύος στα τριφασικά δίκτυα.....	277
6.13. Λυμένες ασκήσεις	280
6.14. Άλυτες ασκήσεις	300

Κεφάλαιο 7: Μεταβατικά Φαινόμενα (Κυκλώματα πρώτης τάξης).....307

7.1. Εισαγωγή.....	307
7.2. Εκφόρτιση πυκνωτή σε κύκλωμα RC (αντίσταση-πυκνωτής)	307
7.3. Συνεχής τάση (dc) στα άκρα ενός πυκνωτή.....	310
7.4. Κύκλωμα RL (αντίσταση-πηνίο) χωρίς πηγή.....	312
7.5. Συνεχής τάση (dc) στα άκρα ενός πηνίου.....	315
7.6. Επισκόπηση εκθετικής συνάρτησης	316
7.7. Σύνθετα κυκλώματα RL και RC πρώτης τάξης.....	318
7.8. Μεταβατικά φαινόμενα σε κυκλώματα με πηνία και πυκνωτές όταν η τροφοδοσία είναι πηγές DC	323
7.9. Μεταβατικό φαινόμενο κατά τη στιγμή κλεισίματος του διακόπτη.....	325
7.10. Απόκριση κυκλωμάτων πρώτης τάξης σε ένα παλμό.....	328
7.11. Κρουστική απόκριση κυκλωμάτων RC και RL.....	331
7.12. Συνοπτική παρουσίαση βηματικών και κρουστικών αποκρίσεων σε κυκλώματα RC και RL	333
7.13. Απόκριση κυκλωμάτων RC και RL σε απότομες εκθετικές διεγέρσεις.....	334
7.14. Απόκριση κυκλωμάτων RC και RL σε απότομες ημιτονοειδείς διεγέρσεις.....	336
7.15. Συνοπτική παρουσίαση αποκρίσεων στα κυκλώματα πρώτης τάξης.....	337
7.16. Λυμένα προβλήματα.....	338
7.17. Άλυτες ασκήσεις.....	358

Κεφάλαιο 8: Μεταβατικά Φαινόμενα (Κυκλώματα δεύτερης τάξης)365

8.1. Εισαγωγή.....	365
8.2. Κύκλωμα RLC σειράς (αντίσταση-πηνίο-πυκνωτής).....	365
8.3. Κύκλωμα RLC με παράλληλα στοιχεία (αντίσταση-πηνίο-πυκνωτής).....	371
8.4. Κύκλωμα δύο βρόχων.....	376
8.5. Λυμένα προβλήματα.....	377
8.6. Άλυτες ασκήσεις.....	389

Κεφάλαιο 9: Ανάλυση Μεταβατικών Φαινομένων σε ηλεκτρικά κυκλώματα με τη χρήση Μετασχηματισμού Laplace395

9.1. Εισαγωγή.....	395
9.2. Η μιγαδική μεταβλητή $s = \sigma + j\omega$	395
9.3. Μετασχηματισμός Laplace	395
9.4. Παραδείγματα μετασχηματισμών Laplace	396

9.5. Σύγκλιση του ολοκληρώματος.....	401
9.6. Θεώρημα αρχικής τιμής και θεώρημα τελικής τιμής.....	401
9.7. Ανάπτυξη ρητής συνάρτησης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων	403
9.8. Θεώρημα Heaviside	405
9.9. Κυκλώματα στο s - πεδίο	405
9.10. Λυμένα προβλήματα	409
9.11. Άλυτες ασκήσεις	433
Βιβλιογραφία	445

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή – Θεμελιώδεις αρχές

1.1. Βασικές ηλεκτρικές ποσότητες στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI)

Το διεθνές σύστημα μονάδων (SI) αποτελεί το δεκαδικό σύστημα έκφρασης συμβατικών μονάδων μέτρησης φυσικών μεγεθών, μέτρων και σταθμών. Αποτελείται από εννιά βασικά μεγέθη σε συνδυασμό με τις μονάδες μέτρησής τους. Τα βασικά αυτά μεγέθη παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.1. Οι μονάδες μέτρησης για όλα τα υπόλοιπα φυσικά μεγέθη προκύπτουν από τα βασικά.

Φυσικό Μέγεθος	Μονάδα Μέτρησης	Σύμβολο
Μήκος	Μέτρο	m
Μάζα	Κιλό	kg
Χρόνος	Δευτερόλεπτο	s
Ρεύμα	Ampere	A
Θερμοκρασία	Kelvin	K
Ποσότητα Ουσίας	Mole	mol
Ένταση Φωτεινότητας	Candela	cd
Επίπεδη γωνία	Ακτίνιο	rad
Στερεά γωνία	Στερεακτίνιο	sr

Πίνακας 1.1: Θεμελιώδη Μεγέθη στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI)

Οι θεμελιώδεις ηλεκτρικές ποσότητες που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.2 μαζί με τις μονάδες μέτρησής τους.

Μέγεθος	Σύμβολο	Μονάδα στο SI	Μονάδα μέτρησης
Ηλεκτρικό Φορτίο	Q, q	coulomb	C
Ηλεκτρικό δυναμικό	V, v	volt	V
Αντίσταση	R	ohm	Ω
Αγωγιμότητα	G	siemens	S
Αυτεπαγωγή	L	henry	H
Χωρητικότητα	C	farad	F
Συχνότητα	f	hertz	Hz
Δύναμη	F, f	newton	N
Ενέργεια/Εργο	W, w	joule	J
Ισχύς	P, p	watt	W
Πεπλεγμένη Μαγνητική Ροή	ϕ	weber	Wb
Πυκνότητα Μαγνητικής Ροής	B	tesla	T

Πίνακας 1.2: Θεμελιώδεις ηλεκτρικές ποσότητες

Στον Πίνακα 1.3 φαίνονται τα σύμβολα για τα πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια των βασικών μονάδων, τα οποία τοποθετούνται ως πρόθεμα πριν την κύρια μονάδα

μέτρησης. Για παράδειγμα το σύμβολο mV χρησιμοποιείται για να συμβολιστούν τα millivolt (10^{-3}V) ενώ το σύμβολο MW χρησιμοποιείται για να συμβολιστούν τα megawatt (10^6W).

Πρόθεμα	Πολλαπλασιαστικός παράγοντας	Σύμβολο
pico	10^{-12}	<i>p</i>
nano	10^{-9}	<i>n</i>
micro	10^{-6}	<i>μ</i>
milli	10^{-3}	<i>m</i>
centi	10^{-2}	<i>c</i>
deci	10^{-1}	<i>d</i>
kilo	10^3	<i>k</i>
mega	10^6	<i>M</i>
giga	10^9	<i>G</i>
tera	10^{12}	<i>T</i>

Πίνακας 1.3: Πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια βασικών μονάδων

1.2. Ηλεκτρικό Φορτίο και Ηλεκτρικό Ρεύμα

Στη φύση υπάρχουν δύο είδη ηλεκτρικού φορτίου: θετικό και αρνητικό φορτίο. Τα υποατομικά σωματίδια πρωτόνια έχουν θετικό φορτίο ενώ τα υποατομικά σωματίδια ηλεκτρόνια έχουν αρνητικό φορτίο. Όλα τα ηλεκτρικά φορτία θεωρούνται ως ακέραια πολλαπλάσια του στοιχειώδους φορτίου ενός ηλεκτρονίου ή ενός πρωτονίου. Τα ηλεκτρικά φορτία ασκούν δυνάμεις το ένα στο άλλο. Φορτία του ίδιου πρόσημου απωθούν το ένα το άλλο ενώ φορτία του αντίθετου πρόσημου έλκουν το ένα το άλλο. Ωστόσο σε κάθε ηλεκτρικό κύκλωμα ισχύει η λεγόμενη διατήρηση του φορτίου, δηλαδή το καθαρό ηλεκτρικό φορτίο παραμένει σταθερό (δε δημιουργείται ούτε καταστρέφεται). Το φορτίο ενός ηλεκτρονίου είναι ίσο με $q_e = -1.602 \cdot 10^{19} \text{C}$.

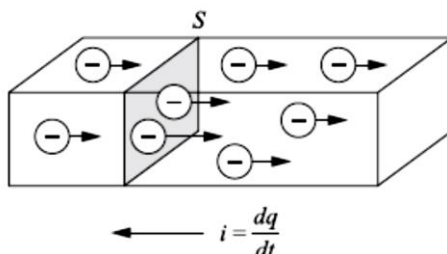
Το ηλεκτρικό ρεύμα προκύπτει από την κίνηση του ηλεκτρικού φορτίου. Η μονάδα μέτρησης του ηλεκτρικού ρεύματος είναι το ampere (A). Το ηλεκτρικό ρεύμα συμβολίζεται με I για συνεχές ρεύμα ή με i για εναλλασσόμενο ρεύμα. Αν φορτίο 1C διέρχεται με σταθερό ρυθμό από ένα δεδομένο σημείο ενός αγωγού για χρονικό διάστημα 1s τότε το ρεύμα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με 1A. Γενικά ισχύει η σχέση:

$$i(\text{A}) = \frac{dq}{dt} \left(\frac{\text{C}}{\text{s}} \right)$$

Η μονάδα μέτρησης του φορτίου είναι το Coulomb το οποίο ισούται με ampere · second ($1\text{C} = 1\text{A} \cdot \text{s}$). Το ηλεκτρικό ρεύμα έχει μία καθορισμένη κατεύθυνση. Λόγω σύμβασης θεωρείται ότι η κατεύθυνση του ηλεκτρικού ρεύματος είναι ίδια με την κατεύθυνση κίνησης του θετικού φορτίου και αντίθετη από την κατεύθυνση κίνησης του αρνητικού φορτίου. Στα στερεά, μόνο τα ελεύθερα ηλεκτρόνια κινούνται έτσι ώστε να παράγεται ηλεκτρικό ρεύμα. Τα ιόντα έχουν μεγάλο μέγεθος και ως εκ τούτου είναι δυσκίνητα. Αντίθετα στα υγρά και στα αέρια κινούνται και τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα έτσι ώστε να παράγεται ηλεκτρικό ρεύμα. Εφόσον όμως τα

ηλεκτρικά κυκλώματα αποτελούνται από στερεά υλικά, τα ηλεκτρόνια θεωρούνται ως οι αποκλειστικοί φορείς του ηλεκτρικού ρεύματος. Στο σχήμα 1.1 φαίνονται ηλεκτρόνια τα οποία κινούνται κατά μήκος ενός αγωγού διατομής S παράγοντας ένα ρεύμα i .

Σε κάθε ηλεκτρικό κύκλωμα το ηλεκτρικό ρεύμα συμβολίζεται με ένα βέλος το οποίο δείχνει τη συμβατική κατεύθυνση ροής του. Αν μετά τους υπολογισμούς το ρεύμα βρεθεί να έχει θετική τιμή αυτό σημαίνει ότι το πραγματικό ρεύμα έχει όντως την κατεύθυνση του βέλους, ενώ αν το ρεύμα έχει αρνητική τιμή αυτό σημαίνει ότι το πραγματικό ρεύμα έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή του βέλους



Σχήμα 1.1: Κίνηση ηλεκτρονίων κατά μήκος ενός αγωγού διατομής S

Παράδειγμα 1.1

Ένα αγωγός διαρρέεται από σταθερό ρεύμα 5 A . Πόσα ηλεκτρόνια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο του αγωγού σε ένα λεπτό;

Απάντηση:

$$5\text{ A} = 5 \frac{\text{C}}{\text{s}} \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} = 300 \frac{\text{C}}{\text{min}}$$

$$\frac{300 \frac{\text{C}}{\text{min}}}{1.602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{C}}{e}} = 1.87 \cdot 10^{21} e/\text{min}$$

1.3. Τάση (Διαφορά Δυναμικού)

Σε ένα ηλεκτρικό φορτίο που βρίσκεται σε ένα ηλεκτρικό πεδίο, ασκείται μία δύναμη η οποία τείνει να επιταχύνει το φορτίο. Το έργο που απαιτείται για τη μετακίνηση του φορτίου μετρείται σε Joule. Συγκεκριμένα 1Joule είναι το έργο που απαιτείται για να μετακινηθεί φορτίο ίσο με 1 coulomb από τη θέση 1 στη θέση 2 αν η διαφορά δυναμικού μεταξύ των θέσεων 1 και 2 είναι ίση με 1 Volt. Δηλαδή ισχύει: $1\text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$.

Επομένως το έργο ανά μονάδα φορτίου από ένα σημείο του κυκλώματος σε ένα άλλο ονομάζεται τάση ή διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο σημείων.

Παράδειγμα 1.2

Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα απαιτείται έργο (ενέργεια) ίση με $9.25\mu\text{J}$ για να μετακινηθεί φορτίο $0.5\mu\text{C}$ από ένα σημείο α σε ένα σημείο β . Να υπολογιστεί η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο σημείων.

Απάντηση:

$$V = \frac{9.25 \cdot 10^{-6} \text{ J}}{0.5 \cdot 10^{-6} \text{ C}} = 18.5 \text{ V}$$

Για το διαχωρισμό μεταξύ σταθερών και μεταβλητών μεγεθών, θα χρησιμοποιούνται κεφαλαία γράμματα για μία σταθερή ποσότητα και μικρά γράμματα για μία μεταβλητή. Για παράδειγμα ένα σταθερό ρεύμα 10A γράφεται ως $I = 10\text{A}$, ενώ ένα ρεύμα 10A που εξαρτάται από το χρόνο γράφεται ως $i = 10f(t)\text{A}$. Μία μεταβλητή συνάρτηση του χρόνου είναι για παράδειγμα μία ημιτονοειδής συνάρτηση $i = 10\sin(\omega t)$ (A) ή μία εκθετική συνάρτηση $v = 15e^{-at}$ (V).

1.4. Ενέργεια και Ισχύς

Μία πηγή παράγει ενέργεια και ένα φορτίο την καταναλώνει. Ο ρυθμός με τον οποίο καταναλώνεται ή παράγεται ενέργεια ονομάζεται ισχύς. Η ισχύς μετράται σε Watts, η οποία μονάδα ισούται με joules/second. Επιπλέον η ισχύς υπολογίζεται και ως γινόμενο της τάσης επί του ρεύματος: $p(W) = v(V) \cdot i(A)$. Για τις μονάδες ισχύει

$$\text{επίσης: } V \cdot A = \frac{J}{C} \cdot \frac{C}{s} = \frac{J}{s} = W.$$

Η ηλεκτρική ενέργεια υπολογίζεται ως το γινόμενο της ισχύος επί το χρόνο:

$$W(J) = P(W) \cdot t(s)$$

Η ηλεκτρική ενέργεια είναι και το μέγεθος που «αγοράζουν» οι καταναλωτές από τους παρόχους ηλεκτρικής ενέργειας. Η μονάδα που χρησιμοποιείται για τη χρέωση της ηλεκτρικής ενέργειας, δεν είναι το joule αλλά η κιλοβατώρα (KWh). Οι κιλοβατώρες που καταναλώνει ένας πελάτης, υπολογίζονται από το γινόμενο της ισχύος που απορροφάται επί το χρόνο που γίνεται η κατανάλωση.

Παράδειγμα 1.3

Μία αντίσταση έχει διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα άκρα της ίση 50V . Κάθε λεπτό διέρχεται από ένα σταθερό σημείο φορτίο ίσο με 120C . Κάτω από αυτές τις συνθήκες με ποιο ρυθμό μετατρέπεται η ηλεκτρική ενέργεια σε θερμότητα;

Απάντηση:

$$120 \frac{C}{\text{min}} \cdot 60 \frac{s}{\text{min}} = 2A$$

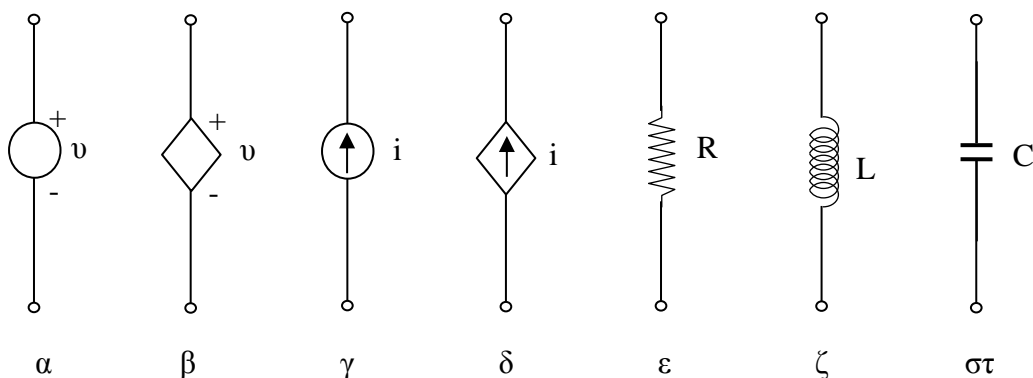
$$P = 2A \cdot 50V = 100W$$

Εφόσον $1W = 1 \frac{J}{s}$, η ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα με ρυθμό $100J/s$.

1.5. Ενεργά και παθητικά στοιχεία

Κάθε ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελείται από διάφορα στοιχεία. Τα στοιχεία αυτά αποτελούνται συνήθως από δύο ακροδέκτες. Ενεργά στοιχεία ονομάζονται τα στοιχεία τα οποία τροφοδοτούν με ενέργεια το δίκτυο όπως πηγές τάσης ή πηγές ρεύματος. Παθητικά στοιχεία ονομάζονται τα στοιχεία που παίρνουν ενέργεια από τις πηγές όπως αντιστάσεις, πηνία και πυκνωτές. Την ενέργεια που λαμβάνουν, είτε τη μετατρέπουν σε άλλη μορφή ενέργειας είτε την αποθηκεύουν σε ένα ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο.

Στο σχήμα 1.2 φαίνονται επτά βασικά στοιχεία. Τα στοιχεία α και β είναι πηγές τάσης ενώ τα στοιχεία γ και δ είναι πηγές ρεύματος. Μία πηγή τάσης η οποία δεν επηρεάζεται από τις αλλαγές στο κύκλωμα ονομάζεται ανεξάρτητη πηγή (στοιχείο α). Μία πηγή τάσης η οποία επηρεάζεται από τις αλλαγές στο κύκλωμα σύμφωνα με κάποιες καθορισμένες συνθήκες ονομάζεται εξαρτημένη πηγή (στοιχείο β). Οι πηγές ρεύματος είναι δυνατό να είναι επίσης ανεξάρτητες (στοιχείο γ) είτε εξαρτημένες (στοιχείο δ). Τα στοιχεία ε, ζ και στ (αντίσταση, πηνίο και πυκνωτής) είναι παθητικά στοιχεία.

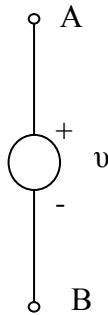


Σχήμα 1.2: Ενεργά και παθητικά στοιχεία

Υπάρχουν δύο είδη κυκλωμάτων: τα συγκεντρωμένα δίκτυα (lumped networks) και τα κατανομημένα δίκτυα (distributed networks). Στο συγκεκριμένο βιβλίο μελετώνται τα συγκεντρωμένα δίκτυα, εφόσον θεωρείται ότι υπάρχει ένα στιγμιαίο ρεύμα το οποίο εισέρχεται από τον ένα ακροδέκτη και εξέρχεται από τον άλλο ακροδέκτη ενός στοιχείου και στο ρεύμα αυτό αντιστοιχεί μία διαφορά δυναμικού (τάση) στα άκρα του στοιχείου αυτού.

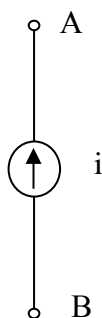
1.6. Φορές αναφοράς ρευμάτων και τάσεων

Για να προσδιοριστεί πλήρως μία πηγή τάσης πρέπει να είναι γνωστή η συνάρτηση της τάσης καθώς και η πολικότητα της. Η πολικότητα προσδιορίζεται με την τοποθέτηση του θετικού και αρνητικού πρόσημου κοντά στην πηγή. Για παράδειγμα στο σχήμα 1.3 φαίνεται μία ανεξάρτητη πηγή τάσης με συνάρτηση τάσης $v = 10\sin \omega t$. Το άκρο A είναι θετικό ως προς το B για $0 < \omega t < \pi$ ενώ το B είναι θετικό ως προς το άκρο A για $\pi < \omega t < 2\pi$ όσον αφορά στην πρώτη περίοδο της ημιτονοειδούς συνάρτησης.



Σχήμα 1.3: Πολικότητα ανεξάρτητης πηγής τάσης

Ομοίως και σε μία πηγή ρεύματος πρέπει να καθοριστεί μία κατεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4. Όσον αφορά στα παθητικά στοιχεία, ο ακροδέκτης στον οποίο εισέρχεται το ρεύμα γενικά θεωρείται θετικός σε σχέση με τον ακροδέκτη από τον οποίο εξέρχεται το ρεύμα.



Σχήμα 1.4: Πολικότητα ανεξάρτητης πηγής ρεύματος

1.7. Σχέση τάσης και ρεύματος

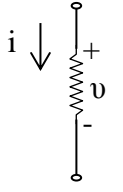
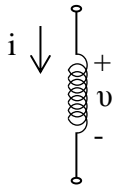
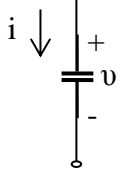
Τα παθητικά στοιχεία αντίσταση R , πηνίο L και πυκνωτής C ορίζονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η τάση και το ρεύμα για κάθε στοιχείο να συνδέονται μεταξύ τους με συγκεκριμένη σχέση.

- Αν η τάση v και το ρεύμα i σε ένα στοιχείο είναι ανάλογα μεταξύ τους τότε το στοιχείο αυτό είναι μία αντίσταση. Η σχέση που συνδέει τάση και ρεύμα σε μία αντίσταση είναι: $v = Ri$.

- Αν η τάση προκύπτει από την παράγωγο του ρεύματος τότε το στοιχείο αυτό είναι ένα πηνίο. Η σχέση που συνδέει τάση και ρεύμα σε ένα πηνίο είναι:

$$v = L \frac{di}{dt}$$
- Αν το ρεύμα προκύπτει από την παράγωγο της τάσης τότε το στοιχείο αυτό είναι ένας πυκνωτής. Η σχέση που συνδέει τάση και ρεύμα σε ένα πυκνωτή είναι: $i = C \frac{dv}{dt}$.

Στο πίνακα 1.4 συνοψίζονται οι σχέσεις τάσης και ρεύματος για τα τρία παθητικά στοιχεία.

Στοιχείο	Κυκλώμα	Μονάδα	Τάση	Ρεύμα	Ισχύς
Αντίστα-ση		ohms (Ω)	$v = Ri$	$I = \frac{v}{R}$	$p = vi = i^2R$
Πηνίο		henries (H)	$v = L \frac{di}{dt}$	$i = \frac{1}{L} \int v dt + k_1$	$p = vi = Li \frac{di}{dt}$
Πυκνω-τής		farads (F)	$v = \frac{1}{C} \int i dt + k_2$	$i = C \frac{dv}{dt}$	$p = vi = Cv \frac{dv}{dt}$

Πίνακας 1.4: Σχέσεις τάσης και ρεύματος για τα παθητικά στοιχεία.

Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελείται από ένα αριθμό στοιχείων που συνδέονται μεταξύ τους και συνήθως περιέχει τουλάχιστον μία πηγή ρεύματος ή τάσης.

1.8. Αντίσταση

Σε έναν αγωγό, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια συγκρούονται με τα άτομα του αγωγού και ως εκ τούτου χάνουν ένα μέρος της κινητικής τους ενέργειας το οποίο μετατρέπεται σε θερμότητα. Η εφαρμοζόμενη τάση στα άκρα του αγωγού αναπληρώνει το ποσό της ενέργειας που χάνεται και επιταχύνει εκ νέου τα ηλεκτρόνια. Αντίσταση ονομάζεται η ιδιότητα των υλικών να αντιτίθενται στην κίνηση των ηλεκτρονίων.

Στους μεταλλικούς αγωγούς ισχύει ο νόμος του Ohm:

$$I = \frac{V}{R}$$

δηλαδή το ρεύμα I που διαρρέει έναν αγωγό είναι ανάλογο της εφαρμοζόμενης τάσης στα άκρα του αγωγού V αν ο αγωγός έχει αντίσταση R .

Η σχέση ρεύματος και τάσης σε ένα στοιχείο μπορεί να μην είναι απαραίτητα γραμμική. Στην περίπτωση αυτή το στοιχείο αντιπροσωπεύει μία μη γραμμική αντίσταση. Παράδειγμα ενός τέτοιου στοιχείου με μη γραμμική σχέση μεταξύ τάσης και ρεύματος είναι η δίοδος.

Η αντίσταση ενός αγωγού μήκους l (m) και διατομής S (m^2) είναι ανάλογη του μήκους του αγωγού και αντιστρόφως ανάλογη της διατομής του. Δηλαδή η αντίσταση ενός αγωγού σε μία συγκεκριμένη θερμοκρασία δίνεται από τη σχέση:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Όπου ρ είναι μία σταθερά που ονομάζεται ειδική αντίσταση (resistivity) και είναι χαρακτηριστική του υλικού του αγωγού.

Όλες οι ηλεκτρικές συσκευές που καταναλώνουν ενέργεια θεωρείται ότι έχουν μία αντίσταση στο κύκλωμά τους. Η ισχύς σε μία αντίσταση δίνεται από τη σχέση

$$p = \upsilon i = i^2 R = \frac{\upsilon^2}{R} \text{ και είναι πάντα θετική. Η ενέργεια υπολογίζεται από τη σχέση:}$$

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} \upsilon^2 dt$$

Παράδειγμα 1.4

Μία αντίσταση 4Ω διαρρέεται από ρεύμα $i = 2.5 \sin \omega t$ (A). Να υπολογιστούν η τάση, η ενέργεια και η ισχύς στη διάρκεια μίας περιόδου αν $\omega = 500 \text{ rad/s}$.

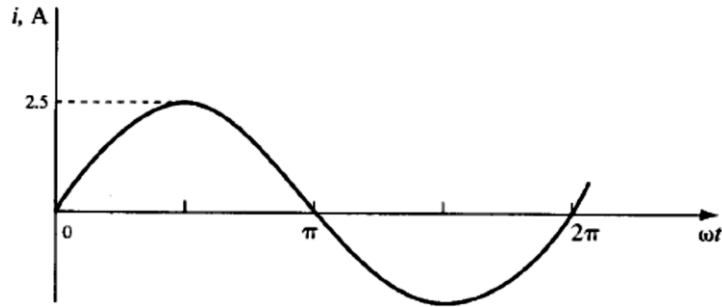
Απάντηση:

$$\upsilon = Ri = 10 \sin \omega t \text{ (V)}$$

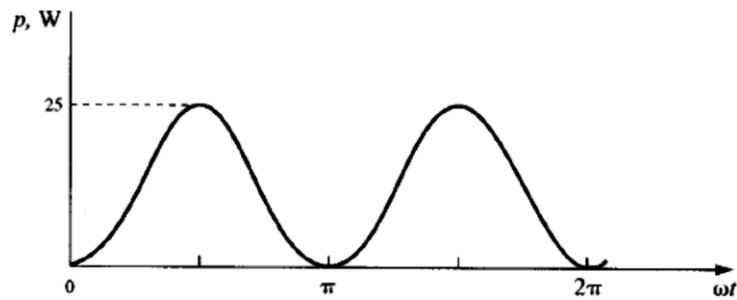
$$p = \upsilon i = i^2 R = 25 \sin^2 \omega t \text{ (W)}$$

$$w = \int_0^T p dt = 25 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right] \text{ (J)}$$

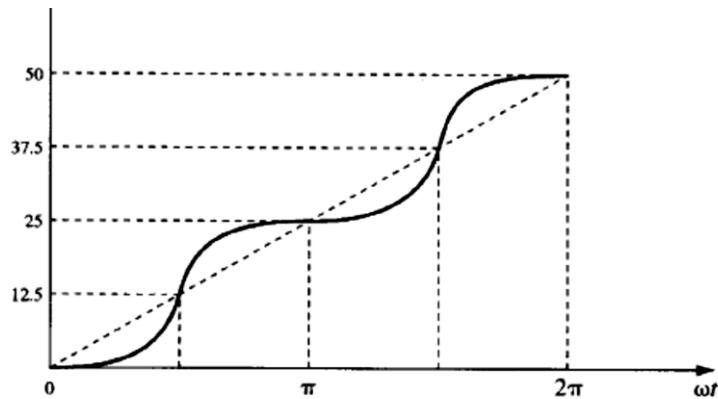
Οι γραφικές παραστάσεις του ρεύματος της ενέργειας και της ισχύος φαίνονται στα σχήματα 1.5, 1.6 και 1.7 αντίστοιχα. Η ισχύς είναι πάντα θετική ενώ η ενέργεια συνεχώς αυξάνεται. Αυτή είναι η ενέργεια που καταναλώνεται στην αντίσταση.



Σχήμα 1.5: Γραφική παράσταση ρεύματος παραδείγματος 1.4



Σχήμα 1.6: Γραφική παράσταση ισχύος παραδείγματος 1.4



Σχήμα 1.7: Γραφική παράσταση ενέργειας παραδείγματος 1.4

1.9. Αυτεπαγωγή

Το στοιχείο του κυκλώματος που αποθηκεύει ενέργεια σε ένα μαγνητικό πεδίο ονομάζεται πηνίο. Χαρακτηριστικό μέγεθος ενός πηνίου είναι η αυτεπαγωγή η οποία συμβολίζεται με $L(H)$ και εκφράζει πόσο αντιστέκεται το πηνίο στην αλλαγή του ηλεκτρικού ρεύματος. Όταν το ρεύμα είναι εναλλασσόμενο, το πηνίο αποθηκεύει ενέργεια για ένα διάστημα της περιόδου και στη συνέχεια την επιστρέφει στην πηγή σε άλλο διάστημα της περιόδου. Όταν το πηνίο απομακρυνθεί από την πηγή, τότε το μαγνητικό πεδίο εξαφανίζεται και ως εκ τούτου δεν είναι δυνατό να αποθηκευτεί ενέργεια σε ένα πηνίο αν αυτό δεν είναι συνδεδεμένο με μία πηγή. Πηνία είναι τοποθετημένα σε κυκλώματα ηλεκτρικών μηχανών, μετασχηματιστών και σε πλήθος

άλλων συσκευών. Οι σχέσεις για την ενέργεια και για την ισχύ σε ένα πηνίο είναι οι εξής:

$$p = \upsilon i = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} Li^2 \right]$$

$$w_L = \int_{i_1}^{i_2} p dt = \int_{i_1}^{i_2} Lidt = \frac{1}{2} L[i_2^2 - i_1^2]$$

Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο ενός πηνίου δίνεται από τη σχέση:

$$w_L = \frac{1}{2} Li^2.$$

Παράδειγμα 1.5

Ένα πηνίο 30mH διαρρέεται από ρεύμα $i = 10 \sin 50 t$ (A) στο διάστημα $0 > t > \frac{\pi}{50}$ s.

Να υπολογιστούν η τάση, η ενέργεια και η ισχύς για το πηνίο.

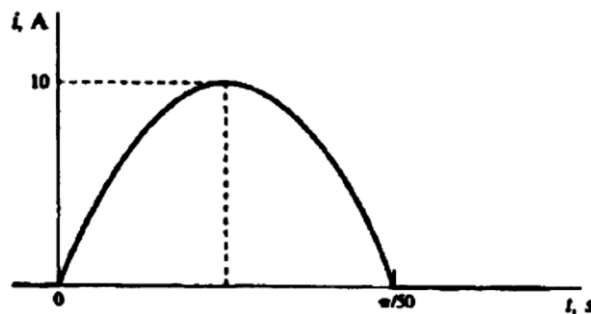
Απάντηση:

$$\upsilon = L \frac{di}{dt} = 15 \cos 50 t \text{ (V)}$$

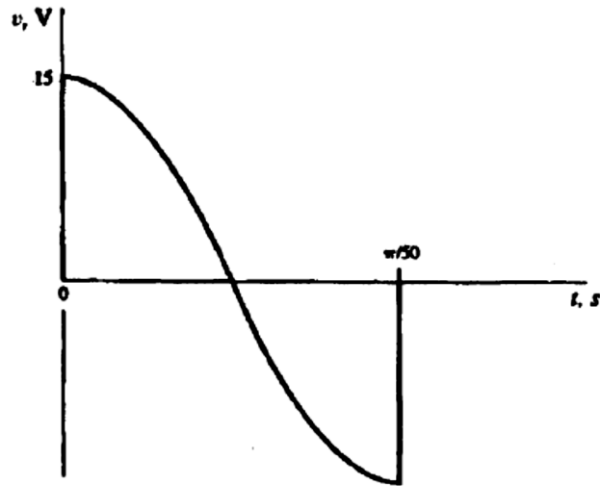
$$p = \upsilon i = 75 \sin 100t \text{ (W)}$$

$$w_L = \int_0^t p dt = 0.75(1 - \cos 100t) \text{ (J)}$$

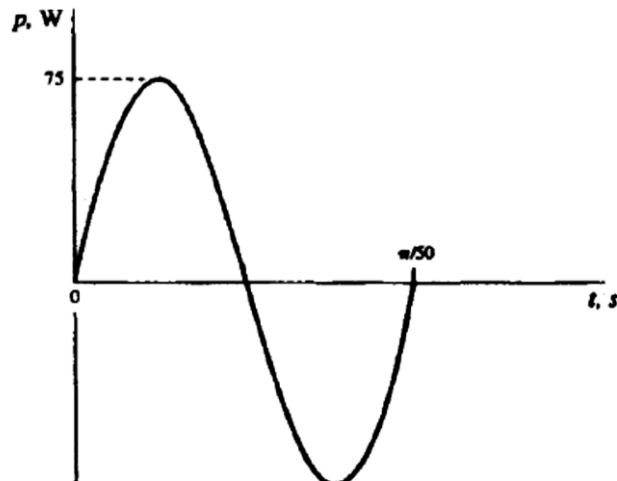
Οι γραφικές παραστάσεις του ρεύματος, της τάσης, της ενέργειας και της ισχύος φαίνονται στα σχήματα 1.8 - 1.11 αντίστοιχα. Η ενέργεια είναι μηδέν για $t = 0$ και $t = \frac{\pi}{50}$ s. Η ενέργεια αρχικά αποθηκεύεται και στη συνέχεια επιστρέφει στην πηγή.



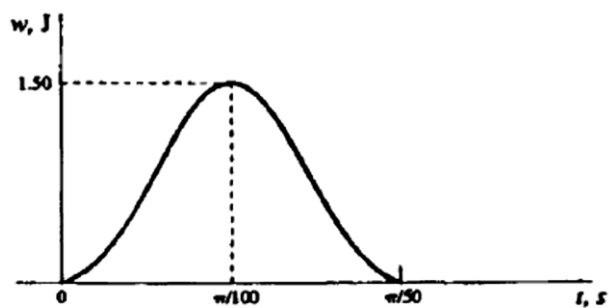
Σχήμα 1.8: Γραφική παράσταση ρεύματος παραδείγματος 1.5



Σχήμα 1.9: Γραφική παράσταση τάσης παραδείγματος 1.5



Σχήμα 1.10: Γραφική παράσταση ισχύος παραδείγματος 1.5



Σχήμα 1.11: Γραφική παράσταση ενέργειας παραδείγματος 1.5

1.10. Χωρητικότητα

Το στοιχείο του κυκλώματος που αποθηκεύει ενέργεια σε ένα ηλεκτρικό πεδίο ονομάζεται πυκνωτής. Χαρακτηριστικό μέγεθος ενός πυκνωτή είναι η χωρητικότητα η οποία συμβολίζεται με $C (F)$. Όταν η τάση είναι εναλλασσόμενη, ο πυκνωτής

αποθηκεύει ενέργεια για ένα διάστημα της περιόδου και στη συνέχεια την επιστρέφει στην πηγή σε άλλο διάστημα της περιόδου. Ενώ ένα πηνίο δεν είναι δυνατό να αποθηκεύσει ενέργεια αν δεν είναι συνδεδεμένο με μία πηγή (επειδή το μαγνητικό πεδίο εξαφανίζεται), ο πυκνωτής είναι δυνατό να αποθηκεύσει ενέργεια και να διατηρηθεί το ηλεκτρικό πεδίο αφού αφαιρεθεί η πηγή. Η φόρτιση του πυκνωτή διαρκεί μέχρις ότου ο πυκνωτής συνδεθεί με ένα στοιχείο που θα καταναλώσει την αποθηκευμένη ενέργεια. Το φορτίο σε ένα πυκνωτή δίνεται από τη σχέση: $q = Cv$. Οι σχέσεις για την ενέργεια και για την ισχύ σε έναν πυκνωτή είναι οι εξής:

$$p = vi = Cv \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} Cv^2 \right]$$

$$w_c = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} Cv dt = \frac{1}{2} C[v_2^2 - v_1^2]$$

Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο ηλεκτρικό πεδίο ενός πυκνωτή δίνεται από τη σχέση: $w_c = \frac{1}{2} Cv^2$.

Παράδειγμα 1.6

Ένας πυκνωτής 20μF έχει τάση στα άκρα του $v = 50 \sin 200t$ (V) στο διάστημα $0 > t > 5\pi$ ms. Να υπολογιστούν το φορτίο, η ενέργεια και η ισχύς για τον πυκνωτή. Να σχεδιαστεί επίσης η γραφική παράσταση για την ενέργεια αν $w = 0$ για $t = 0$.

Απάντηση:

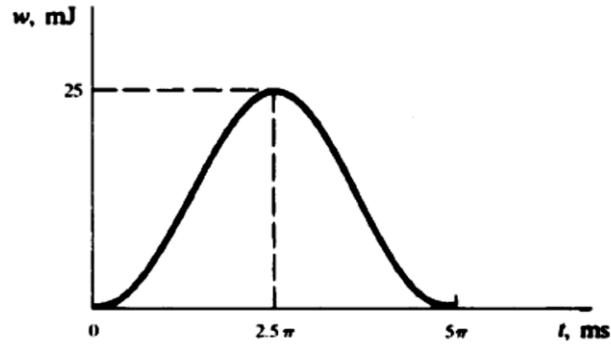
$$q = Cv = 1000 \sin 200t \quad (\mu C)$$

$$i = C \frac{dv}{dt} = 0.2 \cos 200t \quad (A)$$

$$p = vi = 5 \sin 400t \quad (W)$$

$$w_c = \int_{t_1}^{t_2} p dt = 12.5[1 - \cos 400t] \quad (mJ)$$

Για $0 > t > 5\pi$ ms η τάση και το φορτίο αυξάνουν από την τιμή μηδέν στις τιμές 50V και 1000μC αντίστοιχα. Στο σχήμα 1.12 φαίνεται η γραφική παράσταση της ενέργειας, η οποία αυξάνει στα 25mJ και μετά παίρνει την τιμή μηδέν καθώς η ενέργεια επιστρέφει στην πηγή.



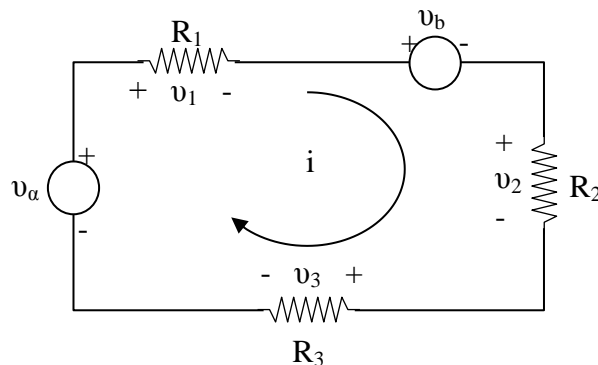
Σχήμα 1.12: Γραφική παράσταση ενέργειας παραδείγματος 1.6

1.11. Νόμος τάσεων Kirchhoff

Σύμφωνα με το νόμο τάσεων του Kirchhoff (NTK) σε κάθε κλειστό βρόχο ενός κυκλώματος το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων γύρω από το βρόχο αυτό είναι ίσο με το μηδέν. Ο νόμος τάσεων του Kirchhoff ισχύει ανεξάρτητα από τη φύση των στοιχείων του κυκλώματος (γραμμικά, μη γραμμικά, παθητικά, ενεργά κ.τ.λ.) και ανεξάρτητα από το αν τα μεγέθη του ρεύματος ή της τάσης είναι συνεχή ή εναλλασσόμενα.

Παράδειγμα 1.7

Να εφαρμοστεί ο νόμος τάσεων του Kirchhoff για το κύκλωμα του σχήματος 1.13.



Σχήμα 1.13: Κύκλωμα παραδείγματος 1.7

Απάντηση:

Ξεκινώντας από την κάτω αριστερή γωνία του κυκλώματος και προχωρώντας με τη φορά που ακολουθεί το ρεύμα εφαρμόζεται ο νόμος τάσεων του Kirchhoff και προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

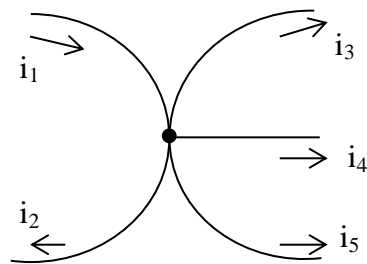
$$\begin{aligned}
 -v_a + v_1 + v_b + v_2 + v_3 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -v_a + iR_1 + v_b + iR_2 + iR_3 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow v_a - v_b &= i(R_1 + R_2 + R_3)
 \end{aligned}$$

1.12. Νόμος ρευμάτων Kirchhoff

Η σύνδεση δύο ή περισσότερων στοιχείων σε ένα κύκλωμα ονομάζεται κόμβος (node). Η σύνδεση μεταξύ δύο στοιχείων ονομάζεται απλός κόμβος και δεν προκύπτει διαίρεση ρεύματος στην περίπτωση αυτή. Η σύνδεση μεταξύ τριών ή περισσότερων στοιχείων ονομάζεται κύριος κόμβος και στην περίπτωση αυτή προκύπτει διαίρεση του ρεύματος. Σύμφωνα με το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff (NPK) το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων σε έναν κόμβο του κυκλώματος είναι ίσο με το μηδέν. Με διαφορετική διατύπωση το άθροισμα των ρευμάτων που εισέρχονται σε ένα κόμβο ισούται με το άθροισμα των ρευμάτων που εξέρχονται από τον κόμβο αυτό. Ο νόμος ρευμάτων του Kirchhoff ισχύει λόγω της αρχής διατήρησης του φορτίου.

Παράδειγμα 1.8

Να εφαρμοστεί ο νόμος ρευμάτων του Kirchhoff για το κύκλωμα του σχήματος 1.14.



Σχήμα 1.14: Κύκλωμα παραδείγματος 1.8

Απάντηση:

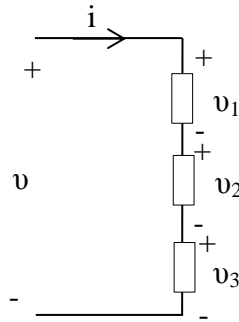
Εφαρμόζοντας το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff στον κύριο κόμβο του κυκλώματος 1.14 προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow i_1 + i_3 = i_2 + i_4 + i_5$$

1.13. Σύνδεση στοιχείων σε σειρά

Τρία παθητικά στοιχεία τα οποία είναι συνδεδεμένα σε σειρά φαίνονται στο σχήμα 1.15 και διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα i . Οι τάσεις κατά μήκος του κάθε στοιχείου είναι v_1, v_2 και v_3 αντίστοιχα. Η ολική τάση v είναι το άθροισμα των επιμέρους τάσεων. $v = v_1 + v_2 + v_3$.

Αν τα στοιχεία είναι αντιστάσεις τότε: $v = iR_1 + iR_2 + iR_3 = i(R_1 + R_2 + R_3) = iR_{\sigma}$, όπου R_{σ} είναι η ισοδύναμη αντίσταση που αντικαθιστά τις τρεις αντιστάσεις σε σειρά. Προκύπτει η ίδια σχέση μεταξύ i και v .



Σχήμα 1.15: Σύνδεση τριών στοιχείων σε σειρά

Για οποιονδήποτε αριθμό αντιστάσεων σε σειρά ισχύει:

$$R_{\sigma} = R_1 + R_2 + \dots$$

Αν τα στοιχεία είναι πηνία τότε:

$$v = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + L_3) \frac{di}{dt} = L_{\sigma} \frac{di}{dt}$$

Για οποιονδήποτε αριθμό πηνίων σε σειρά ισχύει:

$$L_{\sigma} = L_1 + L_2 + \dots$$

Αν τα στοιχεία είναι πυκνωτές τότε:

$$v = \frac{1}{C_1} \int idt + \frac{1}{C_2} \int idt + \frac{1}{C_3} \int idt = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \int idt = \frac{1}{C_{\sigma}} \int idt$$

Για οποιονδήποτε αριθμό πυκνωτών σε σειρά ισχύει:

$$\frac{1}{C_{\sigma}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

Παράδειγμα 1.9

Η ισοδύναμη αντίσταση τριών αντιστάσεων σε σειρά είναι 750Ω. Δύο από τις αντιστάσεις έχουν τιμές 40Ω και 410Ω. Ποια είναι η τιμή της τρίτης αντίστασης;

Απάντηση:

$$R_{\sigma} = R_1 + R_2 + R_3 \Leftrightarrow 750 = 40 + 410 + R_3 \Leftrightarrow R_3 = 300\Omega$$

Παράδειγμα 1.10

Δύο πυκνωτές $C_1 = 2\mu F$ και $C_2 = 10\mu F$ είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Να υπολογιστεί η ισοδύναμη χωρητικότητα. Να επαναληφθεί ο υπολογισμός για $C_2 = 10pF$.

Απάντηση:

$$C_{ισ} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{(2 \cdot 10^{-6})(10 \cdot 10^{-6})}{2 \cdot 10^{-6} + 10 \cdot 10^{-6}} = 1.67 \mu F$$

Αν $C_2 = 10pF$:

$$C_{ισ} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{(2 \cdot 10^{-6})(10 \cdot 10^{-12})}{2 \cdot 10^{-6} + 10 \cdot 10^{-12}} = \frac{20 \cdot 10^{-18}}{2 \cdot 10^{-6}} = 10pF$$

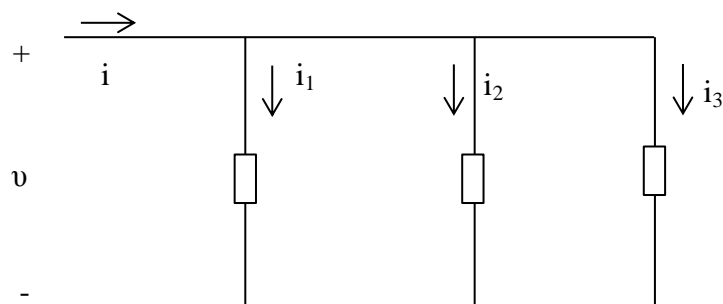
Η συνεισφορά του όρου $10 \cdot 10^{-12}$ στο άθροισμα $C_1 + C_2$ στον παρανομαστή είναι αμελητέα και μπορεί να παραληφθεί.

Σημείωση: Όταν δύο πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι σε σειρά και οι χωρητικότητές τους διαφέρουν κατά πολύ στην τιμή, τότε η ισοδύναμη χωρητικότητα είναι ουσιαστικά ίση με τη μικρότερη από τις δύο χωρητικότητες.

1.14. Σύνδεση στοιχείων παράλληλα

Τρία παθητικά στοιχεία τα οποία είναι συνδεδεμένα παράλληλα φαίνονται στο σχήμα 1.16. Σύμφωνα με το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff το ρεύμα i που εισέρχεται στον κύριο κόμβο ισούται με το άθροισμα των τριών ρευμάτων που εξέρχονται από τον κόμβο.

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$



Σχήμα 1.16: Παράλληλα συνδεδεμένα στοιχεία

Αν τα στοιχεία είναι αντιστάσεις τότε:

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) v = \frac{1}{R_{\sigma}} v$$

Για διάφορες αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα:

$$\frac{1}{R_{\sigma}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$$

Στην περίπτωση που δύο αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες παράλληλα η ισοδύναμη αντίσταση δίνεται από τη σχέση:

$$R_{\sigma} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Παράδειγμα 1.11

Να υπολογιστεί η ισοδύναμη αντίσταση α) δύο αντιστάσεων 60Ω συνδεδεμένων παράλληλα και β) τριών αντιστάσεων 60Ω συνδεδεμένων παράλληλα.

Απάντηση:

$$\text{α) } R_{\sigma} = \frac{60^2}{60 + 60} = 30\Omega$$

$$\text{β) } \frac{1}{R_{\sigma}} = \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} \Leftrightarrow R_{\sigma} = 20\Omega$$

Σημείωση: Για n ίσες αντιστάσεις R συνδεδεμένες παράλληλα, η ισοδύναμη αντίσταση ισούται με $\frac{R}{n}$.

Πηνία που είναι συνδεδεμένα παράλληλα έχουν ισοδύναμη αυτεπαγωγή που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{1}{L_{\sigma}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots$$

Για δύο πηνία συνδεδεμένα παράλληλα ισχύει:

$$L_{\sigma} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Παράδειγμα 1.12

Δύο πηνία $L_1 = 3mH$ και $L_2 = 6mH$ είναι συνδεδεμένα παράλληλα. Να υπολογιστεί η ισοδύναμη αυτεπαγωγή.

Απάντηση:

$$\frac{1}{L_{\sigma}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \Leftrightarrow L_{\sigma} = 2mH$$

Αν τρεις πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι παράλληλα:

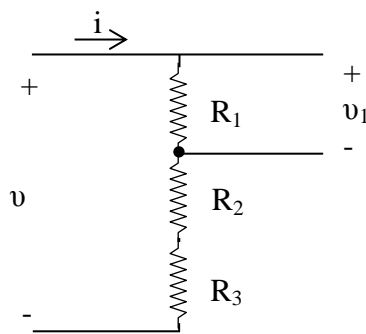
$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} = (C_1 + C_2 + C_3) \frac{dv}{dt} = C_{\sigma} \frac{dv}{dt}$$

Για πυκνωτές συνδεδεμένους παράλληλα ισχύει η σχέση:

$$C_{\sigma} = C_1 + C_2 + \dots$$

1.15. Διαίρεση τάσης

Μία ομάδα αντιστάσεων συνδεδεμένων όπως στο σχήμα 1.17 αναφέρονται ως διαιρέτης τάσης.



Σχήμα 1.17: Διαιρέτης τάσης

Εφόσον $v_1 = iR_1$ και $v = i(R_1 + R_2 + R_3)$ τότε:

$$v_1 = v \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \right)$$

Παράδειγμα 1.13

Ένα κύκλωμα διαιρέτη τάσης αποτελείται από δύο αντιστάσεις έχει ολική αντίσταση (των δύο αντιστάσεων) ίση με 50Ω . Αν η τάση εξόδου ισούται με το 10% της τιμής της τάσης εισόδου να υπολογιστούν οι τιμές των δύο αντιστάσεων στο κύκλωμα.

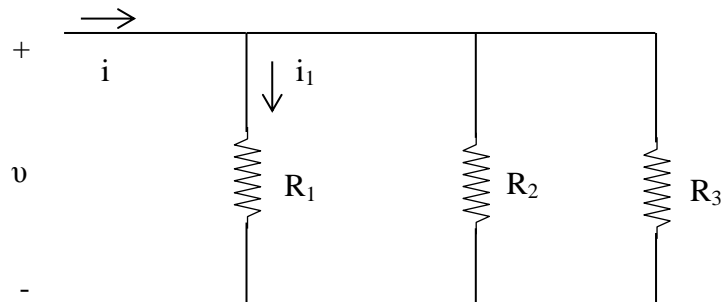
Απάντηση:

$$\frac{v_1}{v} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = 0.1 \Leftrightarrow \frac{R_1}{50 \cdot 10^3} = 0.1 \Leftrightarrow R_1 = 5\Omega$$

$$R_1 + R_2 = 50\Omega \Leftrightarrow R_2 = 45\Omega$$

1.16. Διαίρεση ρεύματος

Μία ομάδα αντιστάσεων συνδεδεμένων όπως στο σχήμα 1.18 αναφέρονται ως διαιρέτης ρεύματος. Ο λόγος του ρεύματος i_1 ως προς το συνολικό ρεύμα i καταδεικνύει τη λειτουργία του διαιρέτη ρεύματος.



Σχήμα 1.18: Διαιρέτης ρεύματος

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} \text{ και}$$

$$i_1 = \frac{v}{R_1}$$

Οπότε:

$$\frac{i_1}{i} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Για ένα διαιρέτη ρεύματος δύο κλάδων ισχύει:

$$\frac{i_1}{i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Ο λόγος δηλαδή του ρεύματος στον ένα κλάδο του κυκλώματος ως προς ολικό ρεύμα ισούται με το λόγο της αντίστασης στον άλλο κλάδο ως προς το άθροισμα των δύο αντιστάσεων.

Παράδειγμα 1.14

Ένα ρεύμα 30mA διαιρείται σε δύο παράλληλους κλάδους σε 20mA και σε 10mA. Στο κύκλωμα αυτό η ισοδύναμη αντίσταση είναι μεγαλύτερη ή ίση με 10Ω. Να υπολογιστεί η αντίσταση κάθε κλάδου.

Απάντηση:

$$\frac{20mA}{30mA} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{10mA}{30mA} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \geq 10\Omega$$

Από την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων προκύπτει: $R_1 \geq 15\Omega$ και $R_2 \geq 30\Omega$.

1.17. Λυμένα προβλήματα

1) Σε μία αντίσταση ο ρυθμός διέλευσης του φορτίου είναι 270C/min ενώ η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα με ρυθμό 7.56KJ/min. Ποια είναι η διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης;

Απάντηση:

$$P = VI \Leftrightarrow V = \frac{P}{I} = \frac{7.56 \cdot 10^3 J / \text{min}}{270 C / \text{min}} = 28 J / C = 28V$$

2) Ένα στοιχείο ενός κυκλώματος διαρρέεται από ρεύμα $i = 2.5 \sin \omega t$ (mA) όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα σε rad/s. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του στοιχείου είναι $v = 45 \sin \omega t$ (V). Να υπολογιστεί η μέση ισχύς και η ενέργεια που μεταφέρεται στη διάρκεια μιας περιόδου.

Απάντηση:

Η ενέργεια προκύπτει από το ολοκλήρωμα της στιγμιαίας ισχύος:

$$W = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} v i dt = 112.5 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t dt = \frac{112.5\pi}{\omega} \text{ (mJ)}$$

Η μέση ισχύς είναι:

$$P_{\mu} = \frac{W}{\frac{2\pi}{\omega}} = 56.25 \text{ mW}$$

Η μέση ισχύς είναι ανεξάρτητη από τη γωνιακή συχνότητα ω .

3) Η μονάδα ηλεκτρικής ενέργειας που χρεώνεται από τις εταιρείες παροχής είναι η κιλοβατώρα (kWh). α) Πόσα joule είναι 1KWh; β) Μία οικιακή συσκευή (75W) λειτουργεί από τις 7:00μ.μ. μέχρι τις 11:30μ.μ. Πόσες kWh και πόσα joule είναι η κατανάλωση;

Απάντηση:

$$\alpha) 1kWh = 1000 \frac{J}{s} \cdot 3600 \frac{s}{h} = 3.6MJ$$

$$\beta) 75W \cdot 4.5h = 337.5Wh = 0.3375kWh$$

$$0.3375kWh \cdot 3.6 \frac{MJ}{kWh} = 1.215MJ$$

4) Σε έναν χάλκινο αγωγό περιέχονται $2.77 \cdot 10^{12}$ ηλεκτρόνια ανά μέτρο μήκους. Αν ο αγωγός διαρρέεται από σταθερό ρεύμα 25A, ποιο ποσοστό από αυτά τα ηλεκτρόνια διέρχονται από ένα συγκεκριμένο σημείο του αγωγού ;

Απάντηση:

$$\frac{25C/s}{1.602 \cdot 10^{-19} C/e} = 1.56 \cdot 10^{20} e/s$$

$$1.56 \cdot 10^{20} \frac{e}{s} \cdot 60 \frac{s}{\text{min}} = 9.36 \cdot 10^{21} \frac{e}{\text{min}}$$

$$\frac{9.36 \cdot 10^{21}}{2.77 \cdot 10^{23}} \cdot 100 = 3.38\%$$

5) Πόσα ηλεκτρόνια διέρχονται από ένα συγκεκριμένο σημείο ενός λαμπτήρα (100W) σε μία ώρα αν η εφαρμοζόμενη τάση είναι 120V;

Απάντηση:

$$I = \frac{100W}{120V} = \frac{5}{6} A$$

$$\frac{\frac{5}{6} \frac{C}{s} \cdot 3600 \frac{s}{h}}{1.602 \cdot 10^{-19} \frac{C}{e}} = 1.87 \cdot 10^{22} e/h$$

6) Μία μπαταρία (12V) χαρακτηρίζεται από το μέγεθος ampere επί ώρες. Μία μπαταρία 70A/h για παράδειγμα που αποφορτίζεται με ρυθμό 3.5A έχει ζωή 20h. α) Αν η τάση παραμένει σταθερή, να υπολογιστεί η ενέργεια και η ισχύς που προκύπτουν κατά την πλήρη αποφόρτιση της μπαταρίας. β) Να επαναληφθεί το προηγούμενο ερώτημα για μία μπαταρία με ρυθμό αποφόρτισης 7A.

Απάντηση:

$$\alpha) 3.5A \cdot 12V = 42W$$

$$42W = 42 \frac{J}{s}$$

$$42 \frac{J}{s} \cdot 3600 \frac{s}{h} \cdot 20h = 3.02MJ$$

$$\beta) 7A \cdot 12V = 84W$$

$$84 \frac{J}{s} \cdot 3600 \frac{s}{h} \cdot 10h = 3.02MJ$$

Το μέγεθος ampere επί ώρες είναι ένα μέτρο της ενέργειας που αποθηκεύει η μπαταρία. Επομένως η ενέργεια που μεταφέρεται στην πλήρη αποφόρτιση είναι ίδια είτε αυτή μεταφέρεται για 10 ή 20 ώρες. Εφόσον η ισχύς είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται η ενέργεια, η ισχύς για αποφόρτιση της μπαταρίας σε 10 ώρες είναι διπλάσια από την ισχύ για αποφόρτιση της μπαταρίας σε 20 ώρες.

7) Μία αντίσταση 25Ω έχει τάση $v = 150\sin 377t$ (V). Να υπολογιστεί το αντίστοιχο ρεύμα και η ισχύς.

Απάντηση:

$$i = \frac{v}{R} = 6\sin 377t \quad (\text{A})$$

$$p = vi = 900\sin^2 377t \quad (\text{W})$$

8) Ένα πηνίο 20mH διαρρέεται από ρεύμα $i = 5(1 - e^{-5000t})$ (A). Να υπολογιστεί η αντίστοιχη τάση και η μέγιστη αποθηκευμένη ενέργεια.

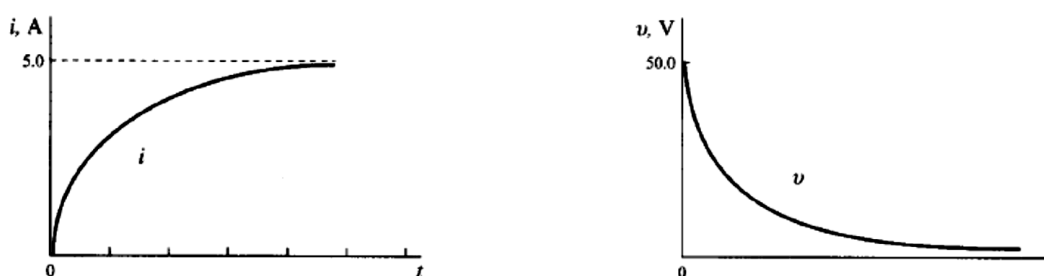
Απάντηση:

$$v = L \frac{di}{dt} = 50e^{-5000t} \quad (\text{V})$$

Εφόσον το μέγιστο ρεύμα είναι 5A , η μέγιστη αποθηκευμένη ενέργεια είναι:

$$W_{\max} = \frac{1}{2} LI_{\max}^2 = 25\text{mJ}$$

Στο σχήμα 1.19 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις του ρεύματος και της τάσης.



Σχήμα 1.19: Γραφικές παραστάσεις ρεύματος και τάσης άσκησης 8

9) Ένα πηνίο 3mH έχει τάση: $V = \begin{cases} 15\text{V} \\ -30\text{V} \end{cases}, 0 > t > 2\text{ms}$. Να υπολογιστεί το αντίστοιχο ρεύμα και να σχεδιαστεί η τάση και το ρεύμα ως συνάρτηση του χρόνου.

Απάντηση:

Για $0 > t > 2\text{ms}$:

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t v dt = \frac{1}{3 \cdot 10^{-3}} \int_0^t 15 dt = 5 \cdot 10^3 t \quad (A)$$

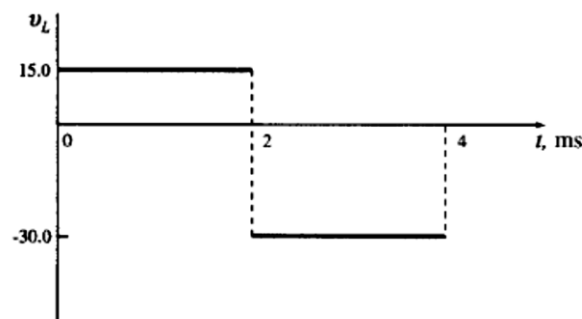
Για $t = 2ms$:

$$i = 10A$$

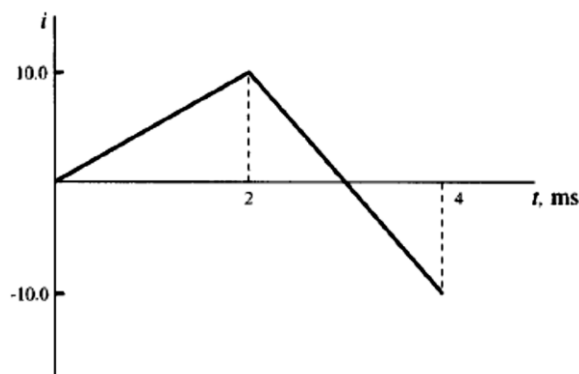
Για $2 > t > 4ms$:

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L} \int_{2 \cdot 10^{-3}}^t v dt + 10 + \frac{1}{3 \cdot 10^{-3}} \int_{2 \cdot 10^{-3}}^t -30 dt = \\ &= 10 + \frac{1}{3 \cdot 10^{-3}} [-30t + (60 \cdot 10^{-3})] = \\ &= 30 - (10 \cdot 10^3 t) \quad (A) \end{aligned}$$

Στα σχήματα 1.20 και 1.21 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της τάσης και του ρεύματος αντίστοιχα.



Σχήμα 1.20: Γραφική παράσταση τάσης άσκησης 9



Σχήμα 1.21: Γραφική παράσταση ρεύματος άσκησης 9

10) Ένας πυκνωτής $60\mu\text{F}$ έχει τάση: $v = 25 \cdot 10^3 t$ (V) για $0 > t > 2\text{ms}$. Να σχεδιαστούν τα i, v, w και να υπολογιστεί η μέγιστη ενέργεια W_{max} .

Απάντηση:

Για $0 > t > 2\text{ms}$:

$$i = C \frac{dv}{dt} = 60 \cdot 10^{-6} \frac{d}{dt}(25 \cdot 10^3 t) = 1.5\text{A}$$

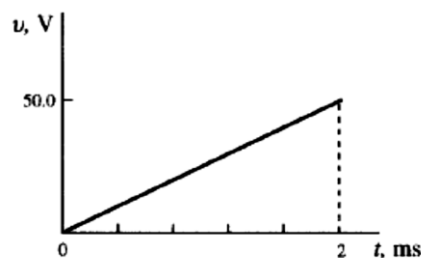
$$p = vi = 37.5 \cdot 10^3 t \quad (\text{W})$$

$$w = \int_0^t p dt = 1.875 \cdot 10^4 t^2 \quad (\text{mJ})$$

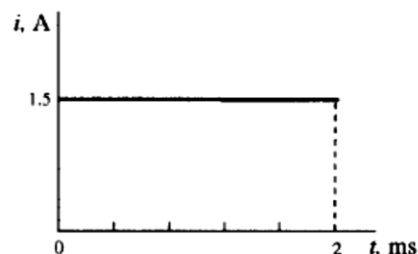
$$W_{\text{max}} = 1.875 \cdot 10^4 \cdot (2 \cdot 10^{-3})^2 = 75\text{mJ}$$

$$W_{\text{max}} = \frac{1}{2} CV_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} (60 \cdot 10^{-6}) \cdot 50^2 = 75\text{mJ}$$

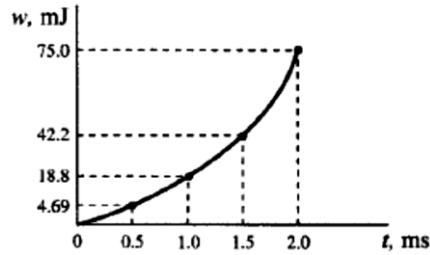
Στα σχήματα 1.22-1.24 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της τάσης, του ρεύματος και της ενέργειας αντίστοιχα.



Σχήμα 1.22: Γραφική παράσταση τάσης άσκησης 10



Σχήμα 1.23: Γραφική παράσταση ρεύματος άσκησης 10



Σχήμα 1.24: Γραφική παράσταση ενέργειας άσκησης 10

11) Ένας πυκνωτής $20\mu\text{F}$ φορτίζεται γραμμικά στα $400\mu\text{C}$ σε 5ms . Να βρεθεί η συνάρτηση τάσης και η μέγιστη ενέργεια W_{max} .

Απάντηση:

$$q = \left(\frac{400 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-3}} \right) t = 8 \cdot 10^{-2} t \quad (\text{C})$$

$$v = \frac{q}{C} = 4 \cdot 10^3 t \quad (\text{V})$$

$$V_{\text{max}} = 4 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 20 \quad (\text{V})$$

$$W_{\text{max}} = \frac{1}{2} C V_{\text{max}}^2 = 4\text{mJ}$$

12) Σε ένα κύκλωμα είναι συνδεδεμένα σε σειρά μία αντίσταση $R = 2\Omega$, ένα πηνίο $L = 2\text{mH}$ και ένας πυκνωτής $C = 500\mu\text{F}$. Το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα το οποίο αυξάνεται γραμμικά από μηδέν μέχρι 10A για $0 \leq t \leq 1\text{ms}$, παραμένει σταθερό στα 10A για $1\text{ms} \leq t \leq 2\text{ms}$ και μειώνεται στη συνέχεια γραμμικά από 10A για $t = 2\text{ms}$ μέχρι το μηδέν για $t = 3\text{ms}$. Να σχεδιαστούν οι τάσεις στα άκρα των στοιχείων v_R, v_L, v_C .

Απάντηση:

Η τάση στα άκρα της αντίστασης v_R είναι μία συνάρτηση ίδια με αυτή του ρεύματος με μέγιστη τιμή $V_{\text{max}} = 2 \cdot 10 = 20 \quad (\text{V})$.

Για $0 < t < 1\text{ms}$:

$$\frac{di}{dt} = 10 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{s}} \quad \text{και}$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} = 20\text{V}$$

Για $1\text{ms} < t < 2\text{ms}$:

$$\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{και}$$

$$v_L = 0$$

Θεωρώντας αρχικά μηδενικό φορτίο στον πυκνωτή:

$$v_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

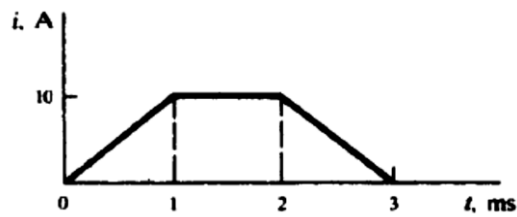
Για $0 \leq t \leq 1\text{ms}$:

$$v_C = \frac{1}{5 \cdot 10^{-4}} \int_0^t 10^4 t dt = 10^7 t^2 \quad (\text{V})$$

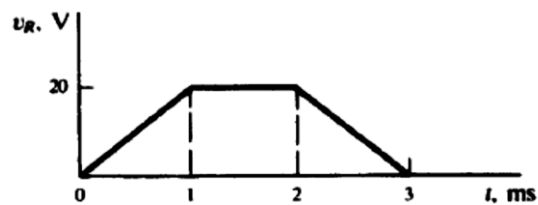
Η τάση παίρνει την τιμή 10V για 1ms. Για $1\text{ms} < t < 2\text{ms}$:

$$v_C = 20 \cdot 10^3 \cdot (t - 10^{-3}) + 10 \quad (\text{V})$$

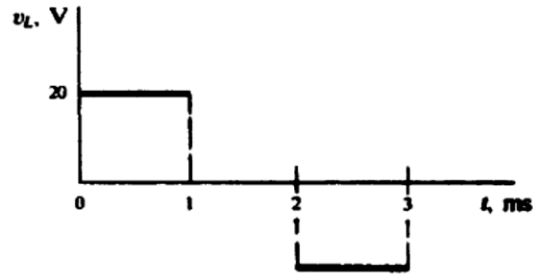
Στα σχήματα 1.25-1.28 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις του ρεύματος και της τάσης στα άκρα κάθε στοιχείου.



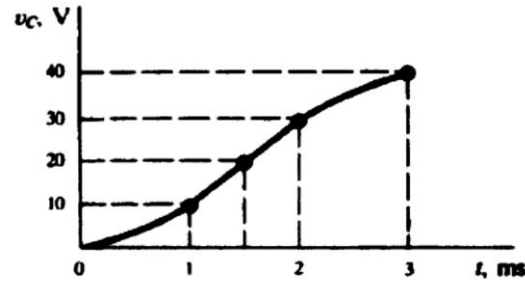
Σχήμα 1.25: Γραφική παράσταση ρεύματος άσκησης 12



Σχήμα 1.26: Γραφική παράσταση τάσης στα άκρα της αντίστασης άσκησης 12

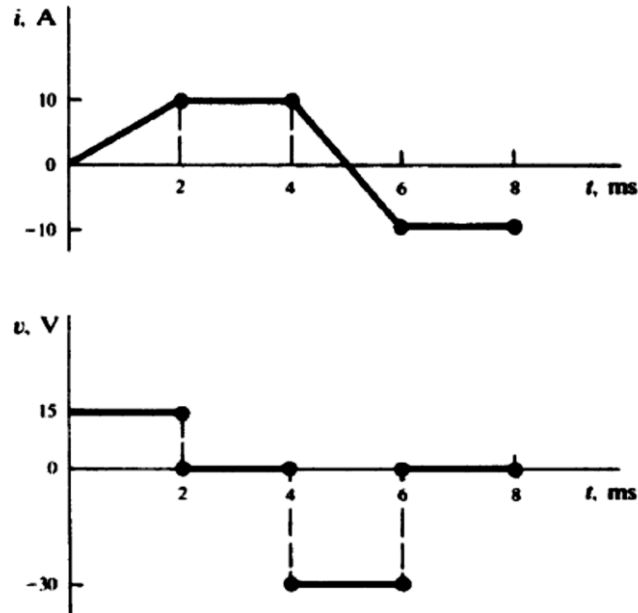


Σχήμα 1.27: Γραφική παράσταση τάσης στα άκρα του πηνίου άσκησης 12



Σχήμα 1.28: Γραφική παράσταση τάσης στα άκρα του πυκνωτή άσκησης 12

13) Ένα στοιχείο ενός κυκλώματος έχει συναρτήσεις για το ρεύμα και την τάση όπως φαίνονται στο σχήμα 1.29. Να προσδιοριστεί το στοιχείο.



Σχήμα 1.29: Γραφική παράσταση τάσης και ρεύματος άσκησης 13

Απάντηση:

Το στοιχείο δεν είναι δυνατό να είναι αντίσταση καθώς το ρεύμα και η τάση δεν είναι ανάλογα. Η τάση φαίνεται να είναι από το διάγραμμα μία παράγωγος του ρεύματος.

Για $2ms < t < 4ms$: $i \neq 0$ αλλά η τάση είναι σταθερή (μηδέν). Επομένως το στοιχείο δεν είναι δυνατό να είναι πυκνωτής. Επομένως το στοιχείο είναι ένα πηνίο.

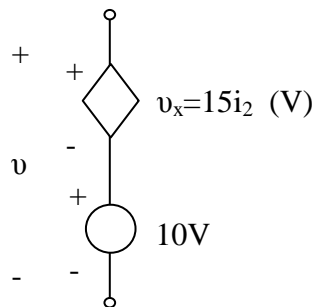
Για $0 < t < 2ms$:

$$\frac{di}{dt} = 5 \cdot 10^3 \frac{A}{s} \text{ και } v = 15V$$

Επομένως:

$$L = \frac{v}{\frac{di}{dt}} = 3mH$$

14) Να υπολογιστεί η τάση v στον κλάδο του σχήματος 1.30 αν α) $i_2 = 1A$, β) $i_2 = -2A$, γ) $i_2 = 0A$.



Σχήμα 1.30: Κύκλωμα άσκησης 14

Απάντηση:

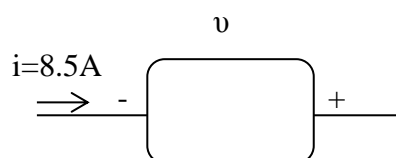
Η τάση είναι το άθροισμα της τάσης στα άκρα της εξαρτημένης πηγής τάσης v_x και της τάσης στα άκρα της ανεξάρτητης πηγής τάσης $10V$.

α) $v = 10 + v_x = 10 + 15 \cdot 1 = 25V$

β) $v = 10 + v_x = 10 + 15 \cdot (-2) = -20V$

γ) $v = 10 + v_x = 10 + 15 \cdot 0 = 10V$

15) Να υπολογιστεί η ισχύς που απορροφάται από το στοιχείο του κυκλώματος του σχήματος 1.31 αν α) $v = 50V$, β) $v = -50V$.



Σχήμα 1.31: Κύκλωμα άσκησης 15

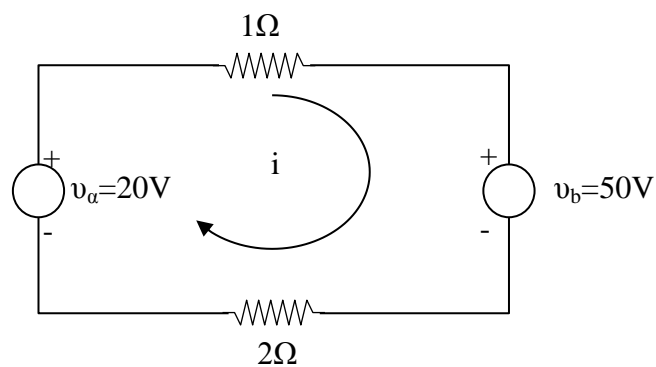
Απάντηση:

Εφόσον το ρεύμα εισέρχεται στο στοιχείο από τον αρνητικό ακροδέκτη:

$$\alpha) p = -v \cdot i = -50 \cdot 8.5 = -425W$$

$$\beta) p = -v \cdot i = -(-50) \cdot 8.5 = 425W$$

16) Να υπολογιστεί η ισχύς που απορροφούν οι αντιστάσεις στο κύκλωμα του σχήματος 1.32.



Σχήμα 1.32: Κύκλωμα άσκησης 16

Απάντηση:

$$i = \frac{20 - 50}{3} = -10A$$

$$p_a = -v_a i = -20 \cdot (-10) = 200W$$

$$p_b = v_b i = 50 \cdot (-10) = -500W$$

Η ισχύς στις δύο αντιστάσεις είναι ίση με 300W.

17) Μία αντίσταση 25Ω έχει τάση στα άκρα της $v = 150 \sin 377t$ (V). Να υπολογιστεί η ισχύς p και η μέση ισχύς κατά τη διάρκεια μίας περιόδου.

Απάντηση:

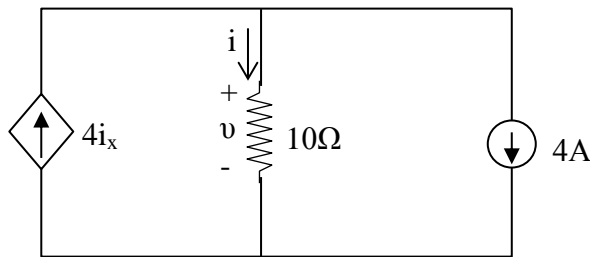
$$i = \frac{v}{R} = 6 \sin 377t \quad (A)$$

$$p = v \cdot i = 900 \sin^2 377t \quad (W)$$

Η ολοκλήρωση της μιας περιόδου της τάσης και του ρεύματος συμβαίνει τη χρονική στιγμή $377t = 2\pi$. Επομένως:

$$P_{\mu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 900 \sin^2 377td(377t) = 450W$$

18) Να υπολογιστεί η τάση κατά μήκος της αντίστασης 10Ω στο κύκλωμα του σχήματος 1.33 αν το ρεύμα i_x στην εξαρτημένη πηγή είναι: α) 2A και β) -1A.



Σχήμα 1.33: Κύκλωμα άσκησης 18

Απάντηση:

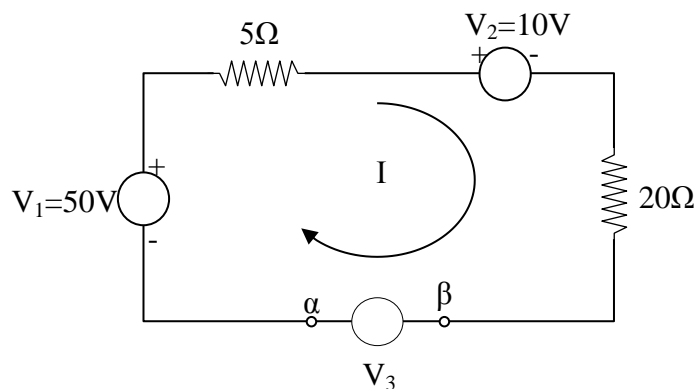
$$i = 4i_x - 4$$

$$v_R = iR = 40i_x - 40 \quad (V)$$

$$\alpha) v_R = 40 \cdot 2 - 40 = 40V$$

$$\beta) v_R = 40 \cdot (-1) - 40 = -80V$$

19) Να υπολογιστεί η τάση V_3 και η πολικότητά της στο κύκλωμα του σχήματος 1.34 αν το ρεύμα I στο κύκλωμα είναι ίσο με 0.4A.



Σχήμα 1.34: Κύκλωμα άσκησης 19

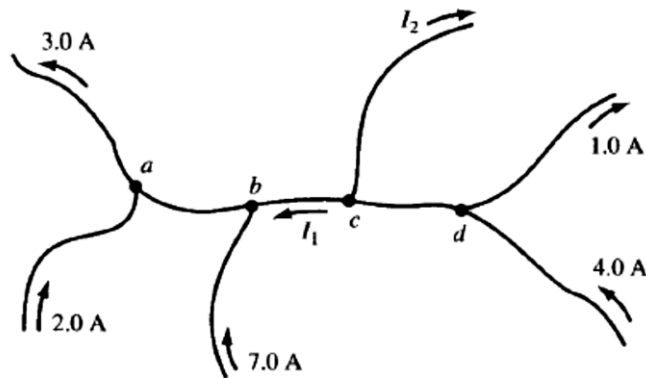
Απάντηση:

Έστω ότι η τάση V_3 έχει την ίδια πολικότητα όπως και η V_1 . Εφαρμόζεται στη συνέχεια ο νόμος τάσεων Kirchhoff ξεκινώντας από την κάτω αριστερή γωνία του κυκλώματος.

$$V_1 - 5I - V_2 - 20I + V_3 = 0 \Leftrightarrow 50 - 2 - 10 - 8 + V_3 = 0 \Leftrightarrow V_3 = -30V$$

Επομένως το άκρο β είναι θετικό σε σχέση με το άκρο α.

20) Να υπολογιστούν τα ρεύματα I_1 και I_2 για το δίκτυο του σχήματος 1.35.



Σχήμα 1.35: Κύκλωμα άσκησης 20

Απάντηση:

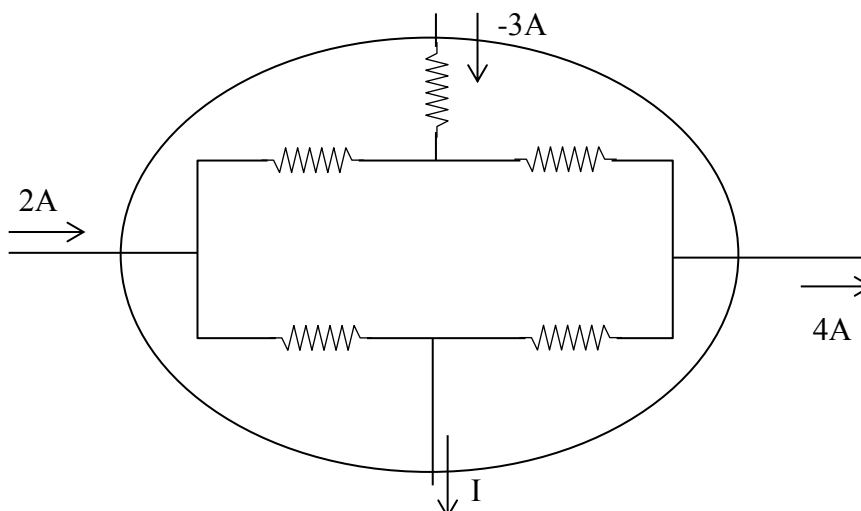
Τα άκρα α και β αποτελούν ένα κόμβο. Εφαρμόζεται στη συνέχεια ο νόμος ρευμάτων Kirchhoff:

$$2 + 7 + I_1 = 3 \Leftrightarrow I_1 = -6A$$

Επίσης τα άκρα c και d αποτελούν έναν απλό κόμβο.

$$4 + 6 = I_2 + 1 \Leftrightarrow I_2 = 9A$$

21) Να υπολογιστεί το ρεύμα I στο κύκλωμα του σχήματος 1.36.



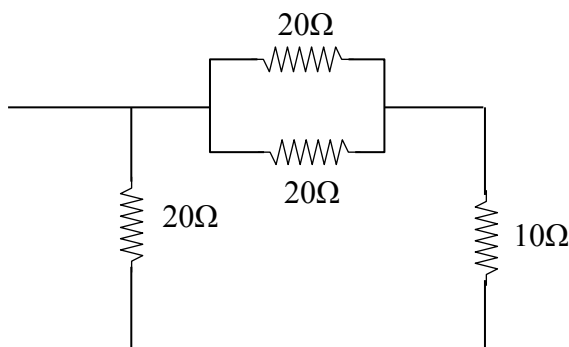
Σχήμα 1.36: Κύκλωμα άσκησης 21

Απάντηση:

Τα ρεύματα σε κάθε κλάδο δεν είναι δυνατό να υπολογιστούν καθώς δεν είναι γνωστές οι τιμές των αντιστάσεων. Αν όμως όλο το κύκλωμα θεωρηθεί ως ένας κόμβος τότε μπορεί να εφαρμοστεί ο νόμος ρευμάτων του Kirchhoff. Επομένως:

$$2 - 3 - 4 - I = 0 \Leftrightarrow I = -5A$$

22) Να βρεθεί η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος του σχήματος 1.37.



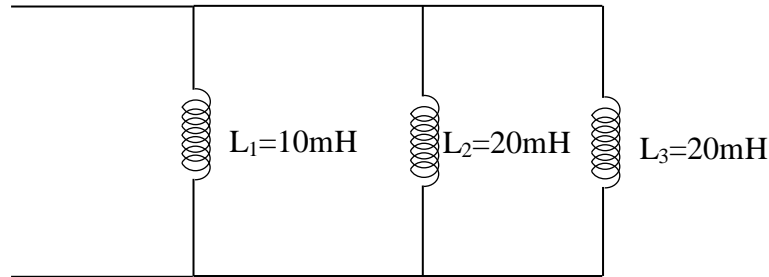
Σχήμα 1.37: Κύκλωμα άσκησης 22

Απάντηση:

Οι δύο αντιστάσεις των 20Ω που είναι συνδεδεμένες παράλληλα έχουν ισοδύναμη αντίσταση $R_{ισ\parallel} = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 10\Omega$. Αυτή η αντίσταση συνδέεται σε σειρά με την αντίσταση των 10Ω και το άθροισμά τους είναι 20Ω . Τέλος η αντίσταση αυτή των

20Ω συνδέεται παράλληλα με την άλλη αντίσταση των 20Ω και η ολική ισοδύναμη αντίσταση είναι: $R_{ολ} = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 10\Omega$.

23) Να υπολογιστεί η ισοδύναμη αυτεπαγωγή για τα τρία πηνία που είναι συνδεδεμένα παράλληλα στο κύκλωμα του σχήματος 1.38.



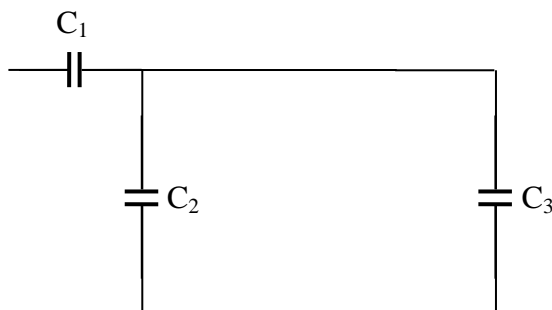
Σχήμα 1.38: Κύκλωμα άσκησης 23

Απάντηση:

Τα τρία πηνία είναι συνδεδεμένα παράλληλα. Επομένως:

$$\frac{1}{L_{\sigma}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} = \frac{1}{10mH} + \frac{1}{20mH} + \frac{1}{20mH} = \frac{4}{20mH} \Leftrightarrow L_{\sigma} = 5mH$$

24) Να υπολογιστεί η συνολική χωρητικότητα του κυκλώματος του σχήματος 1.39.



Σχήμα 1.39: Κύκλωμα άσκησης 24

Απάντηση:

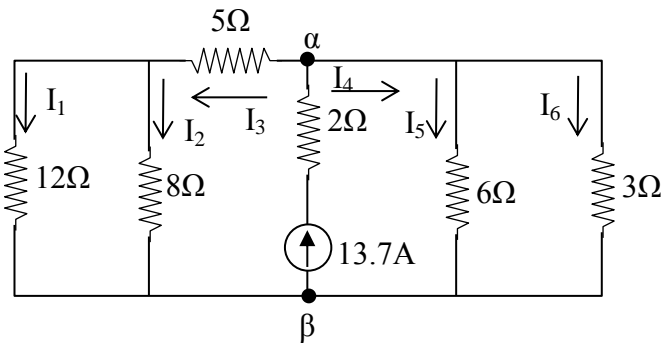
Οι πυκνωτές C_2 και C_3 είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Επομένως:

$$C_{\sigma\sigma} = C_2 + C_3$$

Στη συνέχεια ο $C_{\sigma\sigma}$ και ο C_1 είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Επομένως η ολική χωρητικότητα είναι:

$$C_{ολ} = \frac{C_1 C_{\sigma\sigma}}{C_1 + C_{\sigma\sigma}} = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

25) Να υπολογιστούν όλα τα ρεύματα κλάδων στο κύκλωμα του σχήματος 1.40.



Σχήμα 1.40: Κύκλωμα άσκησης 25

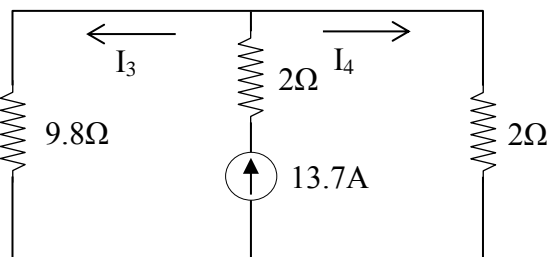
Απάντηση:

Οι ισοδύναμες αντιστάσεις αριστερά και δεξιά από τους κόμβους α και β είναι:

$$R_{\sigma\sigma,\alpha\beta} = 5 + \frac{12 \cdot 8}{20} = 9.8\Omega$$

$$R_{\sigma\sigma,\delta} = \frac{6 \cdot 3}{9} = 2\Omega$$

Τότε προκύπτει το ισοδύναμο κύκλωμα του σχήματος 1.41.



Σχήμα 1.41: Ισοδύναμο κύκλωμα άσκησης 25

Στο ισοδύναμο κύκλωμα του σχήματος 1.41 είναι:

$$I_3 = \frac{2}{11.8} \cdot 13.7 = 2.32A$$

$$I_4 = \frac{9.8}{11.8} \cdot 13.7 = 11.38A$$

Στην συνέχεια από το αρχικό κύκλωμα:

$$I_1 = \frac{8}{20} \cdot 2.32 = 0.93A$$

$$I_2 = 2.32 - 0.93 = 1.39A$$

$$I_5 = \frac{3}{9} \cdot 11.38 = 3.79A$$

$$I_6 = 11.38 - 3.79 = 7.59A$$

26) Μία αντίσταση 500Ω συνδέεται παράλληλα με μία αντίσταση 250Ω . Ο συνδυασμός τους τροφοδοτείται από μία πηγή ρεύματος $25A$. Να υπολογιστεί η ισχύς που απορροφάται από κάθε αντίσταση.

Απάντηση:

Έστω I_1 το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση των 250Ω και I_2 το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση των 500Ω . Με διαίρεση ρευμάτων προκύπτει:

$$I_1 = \frac{500}{250 + 500} \cdot 25 = 16.67A$$

$$I_2 = \frac{250}{250 + 500} \cdot 25 = 8.33A$$

Επομένως η ισχύς που απορροφάται από κάθε αντίσταση είναι:

$$P_1 = I_1^2 \cdot 250 = 69.472kW$$

$$P_2 = I_2^2 \cdot 500 = 34.695kW$$

27) Ένα κύκλωμα περιέχει μία ανεξάρτητη πηγή ρεύματος $25A$ σε σειρά με μία αντίσταση R και μία εξαρτημένη πηγή τάσης $5V$ όπου V είναι η τάση στα άκρα της αντίστασης. Να υπολογιστεί η τάση V , η τιμή της αντίστασης και η ισχύς που καταναλώνεται από την αντίσταση.

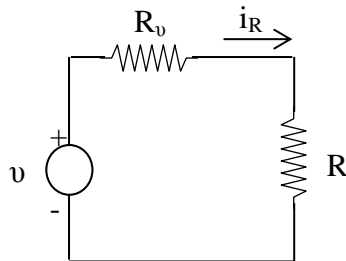
Απάντηση:

$$I = 25 = 5V \Leftrightarrow V = 5V$$

$$V = RI \Leftrightarrow R = \frac{V}{I} \Leftrightarrow R = \frac{5}{25} \Leftrightarrow R = 0.2\Omega$$

$$P_R = \frac{V^2}{R} = \frac{5^2}{0.2} = 125W$$

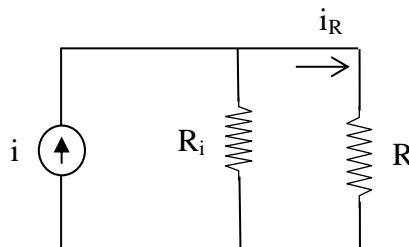
28) (Μετασχηματισμός πηγών) Να αντικατασταθεί η πηγή τάσης του σχήματος 1.42 και η εσωτερική αντίστασή της από μία πηγή ρεύματος με εσωτερική αντίσταση έτσι ώστε το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R να παραμείνει αμετάβλητο.



Σχήμα 1.42: Κύκλωμα άσκησης 28

Απάντηση:

Το κύκλωμα πρέπει να γίνει όπως αυτό του σχήματος 1.43.



Σχήμα 1.43: Ισοδύναμο κύκλωμα άσκησης 29

Από το κύκλωμα του σχήματος 42 προκύπτει:

$$i_R = \frac{v}{R_v + R}$$

Από το κύκλωμα του σχήματος 1.43 προκύπτει:

$$i_r = \frac{iR_i}{R_i + R}$$

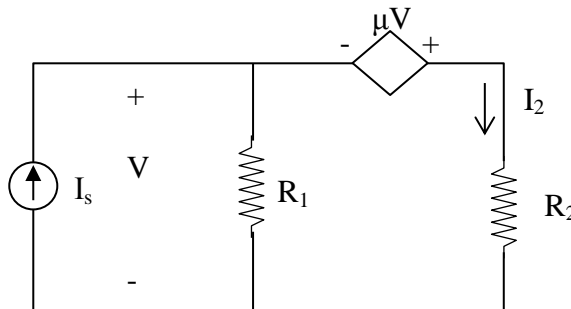
Εξισώνοντας τα δύο ρεύματα προκύπτει:

$$\frac{v}{R_v + R} = \frac{iR_i}{R_i + R}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει αν ισχύουν οι ισότητες:

$$i = \frac{v}{R_v} \text{ και } R_i = R_v$$

29) Να υπολογιστεί ο λόγος $\frac{I_2}{I_s}$ στο κύκλωμα του σχήματος 1.44.



Σχήμα 1.44: Κύκλωμα άσκησης 29

Απάντηση:

Σύμφωνα με τους νόμους του Kirchhoff προκύπτουν οι σχέσεις:

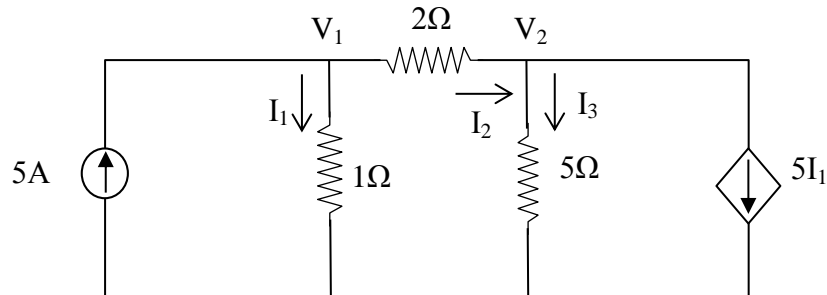
$$I_s = \frac{V}{R_1} + I_2$$

$$V + \mu V = I_2 R_2 = V(1 + \mu) \Leftrightarrow V = \frac{I_2 R_2}{1 + \mu}$$

Αντικαθιστώντας τη δεύτερη εξίσωση στην πρώτη προκύπτει:

$$I_s = I_2 \left[\frac{R_2}{R_1(1 + \mu)} + 1 \right] \Leftrightarrow \frac{I_2}{I_s} = \frac{(1 + \mu)R_1}{R_2 + (1 + \mu)R_1}$$

30) Να υπολογιστούν τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις στο κύκλωμα του σχήματος 1.45.



Σχήμα 1.45: Κύκλωμα άσκησης 30

Απάντηση:

Εφαρμόζοντας το νόμο ρευμάτων Kirchhoff για τους δύο κόμβους του κυκλώματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$5 = I_1 + I_2 = \frac{V_1}{1} + \frac{V_1 - V_2}{2} \Leftrightarrow 3V_1 - V_2 = 10$$

$$\frac{V_1 - V_2}{2} = I_2 = I_3 + 5I_1 = \frac{V_2}{5} + 5\frac{V_1}{1} \Leftrightarrow 45V_1 = -7V_2$$

Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων προκύπτουν οι τάσεις:

$$V_1 = 1.06V$$

$$V_2 = -6.82V$$

Επομένως:

$$I_1 = \frac{V_1}{1} = 1.06A$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{2} = \frac{1.06 - (-6.82)}{2} = 3.94A$$

$$I_3 = \frac{V_2}{5} = \frac{-6.82}{5} = -1.364A$$

1.18. Άλυτες ασκήσεις

1.1) Για την μετακίνηση $8.5 \cdot 10^{18}$ ηλεκτρονίων μεταξύ δύο σημείων ενός ηλεκτρικού κυκλώματος απαιτείται έργο ίσο με $136J$. Ποια είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο σημείων;

(Απάντηση: $100V$)

1.2) Για $t \geq 0$, $q = (4 \cdot 10^{-4}) \cdot (1 - e^{-250t})$ (C). Να υπολογιστεί το ρεύμα για $t = 3ms$.

(Απάντηση: $47.2A$)

1.3) Ένα στοιχείο ενός κυκλώματος έχει τάση $v = 50(1 - e^{-5000t})$ (V) και διαρρέεται από ρεύμα $i = 10e^{-5000t}$ (A). Να υπολογιστεί η ολική ενέργεια για $t \geq 0$.

(Απάντηση: $50mJ$)

1.4) Να εκφραστεί η χωρητικότητα (που μετράται σε Farad) ως συνδυασμός βασικών μονάδων.

(Απάντηση: $1F = 1 \frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^2}$)

1.5) Μία αντίσταση έχει τάση στα άκρα της $V = 1.5mV$. Να υπολογιστεί το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση αν η ισχύς είναι: α) $27.75nW$ και β) $1.2\mu W$.

(Απάντηση: α) $18.5\mu A$, β) $0.8mA$)

1.6) Μία αντίσταση 5Ω διαρρέεται από ρεύμα $i = 5 \cdot 10^3 t$ (A) για $0 \leq t \leq 2ms$. Να υπολογιστούν η στιγμιαία και η μέση ισχύς.

(Απάντηση: $125t^2 (W)$, $167W$)

1.7) Η τάση στα άκρα ενός στοιχείου είναι $3.91V$. Το ρεύμα εισέρχεται στο στοιχείο από το θετικό άκρο. Να υπολογιστεί το ρεύμα αν η ισχύς που απορροφάται είναι $-25mW$.

(Απάντηση: $-6.4mA$)

1.8) Να προσδιοριστεί ένα στοιχείο ενός κυκλώματος αν η τάση στα άκρα του για $0 \leq 10^3 t \leq \pi$ είναι $v = 5 \cos 10^3 t$ (mV) και διαρρέεται από ρεύμα $i = 2 \sin 10^3 t$ (mA).

(Απάντηση: Ένα πηνίο $2.5mH$)

1.9) Ένα πηνίο $4mH$ έχει τάση $v = 2e^{-10^3 t}$ (V). Να υπολογιστεί η μέγιστη αποθηκευμένη ενέργεια. Για $t = 0$ το ρεύμα είναι μηδέν.

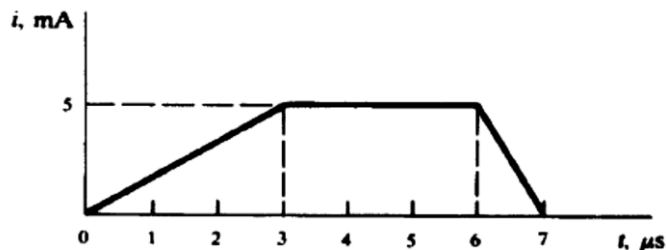
(Απάντηση: $0.5mW$)

1.10) Ένας πυκνωτής $2\mu F$ με αρχικό φορτίο Q_0 συνδέεται σε σειρά με μία αντίσταση 10Ω . Να υπολογιστεί το Q_0 αν η ενέργεια που καταναλώνεται στην αντίσταση είναι ίση με $3.6mJ$.

(Απάντηση: $120\mu C$)

1.11) Έστω ένας πυκνωτής $C(F)$ που διαρρέεται από ρεύμα $i = \frac{V_m}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ (A). Να αποδειχθεί ότι η μέγιστη αποθηκευμένη ενέργεια είναι $\frac{1}{2} CV_m^2$. Να θεωρηθεί ότι το αρχικό φορτίο είναι μηδέν.

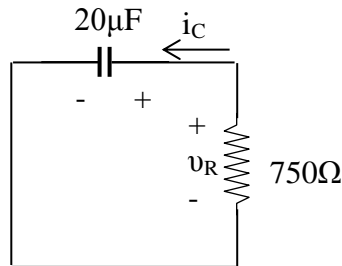
1.12) Το ρεύμα που διαρρέει ένα στοιχείο ($t > 0$) δίνεται από το διάγραμμα του σχήματος 1.46. Να υπολογιστεί η τάση στα άκρα του στοιχείου για $t = 6.5\mu s$ αν το στοιχείο είναι: α) $10k\Omega$, β) $15mH$, γ) $0.3nF$ με $Q(0) = 0$.



Σχήμα 1.46: Κύκλωμα άσκησης 1.12

(Απάντηση: α) $25V$, β) $-75V$, γ) $81.3V$)

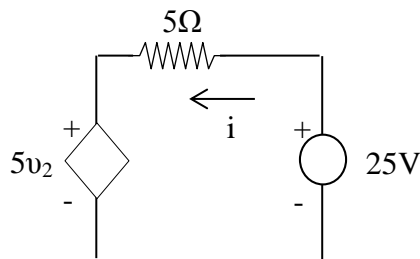
1.13) Ο πυκνωτής $20\mu F$ του κυκλώματος του σχήματος 1.47 έχει τάση για $t > 0$ $v = 100e^{-\frac{t}{0.015}}$ (V). Να βρεθεί η συνάρτηση για την ενέργεια που εκφράζει την αποφόρτιση του πυκνωτή και να γίνει σύγκριση της ολικής ενέργειας σε σχέση με την ενέργεια που απορροφάται από την αντίσταση 750Ω .



Σχήμα 1.47: Κύκλωμα άσκησης 1.13

(Απάντηση: $0.1(1 - e^{-\frac{t}{0.0075}})$ (J))

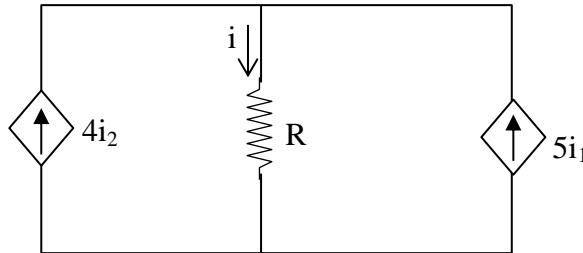
1.14) Να υπολογιστεί το ρεύμα στο κύκλωμα του σχήματος 1.48 αν: α) $v_2 = 4V$, β) $v_2 = 5V$, γ) $v_2 = 10V$.



Σχήμα 1.48: Κύκλωμα άσκησης 1.14

(Απάντηση: α) $1A$, β) $0A$, γ) $-5A$)

1.15) Στο κύκλωμα του σχήματος 1.49 να υπολογιστεί το ρεύμα i αν: α) $i_1 = 2A$, $i_2 = 0$ β) $i_1 = -1A$, $i_2 = 4A$, γ) $i_1 = i_2 = 1A$.



Σχήμα 1.49: Κύκλωμα άσκησης 1.15

(Απάντηση: α) 10A, β) 11A, γ) 9A)

1.16) Ένας πυκνωτής $1\mu F$ με αρχικό φορτίο $10^{-4} C$ συνδέεται σε μία αντίσταση R για $t = 0$. Αν το ρεύμα αποφόρτισης του πυκνωτή για $0 < t < 1ms$ είναι σταθερό, να υπολογιστεί η πτώση τάσης στον πυκνωτή για $t = 1ms$ αν: α) $R = 1M\Omega$, β) $R = 100k\Omega$, γ) $R = 10k\Omega$.

(Απάντηση: α) 0.1V, β) 1V, γ) 10V)

1.17) Το πραγματικό ρεύμα αποφόρτισης της άσκησης 1.16 δίνεται από τη σχέση $i = \frac{100}{R} e^{-\frac{10^6 t}{R}}$ (A). Να υπολογιστεί η πτώση τάσης στον πυκνωτή για $t = 1ms$ αν: α) $R = 1M\Omega$, β) $R = 100k\Omega$, γ) $R = 10k\Omega$.

(Απάντηση: α) 0.1V, β) 1V, γ) 9.52V)

1.18) Ένας πυκνωτής $10\mu F$ αποφορτίζεται σε ένα στοιχείο του οποίου η τάση είναι $v = 2e^{-1000t}$ (V). Να υπολογιστεί το ρεύμα και η ισχύς που διοχετεύεται από τον πυκνωτή ως συναρτήσεις του χρόνου.

(Απάντηση: $i = 20e^{-1000t}$ (mA), $p = v i = 40e^{-1000t}$ (mJ))

1.19) Η τάση σε ένα πυκνωτή $5\mu F$ αυξάνεται γραμμικά από την τιμή μηδέν στην τιμή 10V σε χρόνο 1ms και στη συνέχεια μένει σταθερή. Να υπολογιστεί το ρεύμα και η ολική ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή.

(Απάντηση: $i = 50mA$ για $0 < t < 1ms$, $W = 250\mu J$)

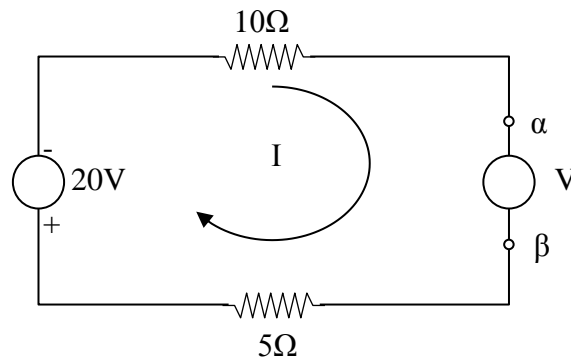
1.20) Ένας πυκνωτής $10\mu F$ φορτίζεται στα $2V$. α) Για $I = 1mA$ να υπολογιστεί ο χρόνος που απαιτείται για να μειωθεί η τάση του πυκνωτή στο 5% της αρχικής της τιμής. β) Για ποια τιμή του ρεύματος η τάση στον πυκνωτή παραμένει πάνω από το 90% της αρχικής της τιμής μετά την έλευση 24 ωρών;

(Απάντηση: α) $19ms$, β) $23.15\mu A$)

1.21) Το ρεύμα σε ένα κεραυνό ξεκινά από την τιμή $200kA$ και μειώνεται γραμμικά έως την τιμή μηδέν για $100\mu s$. Να υπολογιστεί η ενέργεια που απελευθερώνεται και η χωρητικότητα C μεταξύ του σύννεφου και του εδάφους αν η τάση πριν την αποφόρτιση είναι: α) $100MV$, β) $500MV$.

(Απάντηση: α) $W = 5 \cdot 10^8 J$, $C = 0.1\mu F$, β) $W = 25 \cdot 10^8 J$, $C = 20nF$)

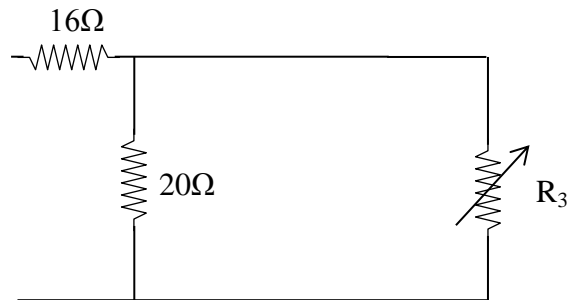
1.22) Να υπολογιστεί η τιμή της πηγής τάσης V και η πολικότητα στο κύκλωμα του σχήματος 1.50 αν: α) $I = 2A$ και β) $I = -2A$.



Σχήμα 1.50: Κύκλωμα άσκησης 1.22

(Απάντηση: α) $50V$ και άκρο β θετικό, β) $10V$ και άκρο α θετικό)

1.23) Να υπολογιστεί η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος του σχήματος 1.51 για : α) $R_x = \infty$, β) $R_x = 0$, γ) $R_x = 5\Omega$.



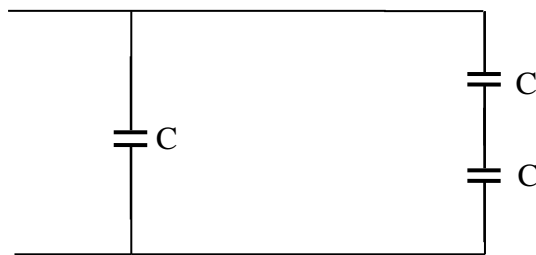
Σχήμα 1.51: Κύκλωμα άσκησης 1.23

(Απάντηση: α) 36Ω , β) 16Ω , γ) 20Ω)

1.24) Ένα πηνίο $8mH$ είναι συνδεδεμένο σε σειρά με δύο πηνία που είναι συνδεδεμένα παράλληλα. Το ένα έχει αυτεπαγωγή $3mH$ και το άλλο $6mH$. Να υπολογιστεί το L_{σ} .

(Απάντηση: $10mH$)

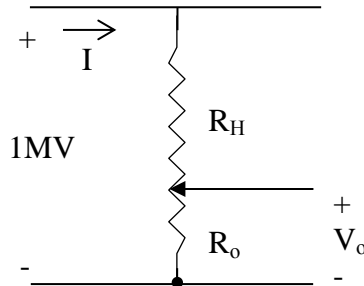
1.25) Να υπολογιστεί η ισοδύναμη χωρητικότητα για τους πυκνωτές του σχήματος 1.52.



Σχήμα 1.52: Κύκλωμα άσκησης 1.25

(Απάντηση: $C_{\sigma} = 1.5C$)

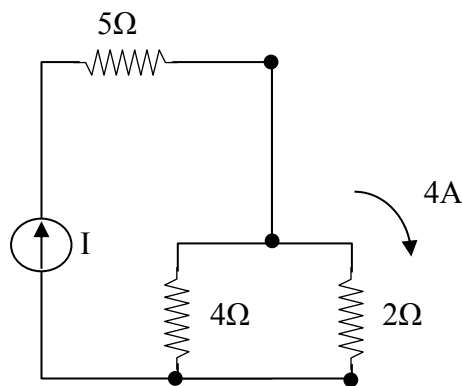
1.26) Να υπολογιστούν τα R_H και R_o στον διαιρέτη τάσης του σχήματος 1.53 έτσι ώστε το ρεύμα I να περιορίζεται στα $0.5A$ όταν $V_o = 100V$.



Σχήμα 1.53: Κύκλωμα άσκησης 1.26

(Απάντηση: $R_H = 2M\Omega$, $R_o = 200\Omega$)

1.27) Να υπολογιστεί η τιμή της πηγής ρεύματος και η ολική ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα του σχήματος 1.54.



Σχήμα 1.54: Κύκλωμα άσκησης 1.27

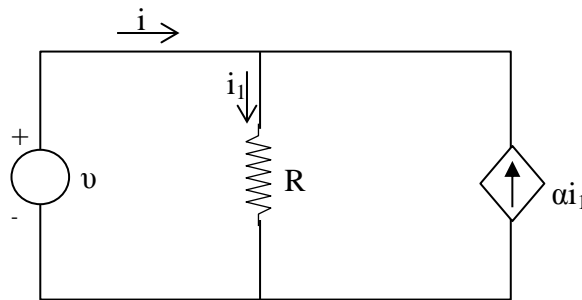
(Απάντηση: $6A$, $228W$)

1.28) Έστω ότι τέσσερις αντιστάσεις R_1, R_2, R_3, R_4 είναι συνδεδεμένες παράλληλα. Να αποδειχθεί ότι το ρεύμα σε ένα κλάδο, έστω τον κλάδο της αντίστασης R_4 ,

σχετίζεται με το ολικό ρεύμα σύμφωνα με τη σχέση: $I_4 = I_{ολ} \left(\frac{R'}{R_4 + R'} \right)$ όπου

$$R' = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

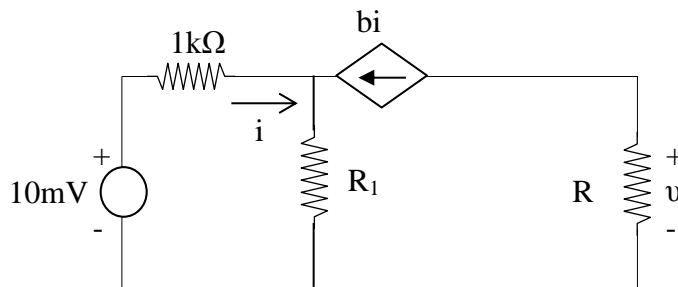
1.29) Στο κύκλωμα του σχήματος 1.55: α) Να υπολογιστεί η αντίσταση εισόδου $R_{εισ} = \frac{v}{i}$ και η ισχύς ως συνάρτηση του a και β) Να υπολογιστεί η αντίσταση εισόδου και η ισχύς για $a = 0,1,2$.



Σχήμα 1.55: Κύκλωμα άσκησης 1.29

(Απάντηση: α) $R_{εισ} = \frac{R}{1-a}$, $P = v^2 \frac{1-a}{R}$, β) $R, \infty, -R, \frac{v^2}{R}, 0, -\frac{v^2}{R}$)

1.30) α) Στο κύκλωμα του σχήματος 1.56 είναι $R_1 = 0$ και $b = 100$. Να υπολογιστεί η τάση v για $R = 1k\Omega$ και $R = 10k\Omega$. β) Στο κύκλωμα του σχήματος 1.56 είναι $R_1 = 0$ και $R = 1k\Omega$. Να υπολογιστεί η τάση v για $b = 50,100,200$. Η τάση αλλάζει ανάλογα με το b . γ) Στο κύκλωμα του σχήματος 1.56 είναι $R_1 = 100\Omega$ και $R = 11k\Omega$. Να υπολογιστεί η τάση v για $b = 50,100,200$. Η τάση είναι τώρα λιγότερο ευαίσθητη στις αλλαγές του b .



Σχήμα 1.56: Κύκλωμα άσκησης 1.30

(Απάντηση: α) $v = 1V$, $v = 10V$,

β) $v = 0.5V$, $v = 1V$, $v = 2V$,
γ) $v = 0.9V$, $v = 1V$, $v = 1.04V$)

Κεφάλαιο 2: Σήματα - Κυματομορφές

2.1. Εισαγωγή

Οι τάσεις και τα ρεύματα στα ηλεκτρικά κυκλώματα περιγράφονται από τρία είδη συναρτήσεων χρόνου:

- Περιοδικές συναρτήσεις
- Μη περιοδικές συναρτήσεις
- Τυχαίες συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις της τάσης ή του ρεύματος ως συνάρτηση του χρόνου $-\infty < t < \infty$ αναφέρονται ως σήματα, κυματομορφές ή απλώς συναρτήσεις.

2.2. Περιοδικές συναρτήσεις

Ένα σήμα $v(t)$ ονομάζεται περιοδικό με περίοδο T αν ισχύει η σχέση:

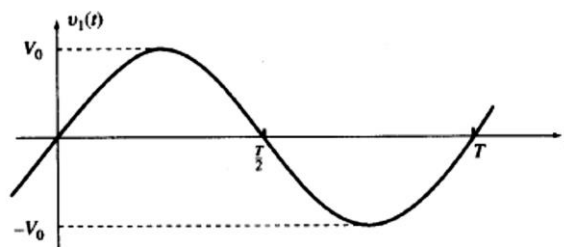
$$v(t) = v(t + T) \text{ για όλα τα } t$$

Στη συνέχεια παρατίθενται τέσσερις τύποι περιοδικών συναρτήσεων που συναντώνται συχνά στα ηλεκτρικά κυκλώματα και παρουσιάζονται και οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις για μία περίοδο T .

α) Ημιτονοειδής περιοδική συνάρτηση

$$v_1(t) = V_o \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (2.1)$$

Η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς περιοδικής συνάρτησης για μία περίοδο T φαίνεται στο σχήμα 2.1.

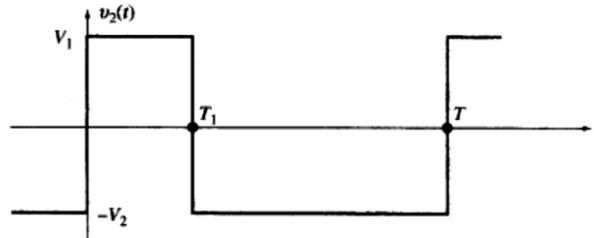


Σχήμα 2.1: Ημιτονοειδής περιοδική συνάρτηση

β) Περιοδικός παλμός

$$v_2(t) = \begin{cases} V_1 & , 0 < t < T_1 \\ -V_2 & , T_1 < t < T \end{cases} \quad (2.2)$$

Η γραφική παράσταση του περιοδικού παλμού για μία περίοδο T φαίνεται στο σχήμα 2.2.



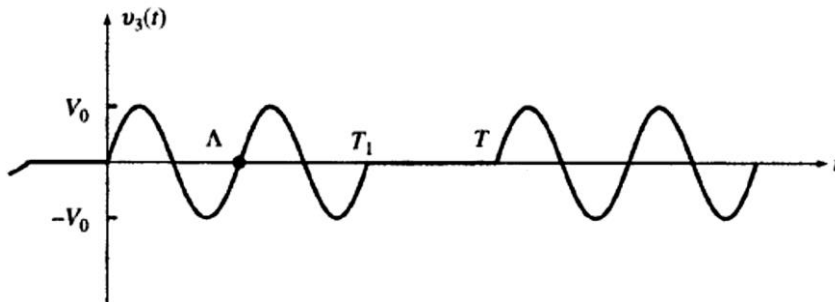
Σχήμα 2.2: Περιοδικός παλμός

γ) Διακοπτόμενη ημιτονοειδής συνάρτηση (Periodic tone burst)

$$v_3(t) = \begin{cases} V_o \sin \frac{2\pi t}{\Lambda} & , 0 < t < T_1 \\ 0 & , T_1 < t < T \end{cases} \quad (2.3)$$

όπου $T = k\Lambda$ και k είναι ένας ακέραιος αριθμός.

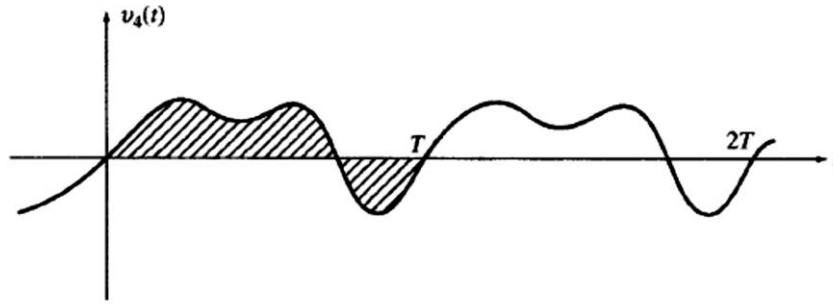
Η γραφική παράσταση της διακοπτόμενης ημιτονοειδούς συνάρτησης για μία περίοδο T φαίνεται στο σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Διακοπτόμενη ημιτονοειδής συνάρτηση

δ) Επανάληψη ενός σήματος κάθε T δευτερόλεπτα $v_4(t)$

Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης φαίνεται στο σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Επανάληψη ενός σήματος κάθε T δευτερόλεπτα

Τα περιοδικά σήματα είναι δυνατό να είναι πολύπλοκα. Ωστόσο πολλές φορές εκφράζονται ως άθροισμα επιμέρους ημιτονοειδών συναρτήσεων, γεγονός που διευκολύνει την ανάλυση.

2.3. Ημιτονοειδείς συναρτήσεις

Μία ημιτονοειδής συνάρτηση $v(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$v(t) = V_o \cos(\omega t + \theta)$$

όπου V_o είναι το πλάτος, ω είναι η γωνιακή συχνότητα και θ είναι η γωνία φάσης.

Η γωνιακή συχνότητα ω εκφράζεται ανάλογα με την περίοδο T ή με τη συχνότητα f , όπου $f = \frac{1}{T}$. Η συχνότητα μετράται σε hertz (Hz) ή σε κύκλους ανά δευτερόλεπτο ($cycles / s$). Λόγω της ιδιότητας $\cos(\omega t) = \cos(\omega t + 2\pi)$, η γωνιακή συχνότητα και η περίοδος συνδέονται με τη σχέση: $\omega T = 2\pi$. Εφόσον απαιτούνται T δευτερόλεπτα έτσι ώστε η συνάρτηση $v(t)$ να επιστρέψει στην αρχική της τιμή, η συχνότητα ισούται με $\frac{1}{T} cycles / s$.

Συνοψίζοντας, για τις ημιτονοειδείς συναρτήσεις ισχύουν οι σχέσεις:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Παράδειγμα 2.1

Να σχεδιαστεί κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις και να προσδιοριστεί η περίοδος και η συχνότητα.

α) $v_1(t) = \cos t$

β) $v_2(t) = \sin t$

γ) $v_3(t) = 2 \cos 2\pi t$

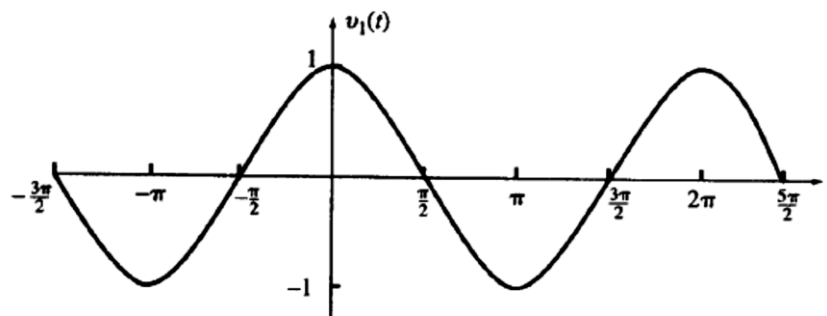
δ) $v_4(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{4} - 45^\circ\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left[\frac{\pi(t-1)}{4}\right]$

ε) $v_5(t) = 5 \cos(10t + 60^\circ) = 5 \cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) = 5 \cos 10\left(t + \frac{\pi}{30}\right)$

Απάντηση:

α) $T = 2\pi = 6.2832s$ και $f = 0.159Hz$

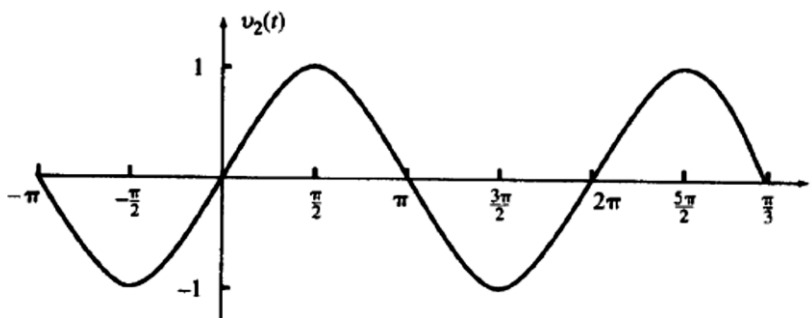
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $v_1(t)$ φαίνεται στο σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5: Γραφική παράσταση συνάρτησης $v_1(t)$ παραδείγματος 2.1

β) $T = 2\pi = 6.2832s$ και $f = 0.159Hz$

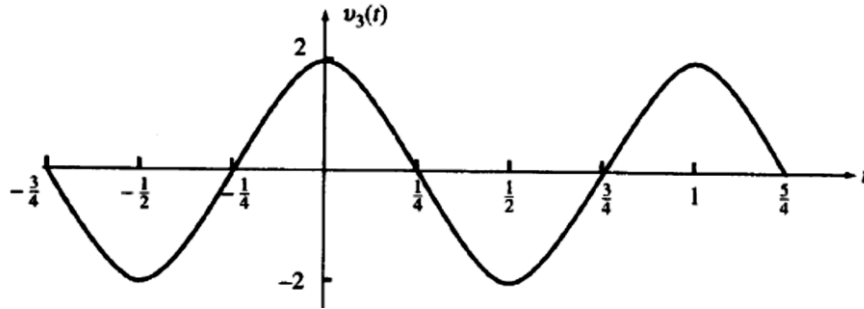
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $v_2(t)$ φαίνεται στο σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Γραφική παράσταση συνάρτησης $v_2(t)$ παραδείγματος 2.1

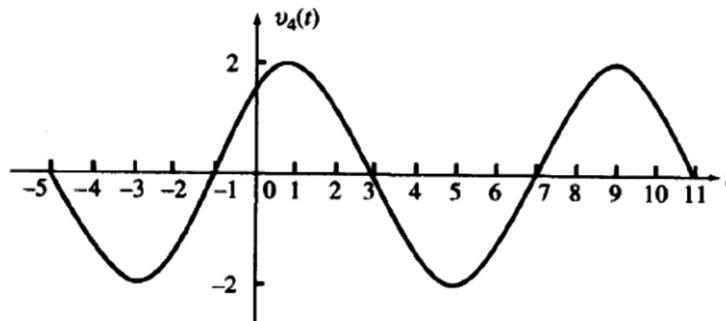
γ) $T = 1s$ και $f = 1Hz$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $v_3(t)$ φαίνεται στο σχήμα 2.7.

Σχήμα 2.7: Γραφική παράσταση συνάρτησης $v_3(t)$ παραδείγματος 2.1

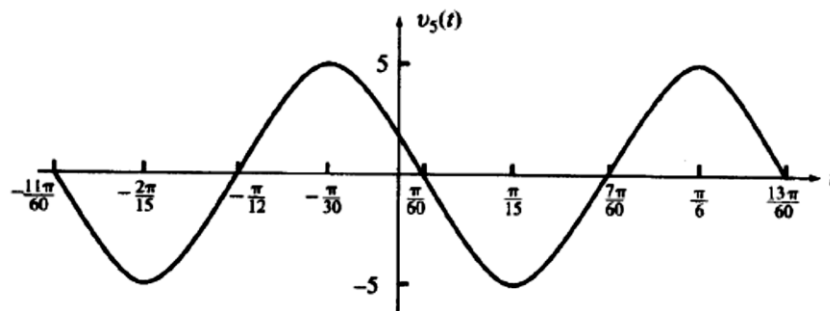
δ) $T = 8s$ και $f = 0.125Hz$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $v_4(t)$ φαίνεται στο σχήμα 2.8.

Σχήμα 2.8: Γραφική παράσταση συνάρτησης $v_4(t)$ παραδείγματος 2.1

ε) $T = 0.2\pi = 0.62832s$ και $f = 1.59Hz$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $v_5(t)$ φαίνεται στο σχήμα 2.9.

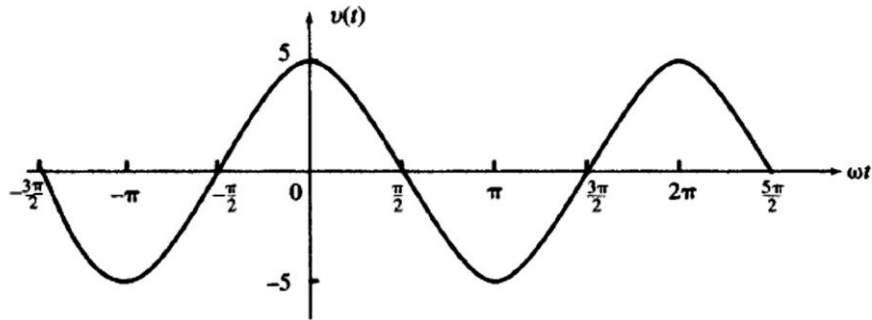
Σχήμα 2.9: Γραφική παράσταση συνάρτησης $v_5(t)$ παραδείγματος 2.1

Παράδειγμα 2.2

Να σχεδιαστεί η συνάρτηση $v(t) = 5 \cos \omega t$ ως συνάρτηση του ωt .

Απάντηση:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $v(t) = 5 \cos \omega t$ φαίνεται στο σχήμα 2.10.



Σχήμα 2.10: Γραφική παράσταση συνάρτησης παραδείγματος 2.2

2.4. Μετατόπιση χρόνου και μετατόπιση φάσης

Αν η συνάρτηση $v(t) = \cos(\omega t)$ καθυστερεί κατά τ δευτερόλεπτα τότε:

$v(t - \tau) = \cos \omega(t - \tau) = \cos \omega(t - \theta)$, όπου $\theta = \omega\tau$. Η καθυστέρηση αυτή μετατοπίζει τη γραφική παράσταση της $v(t)$ κατά τ δευτερόλεπτα προς τα δεξιά, και αντιστοιχεί σε μετατόπιση φάσης $\theta = \omega\tau = 2\pi f\tau$, καθυστερεί δηλαδή κατά $\theta = \omega\tau = 2\pi f\tau$.

Αν η συνάρτηση $v(t) = \cos(\omega t)$ προηγείται κατά τ δευτερόλεπτα τότε:

$v(t + \tau) = \cos \omega(t + \tau) = \cos \omega(t + \theta)$, όπου $\theta = \omega\tau$. Επομένως η γραφική παράσταση της $v(t)$ μετατοπίζεται κατά τ δευτερόλεπτα προς τα αριστερά, και αντιστοιχεί σε μετατόπιση φάσης $\theta = \omega\tau = 2\pi f\tau$, προηγείται δηλαδή κατά $\theta = \omega\tau = 2\pi f\tau$.

Γενικά η μετατόπιση φάσης κατά θ αντιστοιχεί σε μετατόπιση χρόνου κατά τ . Επομένως για δεδομένη μετατόπιση φάσης, όσο υψηλότερη είναι η συχνότητα τόσο μικρότερη είναι η απαιτούμενη μετατόπιση χρόνου.

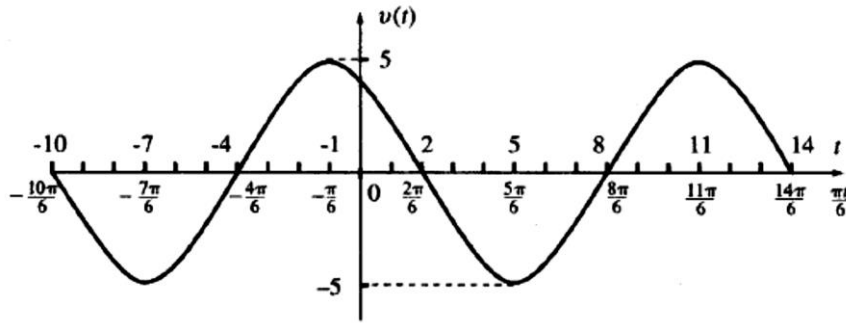
Παράδειγμα 2.3

Να σχεδιαστεί η συνάρτηση $v(t) = 5 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 30^\circ\right)$ ως συνάρτηση του t και του $\frac{\pi t}{6}$.

Απάντηση:

$$v(t) = 5 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 30^\circ\right) = v(t) = 5 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 5 \cos\left[\frac{\pi(t+1)}{6}\right]$$

Η συνάρτηση αυτή είναι μία συνάρτηση συνημίτονου με περίοδο 12s, η οποία προηγείται κατά 1 s. Δηλαδή η γραφική παράσταση του συνημίτονου μετατοπίζεται προς τα αριστερά κατά 1s ή 30° όπως φαίνεται στο σχήμα 2.11.

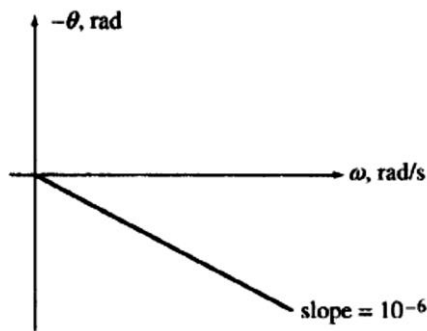


Σχήμα 2.11: Γραφική παράσταση συνάρτησης παραδείγματος 2.3

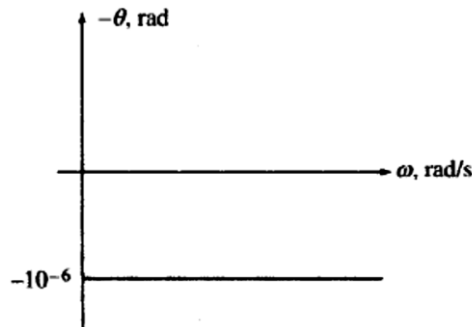
Παράδειγμα 2.4

Έστω ένα γραμμικό κύκλωμα με συνάρτηση εισόδου $v_{εισ}(t) = A \cos \omega t$ και συνάρτηση εξόδου $v_{εξ}(t) = A \cos(\omega t - \theta)$. Οι συναρτήσεις αυτές ισχύουν για κάθε ω και A . Αν $v_{εισ}(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$ να υπολογιστεί η συνάρτηση εξόδου αν:

- α) $\theta = 10^{-6} \omega$ (Η μετατόπιση φάσης είναι ανάλογη ως προς τη συχνότητα όπως φαίνεται στο σχήμα 2.12).
- β) $\theta = 10^{-6}$ (Η μετατόπιση φάσης είναι σταθερή όπως φαίνεται στο σχήμα 2.13).



Σχήμα 2.12: Μετατόπιση φάσης ερωτήματος α παραδείγματος 2.3



Σχήμα 2.13: Μετατόπιση φάσης ερωτήματος β παραδείγματος 2.3

Απάντηση:

Η συνάρτηση εξόδου είναι $v_{εξ}(t) = \cos(\omega_1 t - \theta_1) + \cos(\omega_2 t - \theta_2)$.

α) $\theta_1 = 10^{-6} \omega_1$ και $\theta_2 = 10^{-6} \omega_2$. Επομένως:

$$\begin{aligned} v_{εξ}(t) &= \cos(\omega_1 t - 10^{-6} \omega_1) + \cos(\omega_2 t - 10^{-6} \omega_2) = \cos \omega_1(t - 10^{-6}) + \cos \omega_2(t - 10^{-6}) = \\ &= v_{εισ}(t - 10^{-6}) = v_{εισ}(t - \tau) \end{aligned}$$

όπου $\tau = 10^{-6} s = 1 \mu s$.

Επομένως η μετατόπιση φάσης που είναι ανάλογη της γωνιακής συχνότητας «καθυστερεί» ως προς τη συνάρτηση εισόδου κατά 1μs. Η έξοδος ακολουθεί την είσοδο χωρίς καμία παραμόρφωση.

β) $\theta_1 = \theta_2 = 10^{-6}$. Επομένως:

$$v_{εξ}(t) = \cos(\omega_1 t - 10^{-6}) + \cos(\omega_2 t - 10^{-6}) = \cos \omega_1 \left(t - \frac{10^{-6}}{\omega_1}\right) + \cos \omega_2 \left(t - \frac{10^{-6}}{\omega_2}\right)$$

Επομένως η μετατόπιση φάσης που είναι σταθερή «καθυστερεί» κατά διαφορετικές ποσότητες τα διάφορα στοιχεία συχνότητας του σήματος εισόδου. Ως αποτέλεσμα η έξοδος είναι παραμορφωμένη σε σχέση με την είσοδο.

2.5. Συνδυασμοί περιοδικών συναρτήσεων.

Το άθροισμα δύο περιοδικών συναρτήσεων με περιόδους T_1 και T_2 αντίστοιχα, είναι μία περιοδική συνάρτηση αν η κοινή περίοδος μπορεί να γραφεί ως: $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$ όπου n_1 και n_2 είναι ακέραιοι αριθμοί. Ως αποτέλεσμα πρέπει ο λόγος των περιόδων $\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_2}{n_1}$ να είναι ρητός αριθμός. Αλλιώς το άθροισμα των δύο περιοδικών συναρτήσεων δεν είναι περιοδική συνάρτηση.

Παράδειγμα 2.5

Να υπολογιστεί η περίοδος της συνάρτησης $v(t) = \cos 5t + 3\sin(3t + 45^\circ)$.

Απάντηση:

Η περίοδος της συνάρτησης $\cos 5t$ είναι $T_1 = \frac{2\pi}{5}$, ενώ η περίοδος της συνάρτησης $3\sin(3t + 45^\circ)$ είναι $T_2 = \frac{2\pi}{3}$. Το μικρότερο κοινό ακέραιο πολλαπλάσιο των T_1 και T_2 είναι το $T = 2\pi$ καθώς $T = 5T_1$ και $T = 3T_2$. Είναι:

$$v(t + T) = \cos 5(t + 2\pi) + 3\sin[3(t + 2\pi) + 45^\circ] = \cos 5t + 3\sin(3t + 45^\circ) = v(t)$$

Επομένως η συνάρτηση $v(t)$ είναι περιοδική (αφού ισχύει $v(t+T) = v(t)$) με περίοδο 2π .

Παράδειγμα 2.6

Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $v(t) = \cos t + \cos 2\pi t$ είναι περιοδική.

Απάντηση:

Η περίοδος της συνάρτησης $\cos t$ είναι $T_1 = 2\pi$ ενώ η περίοδος της συνάρτησης $\cos 2\pi t$ είναι $T_2 = 1$. Δεν υπάρχει κοινή περίοδος $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$ καθώς ο λόγος $\frac{T_1}{T_2} = 2\pi$ δεν είναι ρητός αριθμός. Επομένως η συνάρτηση $v(t)$ είναι μη περιοδική.

Παράδειγμα 2.7

Να υπολογιστεί η περίοδος της συνάρτησης $v(t) = \cos t + \cos 2p t$ αν $p = 3.14$.

Απάντηση:

Η περίοδος της συνάρτησης $\cos t$ είναι $T_1 = 2\pi$ ενώ η περίοδος της συνάρτησης $\cos 2p t$ είναι $T_2 = \frac{\pi}{3.14}$. Ο λόγος $\frac{T_1}{T_2} = 6.28$ είναι ρητός αριθμός. Το ζεύγος

ακεραίων $n_1 = 25$ και $n_2 = 157$ ικανοποιεί τη σχέση $\frac{n_2}{n_1} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{628}{100} = \frac{157}{25}$.

Επομένως η συνάρτηση $v(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $T = n_1 T_1 = n_2 T_2 = 50\pi s$.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.1 κάποιες τριγωνομετρικές ιδιότητες που είναι χρήσιμες στη μελέτη των κυκλωμάτων.

1	$\sin a = -\sin(-a)$
2	$\cos a = \cos(-a)$
3	$\sin a = \cos(a - 90^\circ)$
4	$\cos a = \sin(a + 90^\circ)$
5	$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
6	$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
7	$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$
8	$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$
9	$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
10	$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
11	$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \cos(a - b) - \frac{1}{2} \cos(a + b)$

12	$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin(a+b) + \frac{1}{2} \sin(a-b)$
13	$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)$
14	$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$
15	$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$

Πίνακας 2.1: Τριγωνομετρικές ιδιότητες

Παράδειγμα 2.8

Να εκφραστεί η συνάρτηση $v(t) = \cos 5t \sin(3t + 45^\circ)$ ως άθροισμα δύο συνημιτονοειδών συναρτήσεων και να υπολογιστεί η περίοδος.

Απάντηση:

$$\begin{aligned} v(t) = \cos 5t \sin(3t + 45^\circ) &= \frac{[\sin(8t + 45^\circ) - \sin(2t - 45^\circ)]}{2} = \\ &= \frac{[\cos(8t - 45^\circ) + \cos(2t + 45^\circ)]}{2} \end{aligned}$$

Παραπάνω εφαρμόστηκαν οι ιδιότητες 12 και 3 του πίνακα 2.1. Η περίοδος της συνάρτησης $v(t)$ είναι ίση με π .

2.6. Μέση τιμή και ενεργός (rms) τιμή

Μία περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με περίοδο T , έχει μέση τιμή F_μ η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$F_\mu = \langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (2.4)$$

Η ενδεικνύμενη ή ενεργός τιμή της $f(t)$ ορίζεται ως εξής:

$$F_\varepsilon = F_{rms} = \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt \right]^{1/2} \quad (2.5)$$

Προφανώς ισχύει η σχέση $F_\varepsilon^2 = \langle f^2(t) \rangle$.

Η μέση και η ενεργός τιμή μιας περιοδικής συνάρτησης συνήθως υπολογίζονται κατά τη διάρκεια μιας περιόδου.

Παράδειγμα 2.9

Να υπολογιστούν η μέση και η ενεργός τιμή της συνάρτησης $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$.

Απάντηση:

$$V_\mu = \frac{1}{T} \int_0^T V_m \cos(\omega t + \theta) dt = \frac{V_m}{\omega T} [\sin(\omega t + \theta)]_0^T = 0$$

$$V_\varepsilon^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T V_m^2 [1 + \cos 2(\omega t + \theta)] dt = \frac{V_m^2}{2}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

$$V_\varepsilon = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0.707V_m$$

Από τα αποτελέσματα για τη μέση και την ενεργό τιμή, προκύπτει ότι τα μεγέθη αυτά, είναι ανεξάρτητα από τη συχνότητα και τη γωνία φάσης θ . Με άλλα λόγια η μέση τιμή μιας συνημιτονοειδούς συνάρτησης καθώς και η ενεργός τιμή θα είναι πάντα 0 και $0.707V_m$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.10

Να υπολογιστούν η μέση και η ενεργός τιμή της συνάρτησης:

$$v(t) = \begin{cases} V_m \sin \omega t & , \sin \omega t > 0 \\ 0 & , \sin \omega t < 0 \end{cases}$$

Απάντηση:

$$V_\mu = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} V_m \sin \omega t dt = \frac{V_m}{\omega T} [-\cos \omega t]_0^{T/2} = \frac{V_m}{\pi}$$

$$V_\varepsilon^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} V_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2T} \int_0^{T/2} V_m^2 (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{V_m^2}{4}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

$$V_\varepsilon = \frac{V_m}{2}$$

Παράδειγμα 2.11

Να υπολογιστούν η μέση και η ενεργός τιμή της συνάρτησης:

$$v(t) = \begin{cases} V_o & , 0 < t < T_1 \\ -V_o & , T_1 < t < 3T_1 \end{cases} \cdot \text{Η περίοδος είναι ίση με } T = 3T_1.$$

Απάντηση:

$$V_\mu = \frac{V_o}{3T} (T_1 - 2T_1) = \frac{-V_o}{3}$$

$$V_\varepsilon^2 = \frac{V_o^2}{3T} (T_1 + 2T_1) = V_o^2$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

$$V_\varepsilon = V_o$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα γενικεύεται ως εξής: αν $|v(t)| = V_o$ τότε $V_\varepsilon = V_o$.

Παράδειγμα 2.12

Να υπολογιστούν η μέση ισχύς που καταναλώνεται από 0 έως T σε μία αντίσταση αν η τάση στα άκρα της αντίστασης είναι $v(t)$. Στη συνέχεια να αντικατασταθεί η τάση $v(t)$ με μία σταθερή τάση V_{dc} . Να υπολογιστεί η V_{dc} έτσι ώστε η μέση ισχύς κατά τη διάρκεια μιας περιόδου να παραμένει ίδια.

Απάντηση:

$$p = v \cdot i = \frac{v^2}{R}$$

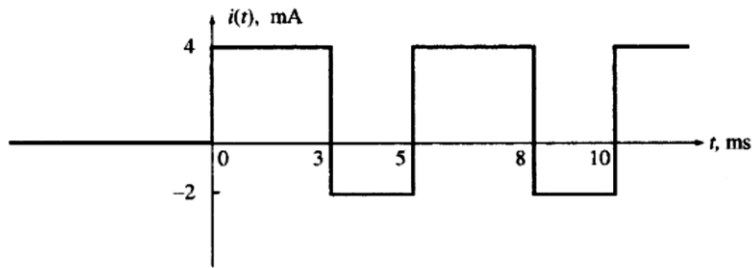
$$P_\mu = \frac{1}{RT} \int_0^T v^2(t) dt = \frac{1}{R} V_e^2 = \frac{V_{dc}^2}{R} \quad \text{ή}$$

$$V_{dc} = V_\varepsilon$$

Παράδειγμα 2.13

Το ρεύμα $i(t)$ που φαίνεται στο σχήμα 2.14 διέρχεται από ένα πυκνωτή $1\mu F$. Να υπολογιστεί α) η τάση v_{ac} κατά μήκος του πυκνωτή για $t = 5k \text{ ms}$ όπου $k = 0,1,2,3,\dots$ και β) η τιμή μιας συνεχούς πηγής ρεύματος I_{dc} η οποία παράγει την ίδια τάση κατά

μήκος του πυκνωτή για $t = 5k \text{ ms}$ όταν εφαρμόζεται για $t > 0$. Να γίνει σύγκριση μεταξύ του I_{dc} και της μέσης τιμής του ρεύματος $i(t)$ για μία περίοδο 5 ms για $t > 0$.



Σχήμα 2.14: Διάγραμμα ρεύματος παραδείγματος 2.13

Απάντηση:

α) Για $t = 5 \text{ ms}$

$$v_{ac} = \frac{1}{C} \int_0^{5 \cdot 10^{-3}} i(t) dt = 10^6 \cdot 10^{-3} \left[\int_0^{3 \cdot 10^{-3}} 4 dt - \int_{3 \cdot 10^{-3}}^{5 \cdot 10^{-3}} 2 dt \right] = 12 - 4 = 8V$$

Κάθε 5 ms η παραπάνω τάση προστίθεται στην τάση του πυκνωτή. Επομένως για $t = 5k \text{ ms}$ είναι: $v = 8k \text{ (V)}$.

β) Με συνεχές ρεύμα I_{dc} , η τάση στα άκρα του πυκνωτή v_{dc} για $t = 5 \text{ ms}$ είναι:

$$v_{dc} = \frac{1}{C} \int_0^{5k \cdot 10^{-3}} I_{dc} dt = 10^6 \cdot I_{dc} \cdot 5k \cdot 10^{-3} = 10^3 \cdot 5k \cdot I_{dc} \text{ (V)}$$

Εφόσον $v_{dc} = v_{ac}$ για $5k \text{ ms}$ προκύπτει:

$$10^3 \cdot 5k \cdot I_{dc} = 8k \Leftrightarrow I_{dc} = \frac{8k}{5k \cdot 10^3} = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 1.6 \text{ mA}$$

Επίσης ισχύει $I_{dc} = \langle i(t) \rangle$ για κάθε περίοδο των 5 ms για $t > 0$.

2.7. Μη περιοδικές συναρτήσεις

Μία μη περιοδική συνάρτηση, αντίθετα από τις περιοδικές συναρτήσεις, δεν προσδιορίζεται από ένα πεπερασμένο κομμάτι το οποίο επαναλαμβάνεται για όλα τα t . Στη συνέχεια παρατίθενται μερικές περιπτώσεις μη περιοδικών συναρτήσεων:

$$\alpha) v_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$\beta) v_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < T \\ T, & t > T \end{cases}$$

$$\gamma) v_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\frac{t}{\tau}}, & t > 0 \end{cases}$$

$$\delta) v_4(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin \omega t, & t > 0 \end{cases}$$

$$\epsilon) v_5(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega t, & t > 0 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) v_6(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ για όλα τα } t$$

$$\zeta) v_7(t) = e^{-a|t|} \text{ για όλα τα } t$$

$$\eta) v_8(t) = e^{-a|t|} \cos \omega t \text{ για όλα τα } t$$

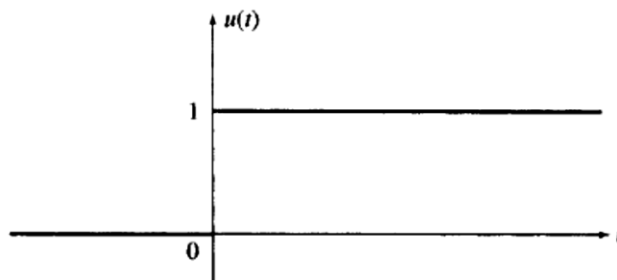
Πολλές από αυτές τις συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για τη σύνθεση σημάτων για την ανάλυση και τη σχεδίαση κυκλωμάτων.

2.8. Μοναδιαία βηματική συνάρτηση (unit step function)

Η μοναδιαία βηματική συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

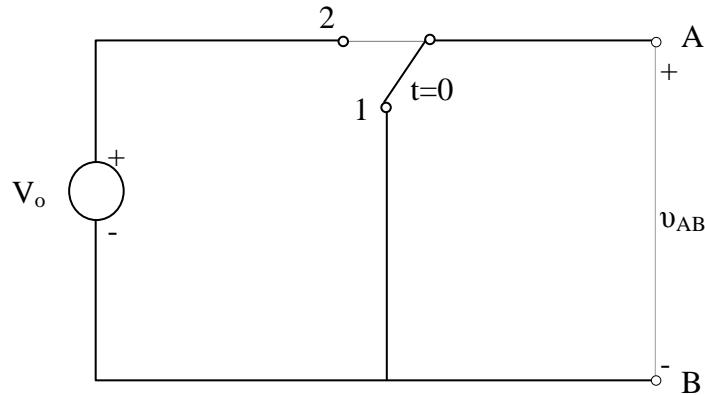
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Η μοναδιαία βηματική συνάρτηση σχεδιάζεται στο σχήμα 2.15. Η συνάρτηση αυτή δεν ορίζεται για $t = 0$.

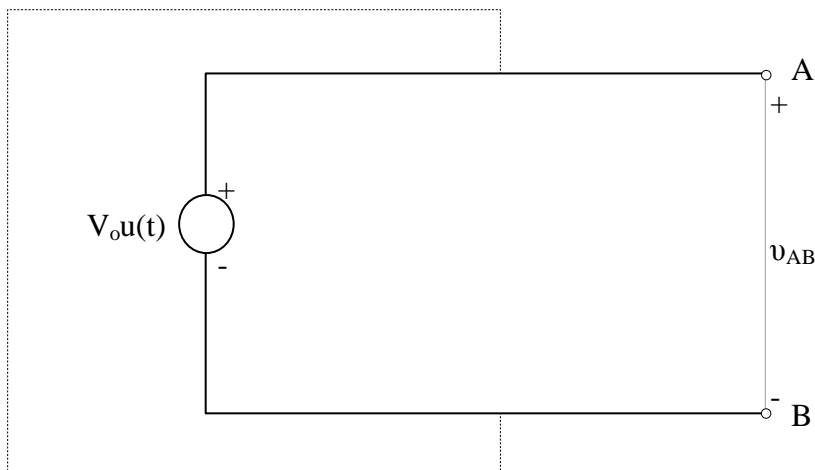


Σχήμα 2.15: Διάγραμμα μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

Ένα παράδειγμα της χρήσης της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης εξετάζεται στο κύκλωμα του σχήματος 2.16. Έστω ότι ο διακόπτης του κυκλώματος του σχήματος 2.16 είναι στη θέση 1 για $t < 0$ και μετακινείται στη θέση 2 για $t = 0$. Η τάση κατά μήκος των ακροδεκτών A και B εκφράζεται ως $v_{AB} = V_o u(t)$. Το ισοδύναμο κύκλωμα για το μοναδιαίο βήμα φαίνεται στο σχήμα 2.17.



Σχήμα 2.16: Κύκλωμα χρήσης μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης



Σχήμα 2.17: Ισοδύναμο κύκλωμα σχήματος 2.16

Παράδειγμα 2.14

Ο διακόπτης στο κύκλωμα του σχήματος 2.16 μετακινείται στη θέση 2 για $t = t_o$. Να εκφραστεί η τάση v_{AB} με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης.

Απάντηση:

Η εμφάνιση της τάσης V_o στα άκρα A και B καθυστερεί μέχρι $t = t_o$. Αν γίνει αντικατάσταση του t με $t = t_o$ στη βηματική συνάρτηση προκύπτει: $v_{AB} = V_o u(t - t_o)$.

Παράδειγμα 2.15

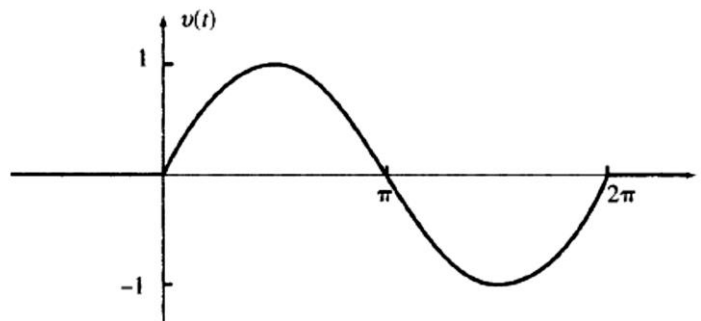
Ο διακόπτης στο κύκλωμα του σχήματος 2.16 μετακινείται στη θέση 2 για $t = 0$ και στη συνέχεια μετακινείται στη θέση 1 για $t = 5s$. Να εκφραστεί η τάση v_{AB} με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης.

Απάντηση:

$$v_{AB} = V_o [u(t) - u(t - 5)]$$

Παράδειγμα 2.16

Να εκφραστεί η συνάρτηση $v(t)$ που φαίνεται στο σχήμα 2.18 με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης.



Σχήμα 2.18: Κύκλωμα παραδείγματος 2.16

Απάντηση:

$$v(t) = [u(t) - u(t - 2\pi)] \sin t$$

2.9. Μοναδιαία ώθηση (unit impulse function)

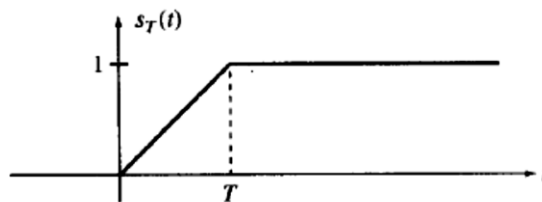
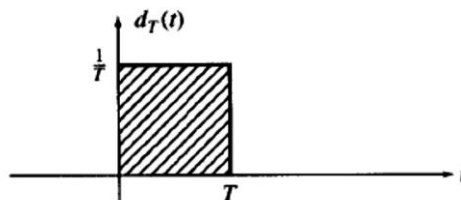
Έστω η συνάρτηση $s_T(t)$ (σχήμα 2.19) η οποία έχει τιμή μηδέν για $t < 0$ και αυξάνει γραμμικά από την τιμή μηδέν στην τιμή 1 σε T δευτερόλεπτα. Η παράγωγος της συνάρτησης αυτής είναι η $d_T(t)$ και είναι ένας παλμός διάρκειας T και ύψους $\frac{1}{T}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 2.20.

$$d_T(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \frac{1}{T} & , 0 < t < T \\ 0 & , t > T \end{cases} \quad (2.7)$$

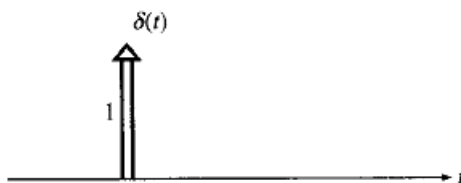
Αν ο χρόνος T μειωθεί τότε ο παλμός (σχήμα 2.20) γίνεται στενότερος και ψηλότερος, αλλά το εμβαδό κάτω από τον παλμό παραμένει ίσο με 1. Αν ο χρόνος T πλησιάσει το μηδέν η συνάρτηση $s_T(t)$ γίνεται μοναδιαία βηματική $u(t)$ και η παράγωγος $d_T(t)$ γίνεται μοναδιαία ώθηση $\delta(t)$ με μηδενικό πλάτος και άπειρο ύψος. Η μοναδιαία ώθηση παρουσιάζεται στο σχήμα 2.21. Η μοναδιαία ώθηση (unit impulse) ή αλλιώς συνάρτηση δέλτα (unit delta function) ορίζεται ως εξής:

$$\delta(t) = 0 \text{ για } t \neq 0 \text{ και } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.8)$$

Η ώθηση η οποία είναι το όριο ενός στενού παλμού με εμβαδό A εκφράζεται ως $A\delta(t)$. Ο παράγοντας A συνήθως καλείται και ως δύναμη (strength) της ώθησης. Η μοναδιαία ώθηση για $t = t_0$ εκφράζεται ως $\delta(t - t_0)$.

Σχήμα 2.19: Συνάρτηση $s_T(t)$ 

Σχήμα 2.20: Μοναδιαίος παλμός



Σχήμα 2.21: Μοναδιαία ώθηση

Παράδειγμα 2.17

Η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή 100nF αυξάνει γραμμικά από την τιμή 0 στην τιμή 10V όπως η συνάρτηση του σχήματος 2.19. Να υπολογιστούν α) το φορτίο κατά μήκος του πυκνωτή $t = T$ και β) το ρεύμα $i_C(t)$ στον πυκνωτή για $T = 1s$, $T = 1ms$ και $T = 1\mu s$.

Απάντηση:

α) Για $t = T$: $v_C = 10V$

Το φορτίο κατά μήκος του πυκνωτή είναι:

$$Q = Cv_C = 10^{-7} \cdot 10 = 10^{-6}$$

$$\beta) i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$$

Από το σχήμα 2.21:

$$i_C(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ I_o = \frac{10^{-6}}{T} \text{ (A)} & , 0 < t < T \\ 0 & , t > T \end{cases}$$

Για $T = 1s$: $I_o = 10^{-6} A$,

για $T = 1ms$: $I_o = 10^{-3} A$ και

για $T = 1\mu s$: $I_o = 1A$.

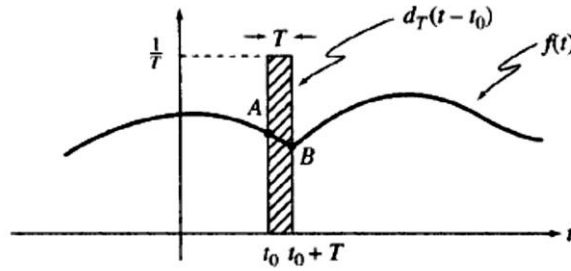
Σε όλες τις περιπτώσεις το φορτίο στον πυκνωτή στο τέλος της μεταβατικής περιόδου είναι:

$$Q = \int_0^T i_C(t) dt = I_o T = 10^{-6} C$$

Το φορτίο για $t = T$ είναι ανεξάρτητο του T και παράγει μία τάση $v_C = 10V$ κατά μήκος του πυκνωτή.

Παράδειγμα 2.18

Έστω $d_T(t - t_o)$ ένας στενός παλμός πλάτους T και ύψους $\frac{1}{T}$, ο οποίος ξεκινά για $t = t_o$. Έστω μία συνάρτηση $f(t)$ η οποία είναι συνεχής μεταξύ t_o και $t_o + T$ όπως φαίνεται στο σχήμα 2.22. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\infty}^{+\infty} d_T(t - t_o) f(t) dt$.



Σχήμα 2.22: Παλμός παραδείγματος 2.18

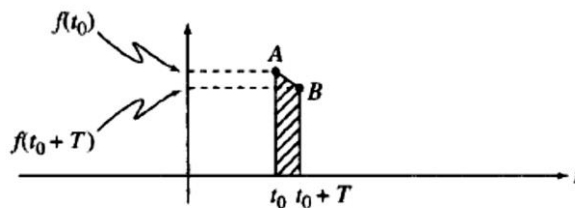
Απάντηση:

$$d_T(t-t_0) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & t_0 < t < t_0 + T \\ 0, & \text{αλλο } \upsilon \end{cases}$$

Επομένως:

$$I = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = \frac{S}{T}$$

όπου S είναι το γραμμοσκιασμένο εμβαδό μεταξύ t_0 και $t_0 + T$ στο σχήμα 2.23.



Σχήμα 2.23: Γραμμοσκιασμένο εμβαδό

Αν θεωρηθεί ότι η T είναι μικρή, τότε η συνάρτηση $f(t)$ προσομοιώνεται με μία γραμμή που συνδέει τα A και B. Το εμβαδό S του τραπεζίου προκύπτει:

$$S = \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)] T$$

$$I = \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)]$$

Καθώς $T \rightarrow 0$, $d_T(t-t_0) \rightarrow \delta(t-t_0)$ και $f(t_0 + T) \rightarrow f(t_0)$ τότε:

$$\lim_{T \rightarrow 0} I = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)]$$

Σύμφωνα με την υπόθεση η $f(t)$ είναι συνεχής μεταξύ t_o και $t_o + T$. Επομένως:

$$\lim_{T \rightarrow 0} I = f(t_o)$$

Όμως:

$$\lim_{T \rightarrow 0} I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_o) f(t) dt$$

Και επομένως:

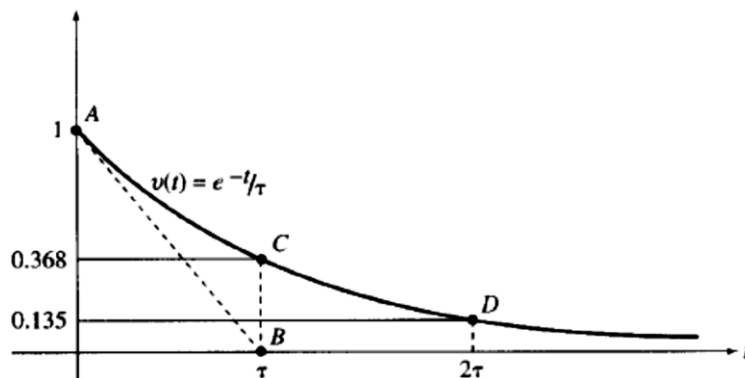
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_o) f(t) dt = f(t_o) \quad (2.9)$$

Η σχέση (2.9) καλείται ιδιότητα μετατόπισης της συνάρτησης ώθησης. Χρησιμοποιείται επίσης και ως εναλλακτικός ορισμός για την $\delta(t)$.

2.10. Εκθετική συνάρτηση (exponential function)

Η συνάρτηση $f(t) = e^{st}$ όπου s είναι μία μιγαδική σταθερά ονομάζεται εκθετική. Φθίνει με το χρόνο αν το πραγματικό μέρος της παραμέτρου s είναι αρνητικό και αυξάνει με το χρόνο αν το πραγματικό μέρος της παραμέτρου s είναι θετικό. Στην παράγραφο αυτή εξετάζονται εκθετικές συναρτήσεις $f(t) = e^{at}$ όπου η παράμετρος a είναι πραγματικός αριθμός.

Το αντίστροφο της παραμέτρου a έχει διαστάσεις χρόνου και καλείται σταθερά χρόνου (time constant) $\tau = \frac{1}{a}$. Μία φθίνουσα εκθετική συνάρτηση $e^{-\frac{t}{\tau}}$ σχεδιάζεται ως προς το χρόνο t στο σχήμα 2.24. Η συνάρτηση φθίνει από την τιμή 1 για $t = 0$ στην τιμή μηδέν για $t = \infty$. Μέτα από τ δευτερόλεπτα η συνάρτηση $e^{-\frac{t}{\tau}}$ μειώνεται σε $e^{-1} = 0.368$. Για $\tau = 1$, η συνάρτηση e^{-t} ονομάζεται κανονικοποιημένη εκθετική συνάρτηση (normalized exponential).



Σχήμα 2.24: Εκθετική συνάρτηση

Παράδειγμα 2.19

Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη της συνάρτησης $e^{-\frac{t}{\tau}}$ για $t = 0$ τέμνει τον άξονα των χρόνων για $t = \tau$ όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.24.

Απάντηση:

Η εφαπτομένη ξεκινάει από το σημείο A ($v = 1, t = 0$) με κλίση $\left. \frac{de^{-\frac{t}{\tau}}}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}$. Η

εξίσωση της εφαπτομένης είναι $v_{\text{εφ}}(t) = -\frac{t}{\tau} + 1$. Η εφαπτομένη τέμνει την άξονα των χρόνων στο σημείο B όπου $t = \tau$. Αυτή η παρατήρηση μπορεί να φανεί χρήσιμη στη σχεδίαση μιας εκθετικής συνάρτησης όπως παρουσιάζεται αναλυτικά στο παράδειγμα 2.20.

Παράδειγμα 2.20

Να σχεδιαστεί η συνάρτηση $v(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$ για $t > 0$.

Απάντηση:

Αρχικά προσδιορίζεται το αρχικό σημείο A ($v = 1, t = 0$) της καμπύλης και το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα των χρόνων B για $t = \tau$. Στη συνέχεια σχεδιάζεται η ευθεία της εφαπτομένης AB. Δύο επιπλέον σημεία C και D βρίσκονται στα σημεία $t = \tau$ και $t = 2\tau$ με ύψη 0.368 και $0.368^2 = 0.135$ αντίστοιχα, ανήκουν επίσης στην καμπύλη. Με βάση τα προαναφερθέντα σημεία η εκθετική καμπύλη είναι δυνατό να σχεδιαστεί με σχετικά καλή ακρίβεια.

Παράδειγμα 2.21

α) Να αποδειχθεί ότι ο ρυθμός μεταβολής ως προς το χρόνο σε μία εκθετική συνάρτηση $v = Ae^{st}$ είναι κάθε στιγμή ανάλογος της τιμής της συνάρτησης τη στιγμή αυτή. β) Να αποδειχθεί ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός μιας εκθετικής συνάρτησης και των n παραγώγων της είναι ανάλογη με την ίδια τη συνάρτηση. Να βρεθεί η σταθερά αναλογίας.

Απάντηση:

α) Ο ρυθμός μεταβολής ως προς το χρόνο ισούται με την παράγωγο της εκθετικής συνάρτησης:

$$\frac{dv}{dt} = sAe^{st} = sv$$

β) Με βάση το αποτέλεσμα του ερωτήματος α προκύπτει:

$$\frac{d^n v}{dt^n} = s^n A e^{st} = s^n v$$

Ο γραμμικός συνδυασμός γράφεται:

$$a_0 v + a_1 \frac{dv}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n v}{dt^n} = (a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n) v = H v$$

όπου $H = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n$

Συχνά στις κυματομορφές των σημάτων εμφανίζεται η συνάρτηση $f(t) = A e^{-at} + B$. Η συνάρτηση αυτή ορίζεται πλήρως από τρεις αριθμούς A, B και α ως εξής:

- A = αρχική τιμή – τελική τιμή
- B = τελική τιμή
- α = το αντίστροφο της σταθεράς χρόνου

Αλλιώς οι αριθμοί αυτοί ορίζονται από τις σχέσεις:

Αρχική τιμή: $f(0) = A + B$

Τελική τιμή: $f(\infty) = B$

Σταθερά χρόνου = $\frac{1}{a}$

Παράδειγμα 2.22

Να βρεθεί η συνάρτηση $v(t)$ η οποία φθίνει εκθετικά από την τιμή 5V στην τιμή 1V για $t = \infty$ με σταθερά χρόνου ίση με 3s. Να σχεδιαστεί η συνάρτηση $v(t)$ με την τεχνική που παρουσιάστηκε στο παράδειγμα 2.21.

Απάντηση:

Έστω $v(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + B$. Είναι:

$$v(0) = A + B = 5$$

$$v(\infty) = B = 1$$

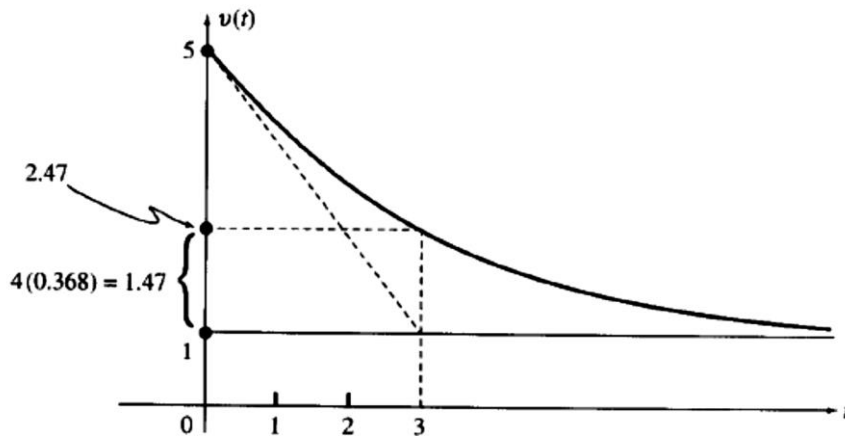
Επομένως: $A = 4, B = 1$ και $\tau = 3$. Άρα:

$$v(t) = 4e^{-\frac{t}{3}} + 1$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύεται στην ακόλουθη μορφή:

$$v(t) = (\text{αρχική τιμή} - \text{τελική τιμή}) e^{-\frac{t}{\tau}} + (\text{τελική τιμή})$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $v(t)$ φαίνεται στο σχήμα 2.25.



Σχήμα 2.25: Συνάρτηση $v(t)$ παραδείγματος 2.22

Παράδειγμα 2.23

Μία πηγή τάσης $v = V_o e^{-\frac{|t|}{\tau}}$, $\tau > 0$ συνδέεται στα άκρα ενός πυκνωτή. Να υπολογιστεί το ρεύμα i στον πυκνωτή. Να σχεδιαστεί η τάση και το ρεύμα για $V_o = 10V$, $C = 1\mu F$ και $\tau = 1ms$.

Απάντηση:

Σύμφωνα με τη σχέση $i = C \frac{dv}{dt}$ είναι:

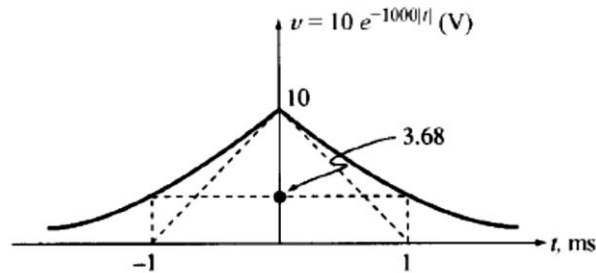
$$\text{Για } t < 0: v = V_o e^{\frac{t}{\tau}} \text{ και } i = I_o e^{\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{Για } t > 0: v = V_o e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ και } i = -I_o e^{-\frac{t}{\tau}}$$

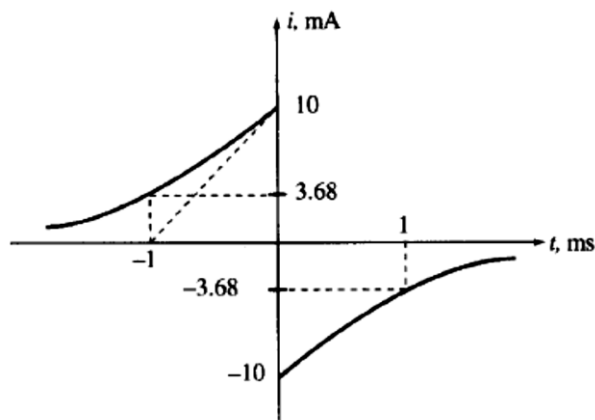
$$\text{όπου } I_o = \frac{CV_o}{\tau}$$

Για $V_o = 10V$, $C = 1\mu F$ και $\tau = 1ms$ προκύπτει $I_o = 10mA$.

Οι γραφικές παραστάσεις για την τάση και το ρεύμα αντίστοιχα φαίνονται στα σχήματα 2.26 και 2.27 αντίστοιχα.



Σχήμα 2.26: Γραφική παράσταση τάσης παραδείγματος 2.23



Σχήμα 2.27: Γραφική παράσταση ρεύματος παραδείγματος 2.23

2.11. Αποσβενύμενη ημιτονοειδής συνάρτηση (damped sinusoids)

Μία αποσβενύμενη ημιτονοειδής συνάρτηση έχει συνάρτηση:

$$v(t) = Ae^{-at} \cos(\omega t + \theta) \quad (2.10)$$

Το πλάτος φθίνει εκθετικά όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση.

Παράδειγμα 2.24

Ένα κύκλωμα RL σειράς διαρρέεται από ρεύμα $i = I_o e^{-at} \cos \omega t$. α) Να βρεθεί η τάση v_{RL} κατά μήκος των στοιχείων RL. β) Να υπολογιστεί η τάση v_{RL} για $I_o = 3A$, $a = 2$, $\omega = 40 \text{ rad/s}$, $R = 5\Omega$ και $L = 0.1H$. Να σχεδιαστεί το ρεύμα ως συνάρτηση του χρόνου.

Απάντηση:

α) Είναι:

$$v_R = Ri = RI_0 e^{-at} \cos \omega t$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} = -LI_0 e^{-at} (a \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$$

$$v_{RL} = v_R + v_L = I_0 e^{-at} [(R - La) \cos \omega t - L\omega \sin \omega t] = V_0 e^{-at} \cos(\omega t + \theta)$$

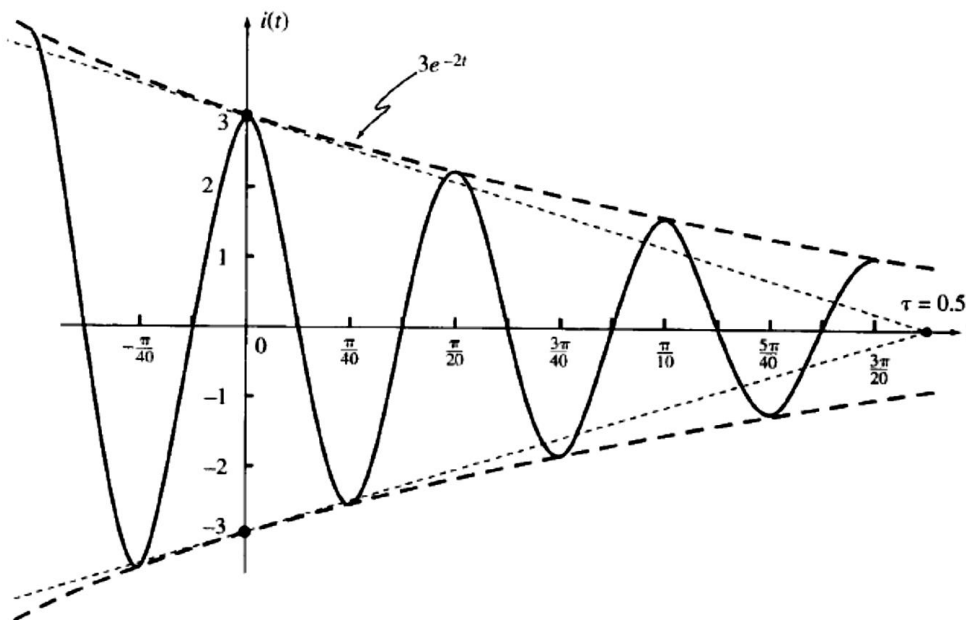
$$\text{όπου } V_0 = I_0 \sqrt{(R - La)^2 + L^2 \omega^2} \quad \text{και } \theta = \tan^{-1} \left[\frac{L\omega}{R - La} \right]$$

β) Για $I_0 = 3A$, $a = 2$, $\omega = 40 \text{ rad/s}$, $R = 5\Omega$ και $L = 0.1H$ προκύπτουν:

$$i = 3e^{-2t} \cos 40t$$

$$v_{RL} = 18.75e^{-2t} \cos(40t + 39.8^\circ)$$

Η γραφική παράσταση του ρεύματος φαίνεται στο σχήμα 2.28.



Σχήμα 2.28: Γραφική παράσταση ρεύματος παραδείγματος 2.28

2.12. Τυχαία σήματα

Στις προηγούμενες παραγράφους εξετάστηκαν σήματα τα οποία ήταν πλήρως καθορισμένα. Για παράδειγμα όλες οι τιμές μιας ημιτονοειδούς τάσης είναι δυνατό να προσδιοριστούν πλήρως αν είναι γνωστά το πλάτος, η συχνότητα και η φάση. Τέτοιου είδους σήματα ονομάζονται ντετερμινιστικά (deterministic).

Υπάρχει και άλλη μία ομάδα σημάτων που καθορίζονται μερικώς μέσω των μέσων τιμών και ονομάζονται τυχαία σήματα (random signals). Τα τυχαία σήματα περιέχουν

πληροφορία η οποία δεν πρέπει να συγχέεται με το θόρυβο, ο οποίος διαστρεβλώνει την πληροφορία του σήματος.

Μερικά παραδείγματα τυχαίων σημάτων είναι η τάση στα άκρα ενός μικροφώνου και το σήμα από την κεραία της τηλεόρασης. Οι τιμές αυτών των σημάτων προσδιορίζονται μόνο κατά μέσο όρο και όχι επακριβώς.

2.13. Λυμένα προβλήματα

1) Να υπολογιστεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της $v = 1 + 2\sin(\omega t + \theta)$ για $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ και $\theta = 3 \text{ rad}$. Να προσδιοριστεί αν η συνάρτηση v είναι περιοδική και να υπολογιστεί η συχνότητα f και η περίοδος T . Επίσης να υπολογιστεί η γωνία φάσης σε μοίρες.

Απάντηση:

$$V_{\max} = 1 + 2 = 3$$

$$V_{\min} = 1 - 2 = -1$$

Η συνάρτηση v είναι περιοδική με:

$$\omega = 2\pi f \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Leftrightarrow f = \frac{1000}{2\pi} = 159.15 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{159.15} = 0.00628 \text{ s} = 6.28 \text{ ms}$$

Η γωνία φάσης σε μοίρες είναι:

$$\theta = 3 \text{ rad} = 180^\circ \cdot \frac{3}{\pi} = 171.9^\circ$$

2) Έστω δύο συναρτήσεις $v_1(t)$ και $v_2(t)$ με περιόδους T_1 και T_2 οι οποίες έχουν ένα κοινό πολλαπλάσιο. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ είναι περιοδική με περίοδο ίση με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των T_1 και T_2 . Να αποδειχθεί επίσης ότι $V_\mu = V_{1,\mu} + V_{2,\mu}$.

Απάντηση:

Έστω δύο ακέραιοι n_1 και n_2 τέτοιοι ώστε $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$. Οπότε ισχύουν οι σχέσεις $v_1(t) = v_1(t + n_1 T_1)$ και $v_2(t) = v_2(t + n_2 T_2)$. Επομένως:

$$v(t+T) = v_1(t+T) + v_2(t+T) = v_1(t) + v_2(t) = v(t)$$

Συνεπώς η $v(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T .

Η μέση τιμή είναι:

$$V_\mu = \frac{1}{T} \int_0^T [v_1(t) + v_2(t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_1(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T v_2(t) dt = V_{1,\mu} + V_{2,\mu}$$

3) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της συνάρτησης $\cos^2(\omega t + \theta)$.

Απάντηση:

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cos^2(\omega t + \theta) = \frac{1 + \cos 2(\omega t + \theta)}{2}$ προκύπτει:

$$\langle \cos^2(\omega t + \theta) \rangle = \left\langle \frac{1 + \cos 2(\omega t + \theta)}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} (\langle 1 \rangle + \langle \cos 2(\omega t + \theta) \rangle) = \frac{1}{2} (1 + 0) = \frac{1}{2}$$

γιατί $\langle \cos 2(\omega t + \theta) \rangle = 0$.

4) Έστω $v(t) = V_{dc} + V_{ac} \cos(\omega t + \theta)$. Να αποδειχθεί ότι $V_\varepsilon^2 = V_{dc}^2 + \frac{1}{2} V_{ac}^2$.

Απάντηση:

$$\begin{aligned} V_\varepsilon^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T [V_{dc} + V_{ac} \cos(\omega t + \theta)]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [V_{dc}^2 + V_{ac}^2 \cos^2(\omega t + \theta) + 2V_{dc} V_{ac} \cos(\omega t + \theta)] dt = \\ &= V_{dc}^2 + \frac{1}{2} V_{ac}^2 \end{aligned}$$

5) Έστω f_1 και f_2 δύο αρμονικές της f_0 . Να αποδειχθεί ότι η ενεργός τιμή της συνάρτησης $v(t) = V_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + V_2 \cos(2\pi f_2 t + \theta_2)$ είναι $\sqrt{\frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2)}$.

Απάντηση:

Είναι:

$$v^2(t) = V_1^2 \cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) + V_2^2 \cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) + 2V_1 V_2 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2)$$

$$\begin{aligned} V_\varepsilon^2 &= \langle v^2(t) \rangle = \\ &= V_1^2 \langle \cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) \rangle + V_2^2 \langle \cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle + 2V_1 V_2 \langle \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle \end{aligned}$$

Όμως $\langle \cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) \rangle = \langle \cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle = \frac{1}{2}$ σύμφωνα με την άσκηση 3.

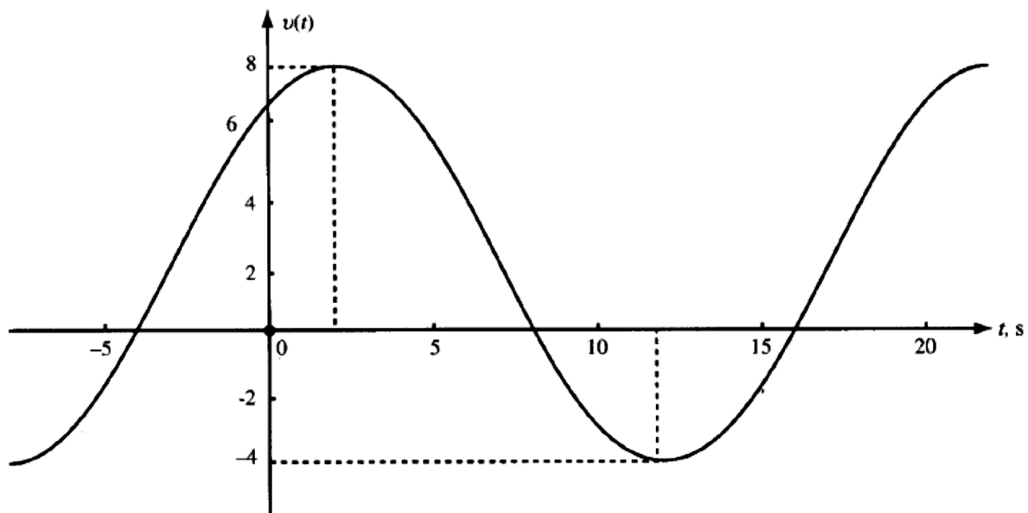
Επιπλέον:

$$\begin{aligned} \langle \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle &= \\ &= \frac{1}{2} \langle \cos[2\pi(f_1 + f_2)t + (\theta_1 + \theta_2)] \rangle + \frac{1}{2} \langle \cos[2\pi(f_1 - f_2)t + (\theta_1 - \theta_2)] \rangle \end{aligned}$$

Επομένως:

$$V_\varepsilon^2 = \frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2) \Leftrightarrow V_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2)}$$

6) Το σήμα $v(t)$ του σχήματος 2.29 είναι ημιτονοειδές. Να υπολογιστεί η περίοδος και η συχνότητα. Να εκφραστεί στη συνέχεια στη μορφή $v(t) = A + B \cos(\omega t + \theta)$ και να υπολογιστεί η ενεργός και η μέση τιμή.



Σχήμα 2.29: Γραφική παράσταση $v(t)$ άσκησης 6

Απάντηση:

Ο χρόνος μεταξύ δύο μέγιστων τιμών είναι η περίοδος $T = 20s$ ενώ η συχνότητα είναι $f = \frac{1}{T} = 0.05Hz$. Το σήμα είναι μία συνάρτηση συνημίτονου με πλάτος B που προστίθεται σε μία σταθερά A . Σύμφωνα με τη θεωρία:

$$B = \frac{1}{2}(V_{\max} - V_{\min}) = \frac{1}{2}(8 + 4) = 6$$

$$A = V_{\max} - B = V_{\min} + B = 2$$

Η συνάρτηση συνημίτονου μετατοπίζεται κατά 2s προς τα δεξιά και αντιστοιχεί με μετατόπιση φάσης $\frac{2}{20} \cdot 360^\circ = 36^\circ$. Επομένως το σήμα εκφράζεται ως:

$$v(t) = 2 + 6 \cos\left(\frac{\pi}{10}t - 36^\circ\right)$$

Η μέση και η ενεργός τιμή είναι:

$$V_\mu = A = 2$$

$$V_\varepsilon^2 = \frac{A^2 + B^2}{2} = \frac{2^2 + 6^2}{2} = 22 \quad \text{ή} \quad V_\varepsilon = \sqrt{22} = 4.69$$

7) Έστω $v_1 = \cos(200\pi t)$ και $v_2 = \cos(202\pi t)$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $v = v_1 + v_2$ είναι περιοδική. Να υπολογιστεί η περίοδος και το μέγιστο πλάτος.

Απάντηση:

Η περίοδος της v_1 είναι $T_1 = \frac{1}{100} s$ ενώ η περίοδος της v_2 είναι $T_2 = \frac{1}{101} s$. Η περίοδος της $v = v_1 + v_2$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των T_1 και T_2 , δηλαδή $T = 100T_1 = 101T_2 = 1s$. Το μέγιστο πλάτος προκύπτει για $t = k$ όπου k είναι ένας ακέραιος όταν οι συναρτήσεις v_1 και v_2 παίρνουν τις μέγιστες τιμές τους και επομένως $V_{\max} = 2$.

8) Να υπολογιστεί η μέση και η ενεργός τιμή της συνάρτησης $v_2(t)$ του σχήματος 2.2 αν $V_1 = 2$, $V_2 = 1$ και $T = 4T_1$.

Απάντηση:

$$V_{2,\mu} = \frac{V_1 T_1 - V_2 (T - T_1)}{T} = \frac{V_1 - 3V_2}{4} = -0.25$$

$$V_{2,\varepsilon}^2 = \frac{V_1^2 T_1 + V_2^2 (T - T_1)}{T} = \frac{7}{4} \quad \text{ή} \quad V_{2,\varepsilon} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1.32$$

9) Να υπολογιστεί η ενεργός τιμή της συνάρτησης $v_3(t)$ του σχήματος 2.3 για $T = 100T_1$.

Απάντηση:

Το ολοκλήρωμα της v_3^2 για μία περίοδο ισούται με $\frac{V_o^2 T_1}{2}$. Επομένως:

$$V_{3,\varepsilon}^2 = \frac{V_o^2 T_1}{200T_1} = \frac{V_o^2}{200} \quad \text{ή}$$

$$V_{3,\varepsilon} = \sqrt{\frac{V_o^2}{200}} = 0.0707V_o$$

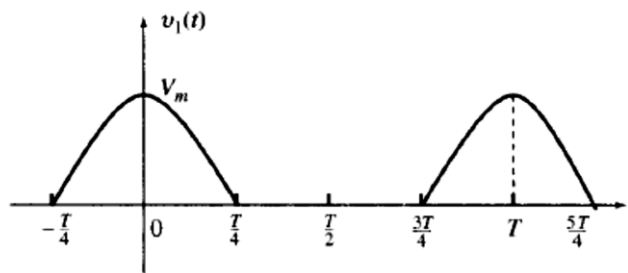
10) Να υπολογιστεί η μέση και η ενεργός τιμή της συνάρτησης $v_4(t)$ του σχήματος 2.4 αν $T = 6$ και το εμβαδό κάτω από τις θετικές και αρνητικές περιοχές είναι +5 και -3 αντίστοιχα.

Απάντηση:

$$V_{4,\mu} = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$$

Η ενεργός τιμή δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί με τα δεδομένα στοιχεία.

11) Να υπολογιστεί η μέση και η ενεργός τιμή της συνάρτησης $v_1(t)$ του σχήματος 2.30.



Σχήμα 2.30: Συνάρτησης $v_1(t)$ άσκησης 11

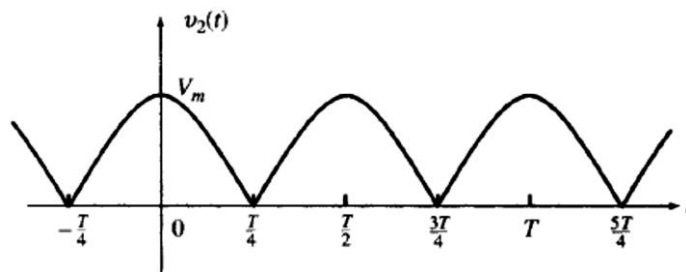
Απάντηση:

$$V_{1,\mu} = \frac{V_m}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{V_m T}{2\pi T} \left[\sin \frac{2\pi t}{T} \right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \frac{V_m}{\pi}$$

$$V_{1,\varepsilon}^2 = \frac{V_m^2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{V_m^2}{2T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \left(1 + \cos \frac{4\pi t}{T} \right) dt = \frac{V_m^2}{2T} \left[t + \frac{T}{4\pi} \sin \frac{4\pi t}{T} \right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \frac{V_m^2}{2T} \left(\frac{T}{4} + \frac{T}{4} \right) = \frac{V_m^2}{4}$$

Και επομένως: $V_{1,\varepsilon}^2 = \frac{V_m^2}{4}$.

12) Να υπολογιστεί η μέση και η ενεργός τιμή της συνάρτησης $v_2(t) = V_m \left| \cos \frac{2\pi t}{T} \right|$ του σχήματος 2.31.



Σχήμα 2.31: Συνάρτησης $v_2(t)$ άσκησης 12

Απάντηση:

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των ασκήσεων 2 και 11 ισχύουν τα εξής για τη μέση τιμή:

$$v_2(t) = v_1(t) + v_1\left(t - \frac{T}{2}\right) \text{ και}$$

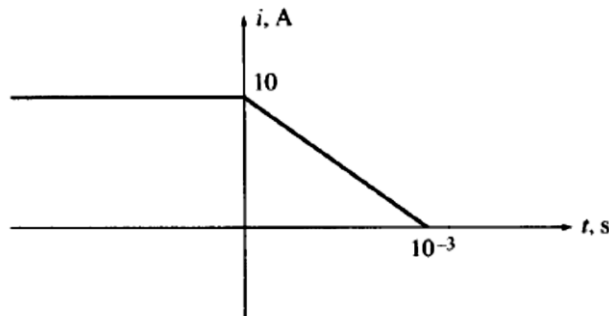
$$V_{2,\mu} = V_{1,\mu} + V_{1,\mu} = 2V_{1,\mu} = 2 \frac{V_m}{\pi}$$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των ασκήσεων 4 και 11 ισχύουν τα εξής για την ενεργό τιμή:

$$V_{2,\varepsilon}^2 = V_{1,\varepsilon}^2 + V_{1,\varepsilon}^2 = 2V_{1,\varepsilon}^2 = \frac{V_m^2}{2} \quad \text{ή}$$

$$V_{2,\varepsilon} = \sqrt{\frac{V_m^2}{2}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

13) Ένα πηνίο 100mH σε σειρά με μία αντίσταση 20Ω διαρρέεται από ρεύμα i όπως αυτό που φαίνεται στο σχήμα 2.32. Να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν οι τάσεις κατά μήκος του πηνίου και κατά μήκος του συνδυασμού πηνίο αντίσταση.



Σχήμα 2.32: Συνάρτηση ρεύματος άσκησης 13

Απάντηση:

$$i = \begin{cases} 10 \text{ A} & t < 0 \\ 10(1 - 10^3 t) \text{ A} & 0 < t < 10^{-3} \text{ s} \\ 0 & t > 10^{-3} \text{ s} \end{cases}$$

$$\frac{di}{dt} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -10^4 \frac{\text{A}}{\text{s}} & 0 < t < 10^{-3} \text{ s} \\ 0 & t > 10^{-3} \text{ s} \end{cases}$$

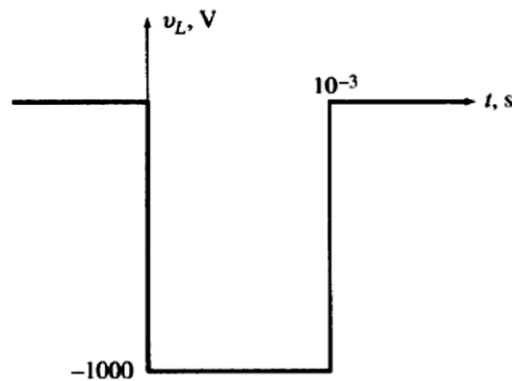
$$v_R = Ri = \begin{cases} 200 \text{ V} & t < 0 \\ 200(1 - 10^3 t) \text{ V} & 0 < t < 10^{-3} \text{ s} \\ 0 & t > 10^{-3} \text{ s} \end{cases}$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -1000 \text{ V} & 0 < t < 10^{-3} \text{ s} \\ 0 & t > 10^{-3} \text{ s} \end{cases}$$

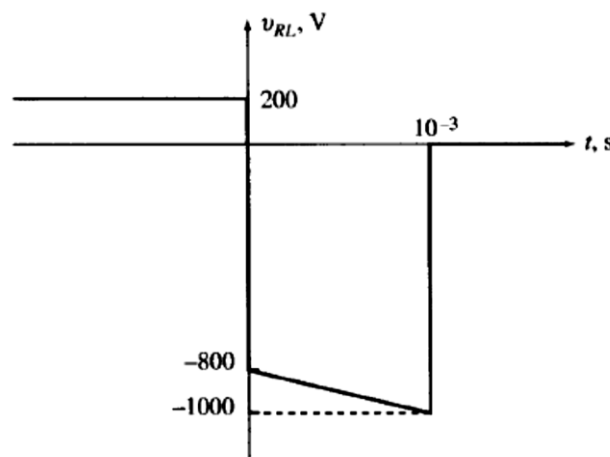
Εφόσον τα δύο παθητικά στοιχεία είναι συνδεδεμένα σε σειρά ($v_{RL} = v_R + v_L$) προκύπτει:

$$v_{RL} = \begin{cases} 200V & t < 0 \\ -2(10^5 t) - 800V & 0 < t < 10^{-3} s \\ 0 & t > 10^{-3} s \end{cases}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των τάσεων v_L και v_{RL} φαίνονται στα σχήματα 2.33 και 2.34 αντίστοιχα.



Σχήμα 2.33: Συνάρτηση v_L άσκησης 2.13



Σχήμα 2.34: Συνάρτηση v_{RL} άσκησης 2.13

14) Μία συσκευή λειτουργεί για $V_\varepsilon = 120V$ στα 60Hz και διαρρέεται από ρεύμα $I_\varepsilon = 10A$ με καθυστέρηση φάσης 60° . Να εκφραστούν οι συναρτήσεις της τάσης, του ρεύματος και της ισχύος ως προς το χρόνο. Να υπολογιστούν επίσης η συχνότητα και η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της ισχύος.

Απάντηση:

$$v = 120\sqrt{2} \cos \omega t$$

$$i = 10\sqrt{2} \cos(\omega t - 60^\circ)$$

$$p = v \cdot i = 2400 \cos \omega t \cos(\omega t - 60^\circ) = 1200 \cos 60^\circ + 1200 \cos(2\omega t - 60^\circ) = 600 + 1200 \cos(2\omega t - 60^\circ)$$

Η συνάρτηση της ισχύος είναι περιοδική.

$$f = 2 \cdot 60 = 120 \text{ Hz}$$

$$P_\mu = 600 \text{ W}$$

$$P_{\max} = 600 + 1200 = 1800 \text{ W}$$

$$P_{\min} = 600 - 1200 = -600 \text{ W}$$

15) Ένας στενός παλμός i_s με πλάτος 1A και διάρκεια 1μs εισέρχεται σε ένα πυκνωτή για $t = 0$. Ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος. Να υπολογιστεί η τάση κατά μήκος του πυκνωτή.

Απάντηση:

Η τάση κατά μήκος του πυκνωτή είναι:

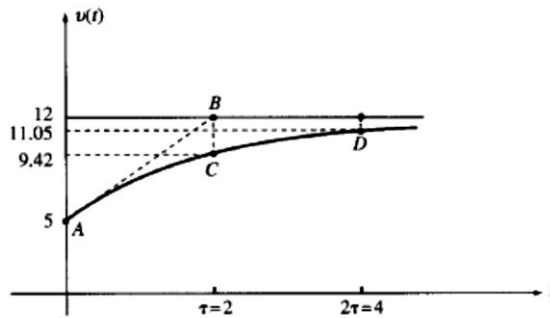
$$V_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 10^6 t & , 0 < t < 1\mu s \\ 1V & , t > 1\mu s \end{cases}$$

16) Να σχεδιαστεί η συνάρτηση $v(t)$ η οποία αλλάζει την τιμή της εκθετικά από 5V για $t = 0$ σε 12V για $t = \infty$ με σταθερά χρόνου 2s. Να γραφεί και η εξίσωση της $v(t)$.

Απάντηση:

Αρχικά προσδιορίζονται το σημείο A ($t = 0$ και $v = 5$) και η ασύμπτωτη $v = 12$ όπως φαίνονται στο σχήμα 2.35. Η εφαπτόμενη στο A τέμνει την ασύμπτωτη για $t = 2$ (σημείο B). Στη συνέχεια προσδιορίζεται το σημείο C που ανήκει στην καμπύλη για $t = 2$. Για να προσδιοριστεί με μεγαλύτερη ακρίβεια η καμπύλη προσδιορίζεται και το σημείο D για $t = 2$. Η εξίσωση είναι $v(t) = Ae^{-\frac{t}{2}} + B$. Από τις αρχικές και

τελικές συνθήκες προκύπτουν οι σχέσεις: $v(0) = A + B = 5$ και $v(\infty) = B = 12$. Από το σύστημα των δύο εξισώσεων προκύπτει $A = -7$ και τελικά $v(t) = -7e^{-\frac{t}{2}} + 12$.



Σχήμα 2.35: Συνάρτηση $v(t)$ άσκησης 16

2.14. Άλυτες ασκήσεις

2.1) Έστω $v_1 = 8\sin 100\pi t$ και $v_2 = 6\sin 99\pi t$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $v = v_1 + v_2$ είναι περιοδική. Να υπολογιστούν η περίοδος, η μέγιστη, η μέση και η ενεργός τιμή της v .

(Απάντηση: $T = 2, V_{\max} = 14V, V_{\mu} = 0, V_{\varepsilon} = 5\sqrt{2}$)

2.2) Να υπολογιστεί η περίοδος, η συχνότητα, η γωνία φάσης και η μέγιστη, ελάχιστη, μέση και ενεργός τιμή της $v(t) = 2 + 6\cos(10\pi t + \frac{\pi}{6})$.

(Απάντηση: $T = 0.2s, f = 5Hz, \phi = 30^\circ, V_{\max} = 8, V_{\min} = -4, V_{\mu} = 2, V_{\varepsilon} = \sqrt{22}$)

2.3) Να γραφεί η συνάρτηση $v(t) = 2\cos(\omega t + 30^\circ) + 3\cos \omega t$ στη μορφή $v(t) = \sin(\omega t + \theta)$.

(Απάντηση: $A = 4.84, \theta = 102^\circ$)

2.4) Να υπολογιστούν τα $V_{2,\mu}$ και $V_{2,\varepsilon}$ από τη γραφική παράσταση του σχήματος 2.6 για $V_1 = V_2 = 3$ και $T = \frac{4T_1}{3}$.

(Απάντηση: $V_{2,\mu} = 1.5, V_{2,\varepsilon} = 3$)

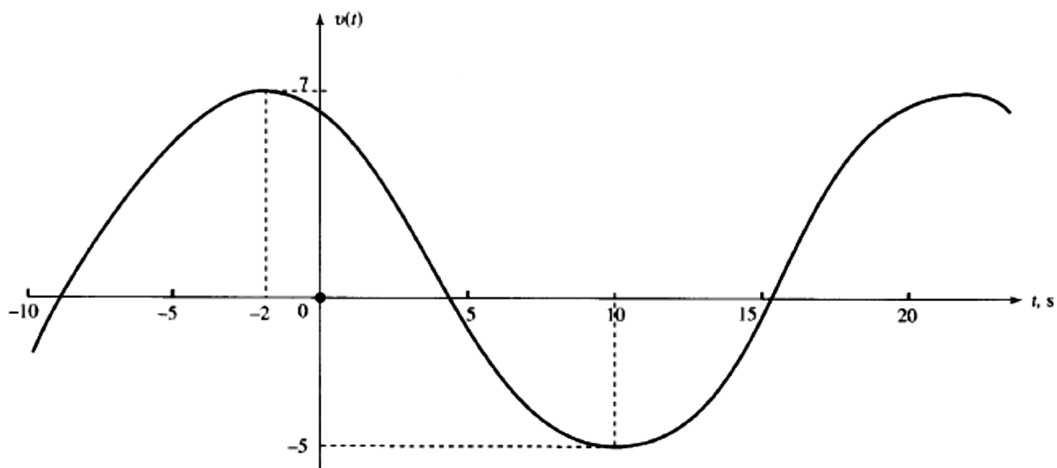
2.5) Να επαναληφθεί η άσκηση 2.4 για $V_1 = 0$, $V_2 = 4$ και $T = 2T_1$.

Απάντηση: $V_{2,\mu} = -2$, $V_{2,\varepsilon} = 2\sqrt{2}$

2.6) Να υπολογιστούν τα $V_{3,\mu}$ και $V_{3,\varepsilon}$ από τη γραφική παράσταση του σχήματος 2.7 για $V_o = 2$ και $T = 200T_1$.

(Απάντηση: $V_{3,\mu} = 0$, $V_{3,\varepsilon} = 0.1$)

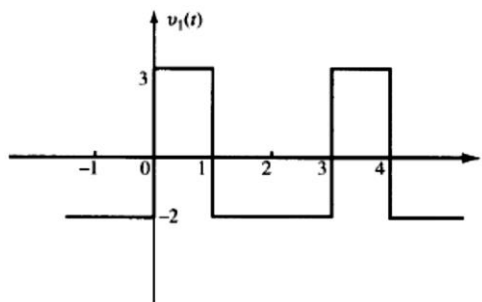
2.7) Η γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα 2.36 είναι ημιτονοειδής. Να εκφραστεί η συνάρτηση στη μορφή $v = A + B \sin(\omega t + \theta)$ και να υπολογιστεί η μέση και η ενεργός τιμή.



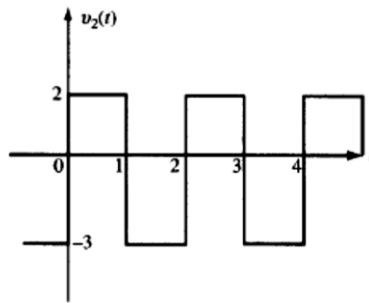
Σχήμα 2.36: Συνάρτηση $v(t)$ άσκησης 2.7

(Απάντηση: $v = 1 + 6 \sin(\frac{\pi}{12} t + 120^\circ)$, $V_\mu = 1$, $V_\varepsilon = \sqrt{19}$)

2.8) Να υπολογιστούν η μέση και η ενεργός τιμή για καθεμία από τις συναρτήσεις $v_1(t)$ και $v_2(t)$ που φαίνονται στα σχήματα 2.37 και 2.38 αντίστοιχα.



Σχήμα 2.37: Συνάρτηση $v_1(t)$ άσκησης 2.8



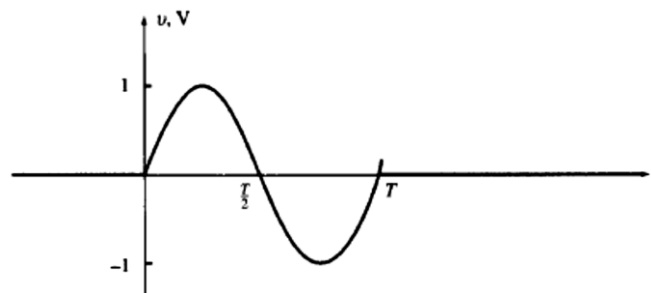
Σχήμα 2.38: Συνάρτηση $v_2(t)$ άσκησης 2.8

$$(Απάντηση: V_{1,\mu} = -\frac{1}{3}, V_{1,\varepsilon} = \sqrt{\frac{17}{3}}, V_{2,\mu} = -\frac{1}{2}, V_{2,\varepsilon} = \sqrt{\frac{13}{2}})$$

2.9) Το ρεύμα που διαρρέει ένα RL κύκλωμα με $R=5\Omega$ και $L=10H$ φαίνεται στο σχήμα 2.19 όπου $T=1s$. Να υπολογιστεί η τάση κατά μήκος των στοιχείων RL.

$$(Απάντηση: v = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 10 + 5t & , 0 < t < 1 \\ 5 & , t > 1 \end{cases})$$

2.10) Η τάση κατά μήκος ενός πηνίου $1H$ φαίνεται στο σχήμα 2.39. α) Να γραφεί η εξίσωση της τάσης $v(t)$. β) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο. γ) Να υπολογιστεί η μέγιστη ενέργεια στο πηνίο και η χρονική στιγμή που παίρνει τη μέγιστη τιμή.



Σχήμα 2.39: Συνάρτηση $v(t)$ άσκησης 2.10

$$(Απάντηση: \alpha) v = [u(t) - u(t - T)] \sin \frac{2\pi t}{T} (V),$$

$$\beta) i = \frac{T}{2\pi} [u(t) - u(t - T)] \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right) (A),$$

$$\gamma) W_{\max} = \frac{1}{2\pi^2} T^2 (J) \text{ για } t = \frac{T}{2}$$

2.11) Να γραφεί η έκφραση για τη συνάρτηση $v(t)$ η οποία φθίνει εκθετικά από την τιμή 7 για $t = 0$ στην τιμή 3 για $t = \infty$ με σταθερά χρόνου 200ms.

$$(Απάντηση: $v = 3 + 4e^{-5t}$ για $t > 0$)$$

2.12) Να γραφεί η έκφραση για τη συνάρτηση $v(t)$ η οποία αυξάνει εκθετικά από την τιμή 0 για $t = -\infty$ στην τιμή 9 για $t = 0$ με σταθερά χρόνου 0.8ms.

$$(Απάντηση: $v = 9e^{\frac{5t}{4}}$ για $t < 0$)$$

2.13) Να εκφραστεί το ρεύμα που φαίνεται στο σχήμα 2.14 με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης.

$$(Απάντηση: $i = 4u(t) + 6 \sum_{k=1}^{\infty} [u(t - 5k) - u(t - 5k + 2)]$)$$

2.14) Στο σχήμα 2.19 έστω ότι ισχύει $T = 1s$ και η κυματομορφή είναι η $s_1(t)$. Να εκφραστεί η $s_1(t)$ καθώς επίσης και η πρώτη και δεύτερη παράγωγος $\frac{ds_1}{dt}$ και $\frac{d^2s_1}{dt^2}$ αντίστοιχα, με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης και της συνάρτησης ώθησης.

$$(Απάντηση: $s_1(t) = [u(t) - u(t - 1)]t + u(t - 1),$
 $\frac{ds_1}{dt} = u(t) - u(t - 1),$
 $\frac{d^2s_1}{dt^2} = \delta(t) - \delta(t - 1)$)$$

2.15) Να βρεθεί η τάση (εκφρασμένη με τη βοήθεια της συνάρτησης ώθησης) η οποία οδηγεί στην εμφάνιση ρεύματος 1A για $t = 0$ όταν εφαρμόζεται κατά μήκος ενός πηνίου 10mH.

$$(Απάντηση: $v = 10^{-2} \delta(t)$ (V))$$

2.16) Έστω $v_1 = \cos t$, $v_2 = \cos(t + 30^\circ)$ και $v = v_1 + v_2$. α) Να γραφεί η v στη μορφή $v = A \cos(t + \theta)$. β) Να υπολογιστούν οι ενεργές τιμές των v_1 , v_2 και v .

$$(Απάντηση: α) $v = 1.93 \cos(t + 15^\circ)$, β) $V_{1,\varepsilon} = V_{2,\varepsilon} = 0.707$, $V_\varepsilon = 1.366$)$$

2.17) α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $v_1 = \cos t + \cos \sqrt{2}t$ δεν είναι περιοδική. β) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $v_2 = \cos t + \cos 1.4t$ είναι περιοδική και να βρεθεί η περίοδος T_2 . γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $v_3 = \cos t + \cos 1.41t$ είναι περιοδική και να βρεθεί η περίοδος T_3 . δ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $v_4 = \cos t + \cos 1.412t$ είναι περιοδική και να βρεθεί η περίοδος T_4 .

(Απάντηση: α) Ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός, επομένως η v_1 δεν είναι περιοδική,
 β) $T_2 = 10\pi s$,
 γ) $T_3 = 200\pi s$,
 δ) $T_4 = 10000\pi s$)

2.18) Ένα τυχαίο σήμα $s(t)$ με ενεργό τιμή 5V έχει dc τιμή 2V. Να υπολογιστεί η ενεργός τιμή του σήματος $s_o(t) = s(t) - 2$ που προκύπτει όταν η dc συνιστώσα αφαιρείται.

(Απάντηση: $S_{o,e} = \sqrt{5^2 - 4} = \sqrt{21} = 4.58V$)

2.19) Ένας πυκνωτής διαρρέεται από ρεύμα 2A στα 120V / 50Hz. Να εκφραστεί το ρεύμα και η τάση.

(Απάντηση: $i = 2.828 \sin 314t$, $v = -169.7 \cos \omega t$)

2.20) Η τάση κατά μήκος ενός πηνίου είναι $v = 200 \sin 100t$. Να υπολογιστεί το ρεύμα.

(Απάντηση: $i = 4 \sin(100t - 90^\circ)$)

2.21) Το ρεύμα κατά μήκος ενός πυκνωτή 50μF είναι $i = 2 \sin 1000t$. Να υπολογιστεί η τάση.

(Απάντηση: $v = 40 \sin(1000t - 90^\circ)$)

2.22) Να υπολογιστεί α) η μέγιστη τιμή και β) η περίοδος της κυματομορφής $v = 100 \sin(377t)$.

(Απάντηση: α) 100V, β) 16.7ms)

2.23) Μία κυματομορφή τάσης δίνεται από τη σχέση $v = 100\sin 314t$. Να υπολογιστεί ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρώσει η κυματομορφή το ένα τέταρτο του ολόκληρου κύκλου.

(Απάντηση: 5ms)

2.24) Ποιες είναι οι σχέσεις μεταξύ των φάσεων των ακόλουθων κυματομορφών;

α) $v = 100\sin(\omega t + 30^\circ)$, $i = 10\sin(\omega t + 60^\circ)$

β) $v = 100\sin(\omega t + 30^\circ)$, $i = 10\sin(\omega t - 30^\circ)$

γ) $v = 100\sin(\omega t - 60^\circ)$, $i = 10\sin(\omega t - 90^\circ)$

(Απάντηση: α) προπορεία κατά 30° ,
 β) μεταπορεία κατά 60° ,
 γ) μεταπορεία κατά 30° .)

2.25) Να προσδιοριστεί η μέση τιμή της κυματομορφής ρεύματος $i = I_m \sin \omega t$ για α) μία περίοδο και β) για μισή περίοδο.

(Απάντηση: α) 0, β) $\frac{2I_m}{\pi}$)

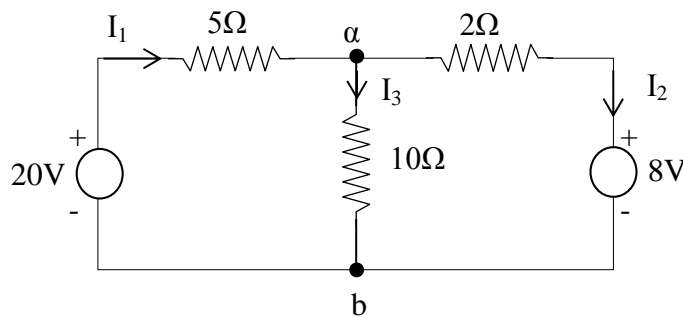
Κεφάλαιο 3: Μέθοδοι ανάλυσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων - Βασικά θεωρήματα

3.1. Μέθοδος ρευμάτων κλάδων

Στη μέθοδο ρευμάτων κλάδων, θεωρείται ότι ένα ρεύμα διαρρέει κάθε κλάδο ενός κυκλώματος. Στη συνέχεια εφαρμόζεται ο νόμος ρευμάτων του Kirchhoff στους κύριους κόμβους και οι τάσεις μεταξύ των κόμβων χρησιμεύουν στο να συνδέουν τα ρεύματα μεταξύ τους. Με αυτό τον τρόπο προκύπτουν μία σειρά από εξισώσεις οι οποίες αν λυθούν δίνουν τα ζητούμενα ρεύματα.

Παράδειγμα 3.1

Να υπολογιστεί το ρεύμα σε κάθε κλάδο του σχήματος 3.1 με τη βοήθεια της μεθόδου ρευμάτων κλάδων.



Σχήμα 3.1: Κύκλωμα παραδείγματος 3.1

Απάντηση:

Τα ρεύματα I_1, I_2, I_3 επιλέγονται στους κλάδους με τις κατευθύνσεις που φαίνονται στο σχήμα 3.1. Εφαρμόζοντας το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff στον κόμβο a προκύπτει:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (3.1)$$

Η τάση V_{ab} γράφεται με τη βοήθεια των στοιχείων σε κάθε κλάδο:

$$V_{ab} = 20 - 5I_1, \quad V_{ab} = 10I_3, \quad V_{ab} = 2I_2 + 8$$

Επομένως προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$20 - 5I_1 = 10I_3 \quad (3.2)$$

$$20 - 5I_1 = 2I_2 + 8 \quad (3.3)$$

Αν λυθεί το σύστημα των εξισώσεων (3.1), (3.2) και (3.3) προκύπτουν τα ρεύματα: $I_1 = 2A$, $I_2 = 1A$, $I_3 = 1A$.

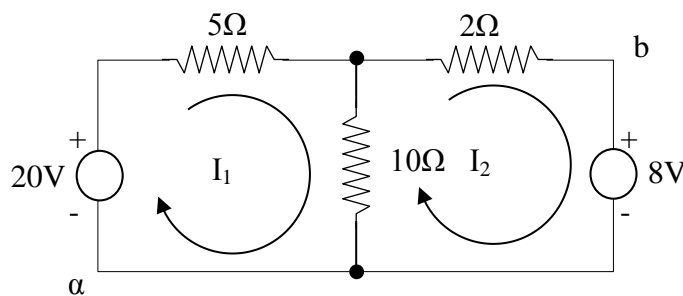
Τα ρεύματα είναι δυνατό να επιλεγούν και με αντίθετες κατευθύνσεις σε κάθε κλάδο και τότε τα ρεύματα θα έχουν το ανάλογο πρόσημο σύμφωνα με την κατεύθυνση. Σε ένα πιο σύνθετο κύκλωμα η μέθοδος ρευμάτων κλάδων είναι δύσκολο να εφαρμοστεί καθώς η επιλογή των κατευθύνσεων των ρευμάτων γίνεται αυθαίρετα και όχι με κάποιους κανόνες οι οποίοι θα οδηγήσουν στην επίλυση του κυκλώματος. Γι' αυτό το λόγο συνήθως προτιμούνται η μέθοδος ρευμάτων βρόχων και η μέθοδος τάσεων κόμβων.

3.2. Μέθοδος ρευμάτων βρόχων

Στη μέθοδο ρευμάτων βρόχων, σε κάθε βρόχο (ή «παράθυρο») του κυκλώματος ορίζεται ένα ρεύμα έτσι ώστε το ρεύμα να ολοκληρώνει μία κλειστή διαδρομή. Με αυτό τον τρόπο κάθε στοιχείο και κάθε κλάδος θα έχει μόνο ένα ανεξάρτητο ρεύμα. Όταν ένας κλάδος διαρρέεται από δύο ρεύματα βρόχων, το ολικό ρεύμα υπολογίζεται από το αλγεβρικό τους άθροισμα. Τα ρεύματα βρόχων μπορούν να οριστούν με δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη φορά. Γενικά προτιμάται η δεξιόστροφη φορά όλων των ρευμάτων βρόχων σε ένα κύκλωμα. Μόλις γίνει ο ορισμός των ρευμάτων σε κάθε βρόχο, εφαρμόζεται ο νόμος τάσεων του Kirchhoff για κάθε βρόχο για να προκύψουν οι εξισώσεις.

Παράδειγμα 3.2

Να βρεθούν τα ρεύματα σε κάθε κλάδο του κυκλώματος του σχήματος 3.2 με τη μέθοδο ρευμάτων βρόχου.



Σχήμα 3.2: Κύκλωμα παραδείγματος 3.2

Απάντηση:

Τα ρεύματα I_1, I_2 επιλέγονται με τον τρόπο και τη φορά που φαίνεται στο σχήμα 3.2. Στη συνέχεια εφαρμόζεται ο νόμος τάσεων του Kirchhoff στον αριστερό βρόχο με εκκίνηση το σημείο α:

$$-20 + 5I_1 + 10(I_1 - I_2) = 0 \Leftrightarrow 15I_1 - 10I_2 = 20 \quad (3.4)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται ο νόμος τάσεων του Kirchhoff στο δεξί βρόχο με εκκίνηση το σημείο b:

$$8 + 10(I_2 - I_1) + 2I_2 = 0 \Leftrightarrow -10I_1 + 12I_2 = -8 \quad (3.5)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (3.4) και (3.5) προκύπτουν: $I_1 = 2A$ και $I_2 = 1A$. Το ρεύμα στον κεντρικό κλάδο ισούται με $I_1 - I_2 = 1A$. Στο παράδειγμα 3.1 αυτό ήταν το ρεύμα I_3 .

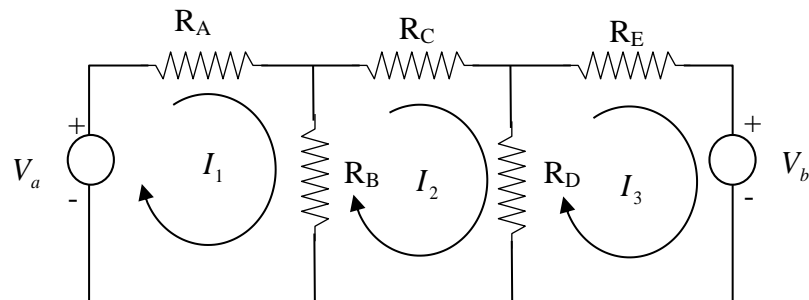
Τα ρεύματα δεν είναι απαραίτητο να περιορίζονται στους μικρότερους βρόχους του κυκλώματος αλλά είναι δυνατό να καταλαμβάνουν και μεγαλύτερους βρόχους. Ο γενικός κανόνας είναι ότι κάθε στοιχείο του κυκλώματος πρέπει να διαρρέεται από ένα ρεύμα ή ένα συνδυασμό ρευμάτων και επιπλέον ότι δύο στοιχεία σε διαφορετικούς κλάδους δεν πρέπει να διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα ή από τον ίδιο συνδυασμό ρευμάτων.

3.3. Πίνακες και ορίζουσες

Οι n εξισώσεις σε ένα κύκλωμα με n βρόχους μπορούν να γραφούν σε μορφή πίνακα.

Παράδειγμα 3.3

Να γραφούν σε μορφή πίνακα οι εξισώσεις του κυκλώματος του σχήματος 3.3.



Σχήμα 3.3: Κύκλωμα παραδείγματος 3.3

Απάντηση:

Το κύκλωμα του σχήματος 3.3 έχει τρεις βρόχους. Αν εφαρμοστεί ο νόμος τάσεων του Kirchhoff σε κάθε βρόχο τότε προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$(R_A + R_B)I_1 - R_B I_2 = V_a$$

$$-R_B I_1 + (R_B + R_C + R_D)I_2 - R_D I_3 = 0$$

$$-R_D I_2 + (R_D + R_E)I_3 = -V_b$$

Στη συνέχεια οι εξισώσεις γράφονται σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} R_A + R_B & -R_B & 0 \\ -R_B & R_B + R_C + R_D & -R_D \\ 0 & -R_D & R_D + R_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a \\ 0 \\ -V_b \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία του πίνακα στη γενική τους μορφή για ένα κύκλωμα με τρεις βρόχους γράφονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Το στοιχείο R_{11} (γραμμή 1, στήλη 1) είναι το άθροισμα όλων των αντιστάσεων από τις οποίες διέρχεται το ρεύμα I_1 . Στο παράδειγμα 3.3 το στοιχείο R_{11} είναι το άθροισμα $R_A + R_B$. Ομοίως τα στοιχεία R_{22} και R_{33} είναι το άθροισμα όλων των αντιστάσεων από τις οποίες διέρχονται τα ρεύματα I_2 και I_3 αντίστοιχα.

Το στοιχείο R_{12} (γραμμή 1, στήλη 2) είναι το άθροισμα όλων των αντιστάσεων από τις οποίες διέρχονται τα ρεύματα I_1 και I_2 . Το πρόσημο του στοιχείου R_{12} θα είναι θετικό αν τα δύο ρεύματα διέρχονται με την ίδια φορά από κάθε αντίσταση και αρνητικό αν διέρχονται με αντίθετες φορές. Στο παράδειγμα 3.3 η αντίσταση R_B είναι η μόνη κοινή αντίσταση των ρευμάτων I_1 και I_2 και οι φορές των ρευμάτων είναι αντίθετες στην R_B , γι' αυτό και το πρόσημο είναι αρνητικό. Ομοίως τα στοιχεία R_{21}, R_{23}, R_{13} και R_{31} είναι το άθροισμα όλων των αντιστάσεων που είναι κοινές για τα ρεύματα βρόχων που υποδεικνύονται από του δείκτες, ενώ τα πρόσημα καθορίζονται με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω για το στοιχείο R_{12} . Πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι για όλα τα i και j ισχύει $R_{ij} = R_{ji}$. Ως αποτέλεσμα ο πίνακας με τις αντιστάσεις είναι συμμετρικός γύρω από τη βασική διαγώνιο.

Ο πίνακας των ρευμάτων δεν απαιτεί περαιτέρω επεξήγηση καθώς τα στοιχεία είναι σε μία στήλη με δείκτες 1,2,3,... που αντιπροσωπεύουν το ρεύμα στον αντίστοιχο βρόχο. Τα ρεύματα είναι και οι άγνωστοι στη μέθοδο ρευμάτων βρόχου και πρέπει να προσδιοριστούν με την επίλυση της εξίσωσης πινάκων.

Το στοιχείο V_1 στον πίνακα τάσεων είναι το άθροισμα όλων των πηγών τάσεων που «συναντά» το ρεύμα βρόχου I_1 . Το άθροισμα των τάσεων θα έχει θετικό πρόσημο αν το ρεύμα I_1 διέρχεται από το μείον (-) στο συν (+) της πηγής. Αλλιώς θα έχει αρνητικό πρόσημο. Με άλλα λόγια η τάση θα έχει θετικό πρόσημο αν παράγει ρεύμα με την ίδια κατεύθυνση του ρεύματος βρόχου. Στο σχήμα 3.3 του παραδείγματος 3.3 ο βρόχος 1 έχει μία πηγή V_a που παράγει ρεύμα στην ίδια κατεύθυνση με το ρεύμα I_1 , ο βρόχος 2 δεν έχει πηγή και ο βρόχος 3 έχει μία πηγή V_b η οποία παράγει ρεύμα σε αντίθετη κατεύθυνση από το ρεύμα I_3 και γι' αυτό η V_b έχει αρνητικό πρόσημο στον πίνακα των τάσεων.

Η εξίσωση πινάκων που προκύπτει από τη μέθοδο ρευμάτων βρόχου είναι δυνατό να λυθεί με πολλούς τρόπους. Ένας από αυτούς είναι η μέθοδος με τις ορίζουσες (νόμος του Cramer) η οποία θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

Παράδειγμα 3.4

Να λυθεί η εξίσωση πινάκων (3.6) του παραδείγματος 3.3 με τη μέθοδο των ορίζουσών (νόμος του Cramer).

Απάντηση:

Το άγνωστο ρεύμα I_1 προκύπτει ως λόγος δύο ορίζουσών. Η ορίζουσα στον παρανομαστή έχει τα στοιχεία του πίνακα με τις αντιστάσεις. Αυτή η ορίζουσα αναφέρεται ως ορίζουσα των συντελεστών και συμβολίζεται με Δ_R . Η ορίζουσα στον αριθμητή έχει τα ίδια στοιχεία με την Δ_R με τη διαφορά ότι στην πρώτη στήλη της έχουν τοποθετηθεί τα στοιχεία του πίνακα των τάσεων. Δηλαδή:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & R_{12} & R_{13} \\ V_2 & R_{22} & R_{23} \\ V_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} V_1 & R_{12} & R_{13} \\ V_2 & R_{22} & R_{23} \\ V_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

Ομοίως:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & V_1 & R_{13} \\ R_{21} & V_2 & R_{23} \\ R_{31} & V_3 & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} R_{11} & V_1 & R_{13} \\ R_{21} & V_2 & R_{23} \\ R_{31} & V_3 & R_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & V_1 \\ R_{21} & R_{22} & V_2 \\ R_{31} & R_{32} & V_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & V_1 \\ R_{21} & R_{22} & V_2 \\ R_{31} & R_{32} & V_3 \end{vmatrix}$$

Τα επιμέρους ρεύματα μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση των τάσεων. Δηλαδή:

$$I_1 = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_R} \right) \quad (3.7)$$

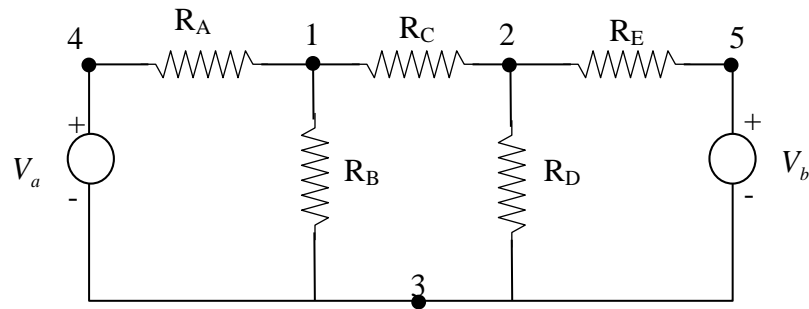
$$I_2 = V_1 \left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{32}}{\Delta_R} \right) \quad (3.8)$$

$$I_3 = V_1 \left(\frac{\Delta_{13}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_R} \right) \quad (3.9)$$

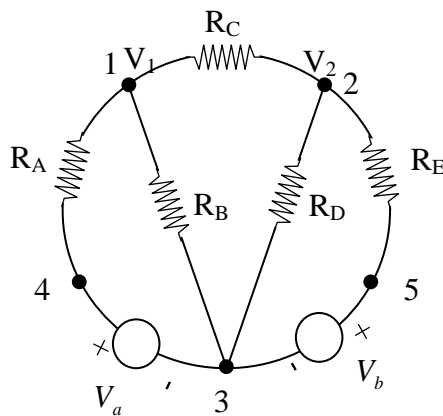
Όπου Δ_{ij} είναι ο παράγοντας του R_{ij} (το στοιχείο στη σειρά i και στη στήλη j) στην Δ_R .

3.4. Μέθοδος τάσεων κόμβου

Το δίκτυο που φαίνεται στο σχήμα 3.4 περιέχει πέντε κόμβους. Οι κόμβοι 4 και 5 είναι απλοί κόμβοι ενώ οι κόμβοι 1,2 και 3 είναι οι κύριοι κόμβοι. Στη μέθοδο τάσεων κόμβου, ένας από τους κύριους κόμβους επιλέγεται ως ο κόμβος αναφοράς. Στη συνέχεια γράφονται οι εξισώσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή του νόμου ρευμάτων του Kirchhoff στους άλλους κύριους κόμβους. Σε κάθε ένα από τους κύριους κόμβους ορίζεται μία τάση (η τάση αυτή αναφέρεται ως προς τον κόμβο αναφοράς). Οι τάσεις στη μέθοδο τάσεων κόμβων θεωρούνται ως άγνωστοι.



Σχήμα 3.4: Μέθοδος τάσεων κόμβου



Σχήμα 3.5: Επανασχεδίαση σχήματος 3.4 με κόμβο αναφοράς τον 3

Το κύκλωμα του σχήματος 3.4 επανασχεδιάζεται στο σχήμα 3.5 όπου ως κόμβος αναφοράς έχει επιλεγεί ο κόμβος 3 για τις τάσεις V_1 και V_2 . Από το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff προκύπτει ότι το άθροισμα των ρευμάτων στον κόμβο 1 είναι μηδέν:

$$\frac{V_1 - V_a}{R_A} + \frac{V_1}{R_B} + \frac{V_1 - V_2}{R_C} = 0$$

Ομοίως το ολικό ρεύμα στο κόμβο 2 πρέπει να είναι μηδέν:

$$\frac{V_2 - V_1}{R_C} + \frac{V_2}{R_D} + \frac{V_2 - V_b}{R_E} = 0$$

Στη συνέχεια οι δύο παραπάνω εξισώσεις τοποθετούνται σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} & -\frac{1}{R_C} \\ -\frac{1}{R_C} & \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_a}{R_A} \\ \frac{V_b}{R_E} \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο. Το στοιχείο 1,1 περιέχει το άθροισμα όλων των αντιστάσεων που είναι συνδεδεμένες στον κόμβο 1. Το στοιχείο 2,2 περιέχει το άθροισμα όλων των αντιστάσεων που είναι συνδεδεμένες στον κόμβο 2. Τα στοιχεία 1,2 και 2,1 είναι το καθένα ίσο με το αρνητικό άθροισμα όλων των αντιστάσεων από τους κλάδους που ενώνουν τους κόμβους 1 και 2. Στο συγκεκριμένο κύκλωμα υπάρχει μόνο ένας τέτοιος κλάδος. Στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης πινάκων, ο πίνακας περιέχει τα ρεύματα $\frac{V_a}{R_A}$ και $\frac{V_b}{R_E}$ που παράγονται από τις πηγές.

Παράδειγμα 3.5

Να λυθεί το κύκλωμα του παραδείγματος 3.2 με τη μέθοδο τάσεων κόμβου.

Απάντηση:

Το κύκλωμα σχεδιάζεται ξανά στο σχήμα 3.6. Με δύο κύριους κόμβους μόνο μία εξίσωση απαιτείται. Ο κόμβος στο κάτω μέρος θεωρείται ο κόμβος αναφοράς. Ισχύει σύμφωνα με το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff:

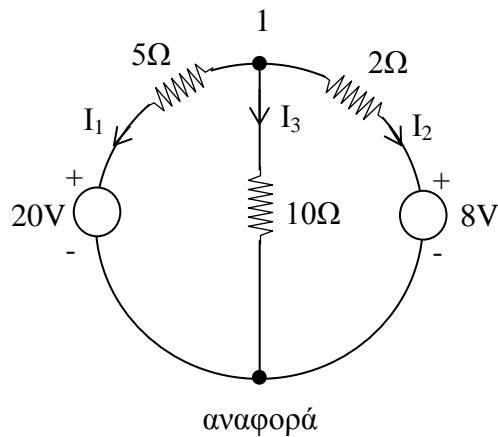
$$\frac{V_1 - 20}{5} + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - 8}{2} = 0 \Leftrightarrow V_1 = 10V$$

$$I_1 = \frac{10 - 20}{5} = -2A$$

Το αρνητικό πρόσημο στο ρεύμα I_1 δείχνει ότι το ρεύμα έχει διαφορετική φορά από αυτή που έχει σχεδιαστεί στο σχήμα 3.6. Επίσης:

$$I_2 = \frac{10-8}{2} = 1A$$

$$I_3 = \frac{10}{10} = 1A$$



Σχήμα 3.6: Κύκλωμα παραδείγματος 3.5

3.5. Αντίσταση εισόδου/εξόδου

Στα δίκτυα με μία πηγή, η αντίσταση εισόδου είναι ένα στοιχείο που συχνά εξετάζεται στην ανάλυση του κυκλώματος. Ένα τέτοιο δίκτυο φαίνεται στο σχήμα 3.7 όπου η τάση τροφοδοσίας είναι ίση με V_1 και το αντίστοιχο ρεύμα είναι I_1 . Εφόσον η μόνη πηγή είναι η V_1 τότε το ρεύμα σύμφωνα με την εξίσωση 3.7 (ενότητα 3.3) είναι:

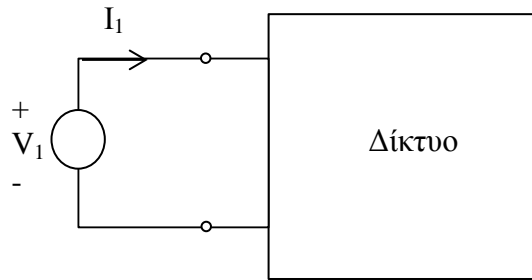
$$I_1 = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} \right)$$

Η αντίσταση εισόδου είναι ο λόγος της V_1 προς το ρεύμα I_1 :

$$R_{\text{εισ},1} = \frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{\Delta_R}{\Delta_{11}} \right)$$

Η πηγή τάσης που εφαρμόζεται στο δίκτυο του σχήματος 3.7 δημιουργεί τάσεις μεταξύ όλων των κόμβων του. Αν τοποθετηθεί μία εξωτερική αντίσταση μεταξύ δύο κόμβων, τότε θα μειωθεί η τάση μεταξύ των κόμβων αυτών.

Η αντίσταση εξόδου ορίζεται ως ο λόγος της τάσης του ανοιχτοκυκλωμένου κυκλώματος ως προς το ρεύμα του βραχυκυκλωμένου κυκλώματος.



Σχήμα 3.7: Αντίσταση εισόδου

3.6. Αντίσταση μεταφοράς

Η εφαρμοζόμενη τάση σε ένα κομμάτι ενός κυκλώματος οδηγεί στην εμφάνιση ρευμάτων σε όλους του κλάδους του δικτύου. Για παράδειγμα μία πηγή τάσης που εφαρμόζεται σε ένα δίκτυο οδηγεί στην εμφάνιση ενός ρεύματος εξόδου εκεί που είναι συνδεδεμένο το φορτίο. Στην περίπτωση αυτή το δίκτυο έχει μία αντίσταση μεταφοράς. Στο δίκτυο του σχήματος 3.8, η πηγή τάσης είναι \$V_r\$ και το ρεύμα εξόδου είναι \$I_n\$. Η εξίσωση ρευμάτων βρόχου για το ρεύμα εξόδου \$I_n\$ περιλαμβάνει μόνο έναν όρο, αυτόν που προκύπτει από την \$V_r\$:

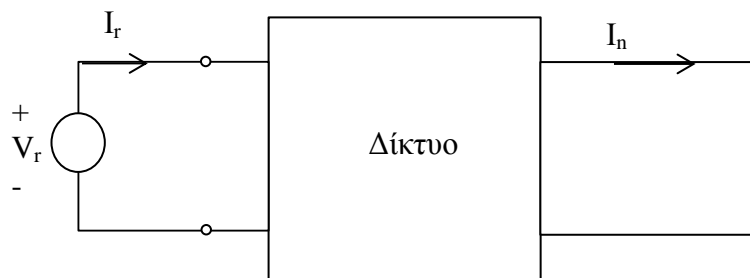
$$I_n = (0) \left(\frac{\Delta_{1n}}{\Delta_R} \right) + \dots + 0 + V_r \left(\frac{\Delta_{rn}}{\Delta_R} \right) + 0 + \dots$$

Η αντίσταση μεταφοράς του δικτύου είναι ο λόγος της τάσης \$V_r\$ προς το ρεύμα \$I_n\$:

$$R_{\mu\epsilon\tau,n} = \frac{V_r}{I_n} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{rn}}$$

Επειδή ο πίνακας \$\Delta_m\$ είναι συμμετρικός ισχύει \$\Delta_{rn} = \Delta_{nr}\$ και επομένως:

$$R_{\mu\epsilon\tau,n} = R_{\mu\epsilon\tau,nr}$$



Σχήμα 3.8: Αντίσταση μεταφοράς

Ως συμπέρασμα προκύπτει ότι αν μία συγκεκριμένη τάση σε ένα βρόχο r οδηγεί στην εμφάνιση ενός ρεύματος σε έναν βροχο s τότε η ίδια τάση στο βρόχο s θα οδηγήσει στην εμφάνιση του ίδιου ρεύματος στο βρόχο r .

Στην πιο γενική περίπτωση ενός δικτύου με n βρόχους που περιέχει περισσότερες από μία πηγές τάσης, η εξίσωση για το ρεύμα στο βρόχο k μπορεί να γραφεί με όρους αντίστασης εισόδου και αντίστασης μεταφοράς ως εξής:

$$I_k = \frac{V_1}{R_{\mu\epsilon\tau,1k}} + \dots + \frac{V_{k-1}}{R_{\mu\epsilon\tau,(k-1)k}} + \frac{V_k}{R_{\epsilon\iota\sigma,k}} + \frac{V_{k+1}}{R_{\mu\epsilon\tau,(k+1)k}} + \dots + \frac{V_n}{R_{\mu\epsilon\tau,nk}}$$

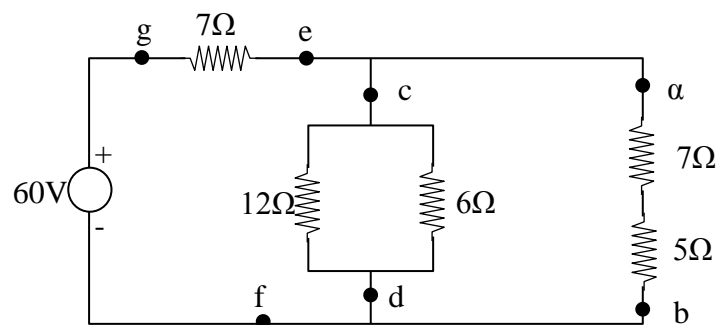
Στην παραπάνω σχέση φαίνεται καθαρά η έννοια της επαλληλίας, καθώς οι αντιστάσεις καθορίζουν τι συνεισφορά έχουν οι πηγές τάσεις στην εμφάνιση ρευμάτων σε ένα συγκεκριμένο βρόχο. Για παράδειγμα μία πηγή τάσης απομακρυσμένη από τον βρόχο k θα έχει μεγαλύτερη αντίσταση μεταφοράς σε αυτό το βρόχο και ως εκ τούτου θα συνεισφέρει πολύ λίγο στο ρεύμα I_k . Αντίθετα, η πηγή τάσης V_k που είναι κοντά στο βρόχο k θα έχει τη μεγαλύτερη συνεισφορά στο ρεύμα I_k .

3.7. Ισοδύναμο κύκλωμα

Η μέθοδος ρευμάτων βρόχου και η μέθοδος τάσεων κόμβου είναι οι κύριες τεχνικές στην ανάλυση κυκλωμάτων. Παρ' όλα αυτά η ισοδύναμη αντίσταση για αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά και για αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα σε συνδυασμό με τους κανόνες για τη διαίρεση ρευμάτων και τάσεων, παρέχουν ακόμα μία μέθοδο για την ανάλυση κυκλωμάτων. Αυτή η μέθοδος συνήθως απαιτεί τη σχεδίαση πολλών επιμέρους κυκλωμάτων. Ωστόσο, δίνει μία πολύ ξεκάθαρη εικόνα για τη λειτουργία του κυκλώματος (τάσεις, ρεύματα, ισχύς). Συνήθως η διαδικασία για την εύρεση του ισοδύναμου κυκλώματος αρχίζει με μία επισκόπηση του κυκλώματος για να βρεθούν συνδυασμοί αντιστάσεων σε σειρά ή παράλληλα που μπορούν να αντικατασταθούν.

Παράδειγμα 3.6

Να βρεθεί η ολική ισχύς που παρέχεται από την πηγή των 60V και η ισχύς που καταναλώνεται από κάθε αντίσταση στο σχήμα 3.9.



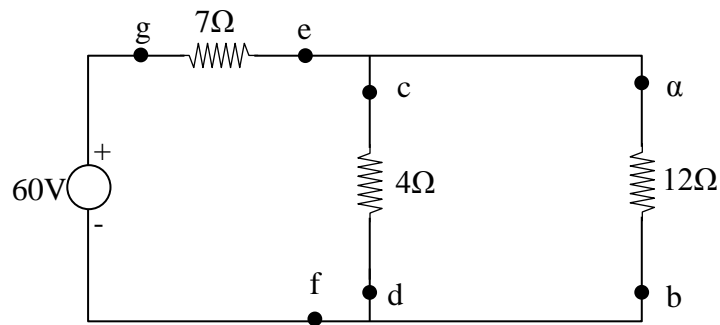
Σχήμα 3.9: Κύκλωμα παραδείγματος 3.6

Απάντηση:

$$R_{ab} = 7 + 5 = 12\Omega$$

$$R_{cd} = \frac{12 \cdot 6}{12 + 6} = 4\Omega$$

Επομένως το κύκλωμα γίνεται όπως φαίνεται στο σχήμα 3.10.

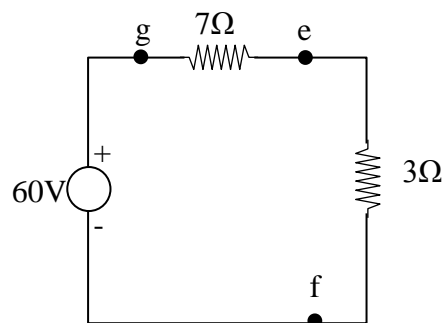


Σχήμα 3.10: Ισοδύναμο κύκλωμα παραδείγματος 3.6

Οι αντιστάσεις των 4Ω και 12Ω είναι συνδεδεμένες παράλληλα. Επομένως η αντίσταση του συνδυασμού τους είναι:

$$R_{ef} = \frac{12 \cdot 4}{12 + 4} = 3\Omega$$

Επομένως το κύκλωμα γίνεται όπως φαίνεται στο σχήμα 3.11.



Σχήμα 3.11: Ισοδύναμο κύκλωμα παραδείγματος 3.6

Η αντίσταση των 7Ω είναι σε σειρά με την αντίσταση των 3Ω επομένως η συνολική ισοδύναμη αντίσταση για όλο το κύκλωμα είναι:

$$R_{g\sigma} = 7 + 3 = 10\Omega$$

Η ολική ισχύς που καταναλώνεται ισούται με την ολική ισχύ που παρέχεται από την πηγή. Αυτή μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$P_{ολ} = \frac{V^2}{R_{\sigma}} = \frac{60^2}{10} = 360W$$

Η ολική ισχύς διαιρείται μεταξύ της $R_{ge} = 7\Omega$ και της $R_{ef} = 3\Omega$ ως εξής:

$$P_{ge} = P_{7\Omega} = \frac{7}{7+3} \cdot 360 = 252W$$

$$P_{ef} = P_{3\Omega} = \frac{3}{7+3} \cdot 360 = 108W$$

Η ισχύς P_{ef} διαιρείται περαιτέρω μεταξύ της $R_{cd} = 4\Omega$ και της $R_{ab} = 12\Omega$ ως εξής:

$$P_{cd} = P_{4\Omega} = \frac{12}{4+12} \cdot 108 = 81W$$

$$P_{ab} = P_{12\Omega} = \frac{4}{4+12} \cdot 108 = 27W$$

Τέλος κάθε μία ισχύς διαιρείται επιπλέον για να βρεθεί η ισχύς κάθε αντίστασης ξεχωριστά.

$$P_{12\Omega} = \frac{6}{6+12} \cdot 81 = 27W$$

$$P_{6\Omega} = \frac{12}{6+12} \cdot 81 = 54W$$

$$P_{7\Omega} = \frac{7}{7+5} \cdot 27 = 15.75W$$

$$P_{5\Omega} = \frac{5}{7+5} \cdot 27 = 11.25W$$

3.8. Αρχή της επαλληλίας

Ένα γραμμικό δίκτυο το οποίο περιέχει δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες πηγές μπορεί να αναλυθεί με τη μέθοδο της επαλληλίας. Στη μέθοδο αυτή υπολογίζονται οι τάσεις και τα ρεύματα καθώς δρα μόνο μία από τις πηγές. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται για όλες τις πηγές ξεχωριστά και στη συνέχεια τα επιμέρους αποτελέσματα για τις τάσεις και τα ρεύματα προστίθενται για να προκύψουν τα

τελικά. Η αρχή της επαλληλίας ισχύει επειδή η σχέση μεταξύ ρεύματος και τάσης είναι γραμμική.

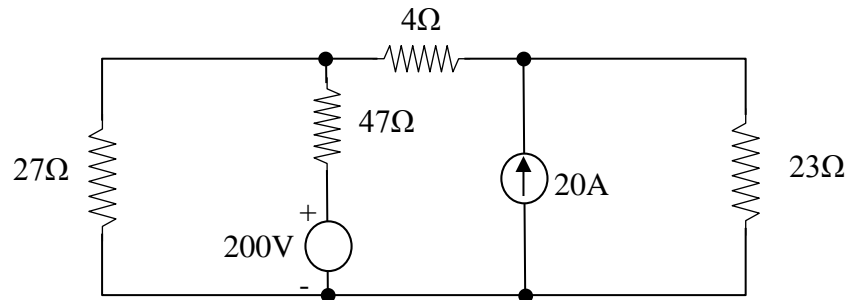
Στην περίπτωση που το δίκτυο περιέχει εξαρτημένες πηγές, η επαλληλία μπορεί μόνο να εφαρμοστεί στην περίπτωση που οι συναρτήσεις ελέγχου των πηγών είναι εξωτερικές του δικτύου που περιέχει τις πηγές έτσι ώστε οι συναρτήσεις ελέγχου να παραμένουν αμετάβλητες καθώς οι πηγές δρουν μία μία κάθε φορά.

Οι πηγές τάσεις κατά τη διάρκεια που δρα μία άλλη πηγή αντικαθίστανται με βραχυκύκλωμα ενώ οι πηγές ρεύματος κατά τη διάρκεια που δρα μία άλλη πηγή αντικαθίστανται με ανοιχτοκύκλωμα.

Η επαλληλία δεν είναι δυνατό να εφαρμοστεί κατευθείαν για τον υπολογισμό της ισχύος επειδή η ισχύς είναι ένα μέγεθος που είναι ανάλογο με το τετράγωνο του ρεύματος ή το τετράγωνο της τάσης και ως εκ τούτου είναι μη γραμμικό.

Παράδειγμα 3.7

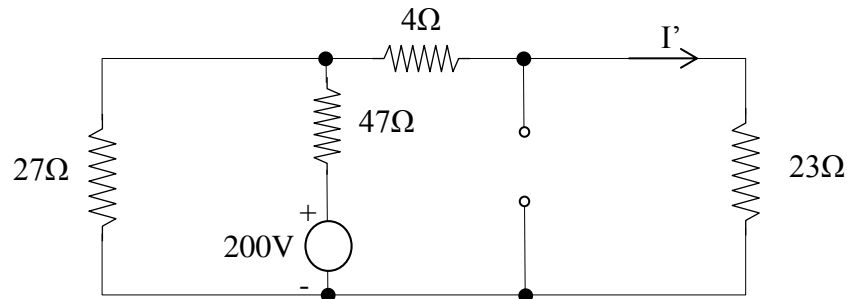
Να υπολογιστεί το ρεύμα στην αντίσταση των 23Ω του σχήματος 3.12 εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας.



Σχήμα 3.12: Κύκλωμα παραδείγματος 3.7

Απάντηση:

Αρχικά θεωρείται ότι η πηγή των 200V δρα μόνη της. Επομένως η πηγή των 20A αντικαθίσταται από ανοιχτοκύκλωμα. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 3.13.



Σχήμα 3.13: Δρα μόνο η πηγή των 200V

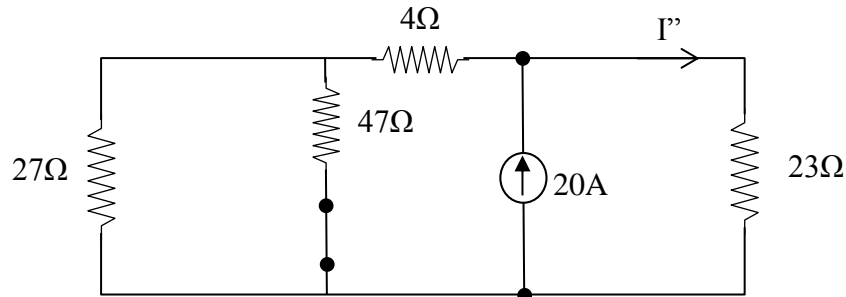
Στην περίπτωση αυτή είναι:

$$R'_{\sigma} = 47 + \frac{27(4 + 23)}{54} = 60.5\Omega$$

$$I'_{ολ} = \frac{200}{60.5} = 3.61A$$

$$I'_{23\Omega} = \frac{27}{54} \cdot 3.31 = 1.65A$$

Στη συνέχεια θεωρείται ότι η πηγή των 20A δρα μόνη της. Επομένως η πηγή των 200V αντικαθίσταται από βραχυκύκλωμα. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 3.14.



Σχήμα 3.14: Δρα μόνο η πηγή των 20A

Στην περίπτωση αυτή είναι:

$$R''_{\sigma} = 4 + \frac{27 \cdot 47}{74} = 21.15\Omega$$

$$I''_{23\Omega} = \left(\frac{21.15}{21.15 + 23} \right) \cdot 20 = 9.58A$$

Επομένως το ολικό ρεύμα στην αντίσταση των 23Ω είναι:

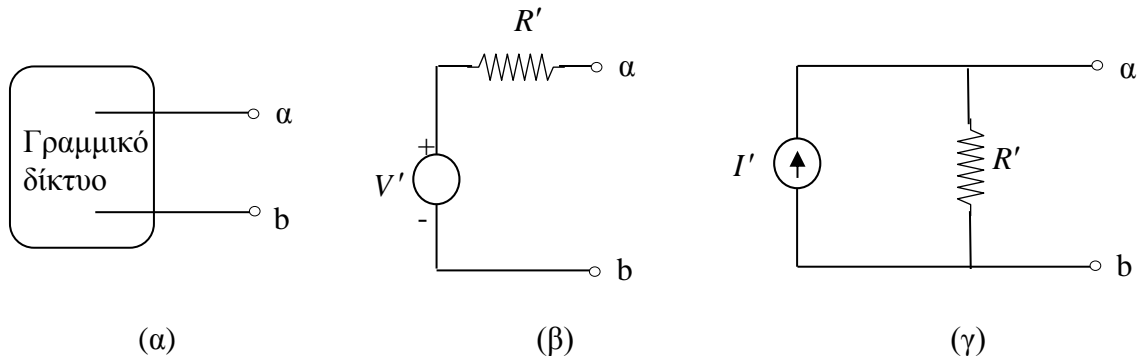
$$I_{23\Omega} = I'_{23\Omega} + I''_{23\Omega} = 11.23A$$

3.9. Θεωρήματα Thévenin και Norton

Ένα γραμμικό δίκτυο με αντιστάσεις που περιέχει μία ή περισσότερες πηγές τάσης ή ρεύματος μπορεί να αντικατασταθεί από μία μόνο πηγή τάσης σε σειρά με μία αντίσταση (Θεώρημα Thévenin) ή από μία μόνο πηγή ρεύματος παράλληλα με μία αντίσταση (Θεώρημα Norton). Η τάση ονομάζεται ισοδύναμη τάση Thévenin V' και το ρεύμα ισοδύναμο ρεύμα Norton I' . Οι δύο αντιστάσεις είναι ίδιες και συμβολίζονται με R' . Όταν τα άκρα a και b στο σχήμα 3.15 είναι ανοιχτοκυκλωμένα εμφανίζεται μία τάση ανάμεσά τους.

Στο σχήμα 3.15β η τάση ανάμεσα στα άκρα a και b είναι η τάση V' του ισοδύναμου κυκλώματος Thévenin. Αν τα άκρα a και b βραχυκυκλωθούν τότε ο κλάδος θα διαρρέεται από ρεύμα.

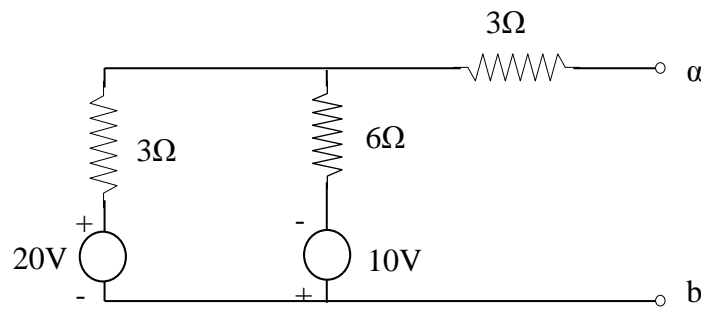
Στο σχήμα 3.15γ το ρεύμα που εμφανίζεται είναι το ρεύμα I' του ισοδύναμου κυκλώματος Norton. Αν τα κυκλώματα β και γ είναι ισοδύναμα του ίδιου δικτύου τότε είναι ισοδύναμα και μεταξύ τους. Ως αποτέλεσμα ισχύει η σχέση: $I' = \frac{V'}{R'}$. Αν και η τάση V' και το ρεύμα I' είναι προσδιορισμένα από το κύκλωμα τότε ισχύει: $R' = \frac{V'}{I'}$.



Σχήμα 3.15: (α) Γραμμικό Δίκτυο, (β) Ισοδύναμο Thévenin , (γ) Ισοδύναμο Norton

Παράδειγμα 3.8

Να βρεθεί το ισοδύναμο Thévenin και Norton για το κύκλωμα του σχήματος 3.16.



Σχήμα 3.16: Κύκλωμα παραδείγματος 3.8

Απάντηση:

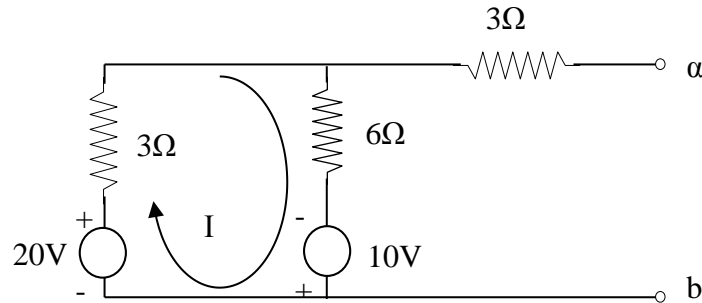
Με τα άκρα α και β ανοιχτοκυκλωμένα οι δύο πηγές προκαλούν την εμφάνιση ενός δεξιόστροφου ρεύματος στις αντιστάσεις των 3Ω και 6 Ω όπως φαίνεται στο σχήμα 3.17.

$$I = \frac{20 + 10}{3 + 6} = \frac{30}{9} \text{ A}$$

Εφόσον δεν διέρχεται ρεύμα στην πάνω δεξιά αντίσταση των 3Ω, η τάση Thévenin είναι δυνατό να υπολογιστεί από οποιονδήποτε από τους δύο κλάδους:

$$V_{ab} = V' = 20 - \frac{30}{9} \cdot 3 = 10V \quad \text{ή}$$

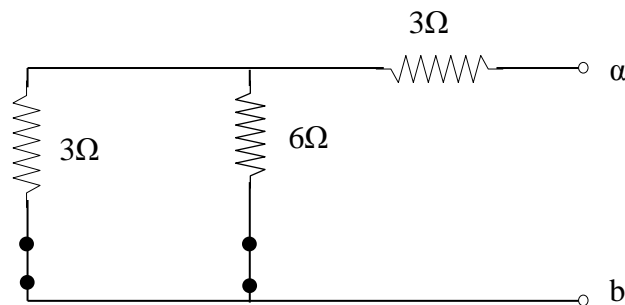
$$V_{ab} = V' = \frac{30}{9} \cdot 6 = 10V$$



Σχήμα 3.17: Κύκλωμα παραδείγματος 3.8

Η αντίσταση R' υπολογίζεται αν βραχυκυκλωθούν οι πηγές τάσης όπως φαίνεται στο σχήμα 3.18 και βρεθεί η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος ανάμεσα στους ακροδέκτες a και b .

$$R' = 3 + \frac{3 \cdot 6}{9} = 5\Omega$$



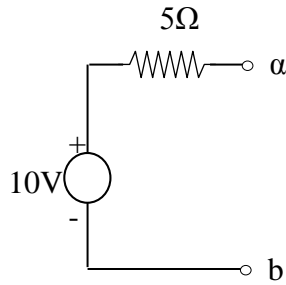
Σχήμα 3.18: Υπολογισμός ισοδύναμης αντίστασης παραδείγματος 3.8

Αν βραχυκυκλωθούν τα άκρα a και b τότε εμφανίζεται ένα ρεύμα $I_{\beta\rho}$ λόγω των δύο πηγών. Σύμφωνα με το θεώρημα της επαλληλίας προκύπτει:

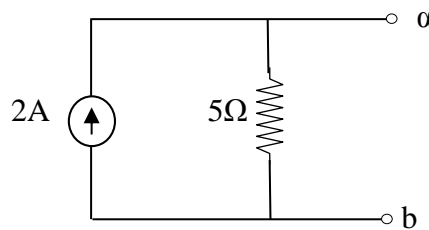
$$I_{\beta\rho} = I' = \left(\frac{6}{6+3}\right) \left[\frac{20}{3+\frac{3 \cdot 6}{9}}\right] - \left(\frac{3}{3+3}\right) \left[\frac{10}{6+\frac{3 \cdot 3}{6}}\right] = 2A$$

Στο σχήμα 3.19 φαίνεται το ισοδύναμο Thévenin ενώ στο σχήμα 3.20 φαίνεται το ισοδύναμο Norton. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα τα μεγέθη V' , I' , R' υπολογίστηκαν

ανεξάρτητα. Εφόσον όμως τα τρία μεγέθη συνδέονται με το νόμο του Ohm, αρκεί ο υπολογισμός δύο εξ αυτών για να υπολογιστεί το τρίτο.



Σχήμα 3.19: Ισοδύναμο Thévenin παραδείγματος 3.8



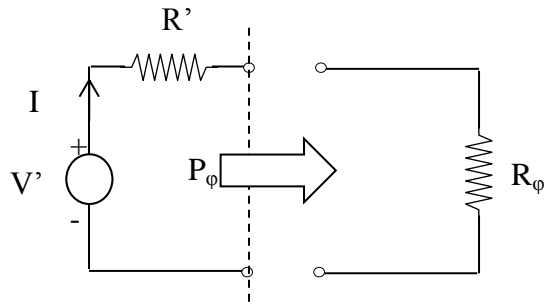
Σχήμα 3.20: Ισοδύναμο Norton παραδείγματος 3.8

Συγκεντρωτικά για το θεώρημα Thévenin ένα γραμμικό δίκτυο που περιέχει αντιστάσεις και πηγές μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ισοδύναμο κύκλωμα που αποτελείται από μία πηγή τάσης σε σειρά με μία αντίσταση R_{Th} . Η τάση V_{Th} είναι η τάση στα άκρα a και b με ανοιχτοκυκλωμένα τα άκρα αυτά, ενώ η R_{Th} είναι ο λόγος της ανοιχτοκυκλωμένης τάσης προς το ρεύμα βραχυκύκλωσης που αναπτύσσεται αν βραχυκυκλωθούν τα άκρα a και b .

Το ισοδύναμο Norton είναι δυνατό να βρεθεί και από το ισοδύναμο Thévenin με μετασχηματισμό πηγής (ενότητα 3.11). Συγκεντρωτικά για το θεώρημα Norton ένα γραμμικό δίκτυο που περιέχει αντιστάσεις και πηγές μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ισοδύναμο κύκλωμα που αποτελείται από μία πηγή ρεύματος που είναι συνδεδεμένη παράλληλα με μία αντίσταση R_N . Το ρεύμα I_N είναι το ρεύμα που προκύπτει αν βραχυκυκλωθούν τα άκρα a και b ενώ η αντίσταση R_N είναι ο λόγος της ανοιχτοκυκλωμένης τάσης προς το ρεύμα βραχυκύκλωσης που αναπτύσσεται αν βραχυκυκλωθούν τα άκρα a και b . Ισχύει $R_{Th} = R_N$.

3.10. Θεώρημα μέγιστης μεταφορά ισχύος

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να υπολογιστεί η μέγιστη μεταφορά ισχύος από ένα δίκτυο σε ένα φορτίο (αντίσταση) R_ϕ . Αν υποτεθεί ότι το φορτίο είναι γραμμικό τότε το ισοδύναμο κύκλωμα θα είναι όπως αυτό του σχήματος 3.21.



Σχήμα 3.21: Θεώρημα μέγιστης μεταφορά ισχύος

Τότε:

$$I = \frac{V'}{R' + R_\phi}$$

και επομένως η ισχύς που απορροφάται από το φορτίο είναι:

$$P_\phi = \frac{V'^2 R_\phi}{(R' + R_\phi)^2} = \frac{V'^2}{4R'} \left[1 - \left(\frac{R' - R_\phi}{R' + R_\phi} \right)^2 \right]$$

Φαίνεται από την παραπάνω σχέση ότι η ισχύς P_ϕ παίρνει τη μέγιστη τιμή της $\frac{V'^2}{4R'}$

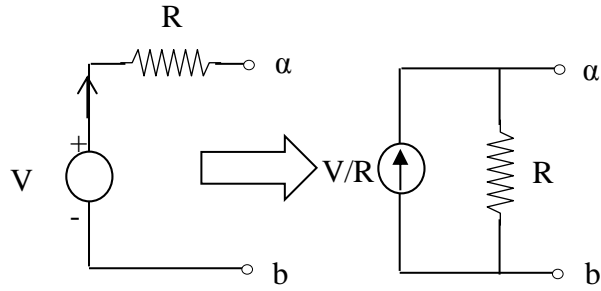
όταν $R' = R_\phi$. Ως αποτέλεσμα η ισχύς που μεταφέρεται είναι μέγιστη.

Σημειώνεται ότι η συνθήκη για μέγιστη μεταφορά ισχύος προς το φορτίο δεν είναι ίδια με τη συνθήκη για τη μέγιστη τιμή ισχύος που μεταφέρεται από την πηγή. Η μέγιστη τιμή ισχύος που μεταφέρεται από την πηγή συμβαίνει όταν $R_\phi = 0$.

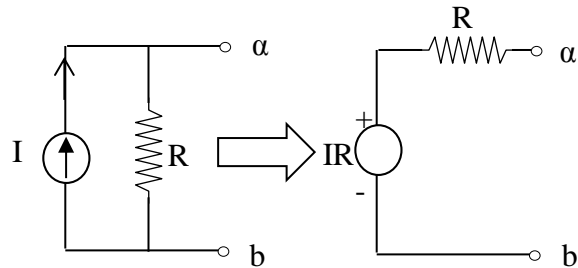
3.11. Μετασχηματισμός πηγών

Ανάλογα με το κύκλωμα, η παρουσία μόνο πηγών τάσης ή μόνο πηγών ρεύματος βοηθάει στην ανάλυση του κυκλώματος. Γι' αυτό το σκοπό γίνεται μετασχηματισμός πηγής τάσης σε ισοδύναμη πηγή ρεύματος ή μετασχηματισμός πηγής ρεύματος σε ισοδύναμη πηγή τάσης. Για να γίνει ο μετασχηματισμός, κάθε πηγή τάσης πρέπει να έχει μία εσωτερική αντίσταση σε σειρά, ενώ κάθε πηγή ρεύματος πρέπει να έχει μία εσωτερική αντίσταση συνδεδεμένη παράλληλα.

Στο σχήμα 3.22 φαίνεται ο μετασχηματισμός μιας πηγής τάσης σε ισοδύναμη πηγή ρεύματος και στο σχήμα 3.23 φαίνεται ο μετασχηματισμός μιας πηγής ρεύματος σε ισοδύναμη πηγή τάσης. Η ισοδυναμία αυτή ισχύει μόνο ως προς το κύκλωμα που είναι συνδεδεμένο στις πηγές. Δηλαδή οι δύο ισοδύναμες πηγές παράγουν την ίδια τάση και ρεύμα στο κύκλωμα. Εσωτερικά οι δύο πηγές συνήθως δεν είναι ισοδύναμες.



Σχήμα 3.22: Μετασχηματισμός πηγής τάσης σε ισοδύναμη πηγή ρεύματος



Σχήμα 3.23: Μετασχηματισμός πηγής ρεύματος σε ισοδύναμη πηγή τάσης

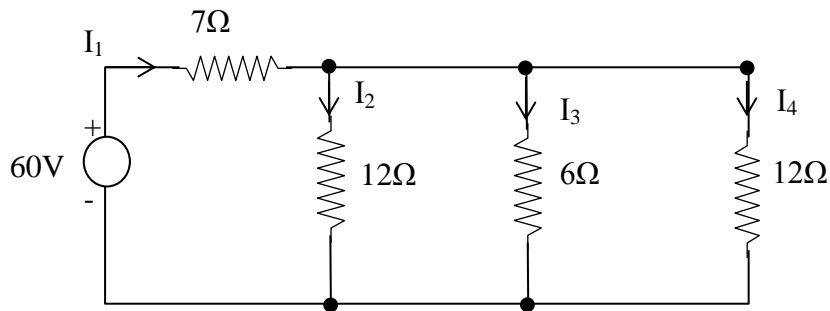
Στο μετασχηματισμό μίας πηγής τάσης σε ισοδύναμη πηγή ρεύματος, η ίδια αντίσταση είναι συνδεδεμένη παράλληλα και η πηγή ρεύματος έχει ρεύμα ίσο με το λόγο της τάσης προς την αντίσταση. Το βέλος της πηγής ρεύματος κατευθύνεται προς το άκρο που είναι πλησιέστερα στο θετικό άκρο της πηγής τάσης. Στο μετασχηματισμό μίας πηγής ρεύματος σε ισοδύναμη πηγή τάσης, η ίδια αντίσταση είναι συνδεδεμένη σε σειρά και η πηγή τάσης έχει τάση ίση με το γινόμενο του ρεύματος με την αντίσταση. Το θετικό άκρο της πηγής τάσης τοποθετείται στο πλησιέστερο άκρο στο οποίο «δείχνει» το βέλος της πηγής ρεύματος. Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται και για τον μετασχηματισμό εξαρτημένων πηγών.

3.12. Εξαρτημένες πηγές

Οι μέθοδοι ρευμάτων κλάδων, ρευμάτων βρόχου και τάσεων κλάδων εφαρμόζονται κανονικά και για κυκλώματα που έχουν εξαρτημένες πηγές όπως ακριβώς εφαρμόζονται για κυκλώματα με ανεξάρτητες πηγές. Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι λίγο περισσότερες. Γενικά η ανάλυση κυκλώματος που περιέχει εξαρτημένη πηγή γίνεται γράφοντας τα μεγέθη που ελέγχονται από την πηγή ως συνάρτηση αυτής, για να γραφούν οι εξισώσεις στις μεθόδους ρευμάτων κλάδων, ρευμάτων βρόχου και τάσεων κλάδων.

3.13. Λυμένες ασκήσεις

1) Να εφαρμοστεί η μέθοδος ρευμάτων κλάδων στο κύκλωμα του σχήματος 3.24 και να βρεθεί το ρεύμα που προκύπτει από την πηγή των 60V.



Σχήμα 3.24: Κύκλωμα άσκησης 1

Απάντηση:

Από το νόμο τάσεων του Kirchhoff και από το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$12I_2 = 6I_3$$

$$12I_2 = 12I_4$$

$$60 = 7I_1 + 12I_2$$

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4$$

Στη συνέχεια γίνεται αντικατάσταση των δύο πρώτων εξισώσεων στην τελευταία:

$$I_1 = I_2 + 2I_2 + I_2 = 4I_2$$

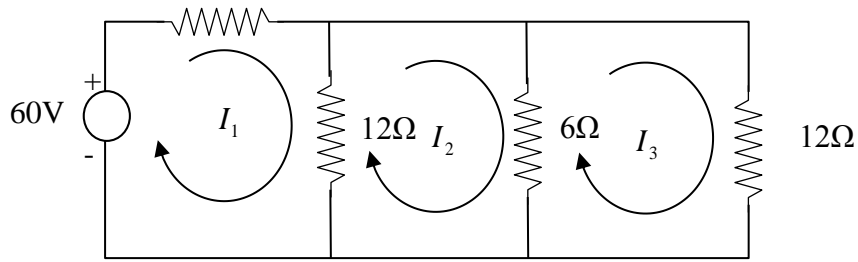
Από την τρίτη και την τελευταία εξίσωση προκύπτει:

$$60 = 7I_1 + 12 \frac{1}{4} I_1 = 10I_1 \Leftrightarrow I_1 = 6A$$

2) Να λυθεί η άσκηση 1 με τη μέθοδο ρευμάτων βρόχου.

Απάντηση:

Το κύκλωμα ξανασχεδιάζεται στο σχήμα 3.25.



Σχήμα 3.25: Κύκλωμα άσκησης 2

Εφαρμόζοντας τη νόμο τάσεων του Kirchhoff για κάθε βρόχο προκύπτει:

$$60 = 7I_1 + 12(I_1 - I_2) \Leftrightarrow 19I_1 - 12I_2 = 60$$

$$0 = 12(I_2 - I_1) + 6(I_2 - I_3) \Leftrightarrow -12I_1 + 18I_2 - 6I_3 = 0$$

$$0 = 6(I_3 - I_2) + 12I_3 \Leftrightarrow -6I_2 + 18I_3 = 0$$

Στη συνέχεια οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 19 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

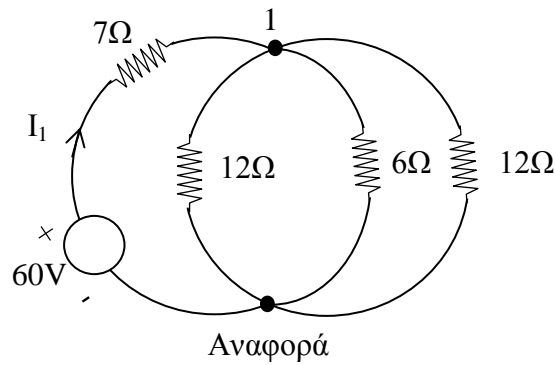
Με τη βοήθεια του κανόνα του Kramer προκύπτει:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 60 & -12 & 0 \\ 0 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 19 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{17280}{2880} = 6A$$

3) Να λυθεί η άσκηση 1 με τη μέθοδο τάσεων κόμβου.

Απάντηση:

Το κύκλωμα ξανασχεδιάζεται στο σχήμα 3.26.



Σχήμα 3.26: Κύκλωμα άσκησης 3

Με δύο κύριους κόμβους μόνο μία εξίσωση είναι απαραίτητη:

$$\frac{V_1 - 60}{7} + \frac{V_1}{12} + \frac{V_1}{6} + \frac{V_1}{12} = 0 \Leftrightarrow V_1 = 18V$$

Οπότε:

$$I_1 = \frac{60 - V_1}{7} = 6A$$

4) Στην άσκηση 2 να βρεθούν α) η $R_{\epsilon\iota\sigma,1}$ και με τη βοήθεια αυτής να υπολογιστεί το I_1 , β) Να βρεθούν τα $R_{\mu\epsilon\tau,12}$ και $R_{\mu\epsilon\tau,13}$ και με τη βοήθεια αυτών να υπολογιστούν τα I_2 και I_3 .

Απάντηση:

$$\alpha) R_{\epsilon\iota\sigma,1} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{11}} = \frac{2880}{\begin{vmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{2880}{288} = 10\Omega$$

Τότε:

$$I_1 = \frac{60}{R_{\epsilon\iota\sigma,1}} = \frac{60}{10} = 6A$$

β) Ο συντελεστής του στοιχείου 1,2 στην Δ_R πρέπει να έχει αρνητικό πρόσημο:

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = 216$$

$$R_{\mu\epsilon\tau,12} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{12}} = \frac{2880}{216} = 13.33\Omega$$

Τότε:

$$I_2 = \frac{60}{13.33} = 4.5\text{A}$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -12 & 18 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 72$$

$$R_{\mu\epsilon\tau,13} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{13}} = \frac{2880}{72} = 40\Omega$$

Τότε:

$$I_3 = \frac{60}{40} = 1.5\text{A}$$

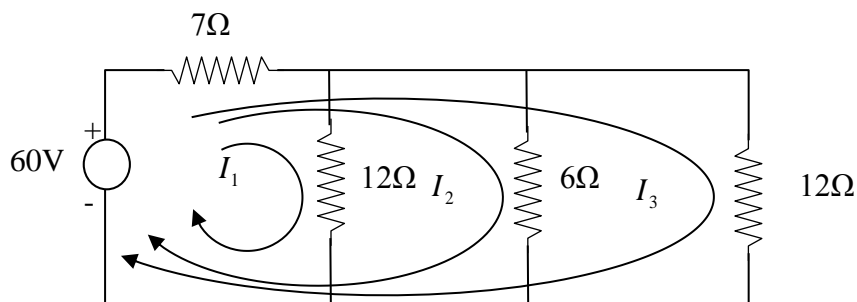
5) Να λυθεί η άσκηση 1 με τα ρεύματα βρόχων που φαίνονται στο σχήμα 3.27.

Απάντηση:

Τα μεγέθη σε μορφή εξίσωσης πινάκων σύμφωνα με τα τα ρεύματα βρόχων που έχουν σημειωθεί στο σχήμα 3.27 γράφονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 19 & 7 & 7 \\ 7 & 13 & 7 \\ 7 & 7 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_R = \begin{vmatrix} 19 & 7 & 7 \\ 7 & 13 & 7 \\ 7 & 7 & 19 \end{vmatrix} = 2880$$



Σχήμα 3.27: Κύκλωμα άσκησης 5

Όπως και στην άσκηση 2 έτσι και σε αυτή την άσκηση είναι $\Delta_R = 2880$ παρόλο που τα στοιχεία της ορίζουσας είναι διαφορετικά. Όλες οι δυνατές επιλογές βρόχων σε ένα πρόβλημα (με την προϋπόθεση ότι είναι έγκυρες) δίνουν την ίδια τιμή για την Δ_R . Επομένως:

$$N_1 = \begin{bmatrix} 60 & 7 & 7 \\ 60 & 13 & 7 \\ 60 & 7 & 19 \end{bmatrix} = 4320$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 19 & 60 & 7 \\ 7 & 60 & 7 \\ 7 & 60 & 19 \end{bmatrix} = 8642$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 19 & 7 & 60 \\ 7 & 13 & 60 \\ 7 & 7 & 60 \end{bmatrix} = 4320$$

Επομένως:

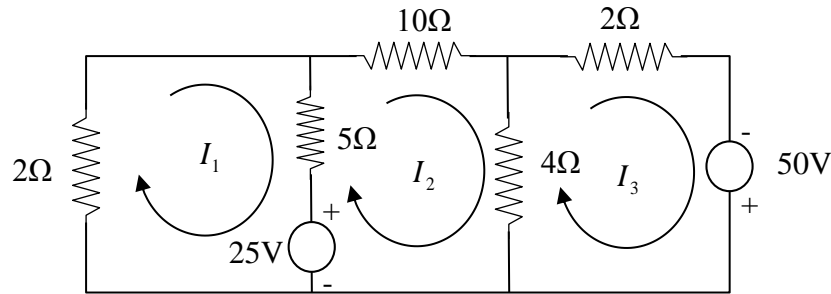
$$I_1 = \frac{N_1}{\Delta_R} = \frac{4320}{2880} = 1.5\text{A}$$

$$I_2 = \frac{N_2}{\Delta_R} = \frac{8642}{2880} = 3\text{A}$$

$$I_3 = \frac{N_3}{\Delta_R} = \frac{4320}{2880} = 1.5\text{A}$$

Το ρεύμα που προκύπτει από την πηγή των 60V είναι το άθροισμα των τριών ρευμάτων βρόχου: $I_{ολ} = I_1 + I_2 + I_3 = 6\text{A}$.

6) Να γραφεί ο πίνακας των ρευμάτων βρόχων για το κύκλωμα του σχήματος 3.28 και να υπολογιστούν τα ρεύματα.



Σχήμα 3.28: Κύκλωμα άσκησης 6

Απάντηση:

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 19 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -25 & -5 & 0 \\ 25 & 19 & -4 \\ 50 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 19 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{-700}{536} = -1.31A$$

Ομοίως:

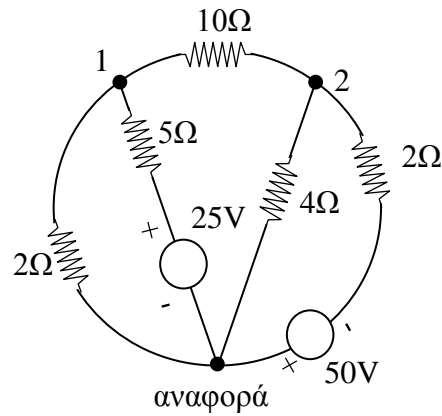
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -25 & 0 \\ -5 & 25 & -4 \\ 0 & 50 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 19 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{1700}{536} = 3.17A$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -5 & -25 \\ -5 & 19 & 25 \\ 0 & -4 & 50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 19 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{5600}{536} = 10.45A$$

7) Να λυθεί η άσκηση 6 με τη μέθοδο των τάσεων κόμβων.

Απάντηση:

Το κύκλωμα σχεδιάζεται εκ νέου στο σχήμα 3.29 με δύο κύριους κόμβους 1 και 2 και ο τρίτος επιλέγεται ως κόμβος αναφοράς.



Σχήμα 3.29: Κύκλωμα άσκησης 7

Με το νόμο ρευμάτων Kirchhoff προκύπτει για τον κόμβο 1:

$$\frac{V_1}{2} + \frac{V_1 - 25}{5} + \frac{V_1 - V_2}{10} = 0$$

Ομοίως για τον κόμβο 2:

$$\frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2}{4} + \frac{V_2 + 50}{2} = 0$$

Στη συνέχεια οι δύο εξισώσεις γράφονται σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -25 \end{bmatrix}$$

Είναι:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.1 & 0.85 \end{vmatrix} = 0.67$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} 5 & -0.1 \\ 25 & 0.85 \end{vmatrix} = 1.75$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 0.8 & 5 \\ -0.1 & -25 \end{vmatrix} = -19.5$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν:

$$V_1 = \frac{1.75}{0.67} = 2.61V$$

$$V_2 = \frac{-19.5}{0.67} = -29.1V$$

Τα ρεύματα όπως φαίνονται στο σχήμα 3.28 είναι:

$$I_1 = \frac{-V_1}{2} = -1.31A$$

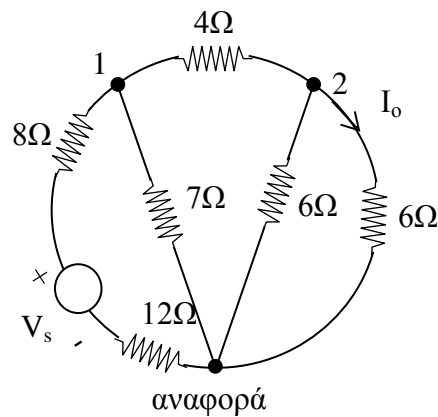
$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{10} = 3.17A$$

$$I_3 = \frac{V_2 + 50}{2} = 10.45A$$

8) Για το κύκλωμα του σχήματος 3.30 να βρεθεί η τάση V_s για την οποία ισχύει $I_o = 7.5mA$.

Απάντηση:

Εφαρμόζεται η μέθοδος τάσεων κόμβων και οι εξισώσεις γράφονται σε μορφή πινάκων.



Σχήμα 3.30: Κύκλωμα άσκησης 8

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Είναι:

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.443 & V_s \\ -0.25 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.443 & -0.25 \\ -0.25 & 0.583 \end{vmatrix}} = 0.0638V_s$$

Οπότε:

$$7.5 \cdot 10^{-3} = I_o = \frac{V_2}{6} = \frac{0.0638V_s}{6} \Leftrightarrow V_s = 0.705V$$

9) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.31 να βρεθεί το ρεύμα στην αντίσταση των 10Ω .

Απάντηση:

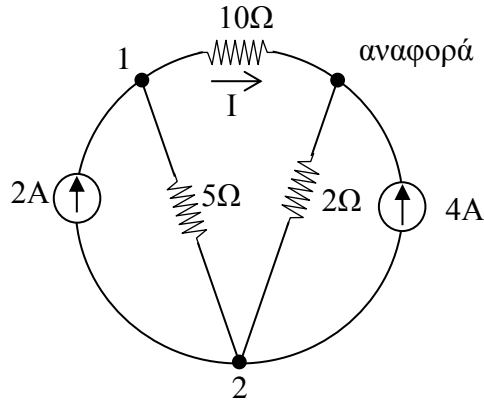
Η εξίσωση πιάκων γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -0.2 \\ -6 & 0.7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.7 \end{vmatrix}} = 1.18V$$

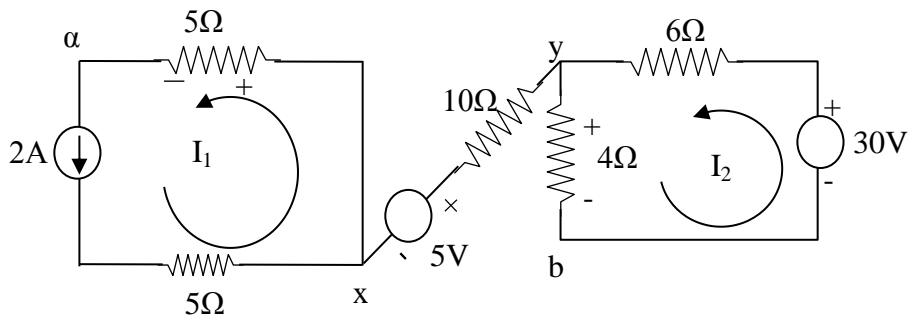
Οπότε:

$$I_1 = \frac{V_1}{10} = 0.118A$$



Σχήμα 3.31: Κύκλωμα άσκησης 9

10) Να βρεθεί η τάση V_{ab} στο κύκλωμα του σχήματος 3.32.



Σχήμα 3.32: Κύκλωμα άσκησης 10

Απάντηση:

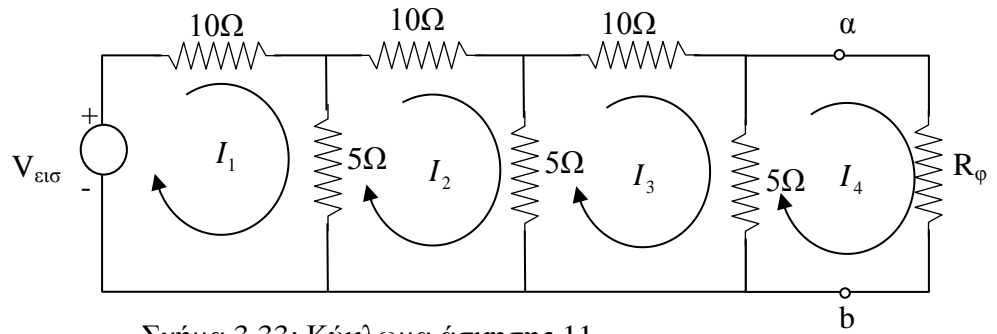
Οι δύο βρόχοι είναι ανεξάρτητοι και δεν περνάει ρεύμα μέσα από τον κλάδο σύνδεσης.

$$I_1 = 2A$$

$$I_2 = \frac{30}{10} = 3A$$

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = -5I_1 - 5 + 4I_2 = -3V$$

11) Για το κύκλωμα του σχήματος 3.33 να βρεθεί η αντίσταση μεταφοράς ως λόγος της τάσης $V_{εισ}$ προς το ρεύμα I_4 .



Σχήμα 3.33: Κύκλωμα άσκησης 11

Απάντηση:

Γράφεται η εξίσωση πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 20 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5+R_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{\epsilon\iota\sigma} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_R = 5125R_\phi + 18750$$

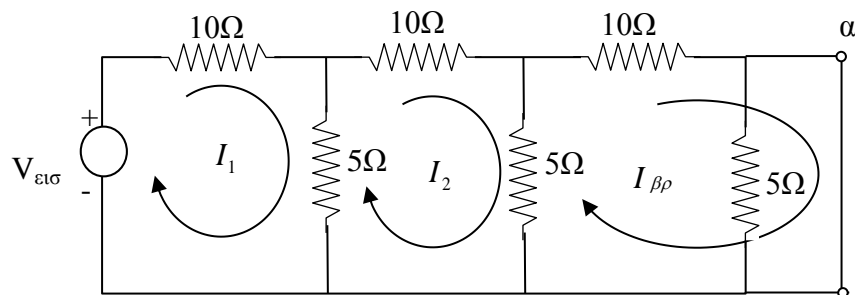
$$N_4 = 125V_{\epsilon\iota\sigma}$$

$$R_{\mu\epsilon\tau,14} = \frac{V_{\epsilon\iota\sigma}}{I_4} = 41R_\phi + 150\Omega$$

12) Να βρεθεί το ισοδύναμο κυκλωμα Thévenin του σχήματος 3.33 δεξιά από τα άκρα α και β.

Απάντηση:

Το ρεύμα βραχυκύκλωσης $I_{\beta\rho}$ προκύπτει από το κύκλωμα τριών βρόχων του σχήματος 3.34.

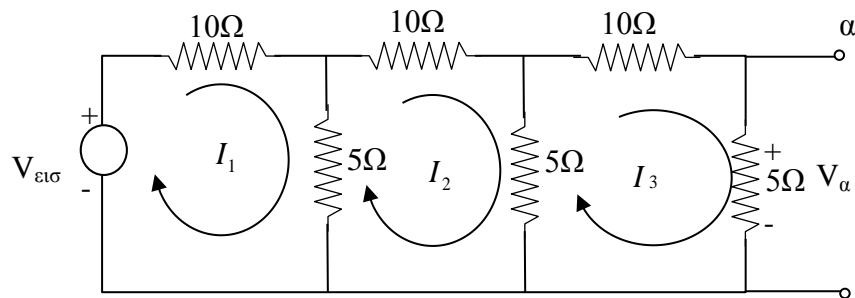


Σχήμα 3.34: Υπολογισμός ρεύματος βραχυκύκλωσης άσκησης 12

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_{\beta\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{\varepsilon\iota\sigma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{\beta\rho} = \frac{V_{\varepsilon\iota\sigma} \begin{vmatrix} -5 & 20 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}}{\Delta_R} = \frac{V_{\varepsilon\iota\sigma}}{150}$$

Η τάση ανοιχτοκύκλωσης V_a είναι η τάση κατά μήκος της αντίστασης των 5Ω όπως φαίνεται στο σχήμα 3.35.



Σχήμα 3.35: Υπολογισμός τάσης ανοιχτοκύκλωσης άσκησης 12

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{\varepsilon\iota\sigma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \frac{25V_{\varepsilon\iota\sigma}}{5125} = \frac{V_{\varepsilon\iota\sigma}}{205} \text{ A}$$

Τότε η τάση Thévenin είναι:

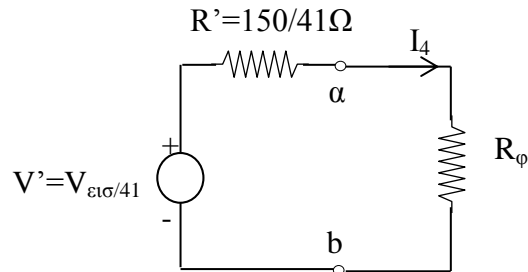
$$V' = V_a = 5I_3 = \frac{V_{\varepsilon\iota\sigma}}{41} \text{ και}$$

$$R_{Th} = \frac{V_a}{I_{\beta\rho}} = \frac{150}{41} \Omega$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα Thévenin φαίνεται στο σχήμα 3.36. Αν στα άκρα a και b συνδεθεί η αντίσταση R_ϕ , το ρεύμα εξόδου θα είναι:

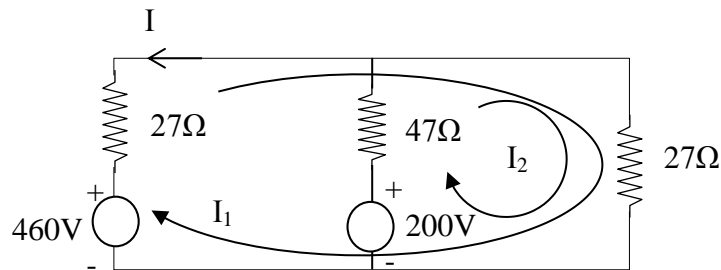
$$I_4 = \frac{\frac{V_{\epsilon\iota\sigma}}{41}}{\frac{150}{41} + R_\phi} = \frac{V_{\epsilon\iota\sigma}}{41R_\phi + 150} A$$

Το αποτέλεσμα συμφωνεί με το αποτέλεσμα της άσκησης 11.



Σχήμα 3.36: Ισοδύναμο Thévenin άσκησης 12

13) Να βρεθεί το ρεύμα I από κάθε πηγή τάσης στο κύκλωμα του σχήματος 3.37 με επαλληλία.



Σχήμα 3.37: Κύκλωμα άσκησης 13

Απάντηση:

Τα ρεύματα βρόχων επιλέγονται έτσι ώστε κάθε πηγή να περιέχει μόνο ένα ρεύμα.

$$\begin{bmatrix} 54 & -27 \\ -27 & 74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -460 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Από την πηγή των 460V είναι:

$$I_1' = I' = \frac{(-460)(74)}{3267} = -10.42A$$

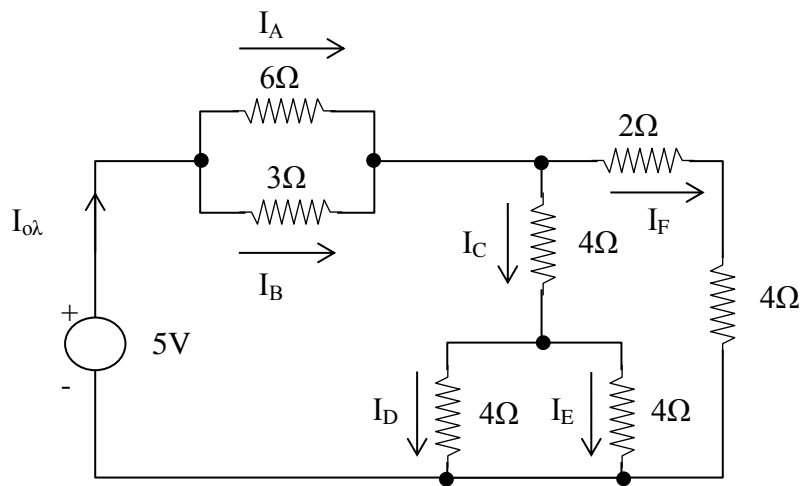
Ενώ για την πηγή των 200V είναι:

$$I_1'' = I'' = \frac{(-200)(-27)}{3267} = 1.65A$$

Οπότε:

$$I = I' + I'' = -10.42 + 1.65 = -8.77A$$

14) Να βρεθεί το ρεύμα σε κάθε αντίσταση στο σχήμα 3.38 με τη μέθοδο της ισοδύναμης αντίστασης.

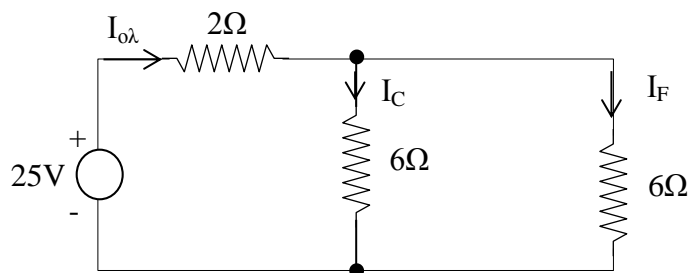


Σχήμα 3.38: Κύκλωμα άσκησης 14

Απάντηση:

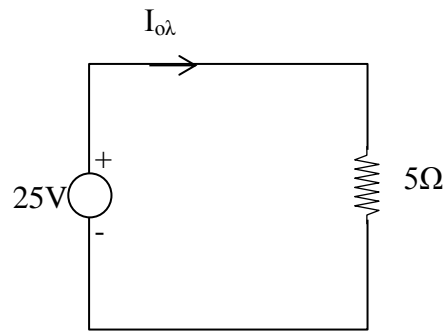
Αρχικά οι αντιστάσεις που είναι συνδεδεμένες παράλληλα αντικαθίστανται από τις ισοδύναμές τους. Για τις αντιστάσεις των 6Ω και 3Ω είναι: $R_{\sigma,3\Omega\parallel6\Omega} = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} = 2\Omega$,

ενώ για τις δύο αντιστάσεις των 4Ω είναι: $R_{\sigma,4\Omega\parallel4\Omega} = \frac{4 \cdot 4}{4 + 4} = 2\Omega$. Το κύκλωμα σχεδιάζεται εκ νέου με τις ισοδύναμες αντιστάσεις στο σχήμα 3.39.



Σχήμα 3.39: Ισοδύναμο κύκλωμα (α) άσκησης 14

Στη συνέχεια από το σχήμα 3.39 φαίνεται ότι οι δύο αντιστάσεις των 6Ω είναι συνδεδεμένες παράλληλα και έχουν ισοδύναμη $R_{ισ,6\Omega\parallel6\Omega} = \frac{6 \cdot 6}{6+6} = 3\Omega$. Η αντίσταση αυτή είναι συνδεδεμένη σε σειρά με την αντίσταση των 2Ω . Επομένως $R_{ολ} = 3+2 = 5\Omega$ όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.40.



Σχήμα 3.40: Ισοδύναμο κύκλωμα (β) άσκησης 14

Το ολικό ρεύμα είναι:

$$I_{ολ} = \frac{25}{5} = 5A$$

Τα ρεύματα κάθε κλάδου υπολογίζονται από τα κυκλώματα των σχημάτων 3.39 και 3.38.

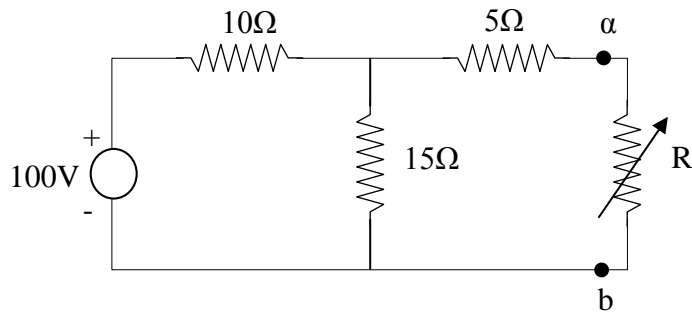
$$I_C = I_F = \frac{1}{2} I_{ολ} = 2.5A$$

$$I_D = I_E = \frac{1}{2} I_{ολ} = 1.25A$$

$$I_A = \frac{3}{6+3} I_{ολ} = \frac{5}{3} A$$

$$I_B = \frac{6}{6+3} I_{ολ} = \frac{10}{3} A$$

15) Να βρεθεί η τιμή της μεταβλητής αντίστασης R για την οποία συμβαίνει μέγιστη μεταφορά ισχύος κατά μήκος των ακροδεκτών a και b στο κύκλωμα του σχήματος 3.41.



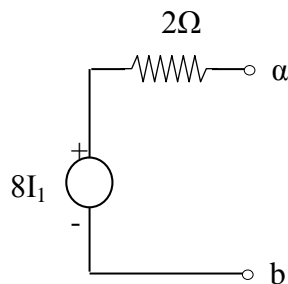
Σχήμα 3.41: Κύκλωμα άσκησης 15

Απάντηση:

Αρχικά υπολογίζεται το ισοδύναμο Thévenin με $V' = 60V$ και $R' = 11\Omega$. Σύμφωνα με την ενότητα 3.10 η μέγιστη μεταφορά ισχύος γίνεται για $R = R' = 11\Omega$ με:

$$P_{\max} = \frac{V^2}{4R'} = 81.82W$$

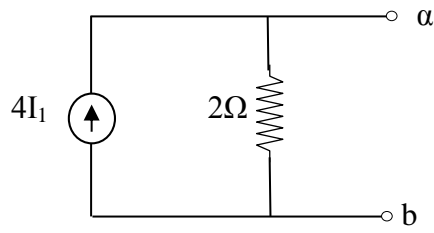
16) Να γίνει μετασχηματισμός της εξαρτημένης πηγής τάσης του σχήματος 3.42 σε πηγή ρεύματος.



Σχήμα 3.42: Κύκλωμα άσκησης 16

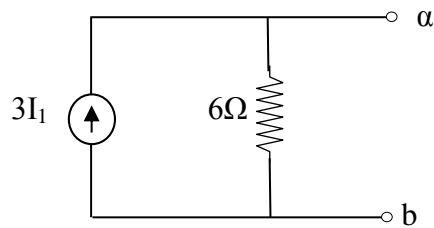
Απάντηση:

Το ρεύμα της πηγής ρεύματος θα είναι: $\frac{8I_1}{2} = 4I_1$. Η κατεύθυνση του βέλους θα είναι προς το άκρο a γιατί το θετικό άκρο της πηγής είναι προς αυτό το άκρο. Η παράλληλη αντίσταση είναι ίδια με την αντίσταση της πηγής τάσης δηλαδή 2Ω . Στο σχήμα 3.43 φαίνεται η ισοδύναμη πηγή ρεύματος.



Σχήμα 3.43: Ισοδύναμη πηγή ρεύματος άσκησης 16

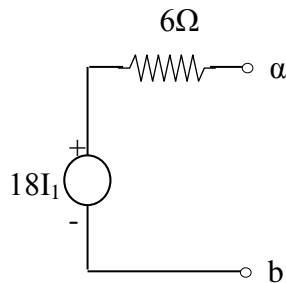
17) Να γίνει μετασχηματισμός της εξαρτημένης πηγής ρεύματος του σχήματος 3.44 σε πηγή τάσης.



Σχήμα 3.44: Κύκλωμα άσκησης 17

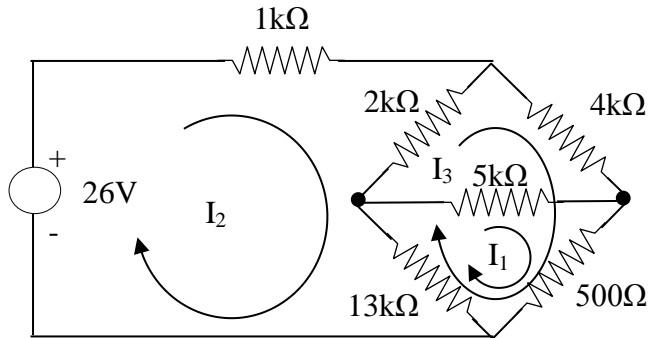
Απάντηση:

Η τάση είναι $3I_1 \cdot 6 = 18I_1$. Το θετικό άκρο της πηγής τάσης θα είναι προς τη φορά που δείχνει το βέλος της πηγής ρεύματος. Η αντίσταση της πηγής τάσης θα είναι ίδια με αυτή της πηγής ρεύματος. Η ισοδύναμη πηγή τάσης φαίνεται στο σχήμα 3.45.



Σχήμα 3.45: Ισοδύναμη πηγή τάσης άσκησης 17

18) Να βρεθεί το ρεύμα που διέρχεται από την αντίσταση των $5k\Omega$ στο κύκλωμα του σχήματος 3.46.



Σχήμα 3.46: Κύκλωμα άσκησης 18

Απάντηση:

Αν επιλεγούν τα ρεύματα όπως φαίνονται στο σχήμα 3.46 (πρέπει μόνο ένα ρεύμα να διαρρέει την αντίσταση των $5k\Omega$) τότε προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$18.5I_1 - 13I_2 + 13.5I_3 = 0$$

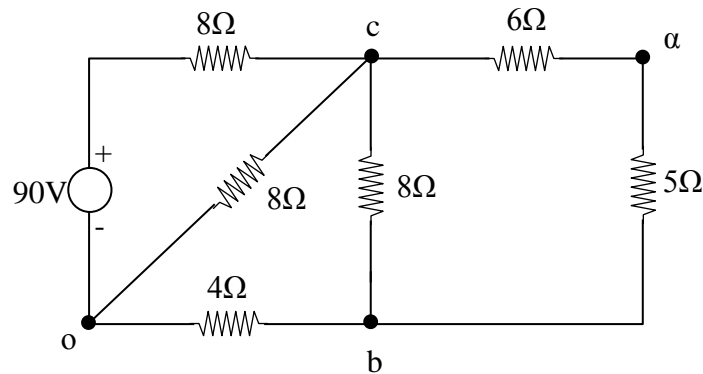
$$-13I_1 + 16I_2 - 15I_3 = 26$$

$$13.5I_1 - 15I_2 + 19.5I_3 = 0$$

Επομένως:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -13 & 13.5 \\ 26 & 16 & -15 \\ 0 & -15 & 19.5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 18.5 & -13 & 13.5 \\ -13 & 16 & -15 \\ 13.5 & -15 & 19.5 \end{vmatrix}} = \frac{1326}{66.3} = 2mA$$

19) Να υπολογιστεί η τάση και η αντίσταση Thévenin στα άκρα a και b του κυκλώματος του σχήματος 3.47.

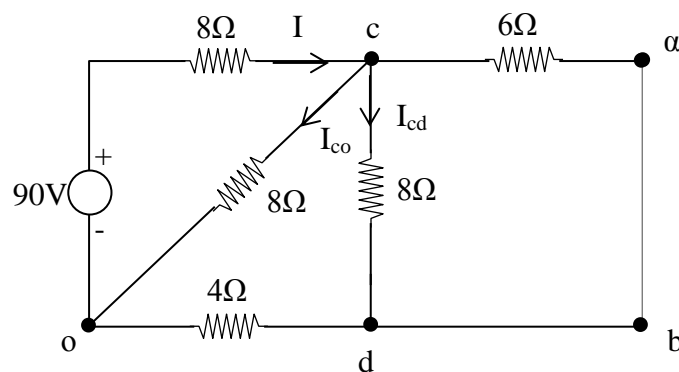


Σχήμα 3.47: Κύκλωμα άσκησης 19

Απάντηση:

Η τάση Thévenin είναι η τάση που εμφανίζεται αν ανοιχτοκυκλωθούν τα άκρα a και b (σχήμα 3.48), δηλαδή είναι η ίδια τάση με την τάση κατά μήκος των άκρων c και d. Επειδή τα άκρα a και b είναι ανοιχτοκυκλωμένα η αντίσταση των 6Ω δεν λαμβάνεται υπόψη. Η αντίσταση Thévenin όπως φαίνεται από την πηγή των 90V δίνεται από τη σχέση:

$$R_{Th} = 8 + \frac{8(8+4)}{8+8+4} = 12.8\Omega$$



Σχήμα 3.48: Υπολογισμός τάσης Thévenin άσκησης 3.19

Το ρεύμα I στο σχήμα 3.48 είναι:

$$I = \frac{90}{12.8} = 7.03A$$

Η τάση V_{co} είναι:

$$V_{co} = 90 - 8 \cdot I = 90 - 8 \cdot 7.03 = 33.75V$$

Το ρεύμα I_{co} είναι:

$$I_{co} = \frac{33.75}{8} = 4.22A$$

Το ρεύμα I_{cd} είναι:

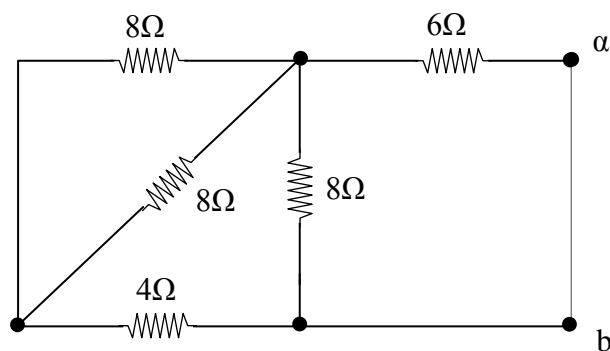
$$I_{cd} = 7.03 - 4.22 = 2.81A$$

Επομένως:

$$V_{cd} = V_{Th} = 2.81 \cdot 8 = 22.48V$$

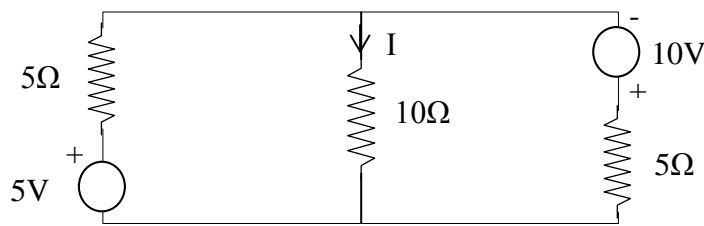
Για να υπολογιστεί η αντίσταση Thevenin σχεδιάζεται το κύκλωμα του σχήματος 3.49 από το οποίο προκύπτει:

$$R_{Th} = R_{ab} = 6 + \frac{(4+4) \cdot 8}{4+4+8} = 10\Omega$$



Σχήμα 3.49: Υπολογισμός αντίστασης Thévenin άσκησης 19

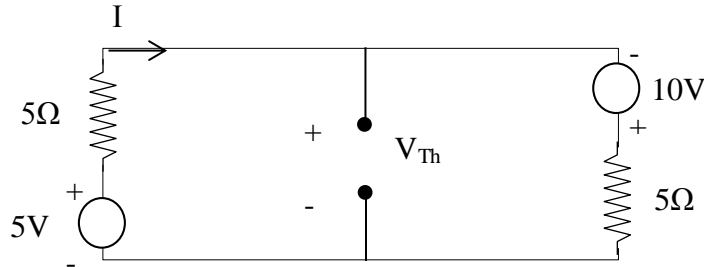
20) Να υπολογιστεί το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση των 10Ω με τη βοήθεια του θεωρήματος Thévenin στο κύκλωμα του σχήματος 3.50.



Σχήμα 3.50: Κύκλωμα άσκησης 20

Απάντηση:

Υπολογίζεται αρχικά η τάση Thevenin στα άκρα της αντίστασης των 10Ω με τη βοήθεια του σχήματος 3.51.



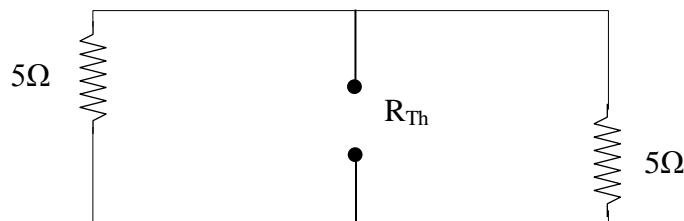
Σχήμα 3.51: Υπολογισμός τάσης Thévenin άσκησης 20

Είναι:

$$5 + 10 = I(5 + 5) \Leftrightarrow I = \frac{15}{10} = 1.5A$$

$$V_{Th} = 5 - 5 \cdot 1.5 = -2.5V$$

Η αντίσταση Thévenin υπολογίζεται με τη βοήθεια του σχήματος 3.52.



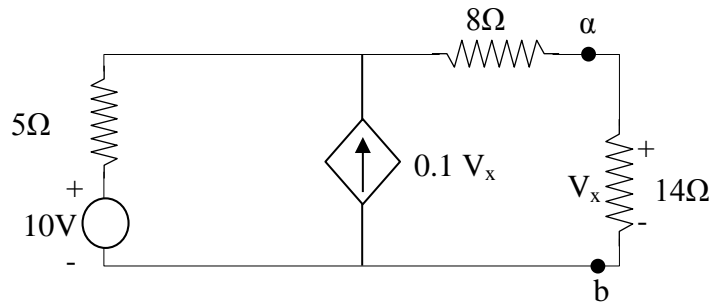
Σχήμα 3.52: Υπολογισμός αντίστασης Thévenin άσκησης 20

$$R_{Th} = \frac{5 \cdot 5}{5 + 5} = 2.5\Omega$$

Επομένως:

$$I_{10\Omega} = \frac{V_{Th}}{10 + R_{Th}} = \frac{-2.5}{10 + 2.5} = -0.2A$$

21) Να βρεθεί το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα του σχήματος 3.53 με τη βοήθεια του θεωρήματος Thévenin .



Σχήμα 3.53: Κύκλωμα άσκησης 21

Απάντηση:

Για να υπολογιστεί η τάση Thévenin γίνεται ανοιχτοκύκλωση στα άκρα α και β. Η τάση V_x όταν ανοιχτο κυκλωθούν τα άκρα α και β ισούται με την τάση Thévenin .

Επομένως:

$$V_{Th} = 10 - 5 \cdot (-0.1V_x) \Leftrightarrow V_{Th} = 10 - 5 \cdot (-0.1V_{Th}) \Leftrightarrow V_{Th} = 10 + 0.5V_{Th} \Leftrightarrow V_{Th} = 20V$$

Στη συνέχεια βραχυκυκλώνονται τα άκρα α και β . Τότε είναι $V_x = 0$ και $0.1V_x = 0$.

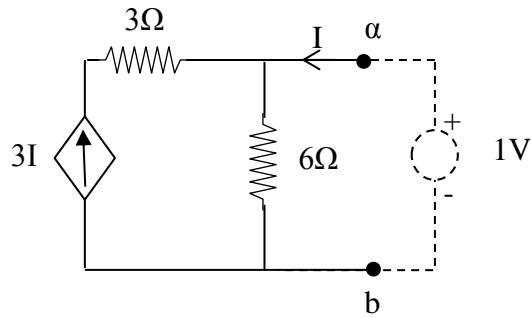
Επομένως:

$$I_{\beta\rho} = \frac{10}{5+8} = \frac{10}{13} A$$

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{\beta\rho}} = \frac{20}{\frac{10}{13}} = 26\Omega$$

$$I_{14\Omega} = \frac{20}{14+26} = 0.5A$$

22) Να βρεθεί το ισοδύναμο Thévenin στα άκρα a και b του κυκλώματος του σχήματος 3.54.



Σχήμα 3.54: Κύκλωμα άσκησης 22

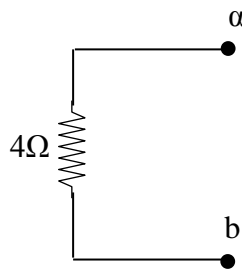
Απάντηση:

Στο παραπάνω κύκλωμα δεν υπάρχει καμία ανεξάρτητη πηγή. Σε αυτή την περίπτωση για να βρεθεί το ισοδύναμο Thévenin εφαρμόζεται μία πηγή τάσης των 1 V στα άκρα a και b. Επομένως:

$$I = \frac{1}{6} + \frac{1-3I}{3} \Leftrightarrow I = \frac{1}{4} \text{ A}$$

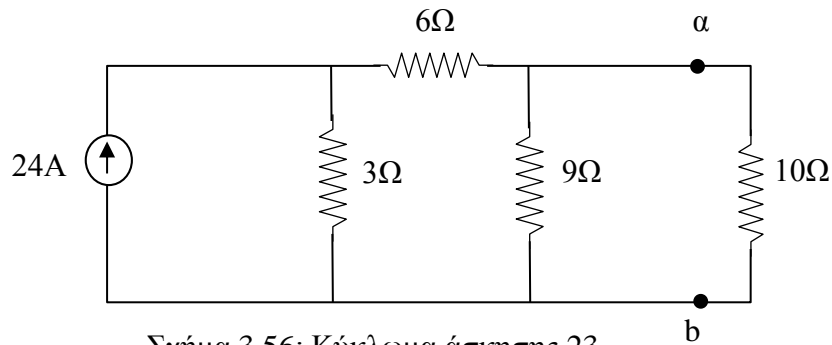
$$R_{Th} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4\Omega$$

Το ισοδύναμο Thévenin φαίνεται στο σχήμα 3.55.



Σχήμα 3.55: Ισοδύναμο Thévenin άσκησης 22

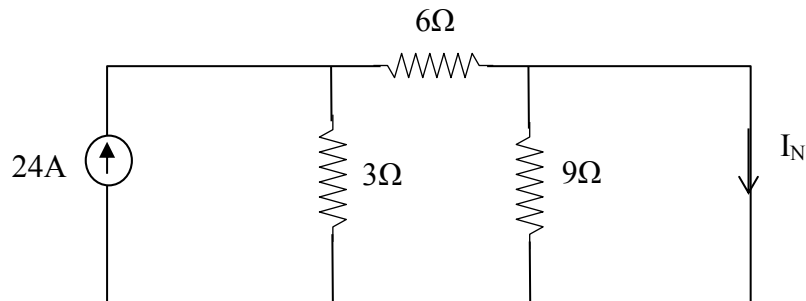
23) Να βρεθεί το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση των 10Ω στο κύκλωμα του σχήματος 3.56 με τη βοήθεια του θεωρήματος Norton.



Σχήμα 3.56: Κύκλωμα άσκησης 23

Απάντηση:

Για να βρεθεί το I_N βραχυκυκλώνονται τα άκρα a και b όπως φαίνεται στο σχήμα 3.57.



Σχήμα 3.57: Υπολογισμός I_N άσκησης 23

Με διαίρεση ρευμάτων στο σχήμα 3.57 προκύπτει: $I_N = 8A$.

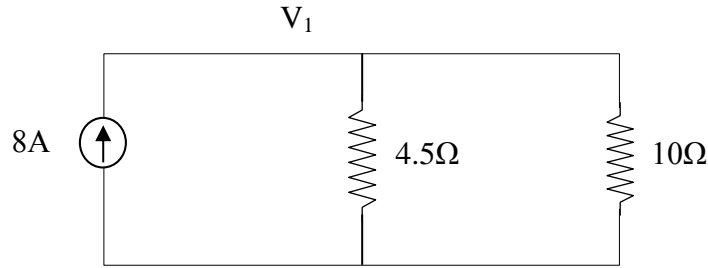
Επίσης:

$$R_N = \frac{9(6+3)}{9+6+3} = 4.5\Omega$$

Το ισοδύναμο Norton φαίνεται στο σχήμα 3.58. Από το κύκλωμα αυτό προκύπτει:

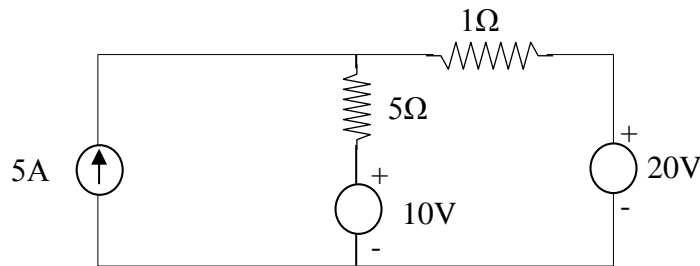
$$V_1(0.222 + 0.1) = 8 \Leftrightarrow V_1 = 24.84V$$

$$I_{10\Omega} = 2.484A$$



Σχήμα 3.58: Ισοδύναμο Norton άσκησης 23

24) Να βρεθεί το ρεύμα στην αντίσταση 1Ω του κυκλώματος του σχήματος 3.59 με τη βοήθεια του θεωρήματος Norton.



Σχήμα 3.59: Κύκλωμα άσκησης 24

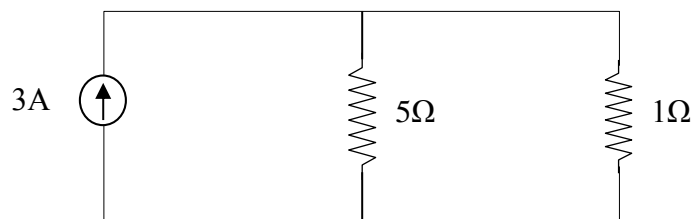
Απάντηση:

Αν βραχυκυκλωθεί η αντίσταση των 1Ω προκύπτει:

$$5 + I_{\beta\rho} - \frac{20-10}{5} = 0 \Leftrightarrow I_{\beta\rho} = -3A = I_N$$

$$R_N = 5\Omega$$

Το ισοδύναμο Norton φαίνεται στο σχήμα 3.60.



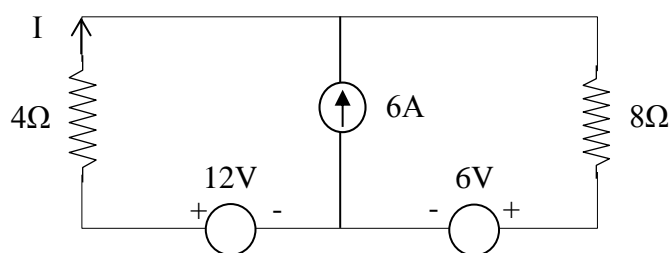
Σχήμα 3.60: Ισοδύναμο Norton άσκησης 24

Από το ισοδύναμο Norton προκύπτει:

$$\frac{V}{1} + \frac{V}{5} = 3 \Leftrightarrow V = \frac{15}{6} = 2.5V$$

$$I_{1\Omega} = \frac{V}{1} = 2.5A$$

25) Να υπολογιστεί το ρεύμα I στο κύκλωμα του σχήματος 3.61 με επαλληλία.



Σχήμα 3.61: Κύκλωμα άσκησης 25

Απάντηση:

Έστω ότι όλα τα ρεύματα που διέρχονται από την αντίσταση των 4Ω είναι δεξιόστροφα.

Αν οι πηγές των $6A$ και $6V$ αφαιρεθούν, λόγω της πηγής των $12V$ είναι:

$$I' = \frac{12}{4+8} = 1A$$

Αν οι πηγές των $6A$ και $12V$ αφαιρεθούν, λόγω της πηγής των $6V$ είναι:

$$I'' = -\frac{6}{4+8} = -0.5A$$

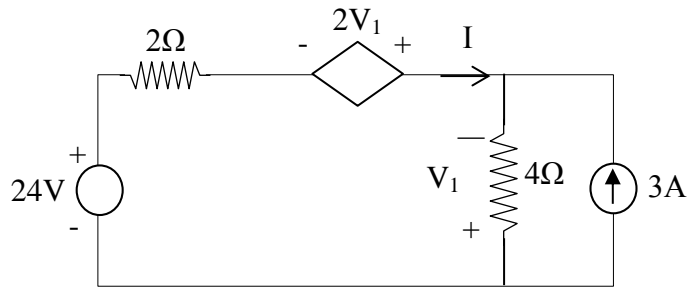
Αν αφαιρεθούν οι δύο πηγές τάσης λόγω της πηγής ρεύματος είναι:

$$I''' = -6\left(\frac{8}{4+8}\right) = -4A$$

Επομένως το ολικό ρεύμα είναι:

$$I = I' + I'' + I''' = 1 - 0.5 - 4 = -3.5A$$

26) Να βρεθεί το ρεύμα που διαρρέει την εξαρτημένη πηγή τάσης ($2V_1$) του κυκλώματος του σχήματος 3.62.



Σχήμα 3.62: Κύκλωμα άσκησης 26

Απάντηση:

Αν αφαιρεθεί η πηγή ρεύματος των 3A τότε:

$$24 - 2I' + 2V_1 + 4V_1 = 0 \text{ και } V_1 = -4I' \text{ οπότε } I' = \frac{24}{14} \text{ A}$$

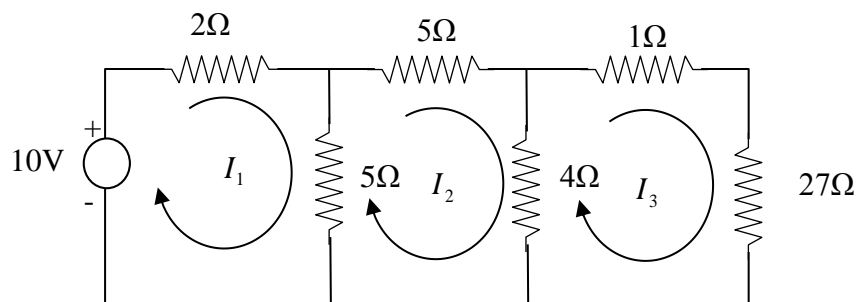
Αν αφαιρεθεί η πηγή τάσης των 24V τότε:

$$I'' = -\frac{36}{14} \text{ A}$$

$$\text{Επομένως: } I = I' + I'' = -\left(\frac{36 - 24}{14}\right) = -0.857 \text{ A}$$

3.14. Άλυτες ασκήσεις

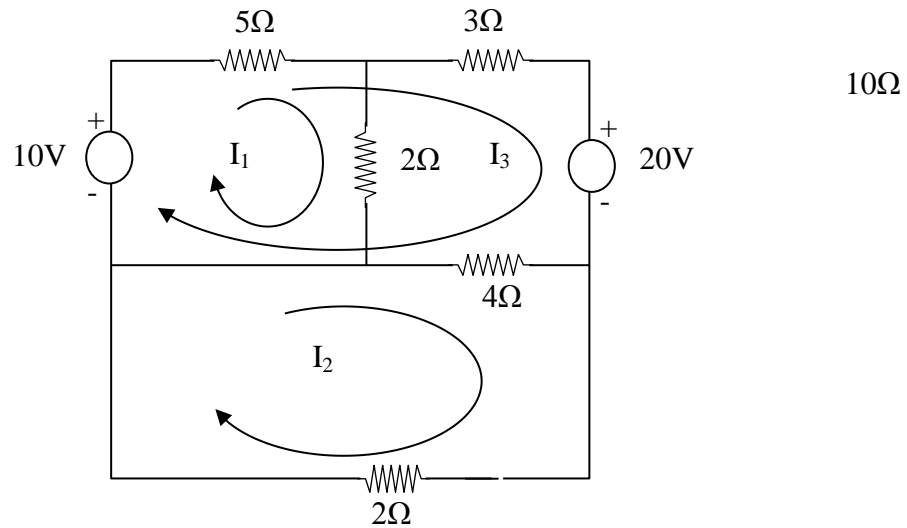
3.1) Να εφαρμοστεί η μέθοδος ρευμάτων βρόχων στο κύκλωμα του σχήματος 3.63 και να γραφεί η εξίσωση πινάκων. Να βρεθεί το ρεύμα I_1 .



Σχήμα 3.63: Κύκλωμα άσκησης 3.1

(Απάντηση: Κάθε πηγή τροφοδοτεί με ρεύμα 2.13A)

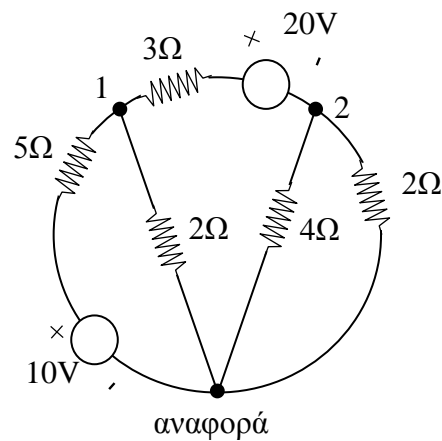
3.2) Τα ρεύματα βρόχων φαίνονται στο κύκλωμα του σχήματος 3.64. Να γραφεί η εξίσωση πινάκων και να υπολογιστούν τα ρεύματα.



Σχήμα 3.64: Κύκλωμα άσκησης 3.2

(Απάντηση: 3.55A, -1.98A, -2.98A)

3.3) Για το κύκλωμα του σχήματος 3.65 να βρεθούν οι τάσεις V_1 και V_2 και τα ρεύματα με τη μέθοδο των τάσεων κόμβου.

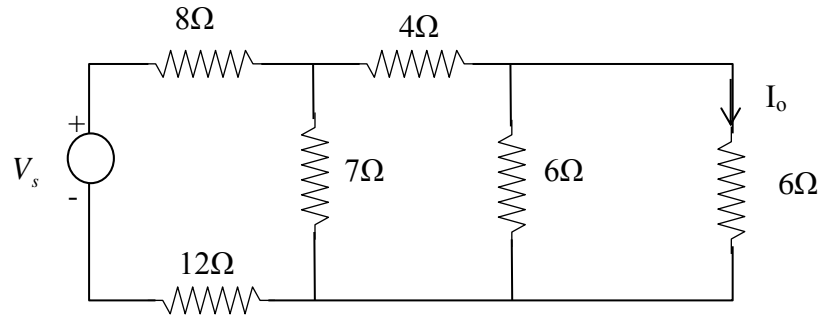


Σχήμα 3.65: Κύκλωμα άσκησης 3.3

(Απάντηση: 7.11V, -3.96V, 3.55A, -1.98A, -2.98A)

3.4) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.66 ισχύει $I_o = 7.5mA$. Με τη μέθοδο ρευμάτων βρόχων να βρεθούν τα εξής:

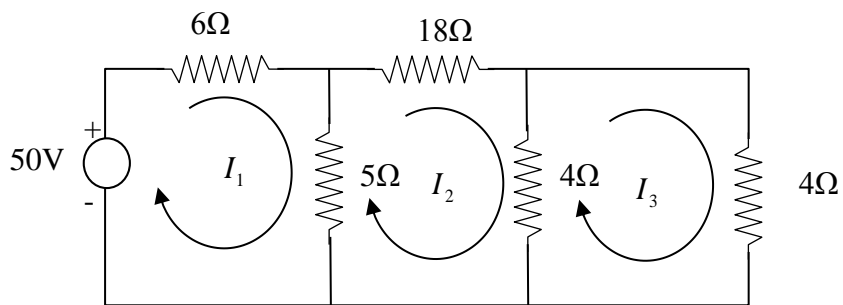
- α) Την τάση V_s
- β) Την αντίσταση εισόδου. (Να εφαρμοστεί η μέθοδος ισοδύναμου κυκλώματος)
- γ) Την αντίσταση μεταφοράς (ως προς τα I_o και V_s).



Σχήμα 3.66: Κύκλωμα άσκησης 3.4

(Απάντηση: α) 0,705V, β) 23.5Ω, γ) 94Ω)

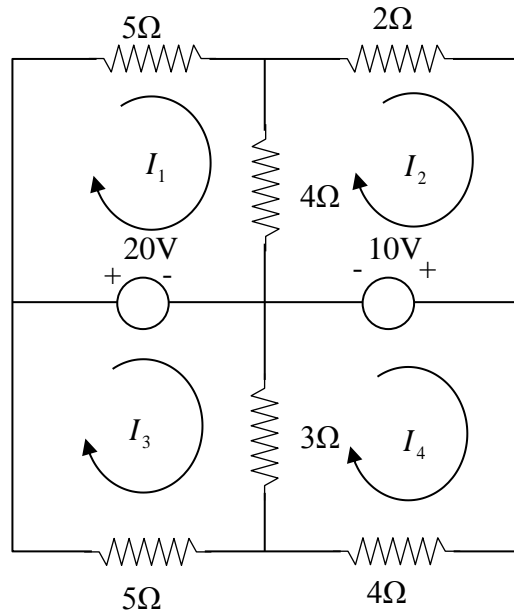
3.5) Για το κύκλωμα του σχήματος 3.67 να βρεθούν α) τα ρεύματα βρόχων, β) οι αντιστάσεις $R_{εισ,1}, R_{μετ,12}, R_{μετ,13}$.



Σχήμα 3.67: Κύκλωμα άσκησης 3.5

(Απάντηση: α) 5A, 1A, 0.5A, β) 10Ω, 50Ω, 100Ω)

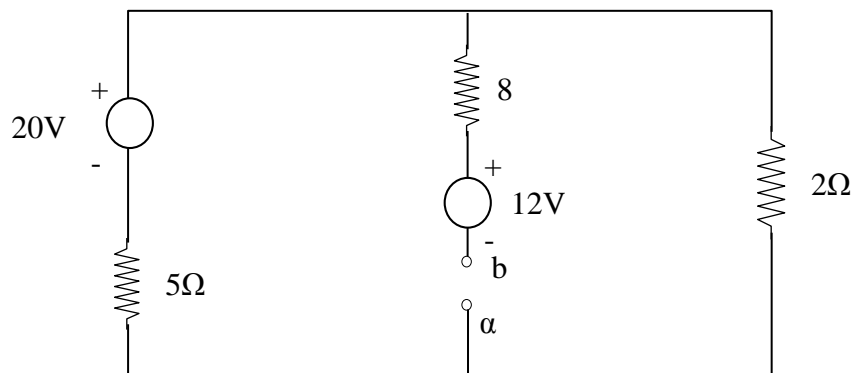
3.6) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.68 να βρεθούν τα ρεύματα βρόχων.



Σχήμα 3.68: Κύκλωμα άσκησης 3.6

(Απάντηση: 2.11A, -0.263A, -2.34A, 0.426A)

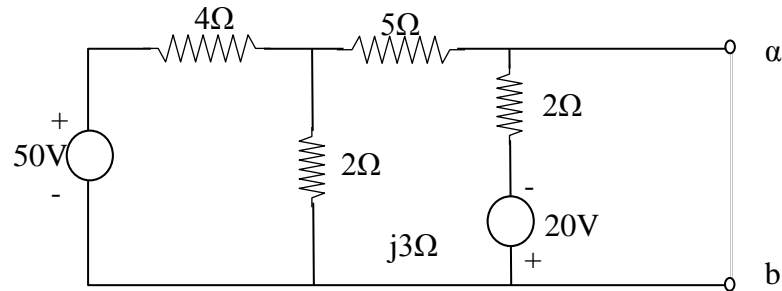
3.7) Για το κύκλωμα του σχήματος 3.69 να βρεθεί η τάση ανοιχτοκύκλωσης, το ρεύμα βραχυκύκλωσης και η ισοδύναμη αντίσταση στα άκρα a και b με τη μέθοδο ρευμάτων βρόχων ή τη μέθοδο τάσεων κόμβου. Το άκρο a να θεωρηθεί θετικό σε σχέση με το b.



Σχήμα 3.69: Κύκλωμα άσκησης 3.7

(Απάντηση: -6.29V, -0.667A, 9.44Ω)

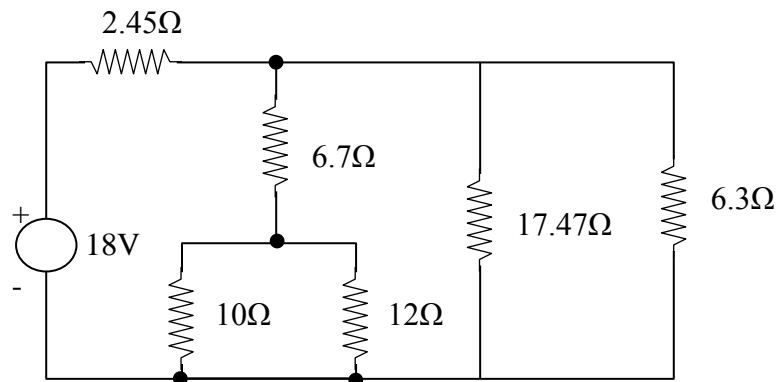
3.8) Για το κύκλωμα του σχήματος 3.70 να βρεθεί η τάση ανοιχτοκύκλωσης και το ρεύμα βραχυκύκλωσης στα άκρα a και b με τη μέθοδο τάσεων κόμβου. Το άκρο a να θεωρηθεί θετικό σε σχέση με το b.



Σχήμα 3.70: Κύκλωμα άσκησης 3.8

(Απάντηση: -11.2V, -7.37A)

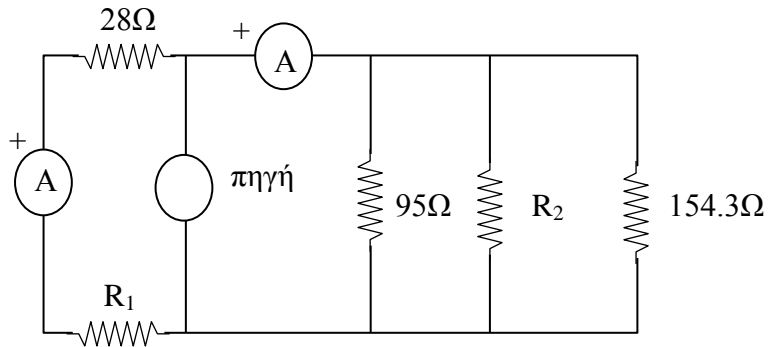
3.9) Με τη μέθοδο του ισοδύναμου κυκλώματος να υπολογιστεί το ρεύμα σε κάθε αντίσταση του κυκλώματος του σχήματος 3.71.



Σχήμα 3.71: Κύκλωμα άσκησης 3.9

(Απάντηση: Για την αντίσταση των 2.45Ω: 3.1A,
 Για την αντίσταση των 6.7Ω: 0.855A,
 Για την αντίσταση των 10 Ω: 0.466A,
 Για την αντίσταση των 12 Ω: 0.389A,
 Για την αντίσταση των 17.47 Ω: 0.595A,
 Για την αντίσταση των 6.3 Ω: 1.65 A)

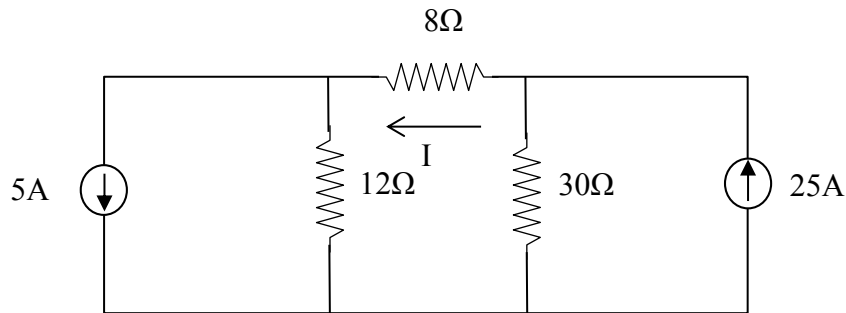
3.10) Τα δύο αμπερόμετρα στο κύκλωμα του σχήματος 3.72 έχουν ένδειξη 1.7A. Αν η πηγή παρέχει 300W στο κύκλωμα, να βρεθούν οι R_1 και R_2 .



Σχήμα 3.72: Κύκλωμα άσκησης 3.10

(Απάντηση: 23.9Ω, 443Ω)

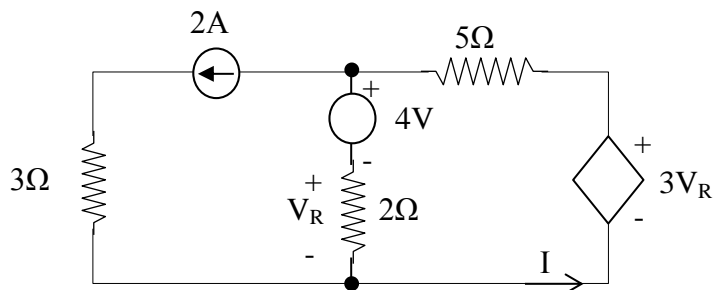
3.11) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.73 να υπολογιστεί το ρεύμα I με τη βοήθεια της επαλληλίας.



Σχήμα 3.73: Κύκλωμα άσκησης 3.11

(Απάντηση: 16.2A)

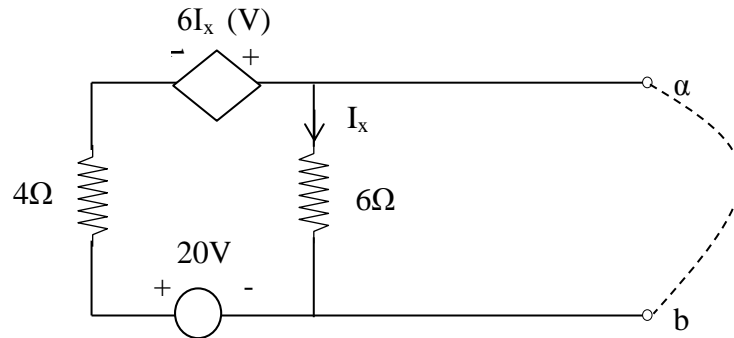
3.12) Να βρεθεί το ρεύμα I στο κύκλωμα του σχήματος 3.74.



Σχήμα 3.74: Κύκλωμα παραδείγματος 3.12

(Απάντηση: -12A)

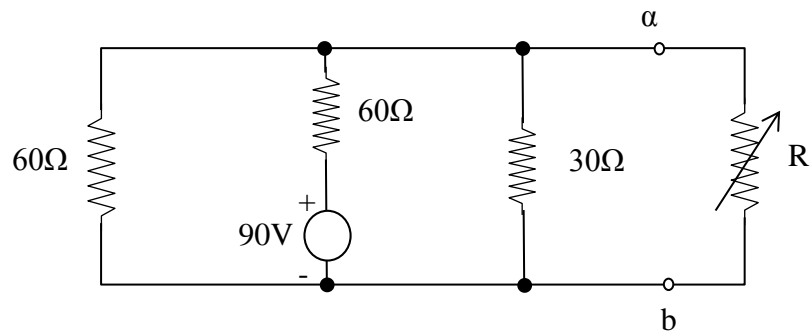
3.13) Να βρεθούν τα ισοδύναμα Thévenin και Norton για το κύκλωμα του σχήματος 3.75.



Σχήμα 3.75: Κύκλωμα άσκησης 3.13

(Απάντηση: $V'=30V$, $I'=5A$, $R'=6\Omega$)

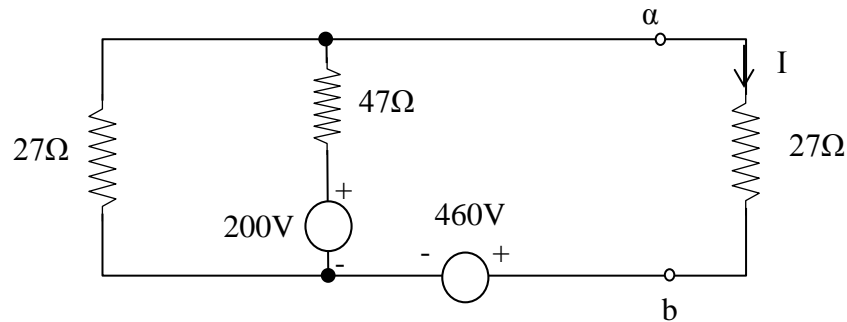
3.14) Να βρεθεί η μέγιστη ισχύς που μπορεί να μεταφερθεί από το κύκλωμα (στα αριστερά των άκρων α και β) στη μεταβλητή αντίσταση R του σχήματος 3.76.



Σχήμα 3.76: Κύκλωμα άσκησης 3.14

(Απάντηση: 8.44W)

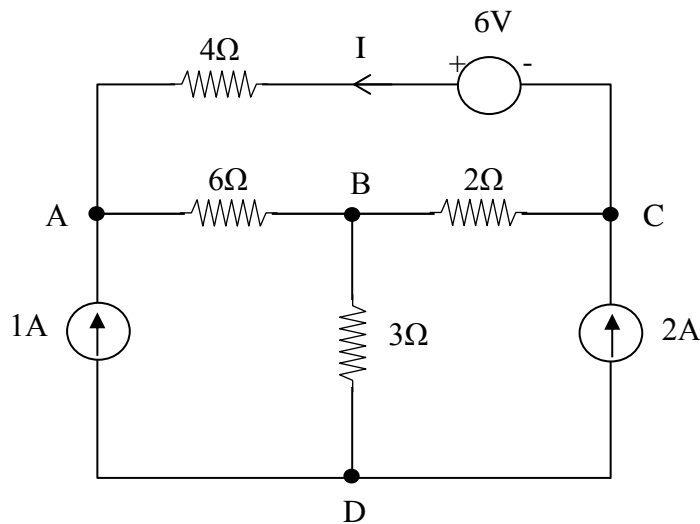
3.15) Να βρεθούν τα ισοδύναμα Thévenin και Norton για το κύκλωμα του σχήματος 3.77. Να βρεθεί επίσης το ρεύμα I.



Σχήμα 3.77: Κύκλωμα άσκησης 3.15

(Απάντηση: $-8.77A$)

3.16) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.78 να γραφούν οι εξισώσεις σύμφωνα με τη μέθοδο τάσεων κόμβων, για τους κόμβους A, B, C και τον κόμβο D ως αναφορά. Να βρεθούν επίσης οι τάσεις κάθε κόμβου.



Σχήμα 3.78: Κύκλωμα άσκησης 3.16

$$(Απάντηση: B : \left. \begin{array}{l} A : \left\{ \begin{array}{l} 5V_A - 2V_B - 3V_C = 30 \\ -V_A + 6V_B - 3V_C = 0 \\ -V_A - 2V_B + 3V_C = 2 \end{array} \right. \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} V_A = 17V \\ V_B = 9V \\ V_C = 12.33V \end{array} \right.)$$

3.17) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.78 αν $V_B = 9V$, να εφαρμοστεί ο νόμος τάσεων του Kirchhoff και να βρεθούν το ρεύμα I καθώς επίσης και οι τάσεις V_A, V_C .

(Απάντηση: $I=1/3A, V_A = 17V, V_C = 37/3V$)

3.18) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.78 να βρεθεί η συνεισφορά κάθε πηγής στις τάσεις V_A, V_B, V_C με επαλληλία και να συγκριθούν τα αποτελέσματα με τα αποτελέσματα των ασκήσεων 3.16 και 3.17.

$$\begin{aligned} \text{(Απάντηση: Συνεισφορά πηγής τάσης: } V_A = 3V, V_B = 0V, V_C = -1V, \\ \text{Συνεισφορά πηγής ρεύματος 1A: } V_A = 6V, V_B = 3V, V_C = 4V, \\ \text{Συνεισφορά πηγής ρεύματος 2A: } V_A = 8V, V_B = 6V, V_C = \frac{28}{3}V, \\ \text{Άθροισμα συνεισφορών: } V_A = 17V, V_B = 9V, V_C = \frac{37}{3}V) \end{aligned}$$

3.19) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.78 αφού αφαιρεθεί η πηγή ρεύματος των 2A, να βρεθεί η τάση ανοιχτοκύκλωσης μεταξύ των κόμβων C και D.

$$\text{(Απάντηση: } 3V)$$

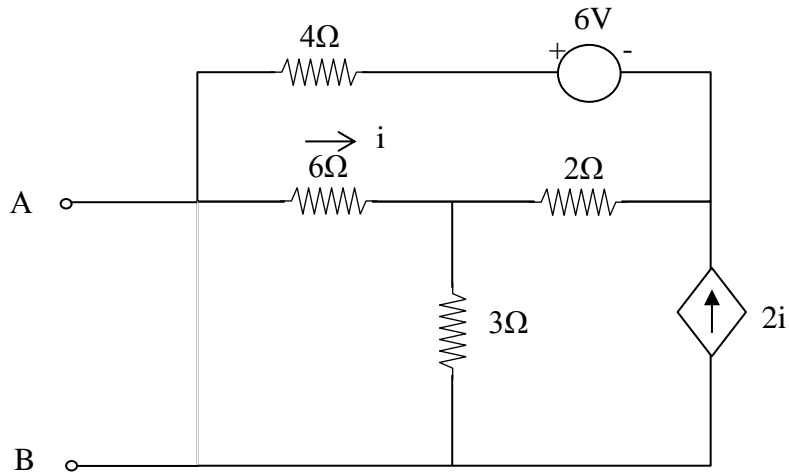
3.20) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.78 αν $V_C = 37/3V$ και η τάση ανοιχτοκύκλωσης μεταξύ των κόμβων C και D είναι 3V να βρεθεί το ισοδύναμο Thévenin όπως φαίνεται από την πηγή ρεύματος των 2A.

$$\text{(Απάντηση: } V_{Th} = 3V, R_{Th} = 14/3\Omega)$$

3.21) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.78 αφού αφαιρεθούν όλες οι πηγές, να βρεθεί η ισοδύναμη αντίσταση R στα άκρα C και D.

$$\text{(Απάντηση: } R_{Th} = 14/3\Omega \text{ (Παρατήρηση: Η απάντηση είναι ίδια με την αντίσταση Thévenin που υπολογίστηκε στην άσκηση 3.20)}$$

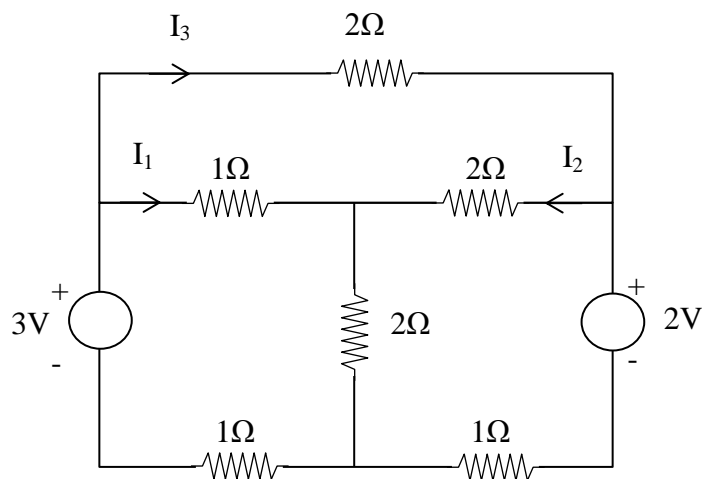
3.22) Να βρεθεί το ισοδύναμο Thévenin του κυκλώματος του σχήματος 3.79.



Σχήμα 3.79: Κύκλωμα άσκησης 3.22

(Απάντηση: $V_{Th}=12V$, $R_{Th}=17\Omega$)

3.23) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.80 να γραφούν οι εξισώσεις ρευμάτων βρόχων. Στη συνέχεια να βρεθούν τα ρεύματα.



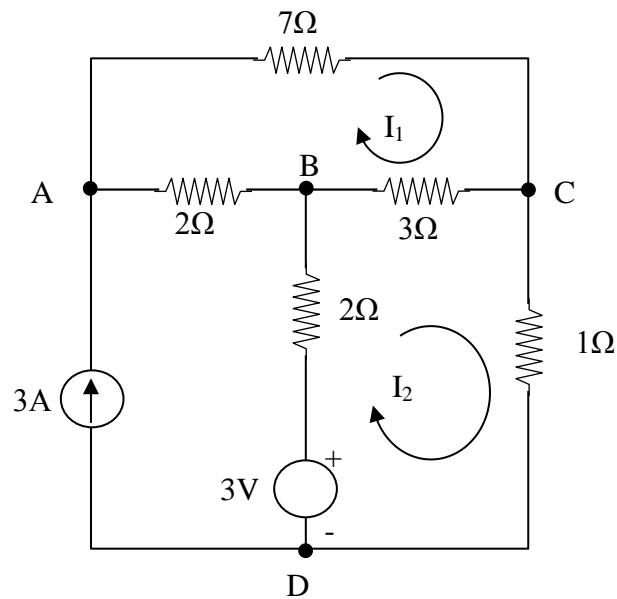
Σχήμα 3.80: Κύκλωμα άσκησης 3.23

$$(Απάντηση: \left. \begin{array}{l} 1: \{ 4I_1 + 2I_2 + I_3 = 3 \\ 2: \{ 2I_1 + 5I_2 - I_3 = 2 \\ 3: \{ -I_1 + 2I_2 + 2I_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} I_1 = \frac{32}{51} A \\ I_2 = \frac{9}{51} A \\ I_3 = \frac{7}{51} A \end{array})$$

3.24) Για το κύκλωμα του σχήματος 3.80 να βρεθεί η συνεισφορά κάθε πηγής στα ρεύματα I_1, I_2, I_3 και να συγκριθεί το αποτέλεσμα με αυτό της άσκησης 3.23.

$$\begin{aligned} \text{(Απάντηση: Συνεισφορά πηγής τάσης 3V: } I_1 &= \frac{36}{51} \text{ A, } I_2 = -\frac{9}{51} \text{ A, } I_3 = \frac{27}{51} \text{ A,} \\ \text{Συνεισφορά πηγής τάσης 2V: } I_1 &= -\frac{4}{51} \text{ A, } I_2 = \frac{18}{51} \text{ A, } I_3 = -\frac{20}{51} \text{ A,} \\ \text{Άθροισμα συνεισφορών: } I_1 &= \frac{32}{51} \text{ A, } I_2 = \frac{9}{51} \text{ A, } I_3 = \frac{7}{51} \text{ A)} \end{aligned}$$

3.25) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.81 να γραφούν οι εξισώσεις για τους κόμβους A, B, C αν ο κόμβος D είναι ο κόμβος αναφοράς. Να βρεθούν επίσης οι τάσεις των κόμβων.



Σχήμα 3.81: Κύκλωμα άσκησης 3.25

$$\text{(Απάντηση: } \left. \begin{array}{l} A: \{ 9V_A - 7V_B - 2V_C = 42 \} \\ B: \{ -3V_A + 8V_B - 2V_C = 9 \} \\ C: \{ -3V_A - 7V_B + 3V_C = 0 \} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} V_A = 9V \\ V_B = 5V \\ V_C = 2V \end{array})$$

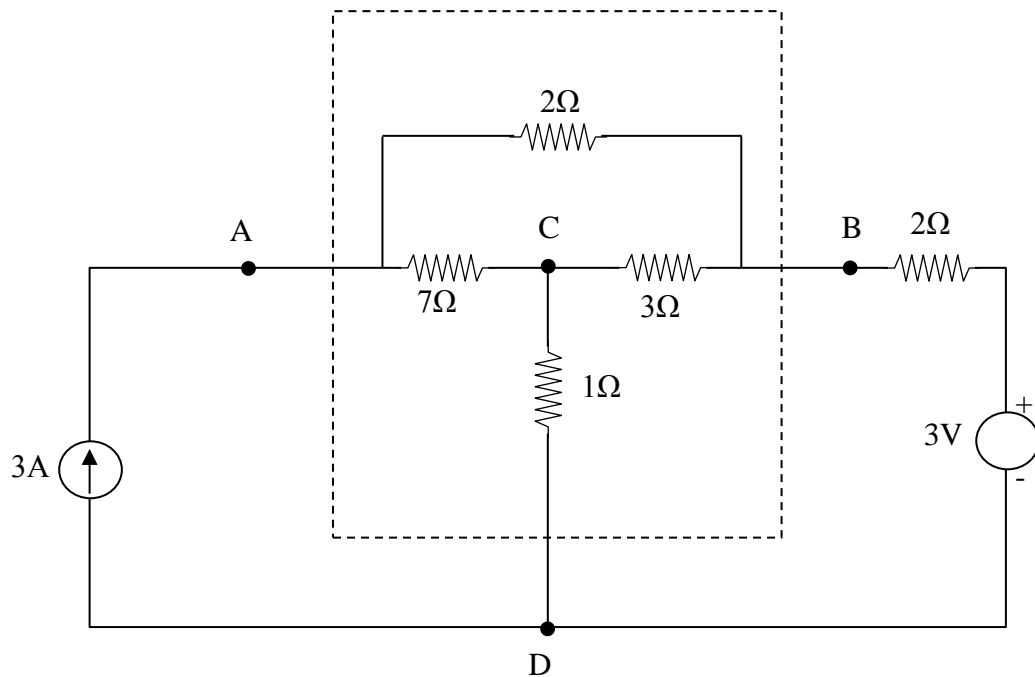
3.26) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.81 να γραφούν οι εξισώσεις ρευμάτων βρόχων και στη συνέχεια να υπολογιστούν τα ρεύματα βρόχων και οι τάσεις κόμβων.

$$\begin{aligned} \text{(Απάντηση: } \left. \begin{array}{l} 1: \{ 4I_1 - I_2 = 2 \} \\ 2: \{ -I_1 + 2I_2 = 3 \} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} I_1 = 1A \\ I_2 = 2A \\ V_A = 9V, V_B = 5V, V_C = 2V \end{array}) \end{aligned}$$

3.27) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.81 να βρεθεί η συνεισφορά κάθε πηγής στις τάσεις V_A, V_B, V_C και να συγκριθούν οι τιμές με αυτές που βρέθηκαν στην άσκηση 3.26.

(Απάντηση: Συνεισφορά πηγής ρεύματος: $V_A = 7.429V, V_B = 3.143V, V_C = 1.429V$,
 Συνεισφορά πηγής τάσης: $V_A = 1.571V, V_B = 1.857V, V_C = 0.571V$,
 Άθροισμα συνεισφορών: $V_A = 9V, V_B = 5V, V_C = 2V$)

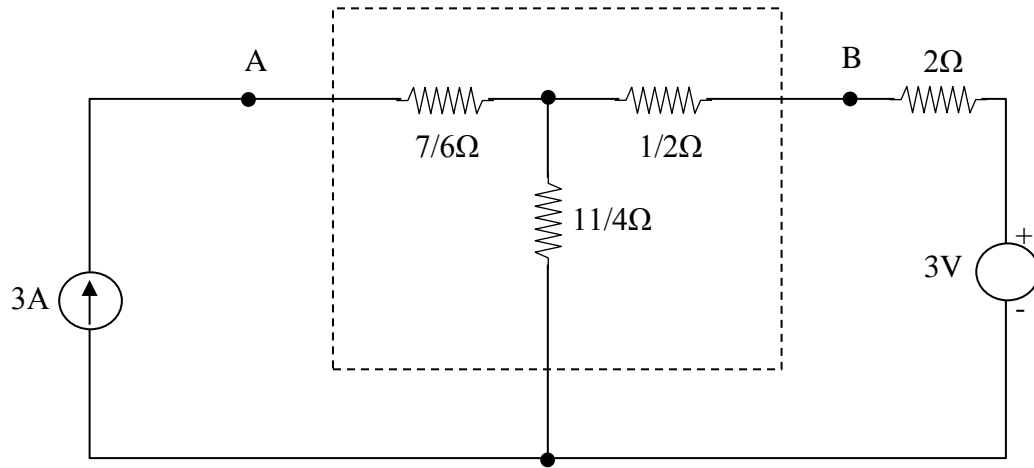
3.28) Να αποδειχθεί ότι το κύκλωμα του σχήματος 3.82 είναι ισοδύναμο με το κύκλωμα του σχήματος 3.81.



Σχήμα 3.82: Κύκλωμα άσκησης 3.28

(Απάντηση: Να μετακινηθεί ο κόμβος B εξωτερικά του βρόχου)

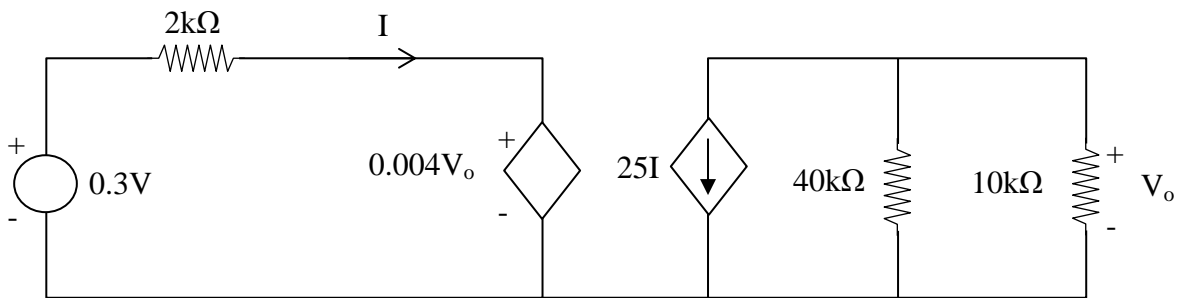
3.29) Να βρεθούν οι τάσεις V_A και V_B στο κύκλωμα του σχήματος 3.83.



Σχήμα 3.83: Κύκλωμα άσκησης 3.29

(Απάντηση: $V_A = 9V$, $V_B = 5V$)

3.30) Στο κύκλωμα του σχήματος 3.84 να βρεθεί η τάση V_o .



(Απάντηση: $V_o = -50V$)

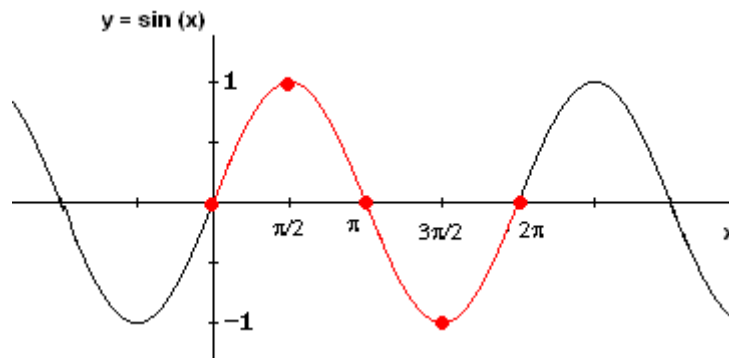
Σχήμα 3.84: Κύκλωμα άσκησης 3.30

Κεφάλαιο 4: Δίκτυα στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση (ΗΜΚ)

4.1. Εισαγωγή

Στα κυκλώματα που παρουσιάστηκαν έως τώρα, όλες οι ανεξάρτητες πηγές ήταν συνεχούς ρεύματος (dc). Σε αυτό το κεφάλαιο, όλα τα κυκλώματα θα έχουν ημιτονοειδείς πηγές (ac). Η απόκρισή τους θα είναι επίσης ημιτονοειδής.

Μία ημιτονοειδής τάση ή ρεύμα (ac voltage/ac current) μεταβάλλεται περιοδικά ως προς το χρόνο, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Ημιτονοειδής συνάρτηση

Το μικρότερο μη επαναλαμβανόμενο κομμάτι μίας περιοδικής κυματομορφής (ημιτονοειδούς στην προκειμένη περίπτωση) ονομάζεται κύκλος και η διάρκεια αυτού του κύκλου ονομάζεται περίοδος και συμβολίζεται με T . Το αντίστροφο της περιόδου, που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των κύκλων σε μία περίοδο, ονομάζεται συχνότητα και συμβολίζεται με f :

$$f = \frac{1}{T} \quad (4.1)$$

4.2. Απόκριση στοιχείων

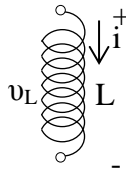
Οι σχέσεις μεταξύ τάσης και ρεύματος για τα στοιχεία R, L και C (ωμική αντίσταση, πηνίο, πυκνωτής) έχουν ήδη μελετηθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο η τάση (v) και το ρεύμα (i) θα είναι συναρτήσεις ημιτονοειδούς μορφής. Η μεταβλητή των συναρτήσεων της τάσης και του ρεύματος θα είναι ο όρος ωt , όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα, η οποία έχει μονάδες rad/s . Επίσης ισχύει η σχέση $\omega = 2\pi f$, όπου f είναι η συχνότητα. Η μονάδα συχνότητας στο SI είναι το hertz και συμβολίζεται με Hz .

Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε ένα πηνίο με αυτεπαγωγή L (σχήμα 4.2) και η συνάρτηση του ρεύματος που το διαρρέει είναι:

$$i = I \cos(\omega t + 45^\circ) A$$

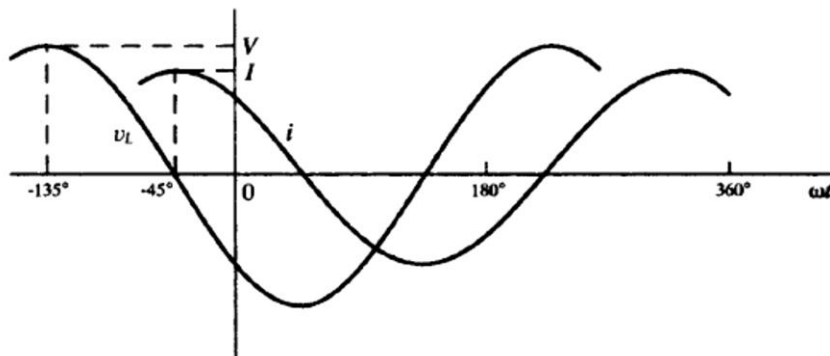
Τότε η τάση θα είναι:

$$v_L = L \frac{di}{dt} = \omega LI [-\sin(\omega t + 45^\circ)] = \omega LI \cos(\omega t + 135^\circ) \quad (V)$$



Σχήμα 4.2: Πηνίο με αυτεπαγωγή L

Στο σχήμα 4.3 παριστάνονται γραφικά οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις για το ρεύμα και την τάση του πηνίου.



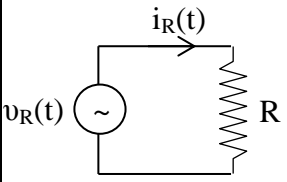
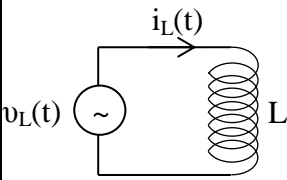
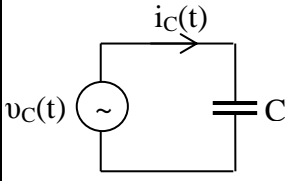
Σχήμα 4.3: Ημιτονοειδείς συναρτήσεις για το ρεύμα i και την τάση v_L του πηνίου

Από τη σύγκριση μεταξύ του ρεύματος i και της τάσης v_L του πηνίου, προκύπτει ότι το ρεύμα έπεται της τάσης κατά 90° ή κατά $\pi/2$ rad. Ο κάθετος άξονας αντιπροσωπεύει δύο διαφορετικά μεγέθη, την τάση v_L και το ρεύμα i .

Μία ημιτονοειδής συνάρτηση είναι πλήρως ορισμένη όταν είναι γνωστά: το μέτρο (για την τάση ή το ρεύμα), η συχνότητα (ω ή f) και η φάση.

Στον πίνακα 4.1 φαίνονται οι αποκρίσεις των βασικών στοιχείων ενός κυκλώματος για εφαρμοζόμενο ρεύμα $i = I \cos \omega t$ και εφαρμοζόμενη τάση $v = V \cos \omega t$, στην περίπτωση δηλαδή της ημιτονοειδούς μόνιμης κατάστασης (ΗΜΚ). Συμπερασματικά προκύπτουν τα εξής (στην περίπτωση ιδανικών στοιχείων):

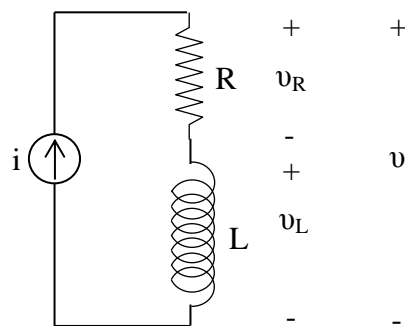
- Σε μία ωμική αντίσταση R η τάση v και το ρεύμα i είναι συμφασικά, δηλαδή παίρνουν ταυτόχρονα τις μέγιστες και τις ελάχιστες τιμές τους.
- Σε ένα πηνίο με αυτεπαγωγή L η τάση v προηγείται του ρεύματος i κατά 90° ή κατά $\pi/2$ rad.
- Σε έναν πυκνωτή με χωρητικότητα C το ρεύμα i προηγείται της τάσης v κατά 90° ή κατά $\pi/2$ rad.

	$i = I \cos \omega t$	$v = V \cos \omega t$
	$v_R = RI \cos \omega t$	$i_R = \frac{V}{R} \cos \omega t$
	$v_L = \omega LI \cos(\omega t + 90^\circ)$	$i_L = \frac{V}{\omega L} \cos(\omega t - 90^\circ)$
	$v_C = \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t - 90^\circ)$	$i_C = \omega CV \cos(\omega t + 90^\circ)$

Πίνακας 4.1: Αποκρίσεις βασικών στοιχείων

Παράδειγμα 4.1

Στο σχήμα 4.4 φαίνεται ένα κύκλωμα RL το οποίο διαρρέει ρεύμα $i = I \sin \omega t$. Να βρεθεί η τάση v κατά μήκος των δύο στοιχείων του κυκλώματος και να σχεδιαστούν οι κυματομορφές της τάσης v και του ρεύματος i .



Σχήμα 4.4: Κύκλωμα RL του παραδείγματος 4.1

Απάντηση:

Η τάση στα άκρα της αντίστασης R θα είναι:

$$v_R = RI \sin \omega t$$

Η τάση στα άκρα του πηνίου θα είναι:

$$v_L = L \frac{di}{dt} = \omega LI \sin(\omega t + 90^\circ)$$

Η συνολική τάση v θα είναι:

$$v = v_R + v_L = RI \sin \omega t + \omega LI \sin(\omega t + 90^\circ)$$

Αφού το ρεύμα είναι μία ημιτονοειδής συνάρτηση και ισχύει:

$$v = V \sin(\omega t + \theta) = V \sin \omega t \cos \theta + V \cos \omega t \sin \theta$$

προκύπτει από τα παραπάνω:

$$v = RI \sin \omega t + \omega LI \sin \omega t \cos 90^\circ + \omega LI \cos \omega t \sin 90^\circ$$

Αν εξισωθούν οι συντελεστές των ίδιων όρων στις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει:

$$V \sin \theta = \omega LI \quad \text{και} \quad V \cos \theta = RI$$

Τότε:

$$v = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin[\omega t + \arctan(\omega L / R)]$$

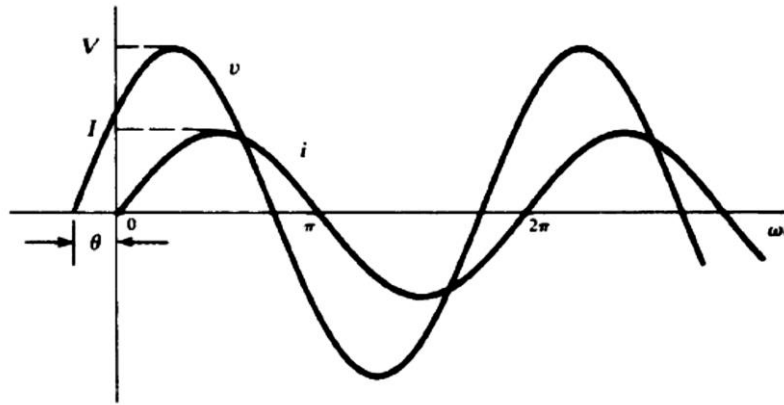
Και

$$V = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{και} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right)$$

Οι κυματομορφές της τάσης v και του ρεύματος i παριστάνονται στο σχήμα 4.5. Η γωνία φάσης, η γωνία δηλαδή με την οποία το ρεύμα i έπεται της τάσης v , έχει τιμές: $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Οι οριακές τιμές (ελάχιστη και μέγιστη) προκύπτουν από τις σχέσεις $\omega L \ll R$ και $\omega L \gg R$ αντίστοιχα. Αν το κύκλωμα είχε εφαρμοζόμενη τάση ίση με $v = V \cos \omega t$, το ρεύμα που θα προέκυπτε θα ήταν:

$$i = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \theta)$$

όπου όπως πριν ισχύει $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right)$.



Σχήμα 4.5: Κυματομορφές τάσης και ρεύματος i του παραδείγματος 4.1

Παράδειγμα 4.2

Αν το ρεύμα που διαρρέει ένα κύκλωμα RC (με τα στοιχεία σε σειρά) δίνεται από τη συνάρτηση $i = I \sin \omega t$ να βρεθεί η τάση v κατά μήκος των δύο στοιχείων του.

Απάντηση:

Η τάση στα άκρα της αντίστασης R θα είναι:

$$v_R = RI \sin \omega t$$

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή θα είναι:

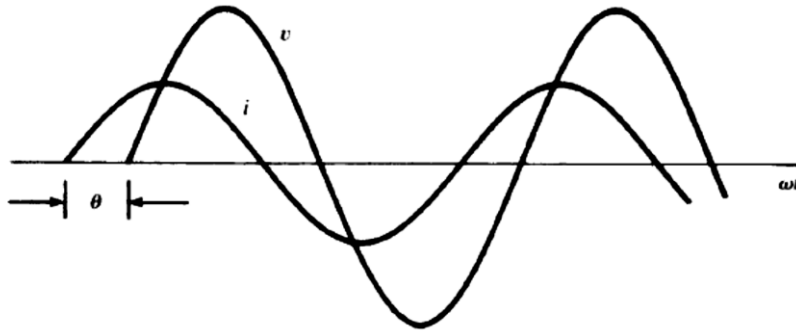
$$v_C = (1/\omega C) \sin(\omega t - 90^\circ)$$

Η συνολική τάση v θα είναι:

$$v = v_R + v_C = V \sin(\omega t - \theta)$$

$$\text{όπου } V = I\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} \text{ και } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

Οι κυματομορφές της τάσης v και του ρεύματος i παριστάνονται στο σχήμα 4.6. Η αρνητική γωνία φάσης, καταδεικνύει ότι η κυματομορφή της τάσης v έχει μετατοπιστεί στα δεξιά της κυματομορφής του ρεύματος i . Επομένως το ρεύμα προηγείται της τάσης σε ένα κύκλωμα RC . Η γωνία φάσης παίρνει τιμές: $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Οι οριακές τιμές (ελάχιστη και μέγιστη) προκύπτουν από τις σχέσεις $\frac{1}{\omega C} \ll R$ και $\frac{1}{\omega C} \gg R$ αντίστοιχα.



Σχήμα 4.6: Κυματομορφές τάσης και ρεύματος i του παραδείγματος 4.2

4.3. Αναπαράσταση ημιτονοειδών συναρτήσεων με μιγαδικούς αριθμούς – Phasors

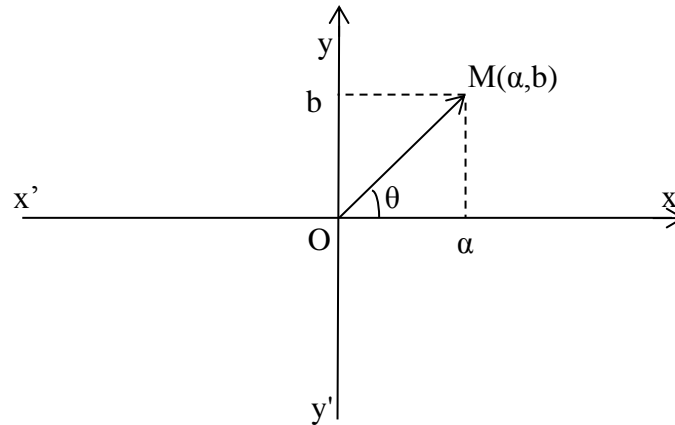
Για την ανάλυση κυκλωμάτων με ημιτονοειδείς πηγές (ac), χρησιμοποιούνται μιγαδικοί αριθμοί. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών (\mathbb{C}) είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών (\mathbb{R}), στο οποίο επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού (με τις ιδιότητές τους) και το οποίο έχει ως στοιχεία:

- i. Όλους τους πραγματικούς αριθμούς
- ii. Ένα ακόμη στοιχείο, το j , το οποίο ονομάζεται φανταστική μονάδα και για το οποίο ισχύει $j^2 = -1$, καθώς και τα πολλαπλάσιά του bj , $b \in \mathbb{R}$.
- iii. Κάθε άθροισμα της μορφής $a + bj$, $a, b \in \mathbb{R}$

Κάθε αριθμός της μορφής $a + bj$ με $a, b \in \mathbb{R}$ λέγεται μιγαδικός αριθμός. Ειδικότερα κάθε αριθμός της μορφής bj , $b \in \mathbb{R}$ λέγεται φανταστικός αριθμός.

Αν $z = a + bj$, ο πραγματικός αριθμός a λέγεται πραγματικό μέρος του z και συμβολίζεται με $\text{Re}(z)$, ενώ ο πραγματικός αριθμός b λέγεται φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται με $\text{Im}(z)$. Δηλαδή ισχύει: $\text{Re}(z) = a$ και $\text{Im}(z) = b$.

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = a + bj$ και ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς Oxy στο επίπεδο. Με την βοήθεια του μιγαδικού αριθμού z ορίζεται το σημείο $M(a, b)$ του επιπέδου, δηλαδή κάθε μιγαδικός αριθμός $z = a + bj$ αντιστοιχίζεται στο σημείο $M(a, b)$. Ισχύει βέβαια και το αντίστροφο. Δηλαδή κάθε σημείο $M(a, b)$ του επιπέδου αντιστοιχίζεται στο μιγαδικό αριθμό $z = a + bj$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.7. Ο τρόπος γραφής ($z = a + bj$) του μιγαδικού αριθμού z ονομάζεται καρτεσιανή μορφή του z .



Σχήμα 4.7: Απεικόνιση μιγαδικού αριθμού στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = a + bj \neq 0$. Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού αυτού είναι: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Αν θ είναι ένα όρισμα του z , όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.7, τότε από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών σε ορθοκανονικό σύστημα προκύπτει η τριγωνομετρική μορφή του z , η οποία είναι η εξής:

$$z = |z|(\cos \theta + j \sin \theta) \quad (4.2)$$

Εκτός από την καρτεσιανή και την τριγωνομετρική μορφή, χρησιμοποιούνται επίσης η εκθετική μορφή ($z = |z|e^{j\theta}$) και η πολική μορφή ($z = |z|e^{j\theta}$). Η εκθετική μορφή προκύπτει από την τριγωνομετρική, σύμφωνα με το θεώρημα του Euler ($e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$).

Για μετατροπή από καρτεσιανή σε τριγωνομετρική (και αντίστοιχα σε εκθετική και πολική) μορφή χρησιμοποιούνται οι σχέσεις:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4.3)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4.4)$$

ενώ για τη μετατροπή από τριγωνομετρική (και αντίστοιχα από εκθετική και πολική) σε καρτεσιανή μορφή χρησιμοποιούνται οι σχέσεις:

$$a = |z| \cos \theta \quad (4.5)$$

$$b = |z| \sin \theta \quad (4.6)$$

Για την αναπαράσταση των ημιτονοειδών συναρτήσεων της τάσης και του ρεύματος χρησιμοποιείται μία μορφή που ονομάζεται Phasor (στα ελληνικά συναντάται συχνά ως «φασιθέτης» ή «μιγαδικό διάνυσμα»). Για την καλύτερη κατανόηση των Phasors θα δοθεί αρχικά ένα παράδειγμα. Έστω ότι η συνάρτηση της τάσης σε ένα κύκλωμα δίνεται από τη σχέση: $v = 150 \cos(500t + 45^\circ)$ (V). Το αντίστοιχο Phasor για τη

συνάρτηση της τάσης θα είναι το: $\overset{\circ}{V} = 150\angle 45^\circ (V)$ ή το $\overset{\circ}{V} = 150e^{j45^\circ} (V)$. Επομένως για τα Phasors χρησιμοποιείται είτε η πολική είτε η εκθετική μορφή μιγαδικών αριθμών. Γενικά τα Phasors είναι δυνατό να εκφραστούν με όλες τις μορφές των μιγαδικών αριθμών. Στο συγκεκριμένο βιβλίο θα χρησιμοποιηθεί η πολική μορφή για μεγαλύτερη ευκολία.

Για την αναπαράσταση μίας συνάρτησης τάσης ή ρεύματος με Phasor, πρέπει οπωσδήποτε η αρχική συνάρτηση να είναι συνάρτηση συνημίτονου. Αν η τάση ή το ρεύμα εκφράζονται με συνάρτηση ημιτόνου, τότε μετατρέπονται σε συνάρτηση συνημίτονου αν αφαιρεθούν 90° από τη φάση, σύμφωνα με τη γνωστή τριγωνομετρική ιδιότητα. Για παράδειγμα αν η συνάρτηση του ρεύματος σε ένα κύκλωμα δίνεται από τη σχέση: $i = 3\sin(2000t + 30^\circ) (mA) = 3\cos(2000t - 60^\circ) (mA)$

το αντίστοιχο Phasor για τη συνάρτηση του ρεύματος θα είναι το: $\overset{\circ}{I} = 3\angle -60^\circ (mA)$. Τα Phasor συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα με ένα δείκτη από πάνω, για παράδειγμα $\overset{\circ}{V}, \overset{\circ}{I}$ ενώ οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις της τάσης ή του ρεύματος ως συνάρτηση του χρόνου συμβολίζονται με μικρά γράμματα για παράδειγμα $v(t)$ ή $i(t)$. Η γωνία φάσης της συνάρτησης συνημίτονου είναι η φάση του Phasor. Η συχνότητα f και η γωνιακή συχνότητα ω δεν εμφανίζονται στα Phasors καθώς είναι δεδομένα σε ένα κύκλωμα στη μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση.

Ένα συνηθισμένο λάθος είναι η εξίσωση ενός Phasor με μία ημιτονοειδή συνάρτηση. Δεν ισχύει αυτή η ισότητα καθώς ένα Phasor είναι μία μιγαδική σταθερά ενώ η ημιτονοειδής συνάρτηση είναι μία πραγματική συνάρτηση του χρόνου. Πιο απλά είναι λάθος να γράφει η ισότητα: $150\angle 45^\circ = 150\cos(500t + 45^\circ)$.

Οι πράξεις μεταξύ των Phasor ακολουθούν τους κανόνες των πράξεων μεταξύ μιγαδικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα η πρόσθεση και η αφαίρεση γίνονται σε καρτεσιανή μορφή, ενώ ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση γίνονται σε πολική ή εκθετική μορφή.

Παράδειγμα 4.3

Ένα κύκλωμα στο οποίο είναι συνδεδεμένα σε σειρά μία αντίσταση $R = 10\Omega$ και ένα πηνίο με αυτεπαγωγή $L = 20mH$ διαρρέεται από ρεύμα $i = 5\cos(500t + 10^\circ) (A)$. Να βρεθεί η συνάρτηση της τάσης v , το phasor της τάσης $\overset{\circ}{V}$ και το phasor του ρεύματος $\overset{\circ}{I}$. Στη συνέχεια να σχεδιαστούν τα phasors της τάσης και του ρεύματος στο καρτεσιανό επίπεδο.

Απάντηση:

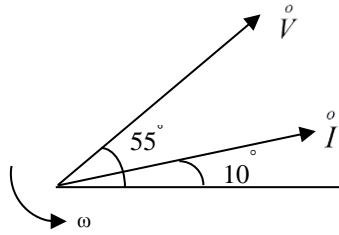
Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το Παράδειγμα 4.1 προκύπτει ότι:

$$v_R = 50\cos(500t + 10^\circ) \text{ και } v_L = L \frac{di}{dt} = 50\cos(500t + 100^\circ)$$

$$\text{Επομένως } v = v_R + v_L = 70.7\cos(500t + 55^\circ) (V)$$

Τα αντίστοιχα phasors είναι τα: $\overset{\circ}{I} = 5\angle 10^\circ (A)$ και $\overset{\circ}{V} = 70.7\angle 55^\circ (V)$.

Στο σχήμα 4.8 φαίνονται τα phasors της τάσης και του ρεύματος στο καρτεσιανό επίπεδο.



Σχήμα 4.8: Phasors της τάσης και του ρεύματος στο καρτεσιανό επίπεδο.

Παράδειγμα 4.4

Δίνεται ότι $\overset{\circ}{V}_1 = 25\angle 143.13^\circ$ (V) και $\overset{\circ}{V}_2 = 11.2\angle 26.57^\circ$ (V). Να βρεθεί ο λόγος $\frac{\overset{\circ}{V}_1}{\overset{\circ}{V}_2}$ και

το άθροισμα $\overset{\circ}{V}_1 + \overset{\circ}{V}_2$.

Απάντηση:

$$\frac{\overset{\circ}{V}_1}{\overset{\circ}{V}_2} = \frac{25\angle 143.13^\circ}{11.2\angle 26.57^\circ} = 2.23\angle 116.56^\circ = -1 + j1.99$$

$$\overset{\circ}{V}_1 + \overset{\circ}{V}_2 = (-20 + j15) + (10 + j5) = -10 + j20 = 23.36\angle 116.57^\circ$$

4.4. Σύνθετη Αντίσταση – Σύνθετη Αγωγιμότητα

Μία ημιτονοειδής τάση ή ένα ημιτονοειδές ρεύμα που εφαρμόζεται σε ένα *RLC* κύκλωμα παράγει μία ημιτονοειδή απόκριση. Όταν το κύκλωμα περιγράφεται με ημιτονοειδείς συναρτήσεις τάσης ή ρεύματος ως συνάρτηση του χρόνου για παράδειγμα $v(t)$ ή $i(t)$, τότε το κύκλωμα λέγεται ότι είναι στο πεδίο του χρόνου (σχήμα 4.9α). Όταν το κύκλωμα περιγράφεται με Phasors τάσης ή ρεύματος για παράδειγμα $\overset{\circ}{V}$ ή $\overset{\circ}{I}$, τότε το κύκλωμα λέγεται ότι είναι στο πεδίο της συχνότητας (σχήμα 4.9β). Τότε η τάση και το ρεύμα γράφονται αντίστοιχα σε κάθε περίπτωση:

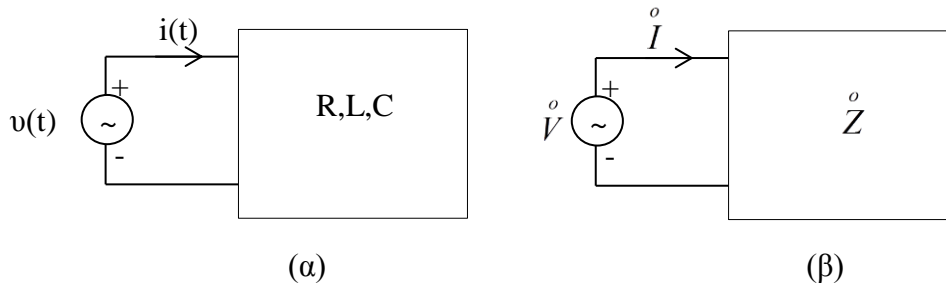
$$v(t) = |V| \cos(\omega t + \theta) \text{ και } \overset{\circ}{V} = |V| \angle \theta$$

$$i(t) = |I| \cos(\omega t + \phi) \text{ και } \overset{\circ}{I} = |I| \angle \phi$$

Ο λόγος του Phasor της τάσης $\overset{\circ}{V}$ ως προς το Phasor του ρεύματος $\overset{\circ}{I}$ ονομάζεται σύνθετη αντίσταση και συμβολίζεται με $\overset{\circ}{Z}$. Δηλαδή $\overset{\circ}{Z} = \frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{I}}$. Το αντίστροφο της

σύνθετης αντίστασης ονομάζεται σύνθετη αγωγιμότητα και συμβολίζεται με $\overset{\circ}{Y}$. Δηλαδή $\overset{\circ}{Y} = \frac{1}{\overset{\circ}{Z}}$. Η σύνθετη αγωγιμότητα έχει μονάδα στο SI το Simens (S), όπου

$1S = 1\Omega^{-1}$. Η σύνθετη αντίσταση ($\overset{\circ}{Z}$) και η σύνθετη αγωγιμότητα ($\overset{\circ}{Y}$) είναι μιγαδικοί αριθμοί, γι' αυτό και συμβολίζονται ως phasor.



Σχήμα 4.9: Κύκλωμα RLC (α) στο πεδίο του χρόνου και (β) στο πεδίο της συχνότητας.

Όταν η σύνθετη αντίσταση είναι γραμμένη σε καρτεσιανή μορφή ($\overset{\circ}{Z} = R + jX$), το πραγματικό μέρος ονομάζεται αντίσταση R και το φανταστικό μέρος ονομάζεται αντίδραση X (reactance). Όταν το φανταστικό μέρος είναι θετικό, ονομάζεται επαγωγική αντίδραση, ενώ όταν το φανταστικό μέρος είναι αρνητικό, ονομάζεται χωρητική αντίδραση.

Όταν η σύνθετη αγωγιμότητα είναι γραμμένη σε καρτεσιανή μορφή ($\overset{\circ}{Y} = G + jB$), το πραγματικό μέρος ονομάζεται αγωγιμότητα G και το φανταστικό μέρος ονομάζεται δεκτικότητα B (susceptance). Όταν το φανταστικό μέρος είναι θετικό, ονομάζεται χωρητική δεκτικότητα, ενώ όταν το φανταστικό μέρος είναι αρνητικό, ονομάζεται επαγωγική δεκτικότητα. Ως εκ τούτου:

$$\overset{\circ}{Z} = R + jX_L \text{ ή } \overset{\circ}{Z} = R - jX_C$$

$$\overset{\circ}{Y} = G - jB_L \text{ ή } \overset{\circ}{Y} = G + jB_C$$

Οι σχέσεις που συνδέουν τη σύνθετη αντίσταση με τη σύνθετη αγωγιμότητα και προκύπτουν από τη σχέση $\overset{\circ}{Y} = \frac{1}{\overset{\circ}{Z}}$ είναι οι εξής:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \text{ και } X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \text{ και } B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

Αυτές οι εκφράσεις δε χρησιμοποιούνται πολύ σε προβλήματα όπου οι υπολογισμοί είναι δυνατό να γίνουν με αριθμητικές τιμές όπως στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.5

Το phasor της τάσης στα άκρα ενός δικτύου (όπως αυτό που φαίνεται στο σχήμα 4.9β) είναι $100\angle 45^\circ$ (V) . Το phasor του ρεύματος είναι $5\angle 15^\circ$ (A). Να βρεθεί η σύνθετη αντίσταση και η σύνθετη αγωγιμότητα.

Απάντηση:

$$\overset{\circ}{Z} = \frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{I}} = \frac{100\angle 45^\circ}{5\angle 15^\circ} = 20\angle 30^\circ = 17.32 + j10 \Omega$$

$$\overset{\circ}{Y} = \frac{\overset{\circ}{I}}{\overset{\circ}{V}} = \frac{1}{\overset{\circ}{Z}} = 0.05\angle -30^\circ = (4.33 - j2.5) \cdot 10^{-2} S$$

Επομένως $R = 17.32 \Omega$, $X_L = 10 \Omega$, $G = 4.33 \cdot 10^{-2} S$ και $B_L = 2.5 \cdot 10^{-2} S$.

4.4.1. Υπολογισμός Σύνθετων Αντιστάσεων

Η σχέση $\overset{\circ}{V} = \overset{\circ}{I} \cdot \overset{\circ}{Z}$ που ισχύει στο πεδίο της συχνότητας, είναι τυπικά πανομοιότυπη με το νόμο του Ohm, $v = i \cdot R$ που ισχύει στο πεδίο του χρόνου. Επομένως οι σύνθετες αντιστάσεις προστίθενται ακριβώς όπως οι απλές αντιστάσεις:

$$\text{Αν είναι σε σειρά: } \overset{\circ}{Z}_{\text{ισ}} = \overset{\circ}{Z}_1 + \overset{\circ}{Z}_2 + \dots$$

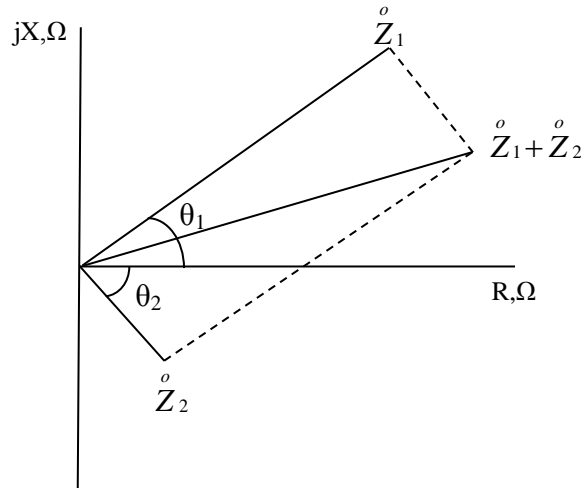
$$\text{Αν είναι παράλληλα: } \frac{1}{\overset{\circ}{Z}_{\text{ισ}}} = \frac{1}{\overset{\circ}{Z}_1} + \frac{1}{\overset{\circ}{Z}_2} + \dots$$

Για παράδειγμα, προκειμένου για δύο σύνθετες αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα, η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση θα είναι: $\overset{\circ}{Z}_{\text{ισ}} = \frac{\overset{\circ}{Z}_1 \overset{\circ}{Z}_2}{\overset{\circ}{Z}_1 + \overset{\circ}{Z}_2}$.

4.4.2. Διάγραμμα Σύνθετων Αντιστάσεων

Οι σύνθετες αντιστάσεις είναι δυνατό να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο. Στο σχήμα 4.10 παριστάνται δύο σύνθετες αντιστάσεις. Η $\overset{\circ}{Z}_1$ στο πρώτο τεταρτημόριο

παρουσιάζει επαγωγική αντίδραση, ενώ η $\overset{\circ}{Z}_2$ στο τέταρτο τεταρτημόριο παρουσιάζει χωρητική αντίδραση. Η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z}_{\sigma}$, αν θεωρηθεί ότι οι δύο σύνθετες αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες σε σειρά, θα είναι η $\overset{\circ}{Z}_{\sigma} = \overset{\circ}{Z}_1 + \overset{\circ}{Z}_2$ και προκύπτει με διανυσματικό άθροισμα.



Σχήμα 4.10: Σύνθετες αντιστάσεις στο μιγαδικό επίπεδο

4.4.3. Σύνθετη αντίσταση σε ιδανικό ωμικό αντιστάτη

Έστω ένας ωμικός αντιστάτης R ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα $i_R(t)$ και η τάση στα άκρα του είναι $v_R(t)$. Τα αντίστοιχα phasor για το ρεύμα και την τάση είναι τα $\overset{\circ}{I}_R$ και $\overset{\circ}{V}_R$. Στο σχήμα 4.11 φαίνεται το κύκλωμα αυτό στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας. Η σχέση τάσης και ρεύματος για τον αντιστάτη είναι η $v_R(t) = Ri_R(t)$. Αποδεικνύεται ότι η σύνθετη αντίσταση σε ιδανικό ωμικό αντιστάτη είναι:

$$\overset{\circ}{Z}_R = \frac{\overset{\circ}{V}_R}{\overset{\circ}{I}_R} = R$$

Στον ωμικό αντιστάτη η τάση και το ρεύμα είναι συμφασικά, δηλαδή παίρνουν ταυτόχρονα τις μέγιστες και τις ελάχιστες τιμές.



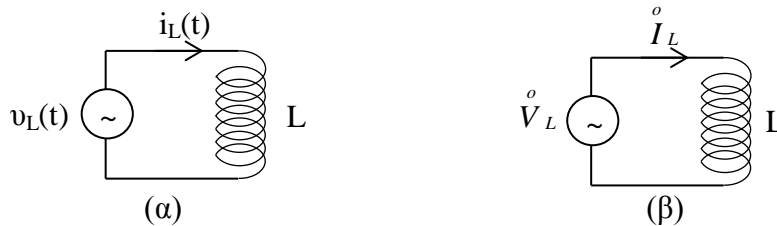
Σχήμα 4.11: Κύκλωμα R (α) στο πεδίο του χρόνου και (β) στο πεδίο της συχνότητας.

4.4.4. Σύνθετη αντίσταση σε ιδανικό επαγωγέα (πηνίο)

Έστω ένας ιδανικός επαγωγέας (πηνίο) με αυτεπαγωγή L ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα $i_L(t)$ και η τάση στα άκρα του είναι $v_L(t)$. Τα αντίστοιχα phasor για το ρεύμα και την τάση είναι τα $\overset{\circ}{I}_L$ και $\overset{\circ}{V}_L$. Στο σχήμα 4.12 φαίνεται το κύκλωμα αυτό στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας. Η σχέση τάσης και ρεύματος για το πηνίο είναι η $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$. Αποδεικνύεται ότι η σύνθετη αντίσταση σε ιδανικό πηνίο είναι:

$$\overset{\circ}{Z}_L = \frac{\overset{\circ}{V}_L}{\overset{\circ}{I}_L} = j\omega L$$

Στον ιδανικό επαγωγέα (πηνίο) η τάση προηγείται κατά 90° σε σχέση με το ρεύμα.



Σχήμα 4.12: Κύκλωμα L (α) στο πεδίο του χρόνου και (β) στο πεδίο της συχνότητας.

4.4.5. Σύνθετη αντίσταση σε πυκνωτή

Έστω ένας ιδανικός πυκνωτής με χωρητικότητα C ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα $i_C(t)$ και η τάση στα άκρα του είναι $v_C(t)$. Τα αντίστοιχα phasor για το ρεύμα και την τάση είναι τα $\overset{\circ}{I}_C$ και $\overset{\circ}{V}_C$. Στο σχήμα 4.13 φαίνεται το κύκλωμα αυτό στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας. Η σχέση τάσης και ρεύματος για τον πυκνωτή είναι η $i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$. Αποδεικνύεται ότι η σύνθετη αντίσταση σε ιδανικό πυκνωτή είναι:

$$\overset{\circ}{Z}_C = \frac{\overset{\circ}{V}_C}{\overset{\circ}{I}_C} = \frac{1}{j\omega C}$$

Στον ιδανικό πυκνωτή το ρεύμα προηγείται κατά 90° σε σχέση με την τάση.



Σχήμα 4.13: Κύκλωμα L (α) στο πεδίο του χρόνου και (β) στο πεδίο της συχνότητας.

4.4.6. Υπολογισμός Σύνθετων Αγωγιμοτήτων

Αν αντικατασταθεί η σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z}$ με $1/\overset{\circ}{Y}$ στις σχέσεις υπολογισμού των σύνθετων αντιστάσεων, προκύπτουν οι σχέσεις υπολογισμού των σύνθετων αγωγιμοτήτων:

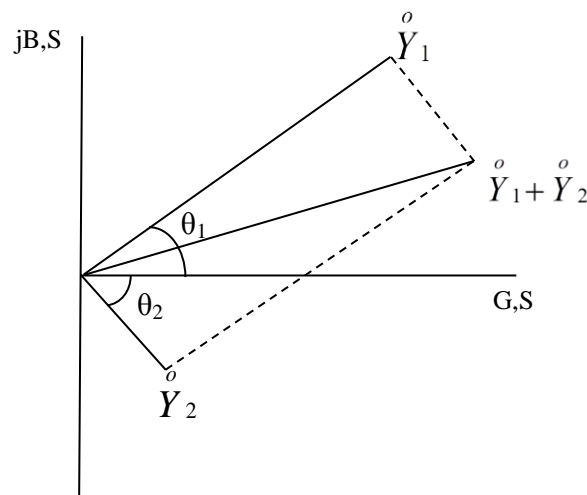
$$\text{Αν είναι σε σειρά: } \frac{1}{\overset{\circ}{Y}_{\text{ισ}}} = \frac{1}{\overset{\circ}{Y}_1} + \frac{1}{\overset{\circ}{Y}_2} + \dots$$

$$\text{Αν είναι παράλληλα: } \overset{\circ}{Y}_{\text{ισ}} = \overset{\circ}{Y}_1 + \overset{\circ}{Y}_2 + \dots$$

Επομένως τα κυκλώματα που περιέχουν σύνδεση σε σειρά, είναι προτιμότερο να αναλύονται με σύνθετη αντίσταση. Αντίστοιχα τα κυκλώματα που περιέχουν παράλληλη σύνδεση είναι προτιμότερο να αναλύονται με σύνθετη αγωγιμότητα.

4.4.7. Διάγραμμα Σύνθετων Αγωγιμοτήτων

Ένα διάγραμμα σύνθετων αγωγιμοτήτων είναι ανάλογο με το διάγραμμα για τις σύνθετες αντιστάσεις. Στο σχήμα 4.14 παριστάνται δύο σύνθετες αγωγιμότητες. Η $\overset{\circ}{Y}_1$ στο πρώτο τεταρτημόριο παρουσιάζει χωρητική δεκτικότητα, ενώ η $\overset{\circ}{Y}_2$ στο τέταρτο τεταρτημόριο παρουσιάζει επαγωγική δεκτικότητα. Η ισοδύναμη σύνθετη αγωγιμότητα $\overset{\circ}{Y}_{\text{ισ}}$, αν θεωρηθεί ότι οι δύο σύνθετες αγωγιμότητες είναι συνδεδεμένες παράλληλα, θα είναι η $\overset{\circ}{Y}_{\text{ισ}} = \overset{\circ}{Y}_1 + \overset{\circ}{Y}_2$ και προκύπτει με διανυσματικό άθροισμα.



Σχήμα 4.14: Σύνθετες αγωγιμότητες στο μιγαδικό επίπεδο

4.5. Διαίρεση τάσης και ρεύματος στο πεδίο της συχνότητας

Από την αναλογία μεταξύ της σύνθετης αντίστασης στο πεδίο της συχνότητας και της αντίστασης στο πεδίο του χρόνου προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Οι σύνθετες αντιστάσεις που είναι συνδεδεμένες σε σειρά, διαιρούν την ολική τάση με τρόπο ανάλογο ως προς τις σύνθετες αντιστάσεις (διαίρετης τάσης).

Δηλαδή από το σχήμα 4.15 για δύο σύνθετες αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z}_r$ και $\overset{\circ}{Z}_s$ με τις αντίστοιχες τάσεις στα άκρα τους $\overset{\circ}{V}_r$ και $\overset{\circ}{V}_s$ προκύπτουν οι σχέσεις:

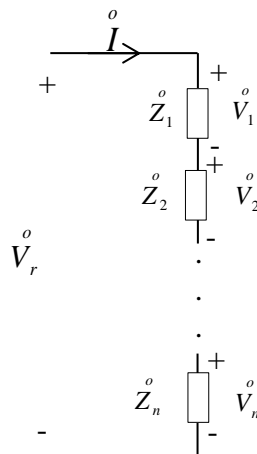
$$\frac{\overset{\circ}{V}_r}{\overset{\circ}{V}_s} = \frac{\overset{\circ}{Z}_r}{\overset{\circ}{Z}_s} \quad \text{ή} \quad \overset{\circ}{V}_r = \frac{\overset{\circ}{Z}_r}{\overset{\circ}{Z}_{\text{ισ}}}\overset{\circ}{V}_T$$

όπου $\overset{\circ}{Z}_{\text{ισ}}$ είναι η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση.

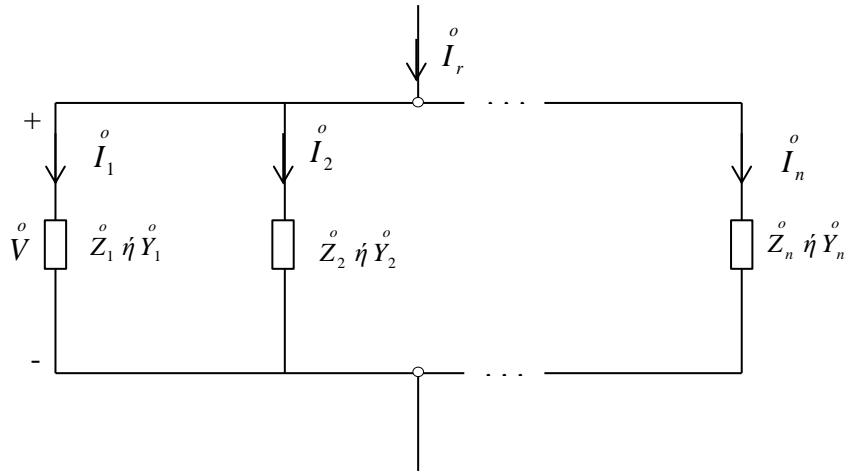
- Οι σύνθετες αντιστάσεις που είναι συνδεδεμένες παράλληλα, διαιρούν το ολικό ρεύμα με τρόπο αντιστρόφως ανάλογο ως προς τις σύνθετες αντιστάσεις (και με τρόπο ανάλογο ως προς τις σύνθετες αγωγιμότητες / διαίρετης ρεύματος). Δηλαδή από το σχήμα 4.16 για δύο σύνθετες αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z}_r$ και $\overset{\circ}{Z}_s$ (αντίστοιχα για σύνθετες αγωγιμότητες $\overset{\circ}{Y}_r$ και $\overset{\circ}{Y}_s$) με τα ρεύματα στα άκρα τους $\overset{\circ}{I}_r$ και $\overset{\circ}{I}_s$ προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\frac{\overset{\circ}{I}_r}{\overset{\circ}{I}_s} = \frac{\overset{\circ}{Z}_s}{\overset{\circ}{Z}_r} = \frac{\overset{\circ}{Y}_r}{\overset{\circ}{Y}_s} \quad \text{ή} \quad \overset{\circ}{I}_r = \frac{\overset{\circ}{Z}_{\text{ισ}}}{\overset{\circ}{Z}_r}\overset{\circ}{I}_T = \frac{\overset{\circ}{Y}_r}{\overset{\circ}{Y}_{\text{ισ}}}\overset{\circ}{I}_T$$

όπου $\overset{\circ}{Z}_{\text{ισ}}$ είναι η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση (και $\overset{\circ}{Y}_{\text{ισ}}$ είναι η ισοδύναμη σύνθετη αγωγιμότητα).



Σχήμα 4.15: Σύνθετες αντιστάσεις σε σειρά



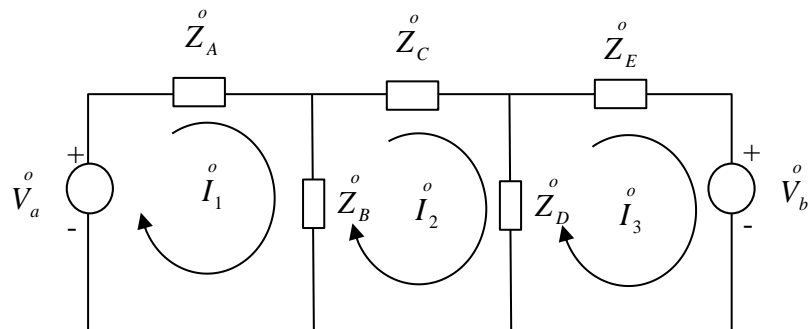
Σχήμα 4.16: Σύνθετες αντιστάσεις παράλληλα συνδεδεμένες

4.6. Μέθοδος ανάλυσης ρευμάτων βρόχου

Έστω το κύκλωμα του σχήματος 4.17 στο πεδίο της συχνότητας. Εφαρμόζοντας το νόμο τάσεων του Kirchhoff, προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση πινάκων για τα άγνωστα ρεύματα των βρόχων I_1 , I_2 , I_3 :

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η σύνθετη αντίσταση του βρόχου 1 ισούται με το άθροισμα όλων των σύνθετων αντιστάσεων οι οποίες διαρρέονται από το ρεύμα I_1 , δηλαδή $Z_{11} = Z_A + Z_B$. Ομοίως, $Z_{22} = Z_B + Z_C + Z_D$ και $Z_{33} = Z_D + Z_E$ είναι οι σύνθετες αντιστάσεις των βρόχων 2 και 3 αντίστοιχα.



Σχήμα 4.17: Μέθοδος ανάλυσης ρευμάτων βρόχου

Το στοιχείο 1,2 του παραπάνω πίνακα (εξίσωση 4.7) υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$Z_{12}^{\circ} = \sum \pm (\text{κοινή σύνθετη αντίσταση για τα } I_1^{\circ} \text{ και } I_2^{\circ})$$

Το παραπάνω άθροισμα παίρνει το πρόσημο + αν τα ρεύματα I_1° και I_2° διέρχονται από τη σύνθετη αντίσταση με την ίδια φορά, ενώ παίρνει το πρόσημο - αν τα ρεύματα I_1° και I_2° διέρχονται από τη σύνθετη αντίσταση με την αντίθετη φορά. Κατά κανόνα ισχύει $Z_{12}^{\circ} = Z_{21}^{\circ}$. Στο σχήμα 4.17 τα ρεύματα I_1° και I_2° διέρχονται από τη σύνθετη αντίσταση Z_B° με αντίθετη φορά, επομένως:

$$Z_{12}^{\circ} = Z_{21}^{\circ} = -Z_B^{\circ}$$

Ομοίως προκύπτουν:

$$Z_{13}^{\circ} = Z_{31}^{\circ} = \sum \pm (\text{κοινή σύνθετη αντίσταση για τα } I_1^{\circ} \text{ και } I_3^{\circ}) = 0$$

$$Z_{23}^{\circ} = Z_{32}^{\circ} = \sum \pm (\text{κοινή σύνθετη αντίσταση για τα } I_2^{\circ} \text{ και } I_3^{\circ}) = -Z_D^{\circ}$$

Ο πίνακας με τις σύνθετες αντιστάσεις είναι συμμετρικός. Ο πίνακας με τις τάσεις που βρίσκεται στο δεξί άκρο της εξίσωσης 4.7 προκύπτει ως εξής:

$$V_k^{\circ} = \sum \pm (\text{Τάση στο βρόχο } k)$$

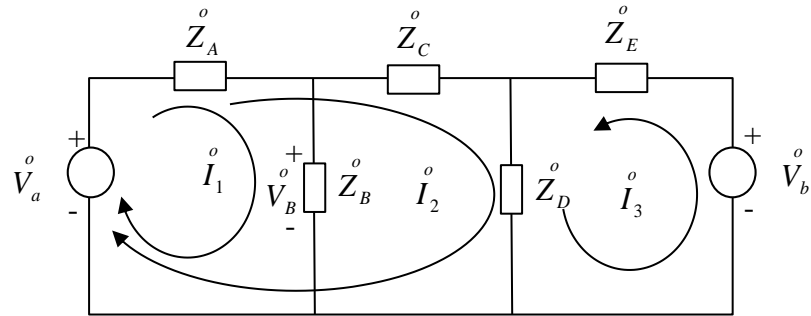
Το παραπάνω άθροισμα παίρνει το πρόσημο + αν η τάση «οδηγεί» στην κατεύθυνση του I_k° , ενώ παίρνει το πρόσημο - στην αντίθετη περίπτωση. Για το κύκλωμα του σχήματος 4.17 προκύπτουν:

$$V_1^{\circ} = +V_a^{\circ}, V_2^{\circ} = 0, V_3^{\circ} = -V_b^{\circ}$$

Αντί να επιλέγονται όλοι οι βρόχοι ενός κυκλώματος ξεχωριστά, είναι προτιμότερο πολλές φορές για την ευκολότερη ανάλυση του κυκλώματος να επιλέγονται κάποιοι μεγαλύτεροι βρόχοι, που περιέχουν έναν ή περισσότερους από τους αρχικούς βρόχους.

Παράδειγμα 4.6

Έστω το κύκλωμα του σχήματος 4.18. Να βρεθεί η τάση V_B° (με την πολικότητα που φαίνεται στο σχήμα) κατά μήκος της σύνθετης αντίστασης Z_B° .



Σχήμα 4.18: Κύκλωμα παραδείγματος 4.6

Απάντηση:

Αρχικά επιλέγονται οι βρόχοι όπως φαίνονται στο σχήμα 4.18. Η επιλογή αυτή συνεπάγεται την λύση ως προς I_1 και I_2 και στη συνέχεια τον υπολογισμό της τάσης V_B από τη σχέση: $V_B = (I_2 - I_1)Z_B$. Με αυτή την επιλογή βρόχων, το ρεύμα I_1 είναι το μοναδικό ρεύμα που διαρρέει τη σύνθετη αντίσταση Z_B . Επιπλέον η κατεύθυνση του ρεύματος I_1 επιλέγεται έτσι ώστε $V_B = I_1 Z_B$. Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση πινάκων:

$$\begin{bmatrix} Z_A + Z_B & -Z_A & 0 \\ -Z_A & Z_A + Z_C + Z_D & Z_D \\ 0 & Z_D & Z_D + Z_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_a \\ V_a \\ V_b \end{bmatrix}$$

από την οποία προκύπτει:

$$V_B = Z_B I_1 = \frac{Z_B}{\Delta_z} \begin{vmatrix} -V_a & -Z_A & 0 \\ V_a & Z_A + Z_C + Z_D & Z_D \\ V_b & Z_D & Z_D + Z_E \end{vmatrix}$$

όπου Δ_z είναι η ορίζουσα του πίνακα με τις σύνθετες αντιστάσεις.

4.7. Μέθοδος ανάλυσης τάσεων κόμβου

Στη μέθοδο αυτή αγωγιμότητες αντικαθίστανται αμοιβαίες σύνθετες αντιστάσεις. Ένα κύκλωμα στο πεδίο της συχνότητας με n κύριους κόμβους (ένας από τους κόμβους θεωρείται ως ο κόμβος αναφοράς), απαιτεί $n-1$ εξισώσεις τάσεις. Για

παράδειγμα για ένα κύκλωμα με $n=4$ κόμβους η εξίσωση πινάκων θα είναι η ακόλουθη:

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{Y}_{11} & \overset{\circ}{Y}_{12} & \overset{\circ}{Y}_{13} \\ \overset{\circ}{Y}_{21} & \overset{\circ}{Y}_{22} & \overset{\circ}{Y}_{23} \\ \overset{\circ}{Y}_{31} & \overset{\circ}{Y}_{32} & \overset{\circ}{Y}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{V}_1 \\ \overset{\circ}{V}_2 \\ \overset{\circ}{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{I}_1 \\ \overset{\circ}{I}_2 \\ \overset{\circ}{I}_3 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

όπου οι άγνωστες τάσεις $\overset{\circ}{V}_1, \overset{\circ}{V}_2, \overset{\circ}{V}_3$ είναι οι τάσεις των κύριων κόμβων 1,2 και 3 ως προς τον κόμβο 4 που θεωρείται και ο κόμβος αναφοράς.

Η αγωγιμότητα $\overset{\circ}{Y}_{11}$ είναι η αγωγιμότητα του κόμβου 1 και προκύπτει από το άθροισμα όλων των αγωγιμοτήτων που είναι συνδεδεμένες στον κόμβο 1. Αντίστοιχα οι $\overset{\circ}{Y}_{22}$ και $\overset{\circ}{Y}_{33}$ είναι οι αγωγιμότητες των κόμβων 2 και 3 αντίστοιχα.

Το στοιχείο $\overset{\circ}{Y}_{12}$ του παραπάνω πίνακα υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\overset{\circ}{Y}_{12} = -\sum (\text{κοινές αγωγιμότητες κόμβων 1 και 2})$$

Κατά κανόνα ισχύει $\overset{\circ}{Y}_{12} = \overset{\circ}{Y}_{21}$.

Ομοίως προκύπτουν:

$$\overset{\circ}{Y}_{13} = \overset{\circ}{Y}_{31} = -\sum (\text{κοινές αγωγιμότητες κόμβων 1 και 3})$$

$$\overset{\circ}{Y}_{23} = \overset{\circ}{Y}_{32} = -\sum (\text{κοινές αγωγιμότητες κόμβων 2 και 3})$$

Ο πίνακας με τις αγωγιμότητες είναι συμμετρικός.

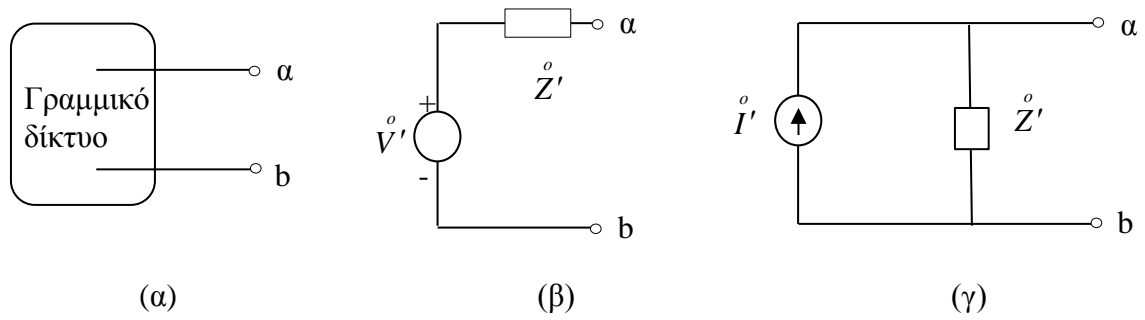
Ο πίνακας με τα ρεύματα που βρίσκεται στο δεξί άκρο της εξίσωσης 4.8 προκύπτει ως εξής:

$$\overset{\circ}{I}_k = \sum (\text{ρεύματα στο κόμβο } k) \quad (k=1,2,3)$$

όπου ένα ρεύμα που εξέρχεται από έναν κόμβο παίρνει αρνητικό πρόσημο.

4.8. Θεωρήματα Thevenin και Norton

Τα θεωρήματα αυτά είναι ίδια και για δίκτυα στη μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση. Βέβαια τα μεγέθη της τάσης και του ρεύματος έχουν αντικαταστασθεί με τα αντίστοιχα phasors και στα κυκλώματα υπάρχουν σύνθετες αντιστάσεις και αγωγιμότητες.



Σχήμα 4.19: (α) Δίκτυο στο πεδίο της συχνότητας, (β) Ισοδύναμο Thevenin, (γ) Ισοδύναμο Norton

4.9. Υπέρθεση ac πηγών (Θεώρημα της επαλληλίας)

Στην περίπτωση ενός κυκλώματος με περισσότερες από μία ημιτονοειδείς πηγές διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

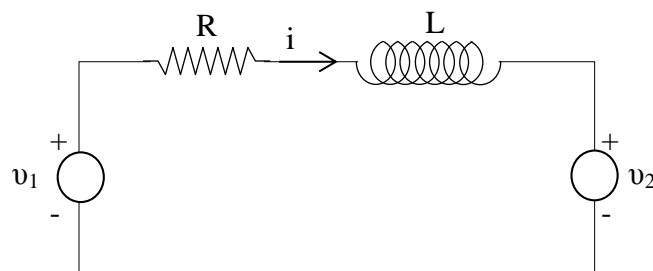
- Αν όλες οι πηγές έχουν την ίδια συχνότητα τότε η υπέρθεση γίνεται με τα phasors.
- Αν κάθε πηγή έχει διαφορετική συχνότητα τότε το κύκλωμα επιλύεται για κάθε πηγή ξεχωριστά και στο τέλος προστίθενται οι αποκρίσεις στο πεδίο του χρόνου.

Παράδειγμα 4.7

Ένα πηνίο με αυτεπαγωγή $L = 5mH$ είναι συνδεδεμένο σε σειρά μία αντίσταση $R = 10\Omega$ μεταξύ δύο πηγών τάσης $v_1 = 5\cos\omega_1 t$ και $v_2 = 10\cos(\omega_2 t + 60^\circ)$ όπως φαίνεται στο σχήμα 4.20. Να βρεθεί το ρεύμα $i_1(t)$ για:

- $\omega_1 = \omega_2 = 2000rad/s$ και
- $\omega_1 = 2000rad/s, \omega_2 = 2\omega_1$

Απάντηση:



Σχήμα 4.20: Κύκλωμα του παραδείγματος 4.7

- Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$\overset{\circ}{Z} = R + j\omega L = 10 + j10 = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ \Omega$$

Η τάση (phasor) στα άκρα της σύνθετης αντίστασης είναι:

$$\overset{\circ}{V} = \overset{\circ}{V}_1 - \overset{\circ}{V}_2 = 5 - 10\angle 60^\circ = -j5\sqrt{3}V$$

Το ρεύμα (phasor) θα είναι:

$$\overset{\circ}{I} = \frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{Z}} = \frac{-j5\sqrt{3}}{10\sqrt{2}\angle 45^\circ} \approx \frac{-j8.66}{14.14\angle 45^\circ} = 0.61\angle -135^\circ A$$

Επομένως το ρεύμα στο πεδίο του χρόνου θα είναι:

$$i(t) = 0.61\cos(2000t - 135^\circ)$$

β) Επειδή η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος έχει διαφορετική τιμή για $\omega_1 = 2000\text{rad/s}$ και για $\omega_2 = 4000\text{rad/s}$, το ρεύμα γράφεται μόνο στο πεδίο του χρόνου. Εφαρμόζοντας υπέρθεση για τις δύο πηγές, προκύπτει ότι το ρεύμα είναι $i = i_1 - i_2$, όπου i_1 και i_2 είναι τα ρεύματα λόγω του v_1 και του v_2 αντίστοιχα.

$$\overset{\circ}{I}_1 = \frac{\overset{\circ}{V}_1}{\overset{\circ}{Z}_1} = \frac{5}{10 + j10} = 0.35\angle -45^\circ A \quad i_1(t) = 0.35\cos(2000t - 45^\circ)$$

$$\overset{\circ}{I}_2 = \frac{\overset{\circ}{V}_2}{\overset{\circ}{Z}_2} = \frac{10\angle 60^\circ}{10 + j20} = 0.45\angle -3.4^\circ A \quad i_2(t) = 0.45\cos(4000t - 3.4^\circ)$$

$$i(t) = i_1(t) - i_2(t) = 0.35\cos(2000t - 45^\circ) - 0.45\cos(4000t - 3.4^\circ)$$

4.10. Λυμένα προβλήματα

Υπολογισμός τάσης και ρεύματος σε κυκλώματα ΗΜΚ

1. Να βρεθούν οι τιμές δύο στοιχείων που είναι συνδεδεμένα σε σειρά σε ένα κύκλωμα, όπου η τάση είναι: $v = 50\cos(5000t + 30^\circ)$ (V) και το ρεύμα είναι: $i = 10\cos(5000t - 23.13^\circ)$ (A).

Απάντηση:

Εφόσον η τάση προηγείται του ρεύματος (κατά $53,13^\circ$), τα δύο στοιχεία του κυκλώματος που είναι συνδεδεμένα σε σειρά είναι μία αντίσταση R και ένα πηνίο με αυτεπαγωγή L . Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος έχει μέτρο

$$|Z| = \frac{|V|}{|I|} = \frac{50}{10} = 5$$

Επομένως η σύνθετη αντίσταση είναι: $\overset{\circ}{Z} = 5 \angle 53.13^\circ \Omega$

$$\text{Λύνοντας το σύστημα } \left\{ \begin{array}{l} 5 = \sqrt{R^2 + (5000L)^2} \\ \tan 53.13^\circ = 1.33 = \frac{5000L}{R} \end{array} \right\} \text{ προκύπτουν οι τιμές:}$$

$$R = 3\Omega \text{ και } L = 0.8mH.$$

2. Σε ένα κύκλωμα είναι συνδεδεμένα σε σειρά μία αντίσταση $R = 2\Omega$ και ένας πυκνωτής $C = 200pF$. Στο κύκλωμα αυτό εφαρμόζεται ημιτονοειδής τάση με συχνότητα $99.47MHz$. Αν η μέγιστη τάση κατά μήκος του πυκνωτή είναι $24V$, ποια είναι η μέγιστη τάση κατά μήκος και των δύο στοιχείων που είναι συνδεδεμένα σε σειρά;

Απάντηση:

$$\text{Ισχύει: } \omega = 2\pi f = 6.25 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$$

$$\text{Από τον πίνακα 4.1 προκύπτει ότι: } I_{\max} = |I| = \omega C V_{C,\max} = 3A$$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 4.2 :

$$V_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{6^2 + 24^2} = 24.74V$$

3. Το ρεύμα σε ένα κύκλωμα όπου είναι συνδεδεμένα σε σειρά μία αντίσταση $R = 5\Omega$ και ένα πηνίο με αυτεπαγωγή $L = 30mH$, καθυστερεί σε σχέση με την τάση κατά 80° . Να βρεθεί η συχνότητα και η σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z}$.

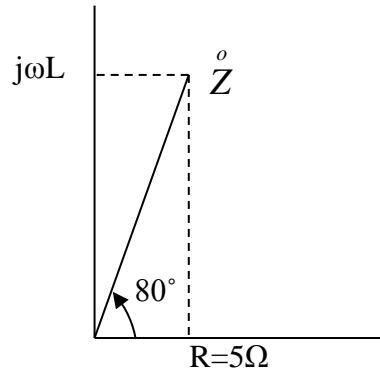
Απάντηση:

Από το διάγραμμα της σύνθετης αντίστασης $\overset{\circ}{Z}$ (σχήμα 4.21) προκύπτει ότι:

$$5 + j\omega L = |Z| \angle 80^\circ \text{ και } \omega L = 5 \tan 80^\circ = 28.4\Omega$$

Επομένως $\omega L = 28.4 \Leftrightarrow \omega = \frac{28.4}{30 \cdot 10^{-3}} = 945.2 \text{ rad/s}$ και $f = 150.4 \text{ Hz}$

Τελικά $\overset{\circ}{Z} = 5 + j28.4 \Omega$.



Σχήμα 4.21: Διάγραμμα σύνθετης αντίστασης άσκησης 3

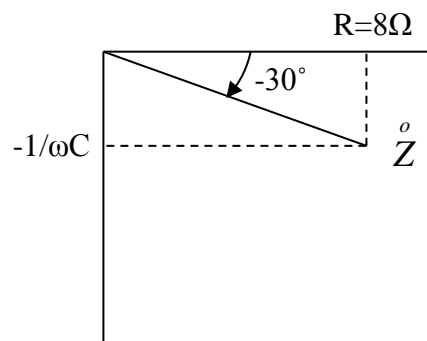
4. Σε ποια συχνότητα το ρεύμα θα προηγείται της τάσης κατά 30° σε ένα κύκλωμα όπου μία αντίσταση $R = 8 \Omega$ είναι συνδεδεμένη με ένα πυκνωτή $C = 30 \mu\text{F}$;

Απάντηση:

Από το διάγραμμα της σύνθετης αντίστασης $\overset{\circ}{Z}$ (σχήμα 4.22) προκύπτει ότι:

$$8 - \frac{j}{\omega C} = |Z| \angle -30^\circ \text{ και } -\frac{1}{\omega C} = 8 \tan(-30^\circ) = -4.62 \Omega$$

Επομένως $\frac{1}{2\pi f \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = 4.62 \Leftrightarrow f = 1149 \text{ Hz}$



Σχήμα 4.22: Διάγραμμα σύνθετης αντίστασης άσκησης 4

5. Σε ένα κύκλωμα είναι συνδεδεμένα σε σειρά μία αντίσταση $R=10\Omega$ και ένας πυκνωτής. Η σύνθετη αντίσταση έχει γωνία -45° για $f_1=500\text{Hz}$. Να βρεθεί η συχνότητα για την οποία η σύνθετη αντίσταση έχει:

- α) διπλάσιο μέτρο από ότι έχει για συχνότητα f_1 .
 β) το μισό μέτρο από ότι έχει για συχνότητα f_1 .

Απάντηση:

Ισχύει: $10 - jX_{C1} = |Z_1| \angle 45^\circ$ από όπου προκύπτει: $X_{C1} = 10\Omega$ και $|Z_1| = 14.14\Omega$.

α) Για διπλάσιο μέτρο δηλαδή για $|Z_2| = 2|Z_1| = 28.28\Omega$ ισχύει:

$$10 - jX_{C2} = 28.28 \angle \theta^\circ \text{ από όπου προκύπτει: } X_{C2} = \sqrt{28.28^2 - 10^2} = 26.45\Omega$$

Το X_{C2} είναι αντιστρόφως ανάλογο με τη συχνότητα f_2 . Επομένως:

$$\frac{20}{26.45} = \frac{f_2}{500} \Leftrightarrow f_2 = 189\text{Hz}$$

β) Η τιμή για το μισό μέτρο, δηλαδή $|Z_3| = \frac{|Z_1|}{2} = 7.07\Omega$, δεν είναι δυνατό να υπάρξει στο συγκεκριμένο παράδειγμα, καθώς η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο είναι η $|Z| = R = 10\Omega$.

6. Δύο στοιχεία είναι συνδεδεμένα σε σειρά σε ένα κύκλωμα με τάση $\overset{\circ}{V} = 240 \angle 0^\circ \text{V}$ και ρεύμα $\overset{\circ}{I} = 50 \angle -60^\circ \text{A}$. Να βρεθεί το ρεύμα για το οποίο η τιμή της αντίστασης μειώνεται κατά α) 30%, β) 60% από την αρχική τιμή.

Απάντηση:

$$\overset{\circ}{Z} = \frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{I}} = \frac{240 \angle 0^\circ}{50 \angle -60^\circ} = 4.8 \angle 60^\circ = 2.4 + j4.16\Omega$$

α) Η μειωμένη τιμή της αντίστασης είναι: $\frac{30}{100} \cdot 2.4 = 0.72$.

Η σύνθετη αντίσταση είναι: $\overset{\circ}{Z}_1 = 0.72 + j4.16 = 4.22 \angle 80.2^\circ \Omega$.

Το ρεύμα είναι: $\overset{\circ}{I}_1 = \frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{Z}_1} = \frac{240 \angle 0^\circ}{4.22 \angle 80.2^\circ} = 56.8 \angle -80.2^\circ \text{A}$

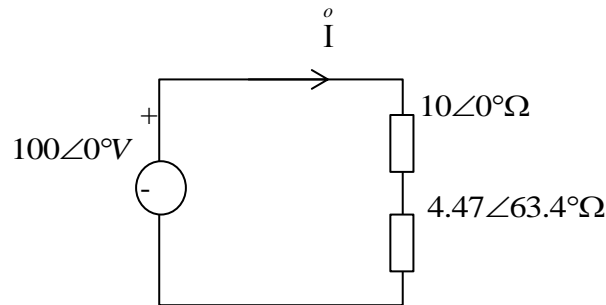
$$\beta) \text{ Ομοίως } \frac{60}{100} \cdot 2.4 = 1.44$$

$$\overset{\circ}{Z}_2 = 1.44 + j4.16 = 4.4 \angle 70.9^\circ \Omega.$$

$$\overset{\circ}{I}_2 = \frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{Z}_2} = \frac{240 \angle 0^\circ}{4.4 \angle 70.9^\circ} = 54.5 \angle -70.9^\circ \text{ A}$$

Εύρεση σύνθετης αντίστασης – σύνθετης αγωγιμότητας

7. Για το κύκλωμα του σχήματος 4.23 να βρεθεί η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z}_{\sigma}$ και το ρεύμα $\overset{\circ}{I}$.



Σχήμα 4.23: Κύκλωμα άσκησης 7

Απάντηση:

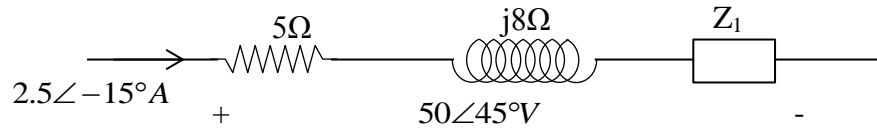
Η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση για σύνθετες αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά είναι:

$$\overset{\circ}{Z}_{\sigma} = 10 \angle 0^\circ + 4.47 \angle 63.4^\circ = 12 + j4 = 12.65 \angle -18.43^\circ \Omega$$

Τότε:

$$\overset{\circ}{I} = \frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{Z}_{\sigma}} = \frac{100 \angle 0^\circ}{12.65 \angle 18.43^\circ} = 7.91 \angle -18.43^\circ \text{ A}$$

8. Να βρεθεί η σύνθετη αντίσταση Z_1° του σχήματος 4.24.



Σχήμα 4.24: Κύκλωμα άσκησης 8

Απάντηση:

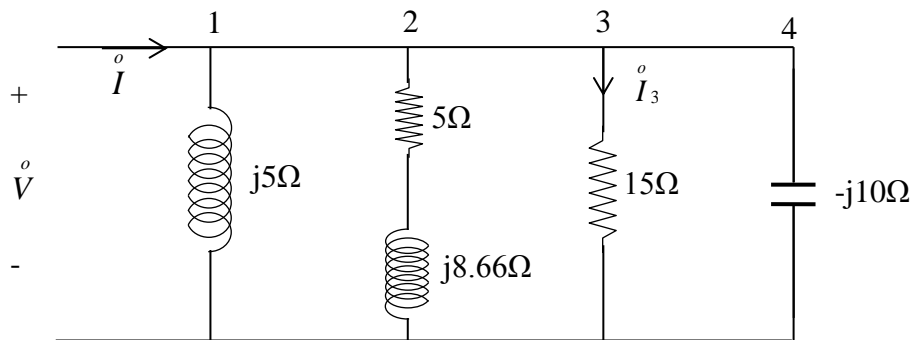
Η ολική σύνθετη αντίσταση είναι:

$$Z_{ολ}^{\circ} = \frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{I}} = 20\angle 60^{\circ} = 10 + j17.3\Omega$$

Η αντίσταση, το πηνίο και η σύνθετη αντίσταση Z_1° είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Επομένως:

$$Z_{ολ}^{\circ} = 10 + j17.3 = 5 + j8 + Z_1^{\circ} \Leftrightarrow Z_1^{\circ} = 5 + j9.3\Omega$$

9. α) Να υπολογιστεί η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση $Z_{ισ}^{\circ}$ και η ισοδύναμη σύνθετη αγωγιμότητα $Y_{ισ}^{\circ}$ για το κύκλωμα που φαίνεται στο σχήμα 4.25 . β) Αν $\overset{\circ}{I} = 33\angle -13^{\circ}A$, να βρεθεί το ρεύμα $\overset{\circ}{I}_3$ και η τάση $\overset{\circ}{V}$.



Σχήμα 4.25: Κύκλωμα άσκησης 9

Απάντηση:

α) Οι αντίστοιχες αγωγιμότητες είναι:

$$Y_1^{\circ} = \frac{1}{j5} = -0.2S$$

$$Y_2^{\circ} = \frac{1}{5 + j8.66} = 0.05 - j0.087S$$

$$Y_3^{\circ} = \frac{1}{15} = 0.067S$$

$$Y_4^{\circ} = \frac{1}{-j10} = j0.1S$$

Επομένως:

$$Y_{\iota\sigma}^{\circ} = Y_1^{\circ} + Y_2^{\circ} + Y_3^{\circ} + Y_4^{\circ} = 0.117 - j0.187 = 0.221 \angle -58^{\circ}S$$

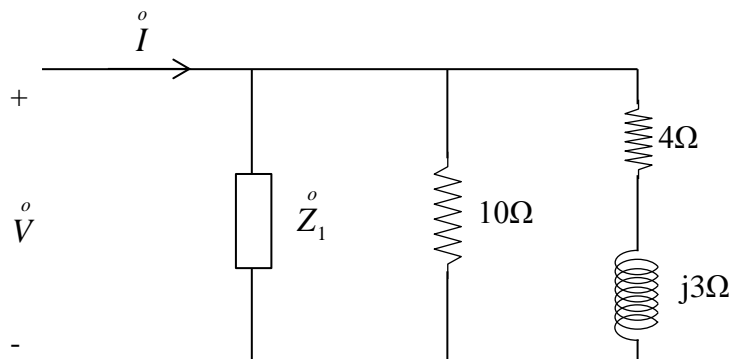
Και

$$Z_{\iota\sigma}^{\circ} = \frac{1}{Y_{\iota\sigma}^{\circ}} = 4.53 \angle 58^{\circ}\Omega$$

$$\beta) \overset{\circ}{V} = \overset{\circ}{I} Z_{\iota\sigma}^{\circ} = (33 \angle -13^{\circ})(4.53 \angle 58^{\circ}) = 149.5 \angle 45^{\circ}V$$

$$\overset{\circ}{I}_3 = \overset{\circ}{V} Y_3^{\circ} = (149.5 \angle 45^{\circ})\left(\frac{1}{15} \angle 0^{\circ}\right) = 9.97 \angle 45^{\circ}A$$

10. Να βρεθεί η σύνθετη αντίσταση Z_1° στο κύκλωμα του σχήματος 4.26, αν $\overset{\circ}{I} = 31.5 \angle 24^{\circ}A$ και $\overset{\circ}{V} = 50 \angle 60^{\circ}V$.



Σχήμα 4.26: Κύκλωμα άσκησης 10

Απάντηση:

$$Y = \frac{1}{Z} = 0.63 \angle -36^{\circ} = 0.51 - j0.37S$$

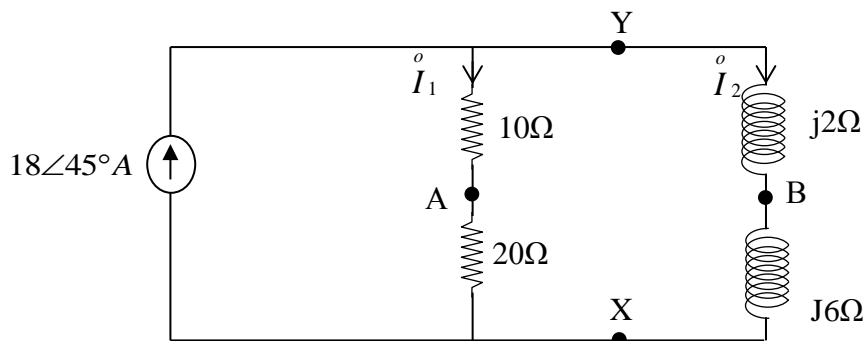
Ισχύει:

$$0.51 - j0.37 = \overset{\circ}{Y}_1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{4 + j3}$$

Επομένως προκύπτει ότι: $\overset{\circ}{Y}_1 = 0.354 \angle -45^\circ S$ και $\overset{\circ}{Z}_1 = 2 + j2\Omega$

Διαιρέτης ρευμάτων - τάσεων

11. Να βρεθεί η τάση $\overset{\circ}{V}_{AB}$ στο κύκλωμα του σχήματος 4.27.



Σχήμα 4.27: Κύκλωμα άσκησης 11

Απάντηση:

Από τη διαίρεση ρευμάτων προκύπτουν:

$$\overset{\circ}{I}_1 = 4.64 \angle 120.1^\circ A$$

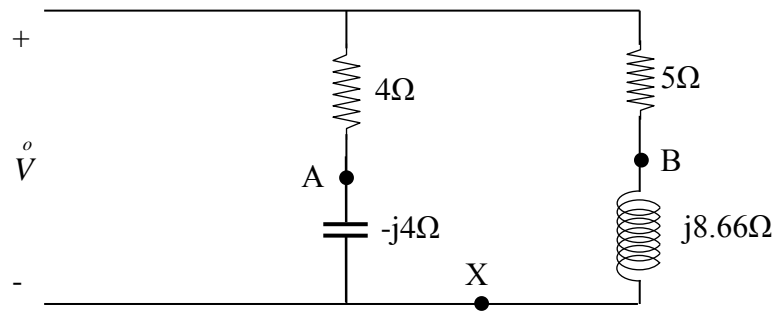
$$\overset{\circ}{I}_2 = 17.4 \angle 30.1^\circ A$$

Αν επιλεγεί η διαδρομή AXB ισχύουν τα εξής:

$$\overset{\circ}{V}_{AB} = \overset{\circ}{V}_{AX} + \overset{\circ}{V}_{XB} = \overset{\circ}{I}_1(20) - \overset{\circ}{I}_2(j6) = 92.8 \angle 120.1^\circ + 104.4 \angle -59.9^\circ = 11.6 \angle -59.9^\circ V$$

Σημείωση: Ισοδύναμα είναι δυνατό να επιλεγεί και η διαδρομή AYB.

12. Στο κύκλωμα του σχήματος 4.28 να βρεθεί η εφαρμοζόμενη τάση $\overset{\circ}{V}$, αν $\overset{\circ}{V}_{AB} = 48.3 \angle 30^\circ V$.



Σχήμα 4.28: Κύκλωμα άσκησης 12

Απάντηση:

Από τη διαίρεση τάσεων προκύπτουν:

$$V_{AX}^{\circ} = \frac{-j4}{4-j4} V^{\circ} = \frac{1}{1+j} V^{\circ}$$

$$V_{BX}^{\circ} = \frac{-j8.66}{5+j8.66} V^{\circ}$$

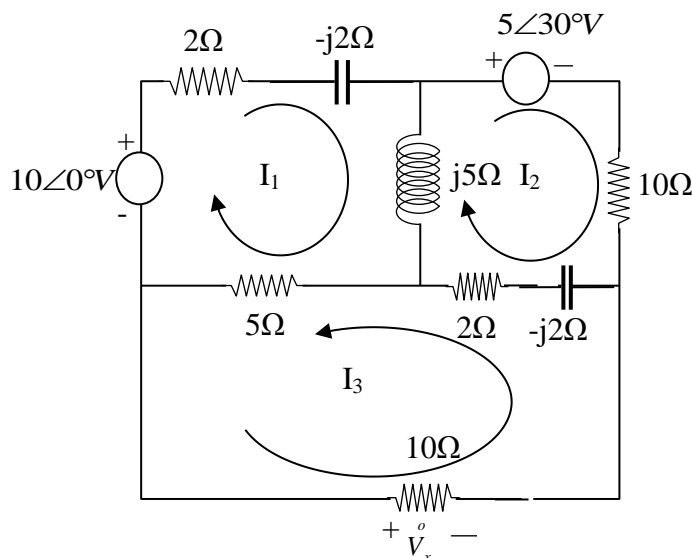
Και επομένως:

$$V_{AB}^{\circ} = V_{AX}^{\circ} - V_{BX}^{\circ} = \left(\frac{1}{1+j} - \frac{j8.66}{5+j8.66} \right) V^{\circ} = \frac{1}{-0.268+j} V^{\circ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V^{\circ} = (-0.268+j) V_{AB}^{\circ} = (1.035 \angle 105^{\circ})(48.3 \angle 30^{\circ}) = 50 \angle 135^{\circ} V$$

Μέθοδος ανάλυσης ρευμάτων βρόχου – τάσεων κόμβου

13. Να βρεθεί η τάση V_x° στο κύκλωμα του σχήματος 4.29, με τη βοήθεια της μεθόδου ανάλυσης ρευμάτων βρόχου.



Σχήμα 4.29: Κύκλωμα άσκησης 13

Απάντηση:

Αν επιλεγούν οι βρόχοι όπως στο σχήμα 4.29, το ρεύμα I_3 διέρχεται από την αντίσταση των 10Ω με κατεύθυνση τέτοια ώστε $V_x = 10 \cdot I_3 (V)$. Η εξίσωση πινάκων γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 7+j3 & j5 & 5 \\ j5 & 12+j3 & -(2-j2) \\ 5 & -(2-j2) & 17-j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ 5\angle 30^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

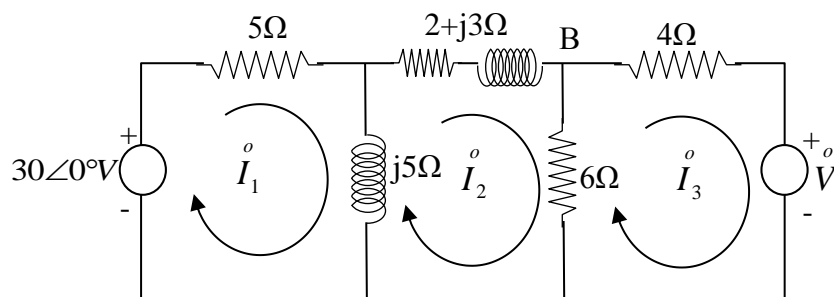
Λύνοντας με ορίζουσες προκύπτει:

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7+j3 & j5 & 10\angle 0^\circ \\ j5 & 12+j3 & 5\angle 30^\circ \\ 5 & -2+j2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7+j3 & j5 & 5 \\ j5 & 12+j3 & -2+j2 \\ 5 & -2+j2 & 17-j2 \end{vmatrix}} = \frac{667.96\angle -169.09^\circ}{1534.5\angle 25.06^\circ} = 0.435\angle -194.15^\circ A$$

Και επομένως:

$$V_x = 10 \cdot I_3 (V) = 4.35\angle -194.15^\circ V$$

14. Να βρεθεί η τάση $\overset{\circ}{V}$ στο κύκλωμα του σχήματος 4.30 έτσι ώστε η σύνθετη αντίσταση $2+3j$ να διαρέεται από μηδενικό ρεύμα. Η επίλυση του κυκλώματος να γίνει α) με τη μέθοδο ανάλυσης ρευμάτων βρόχου. β) με τη μέθοδο ανάλυσης τάσεων.



Σχήμα 4.30: Κύκλωμα άσκησης 14

Απάντηση:

α) Αν επιλεγούν οι βρόχοι όπως στο σχήμα 4.30, τότε το ρεύμα I_2° είναι:

$$I_2^{\circ} = \frac{1}{\Delta_z} \begin{vmatrix} 5 + j5 & 30\angle 0^\circ & 0 \\ -j5 & 0 & 6 \\ 0 & \overset{\circ}{V} & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Ακολουθώντας:

$$-(30\angle 0^\circ) \begin{vmatrix} -j5 & 6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} - \overset{\circ}{V} \begin{vmatrix} 5 + j5 & 0 \\ -j5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Από όπου προκύπτει ότι:

$$\overset{\circ}{V} = 35.4\angle 45^\circ V$$

β) Ο κόμβος B θεωρείται ως κόμβος αναφοράς. Η εξίσωση πινάκων γράφεται:

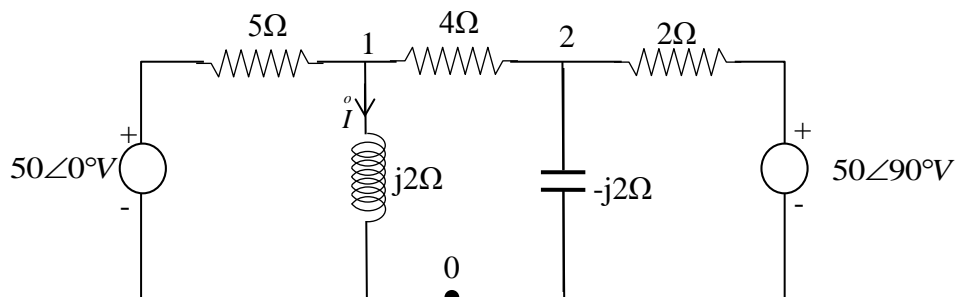
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2 + j3} & -\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j5}\right) \\ -\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j5}\right) & \frac{1}{5} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{V}_1 \\ \overset{\circ}{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30\angle 0^\circ}{5} \\ -\frac{30\angle 0^\circ}{5} - \frac{\overset{\circ}{V}}{4} \end{bmatrix}$$

Για να είναι η τάση $\overset{\circ}{V}_1$ μηδενική, πρέπει η παραπάνω εξίσωση πινάκων να λυθεί παραλείποντας το $\overset{\circ}{V}_1$.

$$N_1 = \begin{vmatrix} \frac{30\angle 0^\circ}{5} & -0.2 + j0.2 \\ -\frac{30\angle 0^\circ}{5} - \frac{\overset{\circ}{V}}{4} & 0.617 - j0.2 \end{vmatrix} = 0$$

Από την οποία προκύπτει $\overset{\circ}{V} = 35.4\angle 45^\circ V$.

15. Να βρεθεί το ρεύμα I στο κύκλωμα του σχήματος 4.31.



Σχήμα 4.31: Κύκλωμα άσκησης 15

Απάντηση:

Στο παραπάνω κύκλωμα υπάρχουν τρεις βασικοί κόμβοι. Ο κόμβος αναφοράς επιλέγεται ως ο κόμβος 0. Η εξίσωση πινάκων γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{-j2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{50\angle 0^\circ}{5} \\ \frac{50\angle 90^\circ}{2} \end{bmatrix}$$

Από την οποία προκύπτουν:

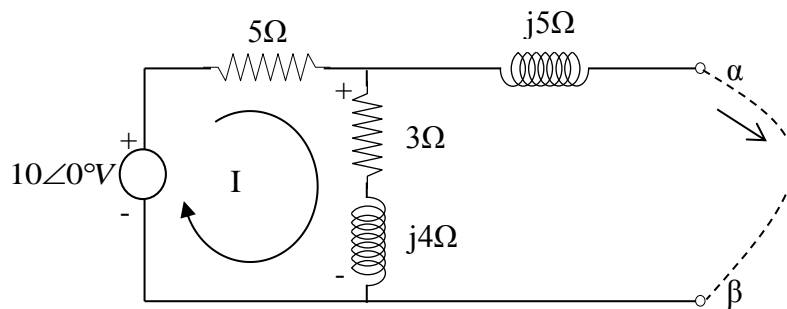
$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -0.25 \\ j25 & 0.75 + j0.5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.45 - j0.5 & -0.25 \\ -0.25 & 0.75 + j0.5 \end{vmatrix}} = \frac{13.52\angle 56.31^\circ}{0.546\angle -15.94^\circ} = 24.76\angle 72.25^\circ \text{V}$$

Και

$$I = \frac{24.76\angle 72.25^\circ}{2\angle 90^\circ} = 12.38\angle -17.75^\circ \text{A}$$

Ισοδύναμο Norton - Thevenin

16. Για το κύκλωμα του σχήματος 4.32 να βρεθούν: α) το ισοδύναμο Thevenin και β) το ισοδύναμο Norton στα άκρα α και β.



Σχήμα 4.32: Κύκλωμα άσκησης 16

Απάντηση:

α) Είναι:

$$\overset{\circ}{Z}' = j5 + \frac{5(3+j4)}{5+3+j4} = 2.5 + j6.25\Omega$$

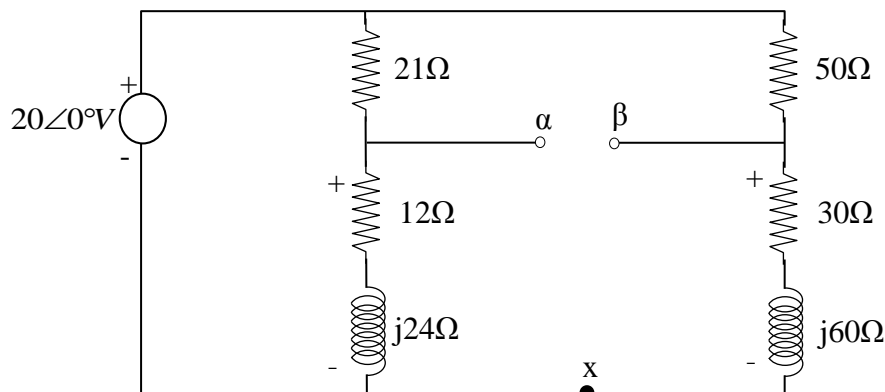
Η τάση $\overset{\circ}{V}'$ στα άκρα α και β είναι η τάση κατά μήκος της σύνθετης αντίστασης $3+j4\Omega$:

$$\overset{\circ}{V}' = \left(\frac{10\angle 0^\circ}{8+j4} \right) (3+j4) = 5.59\angle 26.56^\circ V$$

β) Στα άκρα α και β το ρεύμα $\overset{\circ}{I}'$ προκύπτει με διαίρεση ρευμάτων:

$$\overset{\circ}{I}' = \frac{10\angle 0^\circ}{5 + \frac{j5(3+j4)}{3+j9}} \left(\frac{3+j4}{3+j9} \right) = 0.83\angle -41.63^\circ A$$

17. Να βρεθεί το ισοδύναμο Thevenin του κυκλώματος του σχήματος 4.33. Ως $\overset{\circ}{V}'$ να θεωρηθεί η τάση στα άκρα α και β.



Σχήμα 4.33: Κύκλωμα άσκησης 17

Απάντηση:

Με διαίρεση τάσεων σε κάθε κλάδο προκύπτει:

$$\overset{\circ}{V}_{ax} = \frac{12 + j24}{33 + j24} (20\angle 0^\circ)$$

$$V_{bx}^{\circ} = \frac{30 + j60}{80 + j60} (20 \angle 0^{\circ})$$

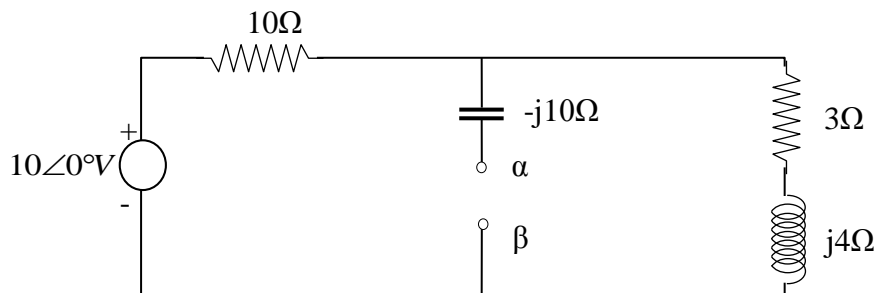
Επομένως:

$$V_{ab}^{\circ} = V_{ax}^{\circ} - V_{bx}^{\circ} = (20 \angle 0^{\circ}) \left(\frac{12 + j24}{33 + j24} - \frac{30 + j60}{80 + j60} \right) = 0.326 \angle 169.4^{\circ} \text{V} = \overset{\circ}{V}'$$

Επιπλέον:

$$\overset{\circ}{Z}' = \frac{21(12 + j24)}{33 + j24} + \frac{50(30 + j60)}{80 + j60} = 47.35 \angle 26.81^{\circ} \Omega$$

18. Να βρεθεί το ισοδύναμο Thevenin και το ισοδύναμο Norton του κυκλώματος του σχήματος 4.34. Ως $\overset{\circ}{V}'$ να θεωρηθεί η τάση στα άκρα α και β.



Σχήμα 4.34: Κύκλωμα άσκησης 18

Απάντηση:

Με διαίρεση ρευμάτων προκύπτει:

$$\overset{\circ}{I}' = \left[\frac{10 \angle 0^{\circ}}{10 + \frac{(-j10)(3 + j4)}{3 - j6}} \right] \left(\frac{3 + j4}{3 - j6} \right) = 0.439 \angle 105.26^{\circ} \text{A}$$

Με διαίρεση τάσεων προκύπτει:

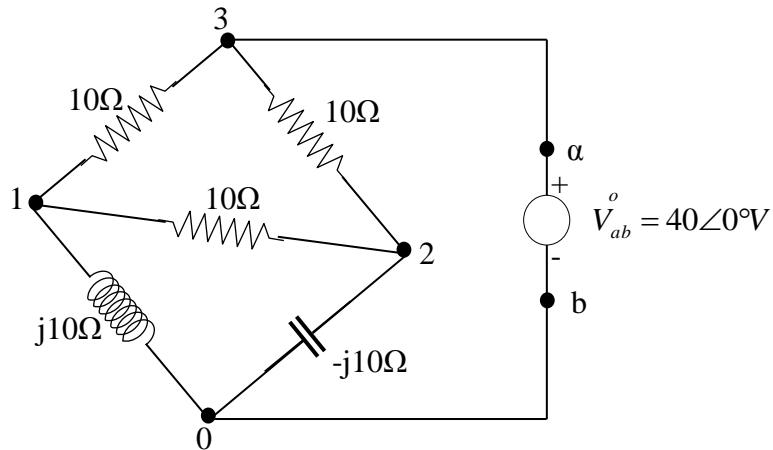
$$V_{ab}^{\circ} = \overset{\circ}{V}' = (10 \angle 0^{\circ}) \left(\frac{3 + j4}{13 + j4} \right) = 3.68 \angle 36.03^{\circ} \text{V}$$

Επιπλέον:

$$\overset{\circ}{Z}' = \frac{\overset{\circ}{V}'}{\overset{\circ}{I}'} = \frac{3.68 \angle 36.03^{\circ}}{0.439 \angle 105.26^{\circ}} = 8.37 \angle -69.23^{\circ} \Omega$$

Συνδυαστικές ασκήσεις

19. Στο κύκλωμα του σχήματος 4.35 να βρεθούν τα ρεύματα που διαρρέουν το πηνίο, τον πυκνωτή και τις τρεις αντιστάσεις.



Σχήμα 4.35: Κύκλωμα άσκησης 19

Απάντηση:

Ο κόμβος 0 επιλέγεται ως κόμβος αναφοράς. Οι εξισώσεις για τους κόμβους 1 και 2 (αφού πολλαπλασιαστούν με 10 η καθεμία) είναι:

$$(2 - j)\overset{\circ}{V}_1 - \overset{\circ}{V}_2 = 40\angle 0^\circ$$

$$-\overset{\circ}{V}_1 + (2 + j)\overset{\circ}{V}_2 = 40\angle 0^\circ$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν:

$$\overset{\circ}{V}_1 = \overset{\circ}{V}_{10} = 10(3 + j)$$

$$\overset{\circ}{V}_2 = \overset{\circ}{V}_{20} = 10(3 - j)$$

$$\overset{\circ}{V}_{12} = \overset{\circ}{V}_1 - \overset{\circ}{V}_2 = \overset{\circ}{V}_{10} = j20$$

$$\overset{\circ}{V}_{31} = \overset{\circ}{V}_{ab} - \overset{\circ}{V}_1 = 10 - j10$$

$$\overset{\circ}{V}_{32} = \overset{\circ}{V}_{ab} - \overset{\circ}{V}_2 = 10 + j10$$

$$\overset{\circ}{I}_{10} = \frac{\overset{\circ}{V}_{10}}{j10} = 1 - j3A$$

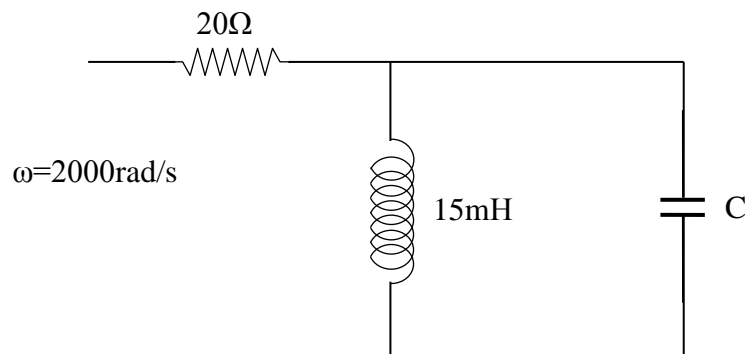
$$I_{20}^{\circ} = 1 + j3A$$

$$I_{12} = j2A$$

$$I_{31}^{\circ} = 1 - jA$$

$$I_{32}^{\circ} = 1 + jA$$

20. Στο κύκλωμα του σχήματος 4.36, να υπολογιστεί η χωρητικότητα C έτσι ώστε το ρεύμα εισόδου να είναι εκτός φάσης σε σχέση με την τάση εισόδου κατά 45° . Η συχνότητα είναι $\omega = 2000 \text{ rad/s}$.



Σχήμα 4.36: Κύκλωμα άσκησης 20

Απάντηση:

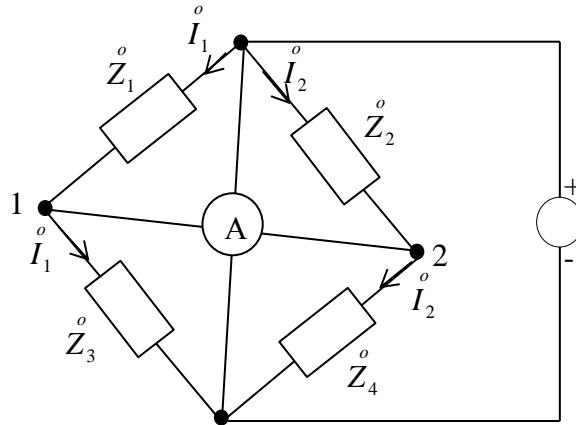
Για να είναι το ρεύμα εισόδου εκτός φάσης σε σχέση με την τάση εισόδου κατά 45° , θα πρέπει η σύνθετη αντίσταση από την παράλληλη σύνδεση του πηνίου με τον πυκνωτή να έχει φανταστικό μέρος ίσο με $\pm j20\Omega$. Επομένως προκύπτει η ισότητα:

$$\pm j20\Omega = -\frac{j}{\omega L} + j\omega C$$

Από όπου προκύπτει:

$$C = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{\omega L} \pm \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{2000} \left(\frac{1}{2000 \cdot 15 \cdot 10^{-3}} \pm \frac{1}{20} \right) = 41.66 \mu F$$

21. Να βρεθεί η συνθήκη με βάση την οποία δεν διέρχεται ρεύμα μέσα από τον ανιχνευτή A. Να αποδειχθεί ότι η λειτουργία της γέφυρας είναι ανεξάρτητη της συχνότητας ω .



Σχήμα 4.37: Κύκλωμα άσκησης 21

Απάντηση:

Εφόσον το ρεύμα που διέρχεται από τον ανιχνευτή είναι μηδενικό, οι κόμβοι 1 και 2 έχουν το ίδιο δυναμικό. Επομένως το ρεύμα $\overset{\circ}{I}_1$ διέρχεται από τις σύνθετες αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z}_1$ και $\overset{\circ}{Z}_3$, ενώ το ρεύμα $\overset{\circ}{I}_2$ διέρχεται από τις σύνθετες αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z}_2$ και $\overset{\circ}{Z}_4$. Επομένως για να υπάρχει η ζητούμενη ισορροπία θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\overset{\circ}{I}_1 \overset{\circ}{Z}_1 = \overset{\circ}{I}_2 \overset{\circ}{Z}_2 \quad \text{και}$$

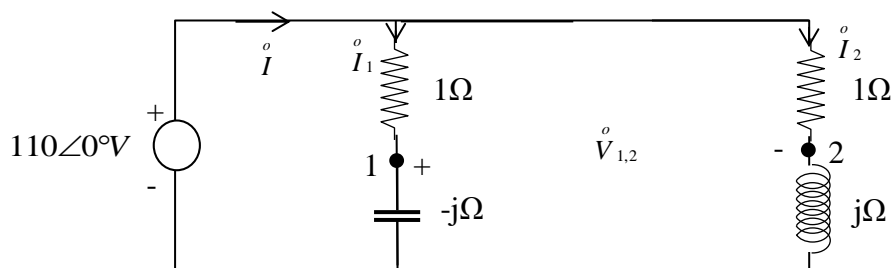
$$\overset{\circ}{I}_1 \overset{\circ}{Z}_3 = \overset{\circ}{I}_2 \overset{\circ}{Z}_4$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η συνθήκη ισορροπίας είναι η :

$$\frac{\overset{\circ}{Z}_1}{\overset{\circ}{Z}_3} = \frac{\overset{\circ}{Z}_2}{\overset{\circ}{Z}_4}$$

Εφόσον η παραπάνω συνθήκη δεν περιλαμβάνει τη συχνότητα ω , προκύπτει ότι η λειτουργία της γέφυρας είναι ανεξάρτητη της συχνότητας ω .

22. Να βρεθεί η ένδειξη του βολτομέτρου που θα τοποθετηθεί στα σημεία 1 και 2 του κυκλώματος του σχήματος 4.38.



Σχήμα 4.38: Κύκλωμα άσκησης 22

Απάντηση:

Οι σύνθετες αντιστάσεις είναι:

$$\overset{\circ}{Z}_1 = 1 - j = 1.414 \angle -45^\circ \Omega$$

$$\overset{\circ}{Z}_2 = 1 + j = 1.414 \angle 45^\circ \Omega$$

$$\overset{\circ}{Z} = \frac{\overset{\circ}{Z}_1 \overset{\circ}{Z}_2}{\overset{\circ}{Z}_1 + \overset{\circ}{Z}_2} = \frac{(1.414 \angle -45^\circ)(1.414 \angle 45^\circ)}{(1-j)(1+j)} = \frac{2 \angle 0^\circ}{2 \angle 0^\circ} = 1 \angle 0^\circ \Omega$$

Επομένως:

$$\overset{\circ}{I} = \frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{Z}} = \frac{110 \angle 0^\circ}{1 \angle 0^\circ} = 110 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Από διαίρεση ρευμάτων προκύπτει:

$$\overset{\circ}{I}_1 = \overset{\circ}{I} \frac{\overset{\circ}{Z}_2}{\overset{\circ}{Z}_1 + \overset{\circ}{Z}_2} = \frac{(110 \angle 0^\circ)(1.414 \angle 45^\circ)}{2 \angle 0^\circ} = 77.77 \angle 45^\circ \text{ A}$$

Ομοίως:

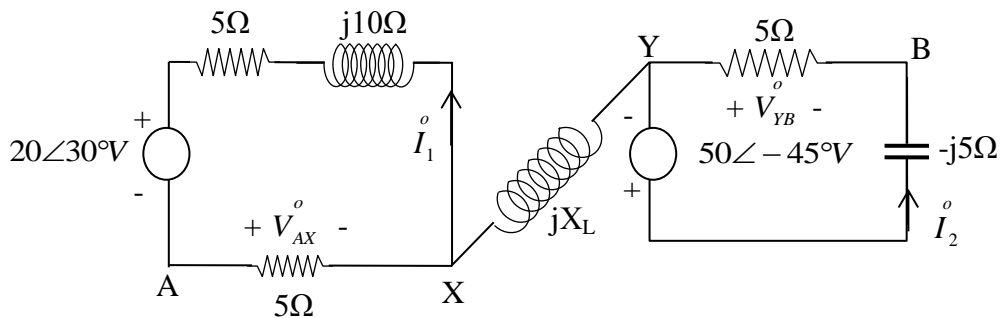
$$\overset{\circ}{I}_2 = \frac{(110 \angle 0^\circ)(1.414 \angle -45^\circ)}{2 \angle 0^\circ} = 77.77 \angle -45^\circ \text{ A}$$

Η ένδειξη του βολτομέτρου $\overset{\circ}{V}_{12}$ θα είναι:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{V}_{1\Omega} + \overset{\circ}{V}_{12} - \overset{\circ}{V}_{1\Omega} &= 0 \Leftrightarrow (77.77 \angle 45^\circ) \cdot 1 + \overset{\circ}{V}_{12} - (77.77 \angle -45^\circ) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 55 + j55 + \overset{\circ}{V}_{12} - 55 + j55 &= 0 \Leftrightarrow -\overset{\circ}{V}_{12} = j55 + j55 = j110 \text{ V} \end{aligned}$$

Επομένως η ένδειξη του βολτομέτρου είναι 110V.

23. Να βρεθεί η τάση V_{AB}° στο κύκλωμα του σχήματος 4.39.



Σχήμα 4.39: Κύκλωμα άσκησης 23

Απάντηση:

Στο παραπάνω κύκλωμα δεν διαρρέει ρεύμα το πηνίο jX_L . Επομένως $V_{XY}^{\circ} = 0$. Τότε:

$$I_1^{\circ} = \frac{20\angle 30^{\circ}}{10 + j10} = 1.141\angle -15^{\circ} \text{ A}$$

$$I_2^{\circ} = \frac{50\angle -45^{\circ}}{5 - j5} = 7.07\angle 0^{\circ} \text{ A}$$

Επομένως:

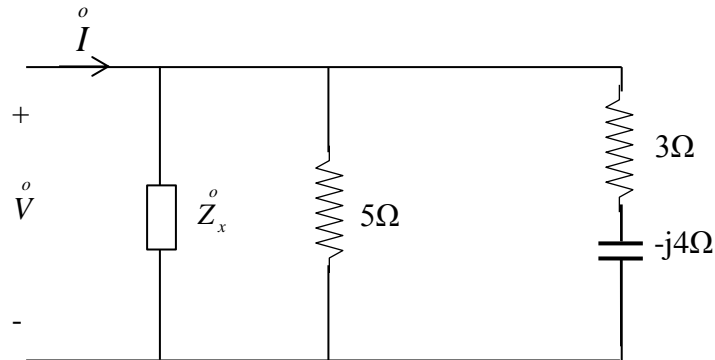
$$V_{AX}^{\circ} = I_1 \cdot 5 = (1.141\angle -15^{\circ}) \cdot 5 = 5.705\angle -15^{\circ} \text{ V}$$

$$V_{YB}^{\circ} = -I_2 \cdot 5 = (-7.07\angle 0^{\circ}) \cdot 5 = -35.35\angle 0^{\circ} \text{ V}$$

Τελικά:

$$V_{AB}^{\circ} = V_{AX}^{\circ} + V_{XY}^{\circ} + V_{YB}^{\circ} = 5.705\angle -15^{\circ} + 0 - 35.35\angle 0^{\circ} = -28.6 - j1.83 = 28.7\angle 183.7^{\circ} \text{ V}$$

24. Να προσδιοριστεί η $\overset{\circ}{Z}_x$ στο κύκλωμα του σχήματος 4.40 αν $\overset{\circ}{I} = 27.9\angle 57.8^\circ \text{A}$ και $\overset{\circ}{V} = 50\angle 30^\circ \text{V}$.



Σχήμα 4.40: Κύκλωμα άσκησης 24

Απάντηση:

$$\overset{\circ}{Y} = \frac{\overset{\circ}{I}}{\overset{\circ}{V}} = \frac{27.9\angle 57.8^\circ}{50\angle 30^\circ} = 0.558\angle 27.8^\circ \text{S} = 0.494 + j0.26 = \overset{\circ}{Y}_x + \frac{1}{5} + \frac{1}{3 - j4} = \overset{\circ}{Y}_x + 0.2 + 0.12 + j0.16$$

Επομένως:

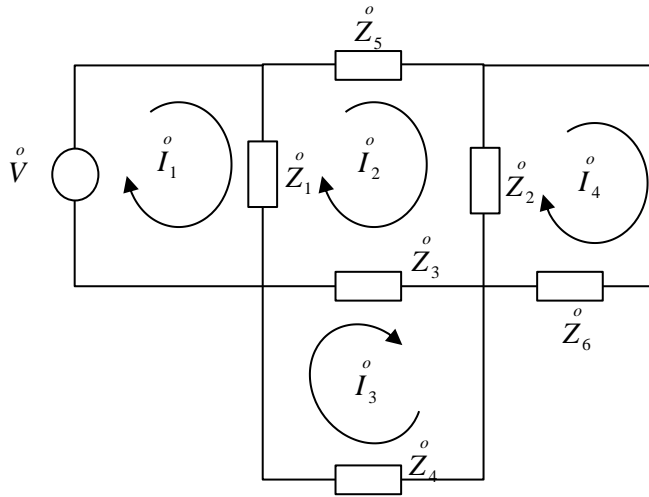
$$\overset{\circ}{Y}_x = 0.174 + j0.1 = 0.2\angle 29.9^\circ \text{S} \quad \text{ή}$$

$$\overset{\circ}{Z}_x = 5\angle -29.9^\circ \Omega$$

25. Στο κύκλωμα του σχήματος 4.41 είναι: $\overset{\circ}{I}_1 = 20\angle 60^\circ \text{A}$, $\overset{\circ}{I}_2 = 10\angle 210^\circ \text{A}$, $\overset{\circ}{I}_4 = 70\angle 100^\circ \text{A}$, $\overset{\circ}{Z}_5 = 6\angle 25^\circ \Omega$ και $\overset{\circ}{Z}_6 = 15\angle 40^\circ \Omega$. Να βρεθούν:

α) Το ρεύμα που διέρχεται από τη σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z}_3$

β) Την τάση κατά μήκος της σύνθετης αντίστασης $\overset{\circ}{Z}_5$



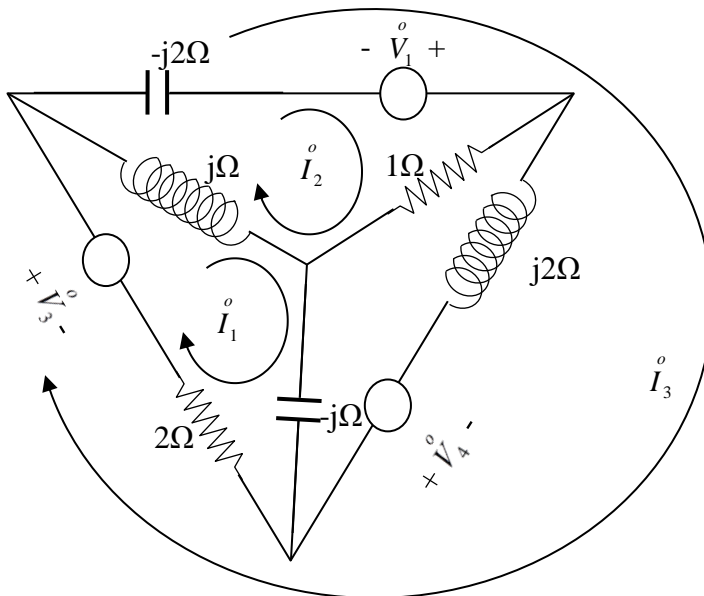
Σχήμα 4.41: Κύκλωμα άσκησης 25

Απάντηση:

α) $\overset{\circ}{I}_3 - \overset{\circ}{I}_2 = 10\angle 210^\circ - 50\angle 30^\circ = (-8.66 - j5) - (43.3 + j25) = -51.96 - j30 = 60\angle 210^\circ \text{ A}$

β) $\overset{\circ}{I}_2 \cdot \overset{\circ}{Z}_5 = (50\angle 30^\circ)(6\angle 25^\circ) = 300\angle 55^\circ \text{ V}$

26. Να υπολογιστεί το ρεύμα I_1 στο κύκλωμα του σχήματος 4.42, με $\overset{\circ}{V}_1 = 10\angle 120^\circ \text{ V}$, $\overset{\circ}{V}_3 = 10\angle 0^\circ \text{ V}$ και $\overset{\circ}{V}_4 = 10\angle -120^\circ \text{ V}$.



Σχήμα 4.42: Κύκλωμα άσκησης 26

Απάντηση:

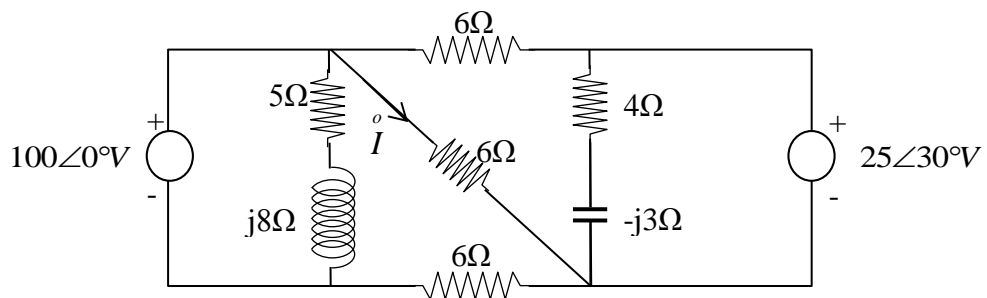
Τα ρεύματα επιλέγονται με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα 4.42. Με τη μέθοδο των ρευμάτων προκύπτει η εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} 2 & -j & 2 \\ -j & 1-j & -j2 \\ 2 & -j2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{I}_1 \\ \overset{\circ}{I}_2 \\ \overset{\circ}{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10\angle 120^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

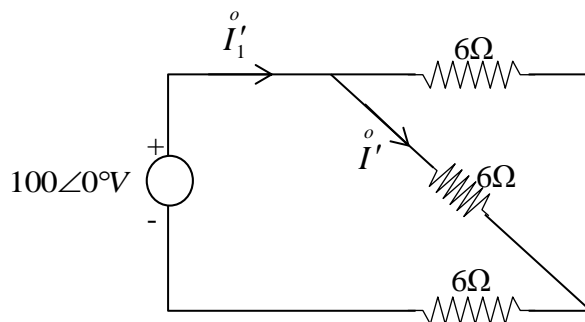
Επομένως:

$$\overset{\circ}{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -j & 2 \\ 10\angle 120^\circ & 1-j & -j2 \\ 0 & -j2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -j & 2 \\ -j & 1-j & -j2 \\ 2 & -j2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{77.96\angle -7.37^\circ}{2\angle 0^\circ} = 38.98\angle -7.37^\circ \text{ A}$$

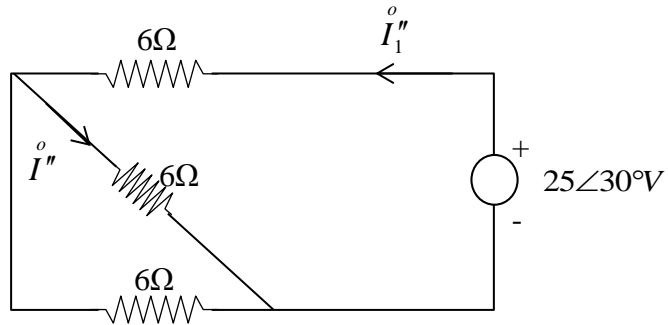
27. Να βρεθεί το ρεύμα $\overset{\circ}{I}$ στο κύκλωμα του σχήματος 4.43.



Σχήμα 4.43: Κύκλωμα άσκησης 27



Σχήμα 4.44: Βοηθητικό κύκλωμα (α) άσκησης 27



Σχήμα 4.45: Βοηθητικό κύκλωμα (β) άσκησης 27

Απάντηση:

Εφόσον οι σύνθετες αντιστάσεις $(5 + j8)\Omega$ και $(4 - j3)\Omega$ δεν έχουν επίδραση στο ρεύμα $\overset{\circ}{I}$, χρησιμοποιούνται τα βοηθητικά κυκλώματα που φαίνονται στα σχήματα 4.44 και 4.45. Επομένως:

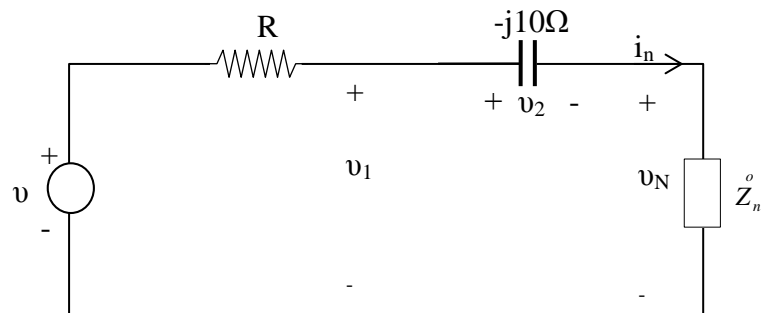
$$\overset{\circ}{I}'_1 = \frac{100\angle 0^\circ}{6+3} = 11.11\angle 0^\circ \text{ A} \quad \text{και} \quad \overset{\circ}{I}' = \frac{11.11\angle 0^\circ}{2} = 5.56\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\overset{\circ}{I}''_1 = \frac{25\angle 30^\circ}{6+3} = 2.78\angle 30^\circ \text{ A} \quad \text{και} \quad \overset{\circ}{I}'' = \frac{2.78\angle 30^\circ}{2} = 1.39\angle 30^\circ \text{ A}$$

Προκύπτει:

$$\overset{\circ}{I} = \overset{\circ}{I}' + \overset{\circ}{I}'' = 5.56\angle 0^\circ + 1.39\angle 30^\circ = 6.8\angle 5.87^\circ \text{ A}$$

28. Για το κύκλωμα του σχήματος 4.46 ισχύουν τα εξής: $v_1 = 10\sin(1000t + 60^\circ)V$ και $v_2 = 5\sin(1000t - 45^\circ)V$. Να βρεθεί η σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z}_n$.



Σχήμα 4.46: Κύκλωμα άσκησης 28

Απάντηση:

Στο πεδίο της συχνότητας ισχύει:

$$\overset{\circ}{V}_1 = 10 \angle 60^\circ \text{V}$$

$$\overset{\circ}{V}_2 = 5 \angle -45^\circ \text{V}$$

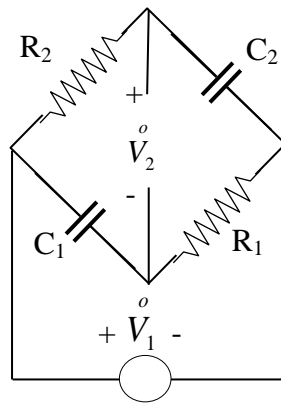
$$\overset{\circ}{V}_n = \overset{\circ}{V}_1 - \overset{\circ}{V}_2$$

$$\overset{\circ}{I}_n = \frac{\overset{\circ}{V}_2}{-j10} = \frac{5 \angle -45^\circ}{10 \angle -90^\circ} = 0.5 \angle 45^\circ \text{A}$$

Επομένως:

$$\overset{\circ}{Z}_n = \frac{\overset{\circ}{V}_n}{\overset{\circ}{I}_n} = \frac{10 \angle 60^\circ - 5 \angle -45^\circ}{0.5 \angle 45^\circ} = 24.5 \angle 38.2^\circ \Omega$$

29. Στο κύκλωμα του σχήματος 4.47 ισχύουν τα εξής: $R_1 C_1 = R_2 C_2 = T$, $\overset{\circ}{V}_1 = |V_1| \angle 0^\circ \text{V}$ και $\overset{\circ}{V}_2 = |V_2| \angle \phi$. Ναδειχθεί ότι ισχύει η σχέση $\overset{\circ}{V}_1 = \overset{\circ}{V}_2$.



Σχήμα 4.47: Κύκλωμα άσκησης 29

Απάντηση:

Με διαίρεση τάσεων και ρευμάτων προκύπτει:

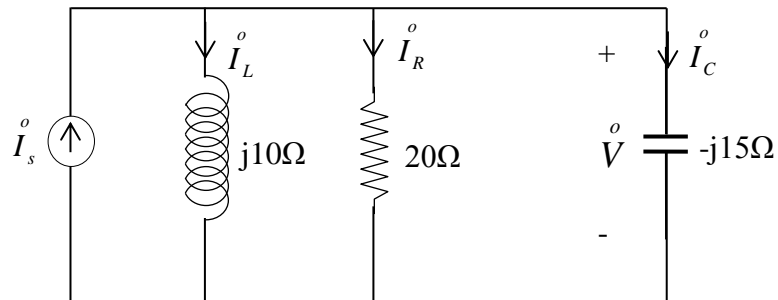
$$\overset{\circ}{V}_2 = \overset{\circ}{V}_1 \left(\frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} - \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \right) = \overset{\circ}{V}_1 \left(\frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2} - \frac{j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega R_1 C_1} \right) = \overset{\circ}{V}_1 \left(\frac{1}{1 + j\omega T} - \frac{j\omega T}{1 + j\omega T} \right) = \overset{\circ}{V}_1 \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}$$

Επομένως:

$$\overset{\circ}{V}_1(1 - j\omega T) = \overset{\circ}{V}_2(1 + j\omega T) \quad \text{ή}$$

$$\frac{\overset{\circ}{V}_1}{\overset{\circ}{V}_2} = \frac{|V_1|}{|V_2|} = \frac{|1 + j\omega T|}{|1 - j\omega T|} = 1$$

30. Για το κύκλωμα του σχήματος 4.48 να σχεδιαστεί το διάγραμμα για τα Phasors αν $\overset{\circ}{V} = 1\angle 0^\circ \text{V}$.



Σχήμα 4.48: Κύκλωμα άσκησης 30

Απάντηση:

$$\overset{\circ}{I}_R = 50\angle 0^\circ \text{mA}$$

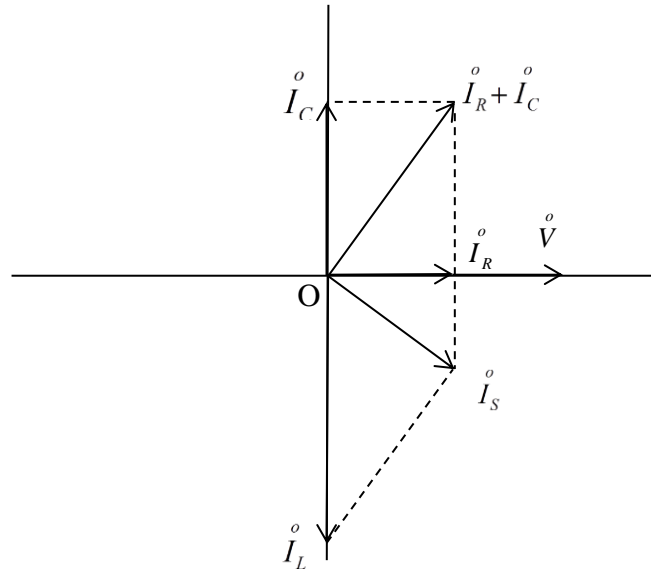
$$\overset{\circ}{I}_L = 0.1\angle -90^\circ \text{A}$$

$$\overset{\circ}{I}_C = 66.7\angle 90^\circ \text{mA}$$

$$\overset{\circ}{I}_R + \overset{\circ}{I}_C = 89.3\angle 53.1^\circ \text{mA}$$

$$\overset{\circ}{I}_S = 60.1\angle -33.7^\circ \text{mA}$$

Το διάγραμμα των Phasors φαίνεται στο σχήμα 4.49.



Σχήμα 4.49: Διάγραμμα Phasors άσκησης 30

4.11. Άλυτες ασκήσεις

4.1. Δύο στοιχεία είναι συνδεδεμένα σε σειρά σε ένα κύκλωμα και έχουν συνολική τάση $v = 150 \sin(500t + 10^\circ)$ (V) και διαρρέονται από ρεύμα $i = 13.42 \sin(500t - 53.4^\circ)$ (A). Να βρεθούν αυτά τα δύο στοιχεία.

(Απάντηση: $R = 5\Omega$, $L = 20mH$)

4.2. Δύο στοιχεία είναι συνδεδεμένα σε σειρά σε ένα κύκλωμα, έχουν συνολική τάση $v = 200 \sin(2000t + 50^\circ)$ (V) και διαρρέονται από ρεύμα $i = 4 \sin(2000t + 13.2^\circ)$ (A). Να βρεθούν αυτά τα δύο στοιχεία.

(Απάντηση: $R = 30\Omega$, $C = 12.5\mu F$)

4.3. Ένα κύκλωμα RC σε σειρά με $R = 27.5\Omega$ και $C = 66.7\mu F$, έχει ημιτονοειδή τάση και ημιτονοειδές ρεύμα με γωνιακή συχνότητα 1500rad/s. Να βρεθεί η γωνία με την οποία το ρεύμα προηγείται της τάσης.

(Απάντηση: 20°)

4.4. Ένα κύκλωμα RLC σε σειρά με $R = 27.5\Omega$, $L = 80mH$ και $C = 66.7\mu F$, έχει ημιτονοειδή τάση και ημιτονοειδές ρεύμα με γωνιακή συχνότητα 500rad/s. Να βρεθεί η γωνία με την οποία το ρεύμα προηγείται ή καθυστερεί της τάσης.

(Απάντηση: 60.6° , προηγείται)

4.5. Ένας πυκνωτής $C = 35\mu F$ είναι συνδεδεμένος παράλληλα με ένα στοιχείο. Να βρεθεί ποιο είναι αυτό το στοιχείο αν η τάση είναι $v = 150\sin 3000t$ (V) και το ρεύμα $i = 16.5\sin(3000t + 72.4^\circ)$ (A).

(Απάντηση: $R = 30.1\Omega$)

4.6. Σε ένα κύκλωμα είναι συνδεδεμένα σε σειρά μία αντίσταση $R = 20\Omega$ και ένα πηνίο $L = 20mH$. Η σύνθετη αντίσταση είναι $40\angle\theta\Omega$. Να βρεθεί η γωνία θ και η συχνότητα.

(Απάντηση: $\theta = 60^\circ$, 276Hz)

4.7. Να βρεθεί η σύνθετη αντίσταση σε ένα κύκλωμα όπου είναι συνδεδεμένα σε σειρά μία αντίσταση $R = 25\Omega$ και ένα πηνίο $L = 10mH$ στα:

- α) 100Hz
- β) 500 Hz
- γ) 1000 Hz

(Απάντηση: α) $25.8\angle 14.1^\circ\Omega$, β) $40.1\angle 51.5^\circ\Omega$, γ) $67.6\angle 68.3^\circ\Omega$)

4.8. Να βρεθούν τα στοιχεία που είναι συνδεδεμένα σε σειρά σε ένα κύκλωμα αν η εφαρμοζόμενη τάση $v = 150\sin(5000t + 45^\circ)$ (V) οδηγεί στην εμφάνιση ρεύματος $i = 3\sin(5000t - 15^\circ)$ (A)

(Απάντηση: $R = 25\Omega$, $L = 8.66mH$)

4.9. Σε ένα κύκλωμα είναι συνδεδεμένα σε σειρά μία αντίσταση $R = 10\Omega$ και ένας πυκνωτής $C = 40\mu F$. Αν η εφαρμοζόμενη τάση είναι $v = 500\sin(2500t - 20^\circ)$ (V). Να βρεθεί το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.

(Απάντηση: $i = 25\sqrt{2}\cos(2500t + 25^\circ)$ (A))

4.10. Τρεις σύνθετες αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z}_1 = 3\angle 45^\circ\Omega$, $\overset{\circ}{Z}_2 = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ\Omega$, $\overset{\circ}{Z}_3 = 5\angle -90^\circ\Omega$ είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Να βρεθεί η εφαρμοζόμενη τάση $\overset{\circ}{V}$, αν η τάση κατά μήκος της $\overset{\circ}{Z}_1$ είναι $27\angle -10^\circ V$.

(Απάντηση: $126.5\angle -24.6^\circ V$)

4.11. Τρεις σύνθετες αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z}_1 = 5\angle 30^\circ\Omega$, $\overset{\circ}{Z}_2 = 4\angle 60^\circ\Omega$, $\overset{\circ}{Z}_3 = 10\angle -20^\circ\Omega$ είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Η εφαρμοζόμενη τάση είναι $\overset{\circ}{V} = 100\angle 0^\circ V$.

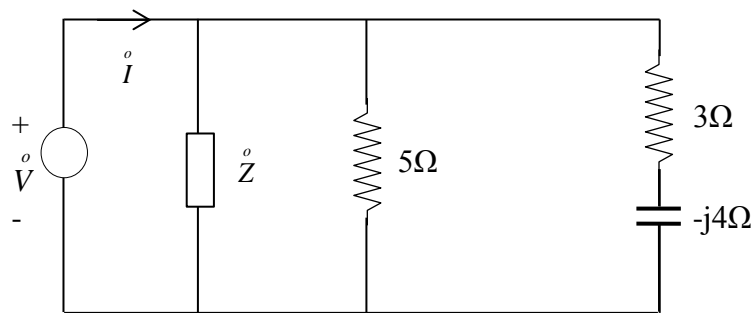
α) Να βρεθεί το ρεύμα $\overset{\circ}{I}$.

β) Να βρεθεί η τάση στα άκρα κάθε σύνθετης αντίστασης $\overset{\circ}{V}_1, \overset{\circ}{V}_2, \overset{\circ}{V}_3$ και να κατασκευαστεί το διάγραμμα των phasors τάσης έτσι ώστε να φαίνεται ότι ισχύει η σχέση: $\overset{\circ}{V}_1 + \overset{\circ}{V}_2 + \overset{\circ}{V}_3 = 100\angle 0^\circ V$.

(Απάντηση: α) $6.28\angle -9.17^\circ A$

β) $\overset{\circ}{V}_1 = 31.4\angle 20.8^\circ V, \overset{\circ}{V}_2 = 25.1\angle 50.8^\circ V, \overset{\circ}{V}_3 = 62.8\angle -29.2^\circ V$)

4.12. Να βρεθεί η σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z}$ στο κύκλωμα του σχήματος 4.50, αν $\overset{\circ}{V} = 50\angle 30^\circ V$ και $\overset{\circ}{I} = 27.9\angle 57.8^\circ A$.



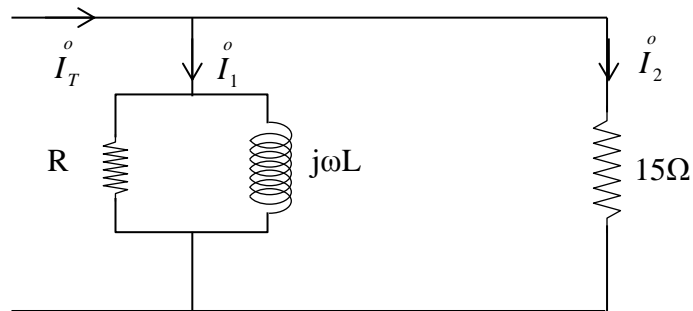
Σχήμα 4.50: Κύκλωμα άσκησης 4.12

(Απάντηση: $5\angle -30^\circ\Omega$)

4.13. Να βρεθεί η αγωγιμότητα και η δεκτικότητα που αντιστοιχεί σε τάση $\overset{\circ}{V} = 85\angle 205^\circ V$ και ρεύμα $\overset{\circ}{I} = 41.2\angle -141^\circ A$.

(Απάντηση: $0.471S, 0.117S$)

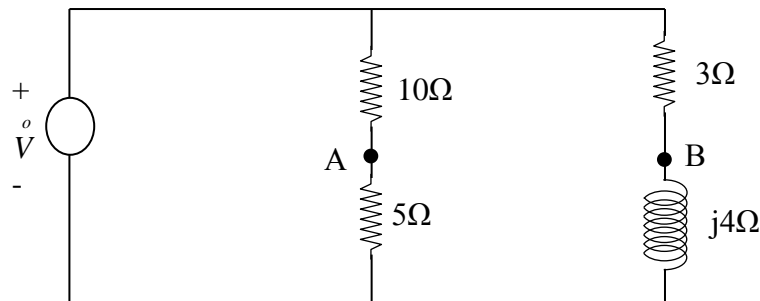
4.14. Στο κύκλωμα του σχήματος 4.51 ισχύουν: $|I_T| = 29.9A$, $|I_1| = 22.3A$ και $|I_2| = 0.8A$. Επιπλέον ισχύει $f = 60Hz$. Να βρεθούν οι τιμές R, L



Σχήμα 4.51: Κύκλωμα άσκησης 4.14

(Απάντηση: 5.8Ω , $38.5mH$)

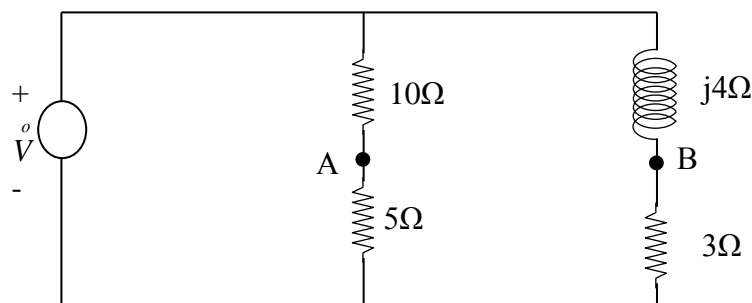
4.15. Να βρεθεί το μέτρο της τάσης V_{AB} στο κύκλωμα του σχήματος 4.52, αν το X_L είναι: α) 5Ω , β) 15Ω και γ) 0Ω .



Σχήμα 4.52: Κύκλωμα άσκησης 4.15

(Απάντηση: $50V$ για όλα τα X_L)

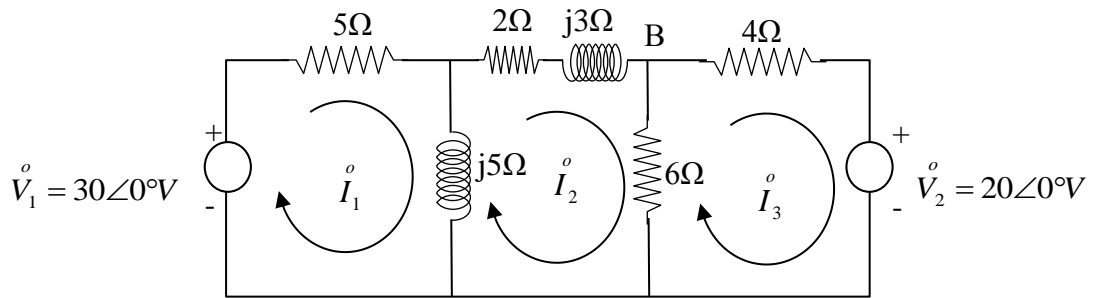
4.16. Στο κύκλωμα του σχήματος 4.53 να βρεθεί η τάση $\overset{\circ}{V}$ αν $V_{AB} = 36.1\angle 3.18^\circ V$



Σχήμα 4.53: Κύκλωμα άσκησης 4.16

(Απάντηση: $75\angle -90^\circ V$)

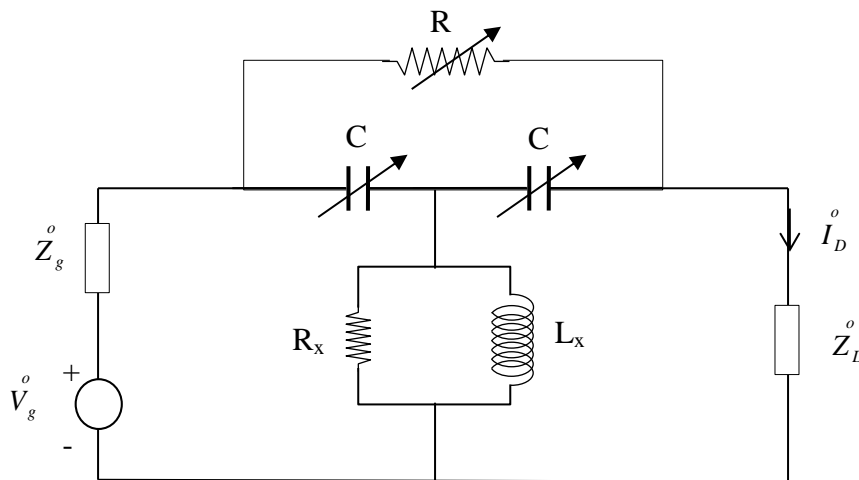
4.17. Για το κύκλωμα του σχήματος 4.54, να βρεθεί με τη μέθοδο ανάλυσης ρευμάτων, το ρεύμα που διαρρέει τη σύνθετη αντίσταση $2 + j3\Omega$ λόγω των πηγών $\overset{\circ}{V}_1$ και $\overset{\circ}{V}_2$.



Σχήμα 4.54: Κύκλωμα άσκησης 4.17

(Απάντηση: $2.41\angle 6.45^\circ \text{A}$, $1.36\angle 141.45^\circ \text{A}$)

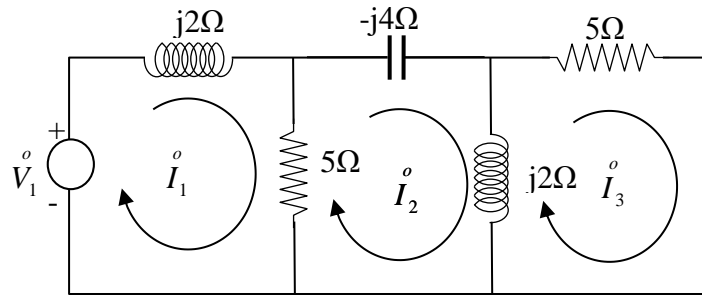
4.18. Στο κύκλωμα του σχήματος 4.55 οι δύο πυκνωτές (με ίσες χωρητικότητες) και η μεταβλητή αντίσταση R , προσαρμόζονται στην τιμή τους έτσι ώστε το ρεύμα $\overset{\circ}{I}_D$ να είναι μηδέν. Αν θεωρηθεί μία πηγή με γωνιακή συχνότητα ω , να βρεθούν οι τιμές της R_x και της L_x .



Σχήμα 4.55: Κύκλωμα άσκησης 4.18

(Απάντηση: $R_x = \frac{1}{(\omega^2 C^2 R)}$, $L_x = \frac{1}{(2\omega C)}$)

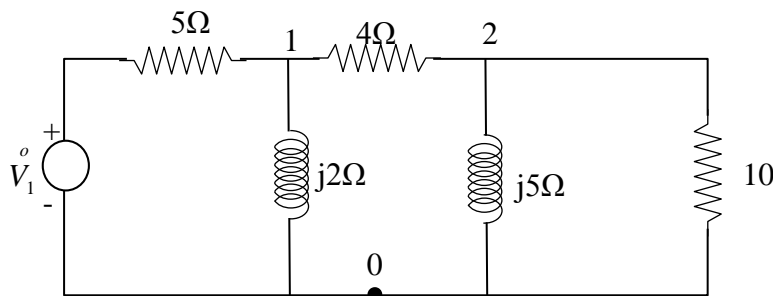
4.19. Για το κύκλωμα του σχήματος 4.56, να βρεθεί ο λόγος $\frac{\overset{\circ}{I}_1}{\overset{\circ}{I}_3}$.



Σχήμα 4.56: Κύκλωμα άσκησης 4.19

(Απάντηση: $3.3 \angle -90^\circ$)

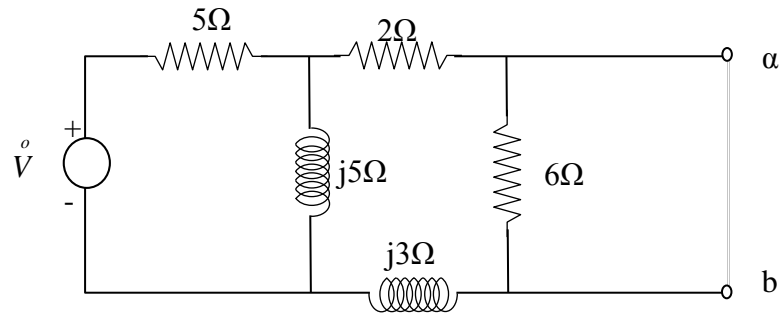
4.20. Στο κύκλωμα του σχήματος 4.57 να βρεθεί ο λόγος $\frac{\overset{\circ}{V}_1}{\overset{\circ}{V}_2}$ με εφαρμογή της μεθόδου ανάλυσης τάσεων και να βρεθεί η ισοδύναμη αντίσταση εισόδου Z_{in} .



Σχήμα 4.57: Κύκλωμα άσκησης 4.20

(Απάντηση: $\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} = 1.61 \angle -29.8^\circ, 5.59 \angle 17.35^\circ \Omega$)

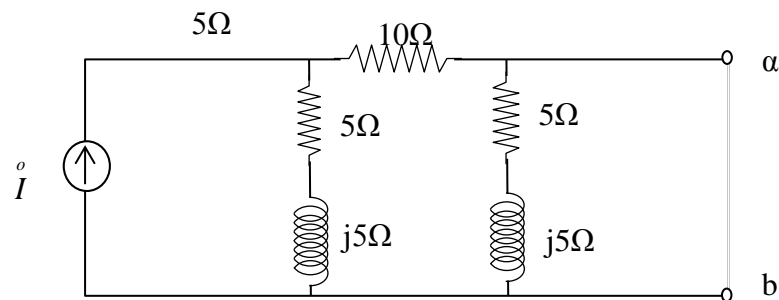
4.21. Να βρεθούν τα ισοδύναμα Norton και Thevenin για το κύκλωμα του σχήματος 4.58 στα άκρα a και b αν $\overset{\circ}{V} = 55.8 \angle -17.4^\circ V$. Να επιλεγεί πολικότητα τέτοια ώστε $\overset{\circ}{V}' = \overset{\circ}{V}_{ab}$.



Σχήμα 4.58: Κύκλωμα άσκησης 4.21

(Απάντηση: $\overset{\circ}{V}' = 20\angle 0^\circ V$, $\overset{\circ}{I}' = 5.56\angle -23.06^\circ A$, $\overset{\circ}{Z}' = 3.6\angle 23.06^\circ \Omega$)

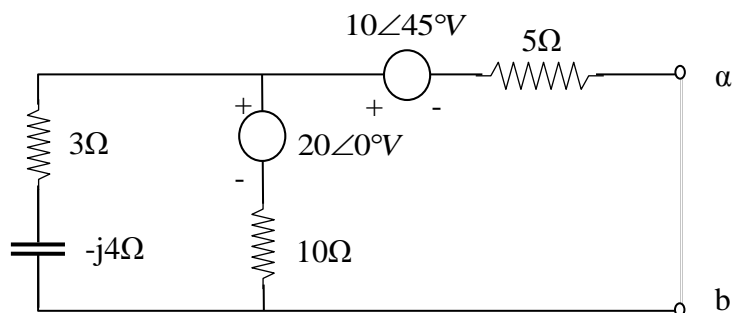
4.22. Να βρεθούν τα ισοδύναμα Norton και Thevenin για το κύκλωμα του σχήματος 4.59 στα άκρα a και b αν $\overset{\circ}{I} = 5\angle 30^\circ A$.



Σχήμα 4.59: Κύκλωμα άσκησης 4.22

(Απάντηση: $\overset{\circ}{V}' = 11.18\angle 93.43^\circ V$, $\overset{\circ}{I}' = 2.24\angle 56.56^\circ A$, $\overset{\circ}{Z}' = 5\angle 36.87^\circ \Omega$)

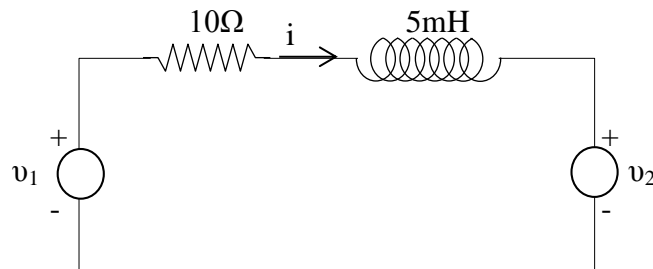
4.23. Να βρεθούν τα ισοδύναμα Norton και Thevenin για το κύκλωμα του σχήματος 4.60 στα άκρα a και b.



Σχήμα 4.60: Κύκλωμα άσκησης 4.23

(Απάντηση: $\overset{\circ}{V}' = 11.5\angle -95.8^\circ V$, $\overset{\circ}{I}' = 1.39\angle -80.6^\circ A$, $\overset{\circ}{Z}' = 8.26\angle -15.2^\circ \Omega$)

4.24. Στο κύκλωμα του σχήματος 4.61 ισχύουν: $v_1 = 10V$ και $v_2 = 5 \sin 2000t$. Να βρεθεί το i .

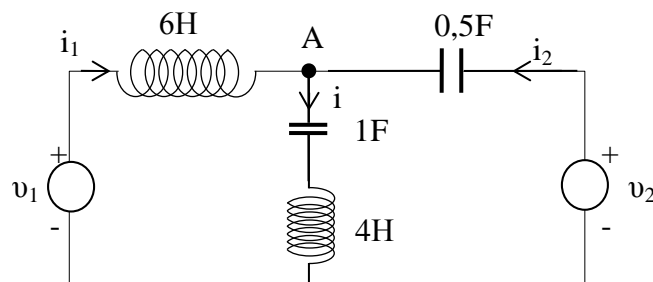


Σχήμα 4.61: Κύκλωμα άσκησης 4.24

(Απάντηση: $i = 1 - 0.35 \sin(2000t - 45^\circ)$)

4.25. Στο κύκλωμα του σχήματος 4.62 ισχύουν: $v_1 = 6 \cos \omega t$ και $v_2 = \cos(\omega t + 60^\circ)$.

- Να βρεθεί η v_A αν $\omega = 2 \text{ rad/s}$
- Να βρεθούν τα phasor των ρευμάτων I_1 και I_2
- Να βρεθεί η v_A αν $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$



Σχήμα 4.62: Κύκλωμα άσκησης 4.25

(Απάντηση: α) $v_A = 1.11 \sin 2t$,

β) $\overset{\circ}{I}_1 = 508 \angle -100.4^\circ \text{ mA}$, $\overset{\circ}{I}_2 = 1057 \angle -145^\circ \text{ mA}$,

γ) $v_A = 0$)

4.26. Στο κύκλωμα του σχήματος 4.62:

- αν ισχύουν: $v_1 = V_1 \cos(0.5t + \theta_1)$ και $v_2 = V_2 \cos(0.5t + \theta_2)$ να βρεθεί το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο με αυτεπαγωγή 4H.

β) αν ισχύουν: $v_1 = V_1 \cos(t + \theta_1)$ και $v_2 = V_2 \cos(t + \theta_2)$ να βρεθεί η v_A

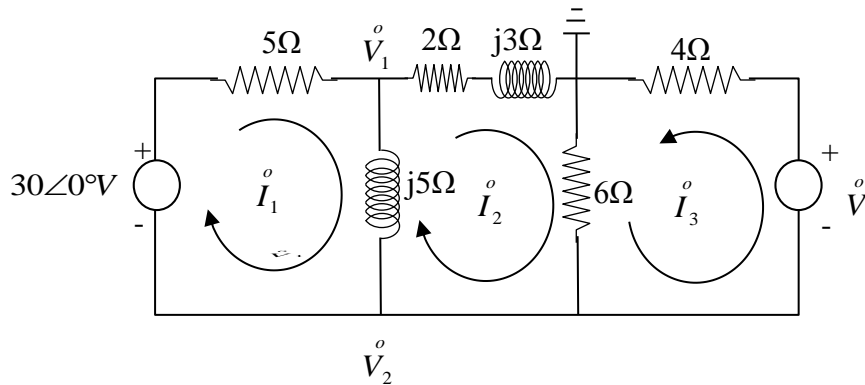
γ) αν ισχύουν: $v_1 = V_1 \cos(2t)$ και $v_2 = V_2 \cos(0.25t)$ να βρεθεί η v_A

(Απάντηση: α) $i = (\frac{V_2}{4}) \sin(0.5t + \theta_2) - (\frac{V_1}{3}) \sin(0.5t + \theta_1)$,

β) $v_A = \infty$ εκτός αν $V_1 = V_2 = 0$ οπότε σε αυτή την περίπτωση $v_A = 0$,

γ) $v_A = -0.816V_1 \cos(2t) - 0.6V_2 \cos(0.25t)$

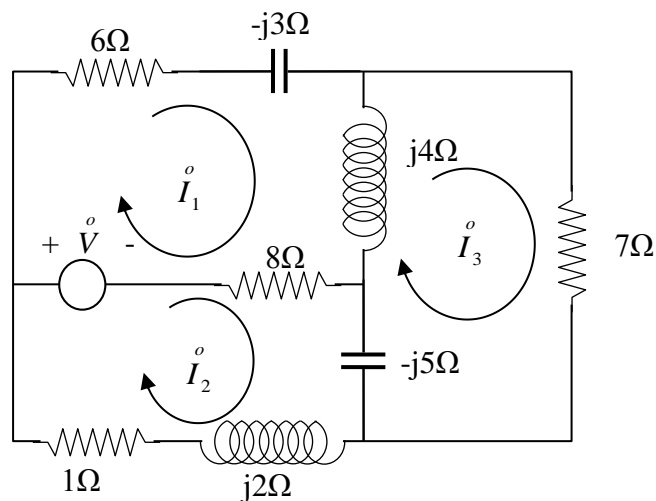
4.27. Για το κύκλωμα του σχήματος 4.63 να βρεθεί η $\overset{\circ}{V}$ έτσι ώστε $\overset{\circ}{I}_2 = 0$.



Σχήμα 4.63: Κύκλωμα άσκησης 4.27

(Απάντηση: $35.4 \angle 45^\circ V$)

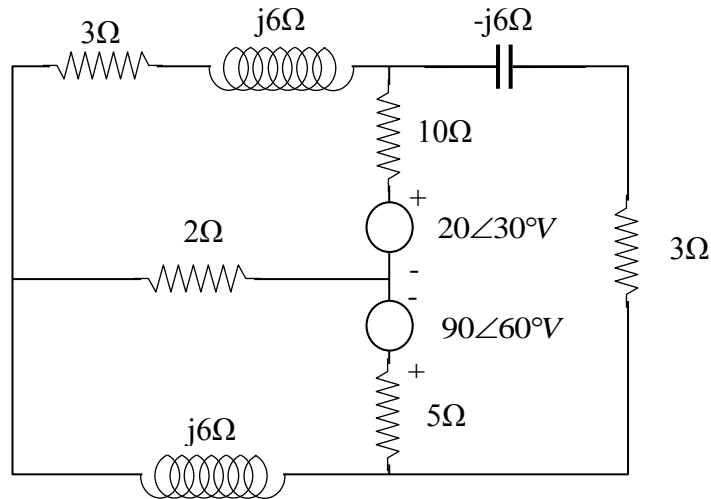
4.28. Να βρεθεί το ρεύμα $\overset{\circ}{I}_2$ στο κύκλωμα του σχήματος 4.64 αν $\overset{\circ}{V} = 50 \angle 30^\circ V$.



Σχήμα 4.64: Κύκλωμα άσκησης 4.28

(Απάντηση: $2.88 \angle -120.37^\circ A$)

4.29. Να βρεθεί η τάση κατά μήκος της αντίστασης των 2Ω στο κύκλωμα του σχήματος 4.65.

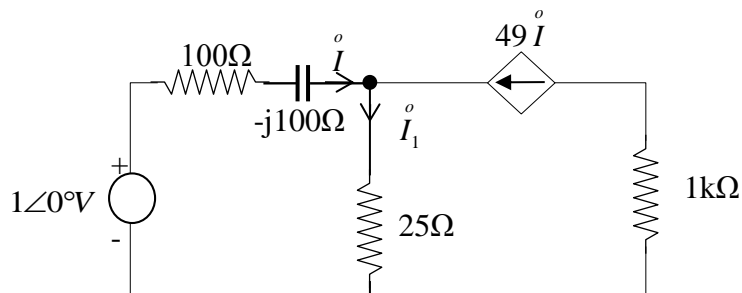


Σχήμα 4.65: Κύκλωμα άσκησης 4.29

(Απάντηση: $17.54\angle 25.8^\circ\text{V}$)

4.30. Στο κύκλωμα του σχήματος 4.66 να βρεθούν:

- α) το ρεύμα I_1
- β) η τάση κατά μήκος της αντίστασης των $1\text{k}\Omega$.



Σχήμα 4.66: Κύκλωμα άσκησης 4.30

(Απάντηση: α) $36.94\angle 4.2^\circ\text{mA}$, β) $36.2\angle 184.2^\circ\text{V}$)

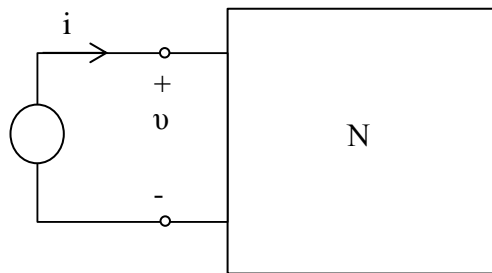
Κεφάλαιο 5: Ισχύς στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση (ΗΜΚ)

5.1. Ισχύς στο πεδίο του χρόνου

Η στιγμιαία ισχύς που εισέρχεται σε ένα κύκλωμα N (σχήμα 5.1) ορίζεται ως:

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (5.1)$$

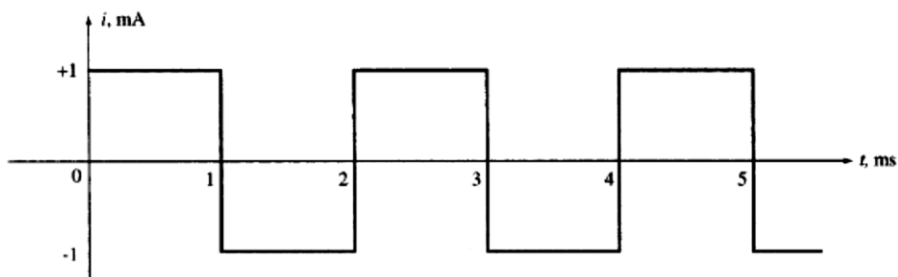
όπου $v(t)$ και $i(t)$ είναι η τάση και το ρεύμα αντίστοιχα στα άκρα του κυκλώματος. Αν η ισχύς p είναι θετική, παρέχεται ενέργεια στο κύκλωμα. Αν η ισχύς p είναι αρνητική, επιστρέφεται ενέργεια από το κύκλωμα πίσω στην πηγή.



Σχήμα 5.1: Κύκλωμα στο πεδίο του χρόνου

Παράδειγμα 5.1

Στο σχήμα 5.2 φαίνεται η γραφική παράσταση του ρεύματος σε μία αντίσταση των $1\text{k}\Omega$. Να βρεθεί και να παρασταθεί γραφικά η στιγμιαία ισχύς $p(t)$.



Σχήμα 5.2: Γραφική παράσταση ρεύματος παραδείγματος 5.1

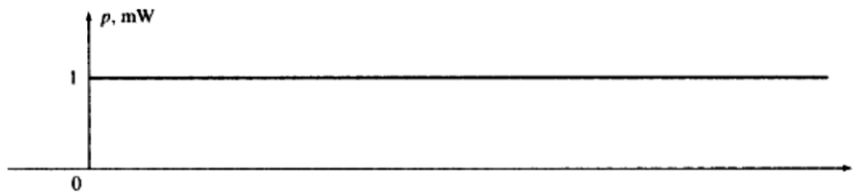
Απάντηση:

Για την αντίσταση ισχύει: $v = Ri$

Η ισχύς υπολογίζεται ως εξής:

$$p(t) = v \cdot i = Ri^2 = 1000 \cdot 10^{-6} = 10^{-3} W = 1mW$$

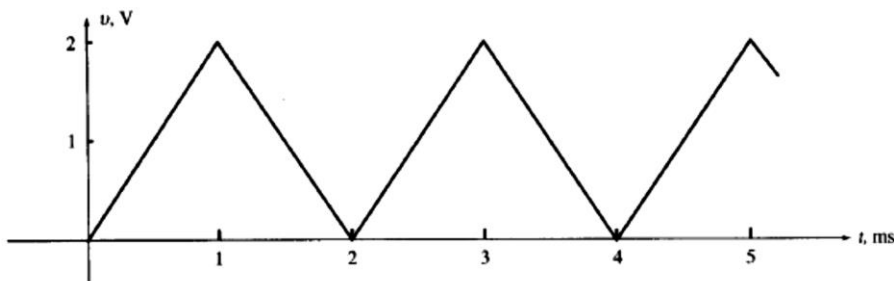
Η γραφική παράσταση της ισχύος φαίνεται στο σχήμα 5.3.



Σχήμα 5.3: Γραφική παράσταση ισχύος παραδείγματος 5.1

Παράδειγμα 5.2

Στο σχήμα 5.4 φαίνεται η γραφική παράσταση του ρεύματος σε έναν πυκνωτή των 0.5μF, να βρεθεί η ισχύς που εισέρχεται στον πυκνωτή και η ενέργεια w(t) που αποθηκεύεται σε αυτόν. Επίσης να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της ισχύος και της ενέργειας.



Σχήμα 5.4: Γραφική παράσταση ρεύματος παραδείγματος 5.2

Απάντηση:

Από τη γραφική παράσταση του ρεύματος προκύπτει ότι το ρεύμα στον πυκνωτή είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο T=2ms. Το ρεύμα στη διάρκεια μίας περιόδου δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$i = \begin{cases} 1mA & (0 < t < 1ms) \\ -1mA & (1 < t < 2ms) \end{cases}$$

Η τάση κατά μήκος του πυκνωτή είναι επίσης μία περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο T. Η τάση στη διάρκεια μίας περιόδου δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t idt = \begin{cases} 2000t(V) & (0 < t < 1ms) \\ 4 - 2000t(V) & (1 < t < 2ms) \end{cases}$$

Τελικά η ισχύς που εισέρχεται στον πυκνωτή και η ενέργεια $w(t)$ που αποθηκεύεται σε αυτόν (και τα δύο μεγέθη είναι επίσης περιοδικά με περίοδο T) είναι αντίστοιχα:

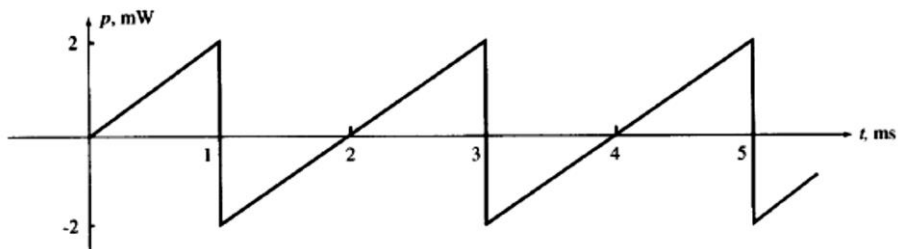
$$p(t) = v \cdot i = \begin{cases} 2000t(mW) & (0 < t < 1ms) \\ 2000t - 4(mV) & (1 < t < 2ms) \end{cases}$$

$$w(t) = \frac{1}{2} C v^2 = \begin{cases} t^2(J) & (0 < t < 1ms) \\ t^2 + 4 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-3} t(J) & (1 < t < 2ms) \end{cases}$$

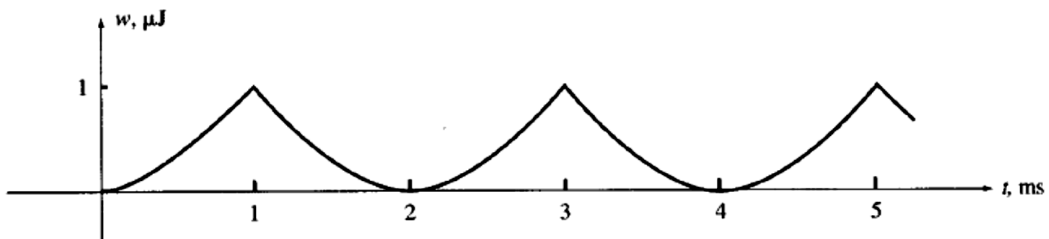
Οι γραφικές παραστάσεις της ισχύος και της ενέργειας φαίνονται στα σχήματα 5.5 και 5.6 αντίστοιχα.

Εναλλακτικά η ενέργεια $w(t)$ είναι δυνατό να βρεθεί αν υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της ισχύος $p(t)$. Η μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται (όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.6) είναι:

$$W_{\max} = 10^{-6} J = 1 \mu J \text{ για } t = 1, 3, 5, \dots ms$$



Σχήμα 5.5: Γραφική παράσταση ισχύος παραδείγματος 5.2



Σχήμα 5.6: Γραφική παράσταση ενέργειας παραδείγματος 5.2

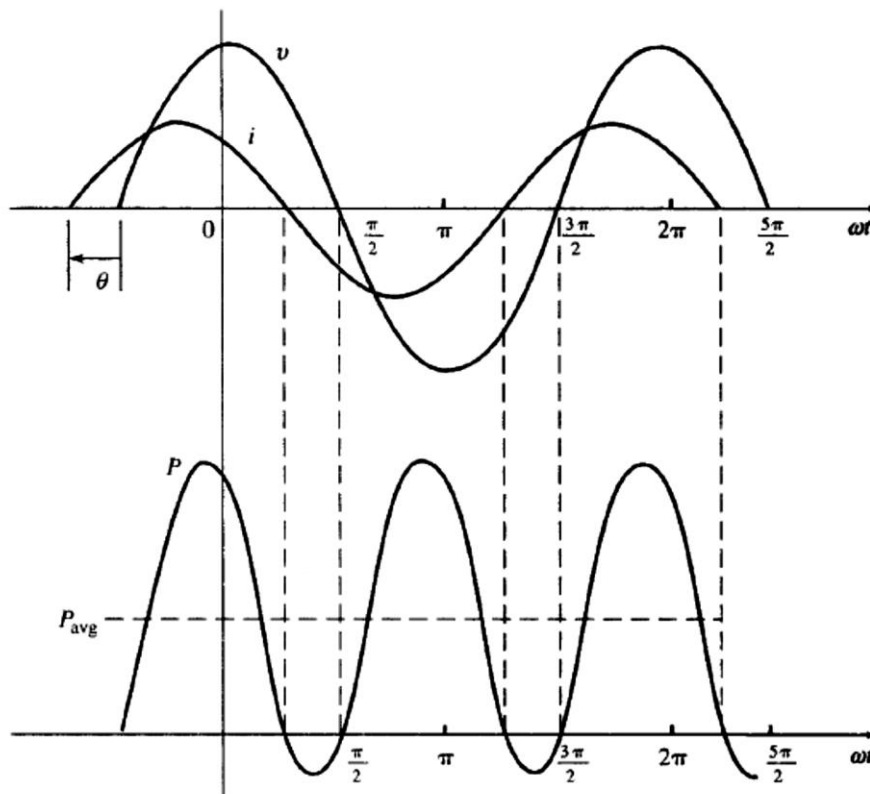
5.2. Ισχύς στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση (ΗΜΚ)

Έστω μία ημιτονοειδής τάση $v = V_m \cos \omega t$ η οποία εφαρμόζεται κατά μήκος μίας σύνθετης αντίστασης $Z = |Z| \angle \theta$ (όπου V_m είναι το μέτρο της τάσης). Το ρεύμα που διαρρέει τη σύνθετη αντίσταση είναι $i = I_m \cos(\omega t - \theta)$ (όπου I_m είναι το μέτρο του ρεύματος). Η ισχύς που παρέχεται στην σύνθετη αντίσταση σε χρόνο t είναι:

$$\begin{aligned}
 p &= v \cdot i = V_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t - \theta) = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta)] = \\
 &= V_\varepsilon I_\varepsilon [\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta)] = V_\varepsilon I_\varepsilon \cos \theta + V_\varepsilon I_\varepsilon \cos(2\omega t - \theta)
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Όπου $V_\varepsilon = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$, $I_\varepsilon = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ είναι οι ενδεικνύμενες ή ενεργές τιμές (effective value) της τάσης και του ρεύματος αντίστοιχα. Επίσης ισχύει και $I_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{|Z|}$.

Η ισχύς στην εξίσωση (5.2) αποτελείται από ένα ημιτονοειδές μέρος $V_\varepsilon I_\varepsilon \cos(2\omega t - \theta)$ και ένα σταθερό μέρος $V_\varepsilon I_\varepsilon \cos \theta$. Το σταθερό μέρος αντιστοιχεί στη μέση ισχύ P_{avg} . Αυτό φαίνεται στο σχήμα 5.7. Για ένα διάστημα της περιόδου, η στιγμιαία ισχύς είναι θετική, γεγονός που σημαίνει ότι η ισχύς ρέει προς το φορτίο. Κατά τη διάρκεια της υπόλοιπης περιόδου, η στιγμιαία ισχύς είναι αρνητική γεγονός που σημαίνει ότι η ισχύς ρέει από το φορτίο. Η καθαρή ροή όμως κατά τη διάρκεια μίας περιόδου είναι θετική και ονομάζεται μέση ισχύς P_{avg} .



Σχήμα 5.7: Διάγραμμα τάσης, ρεύματος και ισχύος στην ΗΜΚ

Παράδειγμα 5.3

Η τάση στα άκρα μίας σύνθετης αντίστασης $Z = 5 \angle -60^\circ \Omega$ είναι $v = 140 \cos \omega t$. Να βρεθεί η ισχύς $p(t)$.

Απάντηση:

Το ρεύμα θα είναι:

$$i = 28 \cos(\omega t + 60^\circ)$$

Τότε:

$$p(t) = v \cdot i = 140 \cdot 28 \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + 60^\circ) = 980 + 1960 \cos(2\omega t + 60^\circ)$$

Η στιγμιαία ισχύς έχει ένα σταθερό μέρος 980W και ένα ημιτονοειδές μέρος με συχνότητα διπλάσια από τη συχνότητα της πηγής. Η γραφική παράσταση της ισχύος p ως συνάρτηση του χρόνου t είναι παρόμοια με τη γραφική παράσταση του σχήματος 5.7 με $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

5.3. Πραγματική Ισχύς P

Η καθαρή ή μέση ισχύς P_{avg} που εισέρχεται σε ένα φορτίο κατά τη διάρκεια μίας περιόδου ονομάζεται πραγματική ισχύς. Η πραγματική ισχύς συμβολίζεται για συντομία με P .

Εφόσον η μέση τιμή του όρου $\cos(2\omega t - \theta)$ είναι μηδέν κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, τότε από την εξίσωση (5.2) προκύπτει:

$$P = V_\varepsilon I_\varepsilon \cos \theta \quad (5.3)$$

Αν $Z = R + jX = |Z| \angle \theta$ τότε $\cos \theta = \frac{R}{|Z|}$ και η πραγματική ισχύς γράφεται ως:

$$P = V_\varepsilon I_\varepsilon \frac{R}{|Z|} \quad (5.4)$$

ή

$$P = \frac{V_\varepsilon^2}{|Z|^2} R \quad (5.5)$$

ή

$$P = R I_\varepsilon^2 \quad (5.6)$$

Η πραγματική ισχύς είναι θετική. Εξαρτάται από την τάση V , το ρεύμα I και τη γωνία φάσης μεταξύ τους. Όταν οι τιμές ενδεικνυόμενης τάσης V_ε και ενδεικνυόμενου ρεύματος I_ε είναι δεδομένες, η πραγματική ισχύς P είναι μέγιστη για $\theta = 0$. Αυτό συμβαίνει όταν το φορτίο είναι καθαρά ωμικό. Για ένα καθαρά επαγωγικό φορτίο, ισχύει $\theta = 90^\circ$ και $P = 0$, ενώ για ένα καθαρά χωρητικό φορτίο ισχύει $\theta = -90^\circ$ και $P = 0$.

Ο λόγος της πραγματικής ισχύος P ως προς το γινόμενο $V_{\varepsilon}I_{\varepsilon}$ ονομάζεται συντελεστής ισχύος (ΣI) (power factor (pf)). Από την εξίσωση (5.3) προκύπτει ότι ο συντελεστής ισχύος ισούται με το $\cos \theta$ οπότε:

$$\Sigma I = \frac{P}{V_{\varepsilon}I_{\varepsilon}}, \quad 0 \leq \Sigma I \leq 1 \quad (5.7)$$

Παράδειγμα 5.4

Να βρεθεί η πραγματική ισχύς αν η ενδεικνύμενη τάση στα άκρα μίας σύνθετης αντίστασης $\overset{\circ}{Z} = 10 + j8$ είναι $V_{\varepsilon} = 110V$. Να βρεθεί ο συντελεστής ισχύος.

Απάντηση:

$$\overset{\circ}{Z} = 10 + j8 = 12.81 \angle 38.7^{\circ} \Omega$$

$$I_{\varepsilon} = \frac{V_{\varepsilon}}{\overset{\circ}{Z}} = \frac{110}{12.81 \angle 38.7^{\circ}} = 8.59 \angle -38.7^{\circ} A$$

$$P = V_{\varepsilon}I_{\varepsilon} \cos \theta = 110(8.59 \angle -38.7^{\circ}) = 737.43W$$

$$\Sigma I = \cos 38.7^{\circ} = 0.78$$

Εναλλακτική λύση:

Ισχύει $|Z|^2 = 100 + 64 = 164$. Τότε:

$$P = \frac{V_{\varepsilon}^2 R}{|Z|^2} = \frac{110^2 \cdot 10}{164} = 737.8W$$

Η εναλλακτική λύση δίνει πιο ακριβή λύση.

5.4. Άεργος Ισχύς Q

Αν ένα κύκλωμα έχει πηνία, πυκνωτές ή και τα δύο, τότε ένα ποσοστό της ισχύος κατά τη διάρκεια μιας περιόδου αποθηκεύεται και επιστρέφει στην πηγή. Η ισχύς που επιστρέφει στην πηγή είναι αρνητική. Η ισχύς αυτή ονομάζεται άεργος ισχύς και συμβολίζεται με Q . Παρά το γεγονός ότι το καθαρό αποτέλεσμα της άεργου ισχύος είναι μηδέν, η παρουσία της υποβαθμίζει τη λειτουργία των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας. Η άεργος ισχύς προκύπτει από τον τύπο:

$$Q = V_{\varepsilon} I_{\varepsilon} \sin \theta \quad (5.8)$$

Αν $Z = R + jX = |Z| \angle \theta$ τότε $\sin \theta = \frac{X}{|Z|}$ και η πραγματική ισχύς Q γράφεται ως:

$$Q = V_{\varepsilon} I_{\varepsilon} \frac{X}{|Z|} \quad (5.9)$$

ή

$$Q = \frac{V_{\varepsilon}^2}{|Z|^2} X \quad (5.10)$$

ή

$$Q = X I_{\varepsilon}^2 \quad (5.11)$$

Η μονάδα μέτρησης της άεργου ισχύος είναι το VAR (volt-amperes reactive).

Η άεργος ισχύς εξαρτάται από την τάση V , το ρεύμα I και τη γωνία φάσης μεταξύ τους. Η άεργος ισχύς είναι μηδέν όταν το φορτίο είναι καθαρά ωμικό. Αυτό συμβαίνει επειδή όταν το φορτίο είναι ωμικό η τάση V και το ρεύμα I είναι συμφασικά και ισχύει $\theta = 0$. Ενώ η πραγματική ισχύς P είναι πάντα θετική, η άεργος ισχύς Q είναι δυνατό να πάρει θετική ή αρνητική τιμή. Για ένα καθαρά επαγωγικό φορτίο (όπου η τάση προηγείται του ρεύματος - μεταπορεία), ισχύει $\theta = 90^\circ$ και $Q > 0$, ενώ για ένα καθαρά χωρητικό φορτίο (όπου το ρεύμα προηγείται της τάσης - προπορεία), ισχύει $\theta = -90^\circ$ και $Q < 0$.

Συνήθως το είδος του φορτίου καθορίζει το πρόσημο της άεργου ισχύος. Για παράδειγμα για ένα επαγωγικό φορτίο των 100kVAR ισχύει ότι η άεργος ισχύς είναι ίση με $Q = 100kVAR$ ενώ για ένα χωρητικό φορτίο των 100kVAR ισχύει ότι η άεργος ισχύς είναι ίση με $Q = -100kVAR$.

Παράδειγμα 5.5

Η τάση και το ρεύμα σε ένα φορτίο είναι $V_{\varepsilon} = 110V$ και $I_{\varepsilon} = 10 \angle -50^\circ A$. Να βρεθεί η πραγματική και η άεργος ισχύς. Να προσδιοριστεί επίσης η συμπεριφορά του κυκλώματος.

Απάντηση:

$$P = 110 \cdot 20 \cos 50^\circ = 1414W$$

$$Q = 110 \cdot 20 \sin 50^\circ = 1685VAR$$

Η συμπεριφορά του κυκλώματος είναι επαγωγική.

5.5. Συγκεντρωτική παρουσίαση της εναλλασσόμενης ισχύος για φορτία R, L, C

Η εναλλασσόμενη ισχύς για ωμική αντίσταση, πηνίο και πυκνωτή παρουσιάζεται συγκεντρωτικά στον πίνακα 5.1. Στην τελευταία στήλη του πίνακα παρουσιάζεται η φαινόμενη ισχύς η οποία συμβολίζεται με S και υπολογίζεται από τη σχέση $S = V \cdot I$. Η φαινόμενη ισχύς εξετάζεται λεπτομερώς στην ενότητα 5.7. Επιπλέον με $\overset{\circ}{V}_\varepsilon$ και $\overset{\circ}{I}_\varepsilon$ συμβολίζονται τα phasor (μγαδική αναπαράσταση) της ενδεικνύμενης τιμής της τάσης και της ενδεικνύμενης τιμής του ρεύματος. Στον πίνακα 5.1 ισχύουν οι γενικές σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 v &= (V\sqrt{2})\cos \omega t \\
 i &= (I\sqrt{2})\cos(\omega t - \theta) \\
 \overset{\circ}{V}_\varepsilon &= V\angle 0^\circ \\
 \overset{\circ}{I}_\varepsilon &= I\angle -\theta^\circ \\
 P &= V \cdot I \cos \theta \\
 Q &= V \cdot I \sin \theta \\
 S &= V \cdot I
 \end{aligned}$$

	$\overset{\circ}{Z}$	i	$\overset{\circ}{I}_\varepsilon$	$p(t)$	P	Q	S
R	R	$\frac{V\sqrt{2}}{R}\cos \omega t$	$\frac{V}{R}\angle 0^\circ$	$\frac{V^2}{R}(1 + \cos 2\omega t)$	$\frac{V^2}{R}$	0	$\frac{V^2}{R}$
L	$j\omega L$	$\frac{V\sqrt{2}}{\omega L}\cos(\omega t - 90^\circ)$	$\frac{V}{\omega L}\angle -90^\circ$	$\frac{V^2}{\omega L}\sin 2\omega t$	0	$\frac{V^2}{\omega L}$	$\frac{V^2}{\omega L}$
C	$\frac{-j}{\omega C}$	$V\sqrt{2}\omega C\cos(\omega t + 90^\circ)$	$V\omega C\angle 90^\circ$	$-V^2\omega C\sin 2\omega t$	0	$-V^2\omega C$	$V^2\omega C$

Πίνακας 5.1: Συγκεντρωτικός πίνακας εναλλασσόμενης ισχύος για τα φορτία R, L, C

Παράδειγμα 5.6

Να βρεθεί η ισχύς που μεταφέρεται από μία ημιτονοειδή πηγή σε μία αντίσταση R . Οι ενδεικνύμενες τιμές για την τάση και το ρεύμα είναι V και I αντίστοιχα.

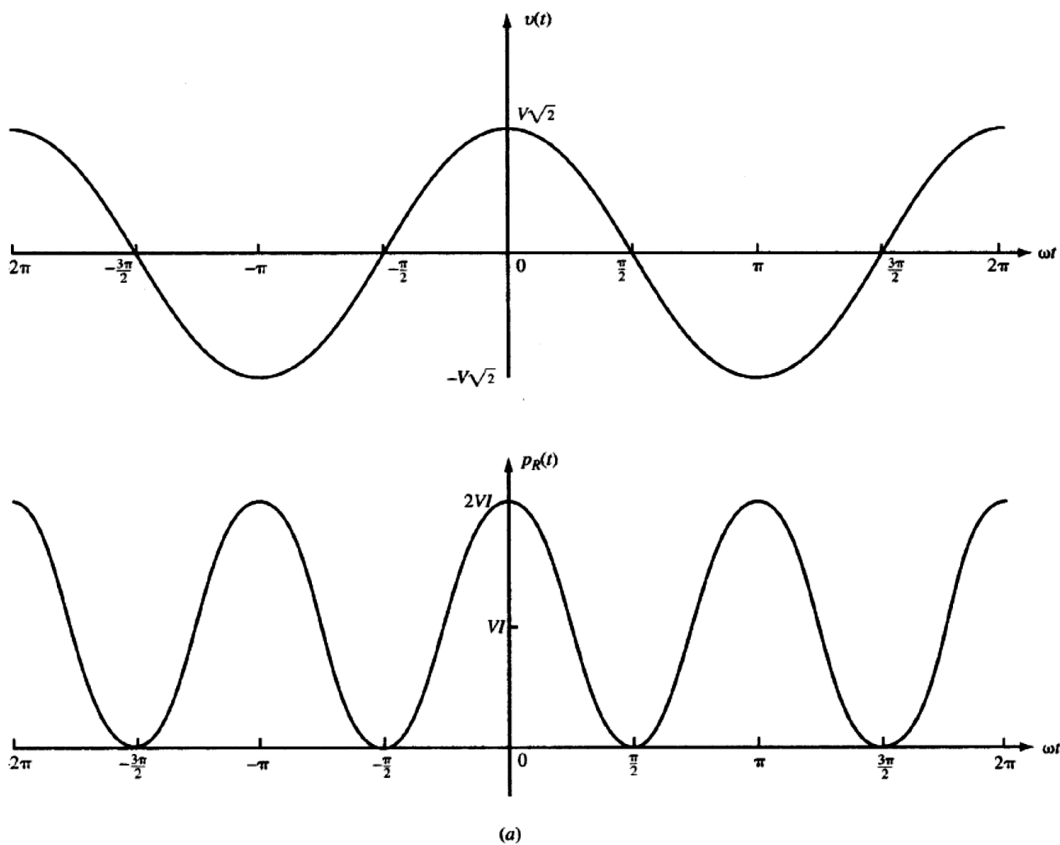
Απάντηση:

$$p_R(t) = v \cdot i_R = (V\sqrt{2}) \cos \omega t \cdot (I\sqrt{2}) \cos \omega t = 2V \cdot I \cos^2 \omega t = V \cdot I (1 + \cos 2\omega t) = \\ = RI^2 (1 + \cos 2\omega t) = \frac{V^2}{R} (1 + \cos 2\omega t)$$

Επομένως:

$$P_R = \frac{V^2}{R} = RI^2 \quad \text{και} \quad Q_R = 0$$

Η στιγμιαία ισχύς που εισέρχεται σε έναν ωμικό αντιστάτη είναι μία ημιτονοειδής συνάρτηση που κυμαίνεται από μηδέν μέχρι $2RI^2$, με διπλάσια συχνότητα από τη διέγερση και με μέση τιμή $P = RI^2$. Οι συναρτήσεις $v(t)$ και $p_R(t)$ έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα 5.8.



Σχήμα 5.8: Συναρτήσεις $v(t)$ και $p_R(t)$ παραδείγματος 5.6

Παράδειγμα 5.7

Να βρεθεί η ισχύς που μεταφέρεται από μία ημιτονοειδή πηγή σε ένα πηνίο με αυτεπαγωγή L .

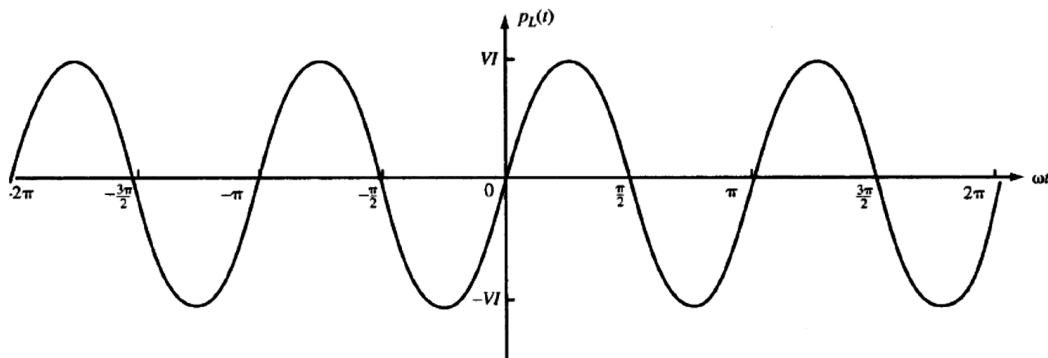
Απάντηση:

$$p_L(t) = v \cdot i_L = (V\sqrt{2}) \cos \omega t \cdot (I\sqrt{2}) \cos(\omega t - 90^\circ) = 2V \cdot I \cos \omega t \sin \omega t = V \cdot I \sin 2\omega t = \\ = L\omega I^2 \sin 2\omega t = \frac{V^2}{\omega L} \sin 2\omega t$$

Επομένως:

$$P_L = 0 \quad \text{και} \quad Q_L = V \cdot I = \frac{V^2}{\omega L} = \omega L I^2$$

Η στιγμιαία ισχύς που εισέρχεται σε ένα πηνίο είναι μία ημιτονοειδής συνάρτηση που κυμαίνεται από $-Q$ μέχρι Q , με διπλάσια συχνότητα από την πηγή και με μέση τιμή ίση με μηδέν. Η συνάρτηση $p_L(t)$ έχει σχεδιαστεί στο σχήμα 5.9.



Σχήμα 5.9: Συνάρτηση $p_L(t)$ παραδείγματος 5.7

Παράδειγμα 5.8

Να βρεθεί η ισχύς που μεταφέρεται από μία ημιτονοειδή πηγή σε έναν πυκνωτή με χωρητικότητα C .

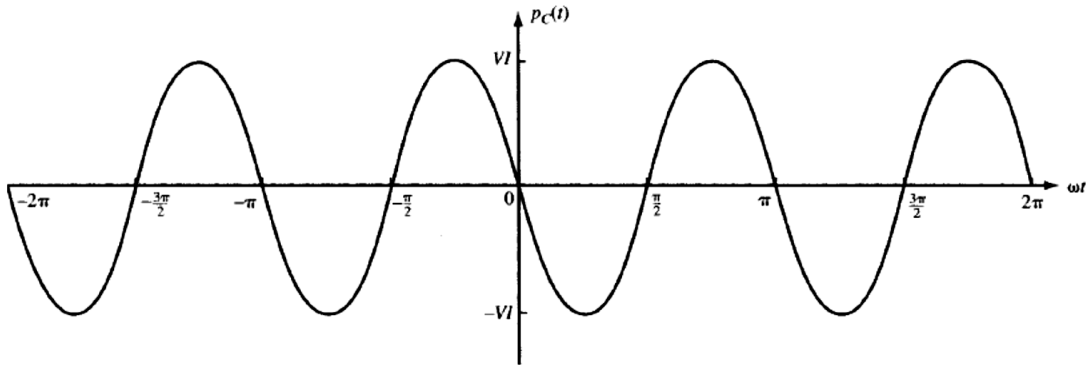
Απάντηση:

$$p_C(t) = v \cdot i_C = (V\sqrt{2}) \cos \omega t \cdot (I\sqrt{2}) \cos(\omega t + 90^\circ) = -2V \cdot I \cos \omega t \sin \omega t = -V \cdot I \sin 2\omega t = \\ = -\omega C V^2 \sin 2\omega t = -\frac{I^2}{\omega C} \sin 2\omega t$$

Επομένως:

$$P_C = 0 \quad \text{και} \quad Q_C = -V \cdot I = -\frac{I^2}{\omega C} = -\omega C V^2$$

Η στιγμιαία ισχύς που εισέρχεται σε έναν πυκνωτή είναι μία ημιτονοειδής συνάρτηση που κυμαίνεται από $-Q$ μέχρι Q , με διπλάσια συχνότητα από την πηγή και με μέση τιμή ίση με μηδέν. Η συνάρτηση $p_C(t)$ έχει σχεδιαστεί στο σχήμα 5.10.



Σχήμα 5.10: Συνάρτηση $p_C(t)$ παραδείγματος 5.8

5.6. Ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ πηνίου - πυκνωτή

Εάν ένα πηνίο και ένας πυκνωτής τροφοδοτούνται παράλληλα από την ίδια πηγή τάσης AC ή σε σειρά από την ίδια πηγή ρεύματος, η ισχύς που εισέρχεται στον πυκνωτή είναι 180° εκτός φάσεως σε σχέση με την ισχύ που εισέρχεται στο πηνίο. Αυτό φαίνεται και από τα αντίθετα πρόσημα της άεργου ισχύος του πηνίου και του πυκνωτή. Στην περίπτωση αυτή το πηνίο και ο πυκνωτής ανταλλάζουν ενέργεια παρακάμπτοντας την ac πηγή. Με αυτό τον τρόπο (συνδυασμός LC) ελαττώνεται η άεργος ισχύς και τελικά βελτιώνεται ο συντελεστής ισχύος. Η περίπτωση αυτή θα αναλυθεί στις ενότητες 5.8 και 5.9.

Παράδειγμα 5.9

Σε ένα κύκλωμα είναι συνδεδεμένα παράλληλα μία αντίσταση, ένα πηνίο και ένας πυκνωτής και η τάση είναι ίση με $v = (V\sqrt{2})\cos\omega t$. Να βρεθεί η ολική στιγμιαία ισχύς $p(t)$, η πραγματική ισχύς P και η άεργος ισχύς Q .

Απάντηση:

Η ολική στιγμιαία ισχύς είναι:

$$p_{ολ} = v \cdot i = v \cdot (i_R + i_L + i_C) = p_R + p_L + p_C$$

Αν προστεθούν με υπέρθεση οι τιμές της στιγμιαίας ισχύος p_R, p_L, p_C που υπολογίστηκαν στα παραδείγματα 5.6, 5.7 και 5.8 αντίστοιχα, προκύπτει:

$$p_{ολ} = \frac{V^2}{R}(1 + \cos 2\omega t) + V^2\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\sin 2\omega t$$

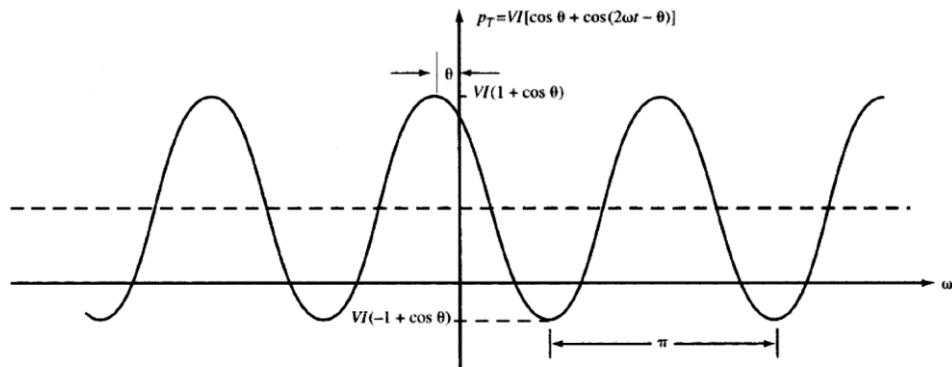
Η πραγματική ισχύς είναι:

$$P_{ολ} = P_R = \frac{V^2}{R}$$

Η άεργος ισχύς είναι:

$$Q_{ολ} = Q_L + Q_C = V^2 \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \quad (5.12)$$

Αν $\frac{1}{\omega L} - \omega C = 0$ τότε η ολική άεργος ισχύς είναι μηδέν. Η συνάρτηση $p_{ολ}(t)$ για ένα φορτίο με συντελεστή ισχύος προπορείας έχει σχεδιαστεί στο σχήμα 5.11.

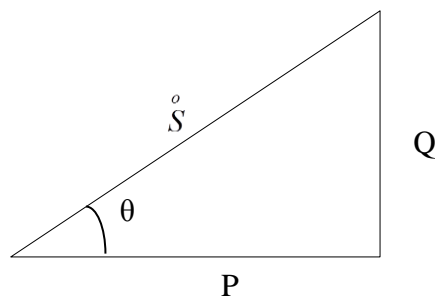


Σχήμα 5.11: Συνάρτηση $p_{ολ}(t)$ παραδείγματος 5.9

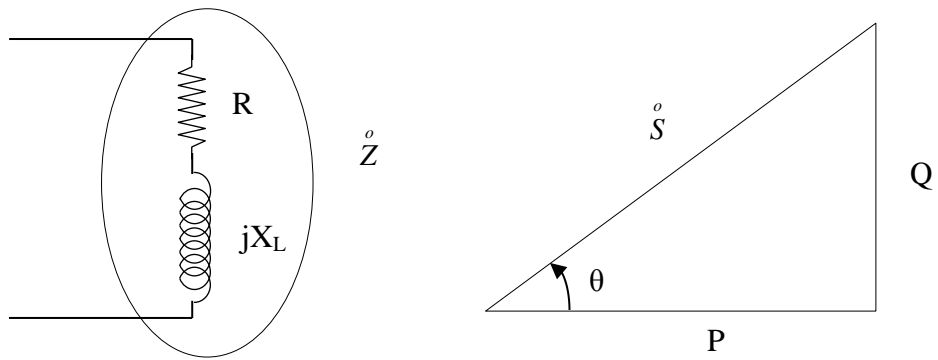
5.7. Φαινόμενη/Μιγαδική Ισχύς – Τρίγωνο ισχύος

Η πραγματική και η άεργος ισχύς αντιπροσωπεύουν διαφορετικά μεγέθη και δεν είναι δυνατό να προστεθούν μεταξύ τους. Ωστόσο προστίθενται σε μορφή μιγαδικού αριθμού που ονομάζεται μιγαδική ισχύς, δηλαδή ισχύει $\overset{\circ}{S} = P + jQ$. Το μέτρο της μιγαδικής ισχύος $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = V_e I_e$ ονομάζεται φαινόμενη ισχύς. Η μονάδα μέτρησης της φαινόμενης ισχύς είναι το VA (volt-amperes).

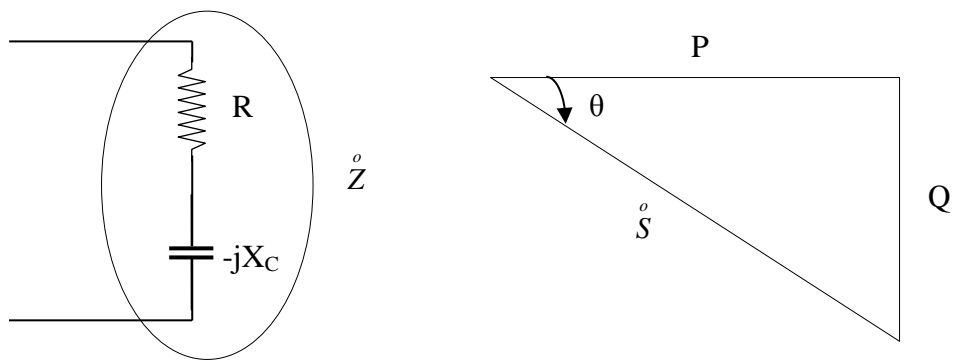
Η πραγματική P , η άεργος Q και η μιγαδική ισχύς $\overset{\circ}{S}$ παριστάνονται γεωμετρικά ως οι τρεις πλευρές ενός τριγώνου (που ονομάζεται τρίγωνο ισχύος) και φαίνεται στο σχήμα 5.12. Τα τρίγωνα ισχύος για ένα επαγωγικό και ένα χωρητικό φορτίο φαίνονται στα σχήματα 5.13 και 5.14 αντίστοιχα. Στο επαγωγικό φορτίο η άεργος ισχύς είναι θετική ενώ στο χωρητικό φορτίο η άεργος ισχύς είναι αρνητική όπως φαίνεται και στα τρίγωνα ισχύος στα σχήματα 5.13 και 5.14 αντίστοιχα.



Σχήμα 5.12: Τρίγωνο ισχύος



Σχήμα 5.13: Τρίγωνο ισχύος για επαγωγικό φορτίο



Σχήμα 5.14: Τρίγωνο ισχύος για χωρητικό φορτίο

Προκύπτει ότι $\overset{\circ}{S} = \overset{\circ}{V}_\varepsilon \overset{\circ}{I}_\varepsilon^*$ όπου $\overset{\circ}{V}_\varepsilon$ είναι ο μιγαδικός αριθμός (phasor) της ενδεικνύμενης τιμής της τάσης και $\overset{\circ}{I}_\varepsilon^*$ είναι ο συζυγής μιγαδικός αριθμός (phasor) της ενδεικνύμενης τιμής του ρεύματος. Ένας ισοδύναμος τύπος είναι ο $\overset{\circ}{S} = I_\varepsilon^2 \overset{\circ}{Z}$. Συνοψίζοντας:

$$\text{Μιγαδική ισχύς: } \overset{\circ}{S} = \overset{\circ}{V}_\varepsilon \overset{\circ}{I}_\varepsilon^* = P + jQ = I_\varepsilon^2 \overset{\circ}{Z} \quad (5.13)$$

$$\text{Πραγματική ισχύς: } P = \text{Re}[\overset{\circ}{S}] = V_\varepsilon I_\varepsilon \cos \theta \quad (5.14)$$

$$\text{Άεργος ισχύς: } Q = \text{Im}[\overset{\circ}{S}] = V_\varepsilon I_\varepsilon \sin \theta \quad (5.15)$$

$$\text{Φαινόμενη ισχύς: } S = \left| \overset{\circ}{S} \right| = V_\varepsilon I_\varepsilon \quad (5.16)$$

Παράδειγμα 5.10

α) Σε ένα κύκλωμα όπως αυτό του σχήματος 5.15, για την ημιτονοειδή τάση στα άκρα της σύνθετης αντίστασης $\overset{\circ}{Z}_1 = 1 + j$, ισχύει ότι $V_\varepsilon = 10V$. Να βρεθούν τα εξής:

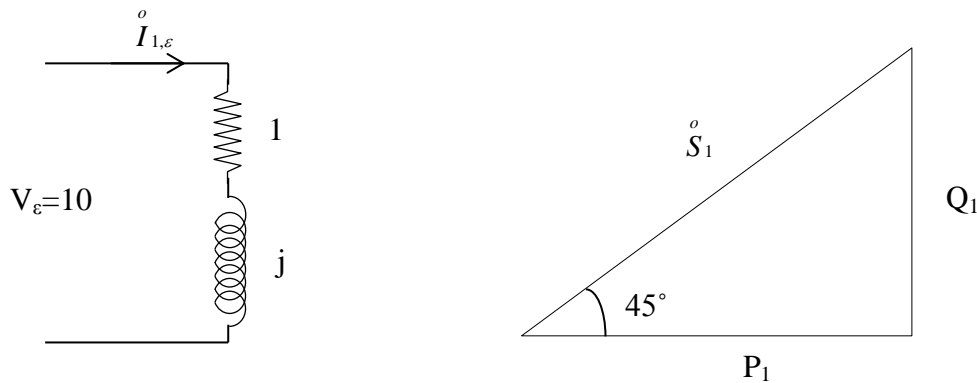
i_1 , $\overset{\circ}{I}_{1,\varepsilon}$, $p_1(t)$, P_1 , Q_1 , ο συντελεστής ισχύος ΣI_1 και η $\overset{\circ}{S}_1$.

β) Να επαναληφθεί το ερώτημα α για το κύκλωμα του σχήματος 5.16 και για σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z}_2 = 1 - j$.

γ) Να επαναληφθεί το ερώτημα α για το κύκλωμα του σχήματος 5.17 όπου έχουν συνδεθεί παράλληλα οι αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z}_1$ και $\overset{\circ}{Z}_2$ από τα ερωτήματα α και β αντίστοιχα.

Ισχύει επίσης ότι: $v = 10\sqrt{2} \cos \omega t$.

Απάντηση:



Σχήμα 5.15: Κύκλωμα παραδείγματος 5.10 (ερώτημα α)

$$\alpha) \overset{\circ}{Z}_1 = 1 + j = \sqrt{2} \angle 45^\circ$$

$$i_1 = 10 \cos(\omega t - 45^\circ)$$

$$\overset{\circ}{I}_{1,\varepsilon} = 5\sqrt{2} \angle -45^\circ$$

$$p_1(t) = (100\sqrt{2}) \cos \omega t \cos(\omega t - 45^\circ) = 50 + (50\sqrt{2}) \cos(\omega t - 45^\circ) W$$

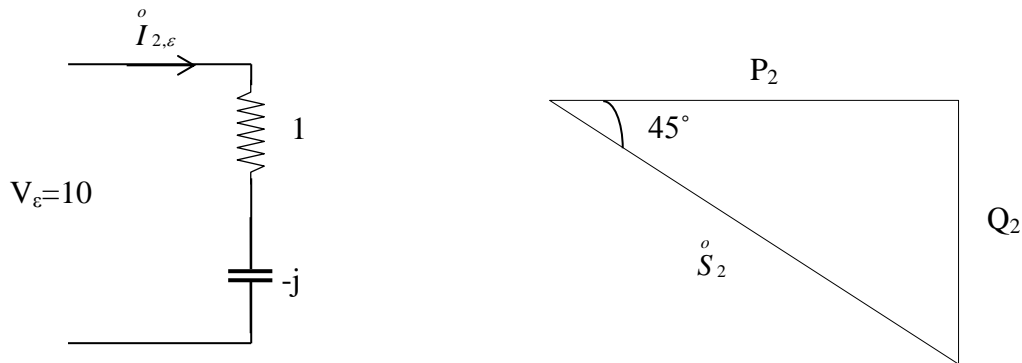
$$P_1 = V_\varepsilon I_{1,\varepsilon} \cos 45^\circ = 50 W$$

$$Q_1 = V_\varepsilon I_{1,\varepsilon} \sin 45^\circ = 50 VAR$$

$$\overset{\circ}{S}_1 = P_1 + jQ_1 = 50 + j50$$

$$S_1 = \left| \overset{\circ}{S}_1 \right| = 50\sqrt{2} = 70.7VA$$

$\Sigma I_1=0.707$ (μεταπορείας)



Σχήμα 5.16: Κύκλωμα παραδείγματος 5.10 (ερώτημα β)

$$\beta) \overset{\circ}{Z}_2 = 1 - j = \sqrt{2} \angle -45^\circ$$

$$i_2 = 10 \cos(\omega t + 45^\circ)$$

$$\overset{\circ}{I}_{2,\varepsilon} = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ$$

$$p_2(t) = (100\sqrt{2}) \cos \omega t \cos(\omega t + 45^\circ) = 50 + (50\sqrt{2}) \cos(\omega t + 45^\circ)W$$

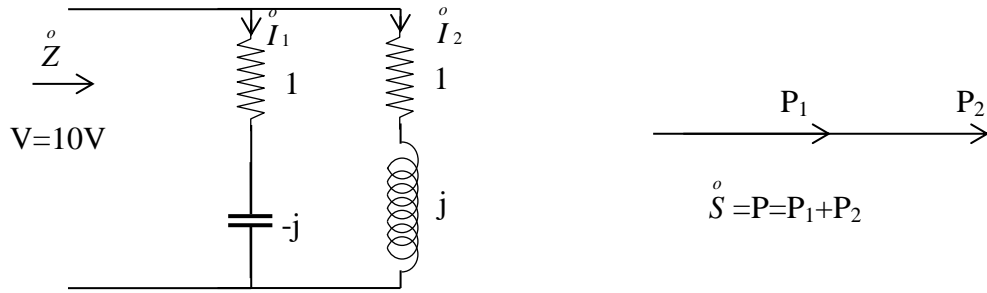
$$P_2 = V_\varepsilon I_{2,\varepsilon} \cos 45^\circ = 50W$$

$$Q_2 = -V_\varepsilon I_{2,\varepsilon} \sin 45^\circ = -50VAR$$

$$\overset{\circ}{S}_2 = P_2 + jQ_2 = 50 - j50$$

$$S_2 = \left| \overset{\circ}{S}_2 \right| = 50\sqrt{2} = 70.7VA$$

$\Sigma I_2=0.707$ (προπορείας)



Σχήμα 5.17: Κύκλωμα παραδείγματος 5.10 (ερώτημα γ)

$$\gamma) \ \overset{\circ}{Z} = \overset{\circ}{Z}_1 \parallel \overset{\circ}{Z}_2 = \frac{(1+j)(1-j)}{(1+j)+(1-j)} = 1$$

$$i = 10\sqrt{2} \cos \omega t$$

$$I_{\varepsilon} = 10$$

$$p(t) = 200 \cos^2 \omega t = 100 + 100 \cos 2\omega t W$$

$$P = V_{\varepsilon} I_{\varepsilon} = 100W$$

$$Q = 0$$

$$\overset{\circ}{S} = P = 100$$

$$S = 100VA$$

$$\Sigma I = 1$$

Τα αποτελέσματα για το ερώτημα γ μπορούν επίσης να προκύψουν από την παρατήρηση ότι από την παραλληλία των σύνθετων αντιστάσεων ισχύει για τα ρεύματα η σχέση $i = i_1 + i_2$. Επομένως:

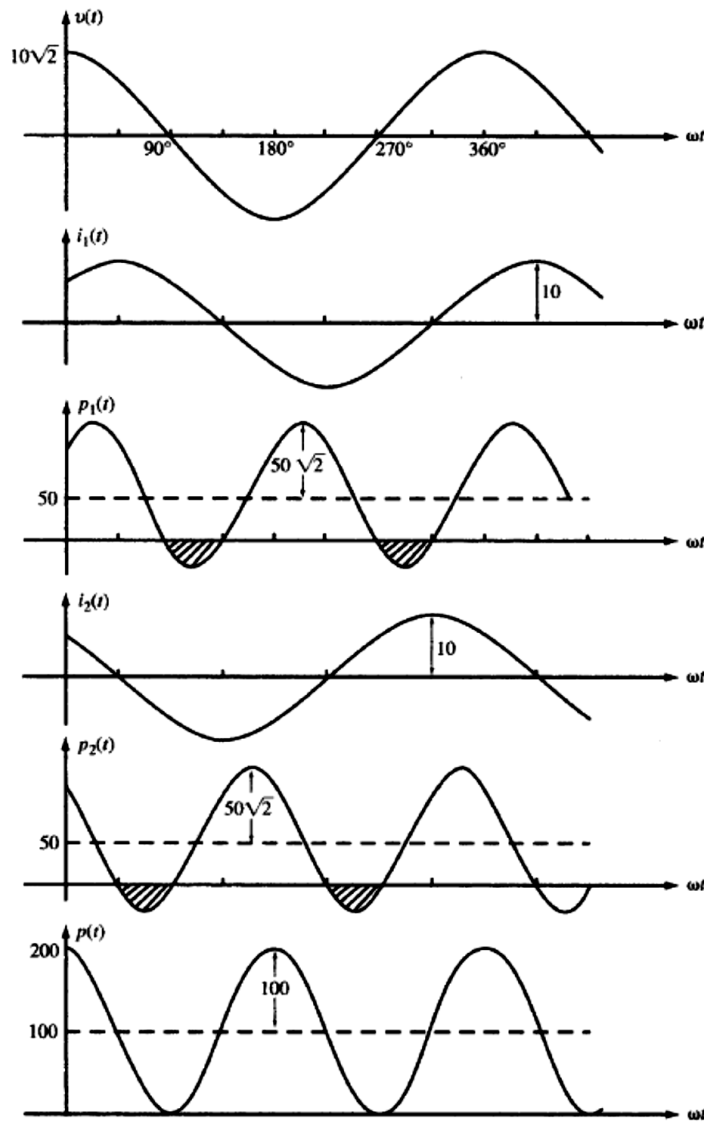
$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = [50 + (50\sqrt{2}) \cos(2\omega t - 45^\circ)] + [50 + (50\sqrt{2}) \cos(2\omega t + 45^\circ)] = 100 + 100 \cos 2\omega t W$$

$$P = P_1 + P_2 = 50 + 50 = 100W$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 50 - 50 = 0$$

$$S = 100 < S_1 + S_2$$

Στα σχήματα 5.15, 5.16 και 5.17 παριστάνονται επίσης και τα τρίγωνα ισχύος. Στο σχήμα 5.18 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των μεγεθών v, i, p και τα τρία είδη φορτίων των ερωτημάτων α,β και γ.



Σχήμα 5.18: Γραφικές παραστάσεις μεγεθών v, i, p για τα τρία είδη φορτίων του παραδείγματος 5.10 (ερωτήματα α,β,γ)

Παράδειγμα 5.11

Ένα κύκλωμα έχει ισοδύναμη αντίσταση $\overset{\circ}{Z} = 3 + j4\Omega$ και η εφαρμοζόμενη τάση είναι ίση με $v = 42.5\cos(1000t + 30^\circ)$ (V). Να υπολογιστεί κάθε είδος ισχύος και ο συντελεστής ισχύος.

Απάντηση:

$$\overset{\circ}{V}_\varepsilon = \frac{42.5}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ \text{V}$$

$$\overset{\circ}{I}_\varepsilon = \frac{\overset{\circ}{V}_\varepsilon}{\overset{\circ}{Z}} = \frac{\frac{42.5}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ \text{V}}{5 \angle 53.13^\circ} = \frac{8.5}{\sqrt{2}} \angle -23.13^\circ \text{A}$$

$$\overset{\circ}{S} = \overset{\circ}{V}_\varepsilon \overset{\circ}{I}_\varepsilon^* = 180.6 \angle 53.13^\circ = 108.4 + j144.5$$

Επομένως $P = 108.4 \text{W}$, $Q = 144.5 \text{VAR}$, $S = 180.6 \text{VA}$ και $\Sigma I = \cos 53.13^\circ = 0.6$ (μεταπορείας).

5.8. Δίκτυα συνδεδεμένα παράλληλα

Η μιγαδική ισχύς $\overset{\circ}{S}$ είναι επίσης χρήσιμη για την ανάλυση κυκλωμάτων, όπως για παράδειγμα το κύκλωμα που αποτελείται από τους διάφορους καταναλωτές που συνδέονται στην ίδια γραμμή του δικτύου παροχής ηλεκτρικής ενέργειας. Συγκεκριμένα για το κύκλωμα του σχήματος 5.19 ισχύουν τα εξής:

$$\overset{\circ}{S}_{o\lambda} = \overset{\circ}{V}_\varepsilon \overset{\circ}{I}_\varepsilon^* = \overset{\circ}{V}_\varepsilon (I_{1,\varepsilon}^* + I_{2,\varepsilon}^* + \dots + I_{n,\varepsilon}^*) = \overset{\circ}{S}_1 + \overset{\circ}{S}_2 + \dots + \overset{\circ}{S}_n$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν:

$$P_{o\lambda} = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

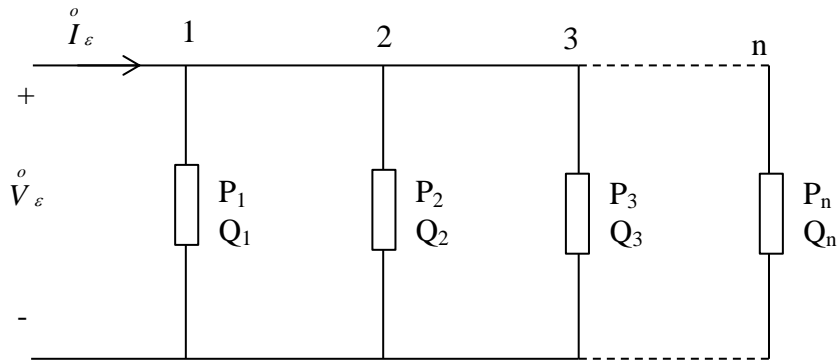
$$Q_{o\lambda} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

$$S_{o\lambda} = \sqrt{P_{o\lambda}^2 + Q_{o\lambda}^2}$$

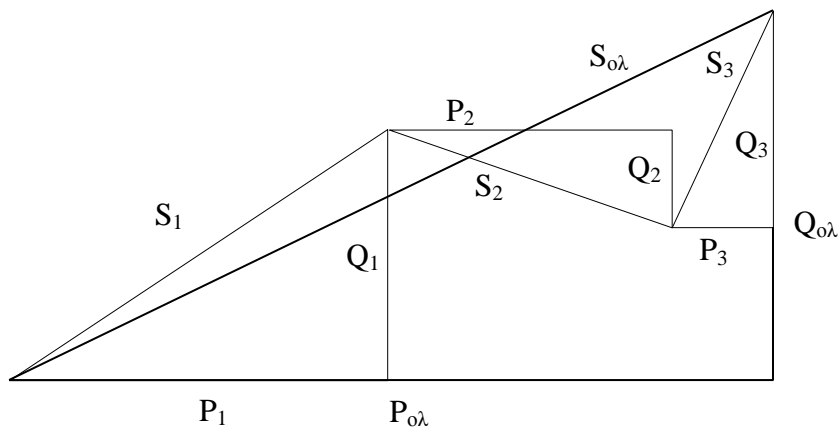
$$\Sigma I_{o\lambda} = \frac{P_{o\lambda}}{Q_{o\lambda}}$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα (που ισχύουν επίσης και για κυκλώματα συνδεδεμένα σε σειρά) προκύπτει ότι το τρίγωνο ισχύος για όλο το δίκτυο κατασκευάζεται ενώνοντας τα τρίγωνα ισχύος για κάθε κλάδο από κορυφή σε κορυφή. Στο σχήμα 5.20 φαίνεται ένα τέτοιο παράδειγμα για ένα κύκλωμα όπως αυτό του σχήματος 5.19 με $n=3$. Ο πρώτος και ο τρίτος κλάδος έχουν επαγωγική συμπεριφορά ενώ ο δεύτερος κλάδος έχει χωρητική συμπεριφορά. Σε τέτοιου είδους διαγράμματα, κάποια τρίγωνα εκφυλίζονται σε γραμμές αν το αντίστοιχο R ή X είναι μηδέν.

Αν η ισχύς του κάθε επιμέρους κλάδου δεν είναι σημαντική, τότε όλο το κύκλωμα αντικαθίσταται από την ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση η οποία χρησιμοποιείται απευθείας για τον υπολογισμό της $S_{ολ}^o$.



Σχήμα 5.19: Δίκτυα συνδεδεμένα παράλληλα



Σχήμα 5.20: Τρίγωνα ισχύος για το κύκλωμα του σχήματος 5.19 με n=3

Παράδειγμα 5.12

Τρία φορτία είναι συνδεδεμένα παράλληλα σε μία γραμμή μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας για την οποία ισχύει $V_\epsilon = 6kV$ (σχήμα 5.19 με n=3). Αν $P_1 = 10kW$, $\Sigma I_1 = 1$, $P_2 = 20kW$, $\Sigma I_2 = 0.5$ μεταφορείας, $P_3 = 15kW$, $\Sigma I_3 = 0.6$ μεταφορείας. Να βρεθούν τα $P_{ολ}$, $Q_{ολ}$, $S_{ολ}$, $\Sigma I_{ολ}$ και το ρεύμα I_ϵ^o .

Απάντηση:

Αρχικά υπολογίζεται η άεργος ισχύς για κάθε κλάδο.

$$\Sigma I_1 = \cos \theta_1 = 1 \quad \tan \theta_1 = 0 \quad Q_1 = P_1 \tan \theta_1 = 0kVAR$$

$$\Sigma I_2 = \cos \theta_2 = 0.5 \quad \tan \theta_2 = 1.73 \quad Q_2 = P_2 \tan \theta_2 = 34.6kVAR$$

$$\Sigma I_3 = \cos \theta_3 = 0.6 \quad \tan \theta_3 = 1.33 \quad Q_3 = P_3 \tan \theta_3 = 20kVAR$$

Τότε τα $P_{ολ}$, $Q_{ολ}$, $S_{ολ}$, $\Sigma I_{ολ}$ και I_{ε}° είναι:

$$P_{ολ} = P_1 + P_2 + P_3 = 10 + 20 + 15 = 45kW$$

$$Q_{ολ} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 + 34.6 + 20 = 54.6kVAR$$

$$S_{ολ} = \sqrt{P_{ολ}^2 + Q_{ολ}^2} = \sqrt{45^2 + 54.6^2} = 70.75kVA$$

$$\Sigma I_{ολ} = \frac{P_{ολ}}{Q_{ολ}} = 0.64 = \cos \theta \Leftrightarrow \theta = 50.5^{\circ} \text{ μεταφορείας}$$

$$I_{\varepsilon} = \frac{S}{V_{\varepsilon}} = \frac{70.75kVA}{6kV} = 11.8A$$

$$I_{\varepsilon}^{\circ} = 11.8 \angle -50.5^{\circ} A$$

Το ρεύμα θα μπορούσε να υπολογιστεί και από τη σχέση $I^{\circ} = I_1^{\circ} + I_2^{\circ} + I_3^{\circ}$. Ωστόσο αυτή η προσέγγιση είναι περισσότερο χρονοβόρα.

5.9. Βελτίωση συντελεστή ισχύος

Η παροχή ηλεκτρικής ενέργειας στους βιομηχανικούς καταναλωτές είναι τριφασική σε αντίθεση με την παροχή σε οικιακούς και μικρότερους εμπορικούς καταναλωτές όπου η παροχή μπορεί να είναι και μονοφασική. Σκοπός των εταιριών παροχής ηλεκτρικής ενέργειας είναι η βελτίωση του συντελεστή ισχύος. Τα βιομηχανικά συστήματα έχουν γενικά μια ολική επαγωγική συνιστώσα, λόγω του μεγάλου αριθμού των κινητήρων στο δίκτυο. Κάθε επιμέρους φορτίο τείνει να είναι είτε καθαρά ωμικό με μοναδιαίο συντελεστή ισχύος, είτε ωμικό - επαγωγικό με συντελεστή ισχύος μεταφορείας. Όλα τα φορτία είναι παράλληλα συνδεδεμένα, και η ισοδύναμη αντίσταση οδηγεί το ρεύμα να καθυστερεί σε σχέση με την τάση και η άεργος ισχύς Q είναι θετική.

Γενικά στην κατανάλωση ισχύος από πολλούς καταναλωτές είναι επιθυμητός ένας συντελεστής ισχύος με μεγάλη τιμή (γενικά όσο μεγαλύτερη τιμή τόσο καλύτερα). Ο λόγος είναι ότι το ρεύμα που απαιτείται για να μεταφέρει ισχύ σε ένα φορτίο είναι αντιστρόφως ανάλογο με το συντελεστή ισχύος του φορτίου όπως προκύπτει και από

$$\text{τη σχέση: } P = V_{\varepsilon} I_{\varepsilon} \cos \theta \Leftrightarrow I_{\varepsilon} = \frac{P}{V_{\varepsilon} \cos \theta} = \frac{P}{V_{\varepsilon} \cdot \Sigma I}$$

Επομένως για δεδομένη ισχύ P που καταναλώνεται και εφαρμοζόμενη τάση V_{ε} , όσο μικρότερος είναι ο συντελεστής ισχύος τόσο μεγαλύτερο είναι το ρεύμα I_{ε} στο

φορτίο. Όμως οι μεγάλες τιμές για το ρεύμα δεν είναι επιθυμητές καθώς υψηλή τιμή του ρεύματος συνεπάγεται μεγάλες θερμικές απώλειες (νόμος του Joule $Q = I^2 R t$).

Πρακτικά οι χαμηλοί συντελεστές ισχύος οφείλονται στα επαγωγικά φορτία επειδή τα περισσότερα φορτία είναι επαγωγικά. Στο τρίγωνο ισχύος αυτό αντικατοπτρίζεται από μεγαλύτερη κάθετη πλευρά που αντιστοιχεί στην άεργο ισχύ, και μεγαλύτερη γωνία θ . Το αποτέλεσμα είναι το $\cos \theta$, ο συντελεστής ισχύος δηλαδή, να έχει μικρή τιμή. Για τη βελτίωση του συντελεστή ισχύος, τοποθετούνται πυκνωτές, κατά μήκος της γραμμής μεταφοράς. Οι πυκνωτές ανταλλάσσουν ρεύμα με τα επαγωγικά φορτία όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη παράγραφο.

Παρόλο που με την προσθήκη πυκνωτών είναι δυνατό ο συντελεστής ισχύος να αποκτήσει τιμή ίση με τη μονάδα, αυτό δεν είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα λόγω μεγάλου κόστους των πυκνωτών. Γι' αυτό το λόγο συνήθως στα προβλήματα ζητείται η ελάχιστη τιμή χωρητικότητας που απαιτείται για τη βελτίωση του συντελεστή ισχύος στην επιθυμητή τιμή.

Παράδειγμα 5.13

Να βρεθεί η άεργος ισχύς Q που πρέπει να διοχετεύσει στο κύκλωμα ο πυκνωτής του σχήματος 5.21 έτσι ώστε να βελτιωθεί ο συντελεστής ισχύος και να γίνει ίσος με 0.95 (μεταφορείας)

Απάντηση:

Πριν την προσθήκη του πυκνωτή, ο συντελεστής ισχύος είναι:

$S I_{\cos} = \cos 25^\circ = 0.906$ (μεταφορείας). Επίσης:

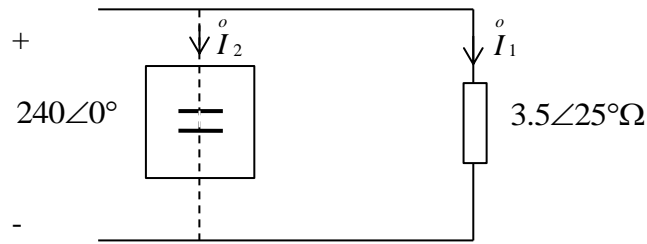
$$I_1 = \frac{240 \angle 0^\circ}{3.5 \angle 25^\circ} = 68.6 \angle -25^\circ \text{ A}$$

$$S = V_\varepsilon I_\varepsilon^* = \left(\frac{240}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ\right) \left(\frac{68.6}{\sqrt{2}} \angle 25^\circ\right) = 8232 \angle 25^\circ = 7461 + j3479$$

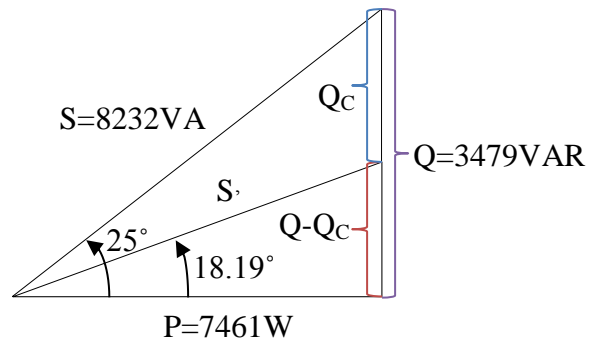
Ύστερα από τη βελτίωση του συντελεστή ισχύος (προσθήκη πυκνωτή) η γωνία φάσης έγινε: $\cos^{-1} 0.95 = 18.19^\circ$. Τότε (όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.22) ισχύουν:

$$\frac{3479 - Q_c}{7461} = \tan 18.19^\circ \Leftrightarrow Q_c = 1027 \text{ VAR}$$

Η νέα τιμή της μιγαδικής ισχύος είναι: $S' = 7854 \text{ VA}$ ενώ η τιμή πριν τη βελτίωση ήταν $S = 8232 \text{ VA}$. Η μείωση αντιστοιχεί στα 378 VA δηλαδή ποσοστό περίπου 4.6%.



Σχήμα 5.21: Κύκλωμα παραδείγματος 5.13



Σχήμα 5.22: Τρίγωνα ισχύος πριν και μετά τη βελτίωση του συντελεστή ισχύος του παραδείγματος 5.13

Παράδειγμα 5.14

Ένα φορτίο με $P = 1000\text{ kW}$ και $\Sigma I = 0.5$ (μεταφορείας) τροφοδοτείται από μία πηγή των 5 kV . Ένα πυκνωτής τοποθετείται παράλληλα και ο συντελεστής ισχύος βελτιώνεται και αποκτά τιμή 0.8 . Να βρεθεί η μείωση που υφίσταται το ρεύμα.

Απάντηση:

Πριν τη βελτίωση:

$$P = 1000\text{ kW}, \cos \theta = 0.5, S = \frac{P}{\cos \theta} = 2000\text{ kVA}, I = 400\text{ A}$$

Μετά τη βελτίωση:

$$P = 1000\text{ kW}, \cos \theta = 0.8, S = \frac{P}{\cos \theta} = 1250\text{ kVA}, I = 250\text{ A}$$

Ως αποτέλεσμα για την ίδια τιμή πραγματικής ισχύος P το ρεύμα μειώνεται κατά:

$$\frac{(400 - 250)}{400} = 0.375 \text{ ή } 37.5\%$$

Η μείωση του ρεύματος συνεπάγεται και μείωση των απωλειών. Γι' αυτό το λόγο στα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας προτιμάται (τόσο από τον πάροχο όσο και από τους καταναλωτές) μία μεγαλύτερη τιμή συντελεστή ισχύος (βελτίωση συντελεστή ισχύος) με σκοπό τη μείωση των απωλειών.

Παράδειγμα 5.15

Στο κύκλωμα του παραδείγματος 5.12 προστίθεται παράλληλα στα τρία φορτία ένα τέταρτο φορτίο Q_4 έτσι ώστε ο ολικός συντελεστής ισχύος γίνεται 0.8 (μεταπορείας) ενώ η ολική ισχύς παραμένει ίδια. Να βρεθεί η Q_4 (με $P_4 = 0$) και η S ενώ να σχολιαστεί και το αποτέλεσμα στο ρεύμα.

Απάντηση:

Στο παράδειγμα 5.12 υπολογίστηκαν η ολική πραγματική ισχύς:

$$P_{ολ} = P_1 + P_2 + P_3 = 10 + 20 + 15 = 45 \text{ kW}$$

και η ολική άεργος ισχύς:

$$Q_{ολ} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 + 34.6 + 20 = 54.6 \text{ kVAR}$$

Από το νέο συντελεστή ισχύος προκύπτει:

$$\Sigma I = \cos \theta = 0.8 \Leftrightarrow \theta = 36.87^\circ$$

Τότε:

$$\tan 36.87^\circ = \frac{(Q + Q_4)}{P} = \frac{(54.6 + Q_4)}{45} = 0.75 \Leftrightarrow Q_4 = -20.85 \text{ kVAR}$$

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον πίνακα 5.2. Η προσθήκη του φορτίου Q_4 μειώνει την τιμή της άεργου ισχύος από 54.6kVAR σε 33.75kVAR και βελτιώνει το συντελεστή ισχύος. Η μιγαδική ισχύς επίσης μειώνεται από 70.75kVA σε 56.25kVA. Το ρεύμα μειώνεται ανάλογα.

Φορτίο	P, kW	ΣI	Q, kVAR	S, kVA
#1	10	1	0	10
#2	20	0.5(μεταπορείας)	34.6	40
#3	15	0.6(μεταπορείας)	20	25
#(1+2+3)	45	0.64(μεταπορείας)	54.6	70.75
#4	0	0 (προπορείας)	-20.85	20.85
Ολικό	45	0.8(μεταπορείας)	33.75	56.25

Πίνακας 5.2: Συγκεντρωτικός πίνακας παραδείγματος 5.15

5.10. Μέγιστη μεταφορά ισχύος

Η πραγματική ισχύς που αποδίδεται σε ένα φορτίο $\overset{\circ}{Z}_1$ από μία ημιτονοειδή πηγή τάσης $\overset{\circ}{V}_\pi$ με εσωτερική αντίσταση $\overset{\circ}{Z}_\pi = R + jX$ γίνεται μέγιστη όταν η $\overset{\circ}{Z}_1$ είναι ίση με τον συζυγή της $\overset{\circ}{Z}_\pi$, δηλαδή όταν ισχύει $\overset{\circ}{Z}_1 = R - jX$. Η μέγιστη πραγματική ισχύς που αποδίδεται στο φορτίο $\overset{\circ}{Z}_1$ είναι $P_{\max} = \frac{V_\pi^2}{4R}$.

Παράδειγμα 5.16

Μία πηγή με $V_\pi = 100V$ (ενδεικνύμενη τιμή) και εσωτερική αντίσταση $\overset{\circ}{Z}_\pi = 1 + j$ τροφοδοτεί ένα φορτίο $\overset{\circ}{Z}_1 = 2$ όπως φαίνεται στο σχήμα 5.23.

α) Να βρεθεί η ισχύς P_{Z_1} που αποδίδεται στο φορτίο, η ισχύς P_π που καταναλώνεται στην $\overset{\circ}{Z}_\pi$ και η ισχύς $P_{ολ}$ που παρέχεται από την πηγή.

β) Να υπολογιστεί η τιμή ενός δεύτερου φορτίου $\overset{\circ}{Z}_2$ έτσι ώστε όταν συνδεθεί παράλληλα με την $\overset{\circ}{Z}_1$, η ισοδύναμη αντίσταση να γίνει ίση με $\overset{\circ}{Z} = \overset{\circ}{Z}_1 \parallel \overset{\circ}{Z}_2 = \overset{\circ}{Z}_\pi^*$

γ) Αν συνδεθεί η $\overset{\circ}{Z}_2$ που βρέθηκε στο ερώτημα α παράλληλα με την $\overset{\circ}{Z}_1$ και στη συνέχεια να βρεθεί η ισχύς P_Z που αποδίδεται στο φορτίο $\overset{\circ}{Z}$, η ισχύς P_{Z_1} που αποδίδεται στο φορτίο $\overset{\circ}{Z}_1$, η ισχύς P_{Z_2} που αποδίδεται στο φορτίο $\overset{\circ}{Z}_2$, η ισχύς P_π που καταναλώνεται στην $\overset{\circ}{Z}_\pi$ και η ισχύς $P_{ολ}$ που παρέχεται από την πηγή.

Απάντηση:

$$\alpha) \left| \overset{\circ}{Z}_1 + \overset{\circ}{Z}_\pi \right| = |2 + 1 + j| = \sqrt{10}$$

Επομένως:

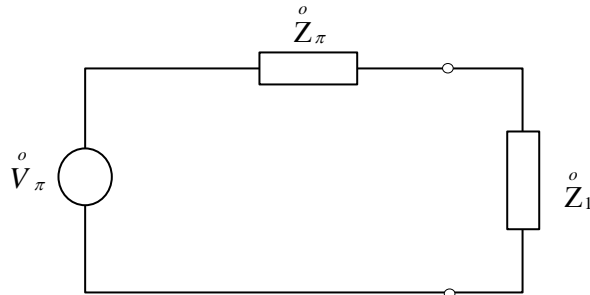
$$\overset{\circ}{I} = \frac{\overset{\circ}{V}_\pi}{\overset{\circ}{Z}_1 + \overset{\circ}{Z}_\pi} = \frac{100}{2 + 1 + j} \quad \text{και} \quad |I| = 10\sqrt{10}A$$

Τα ζητούμενα μεγέθη είναι:

$$P_{Z_1} = \operatorname{Re}[\overset{\circ}{Z}_1] \cdot \left| \overset{\circ}{I} \right|^2 = 2(10\sqrt{10})^2 = 2000W$$

$$P_{\pi} = \operatorname{Re}[\overset{\circ}{Z}_{\pi}] \cdot \left| \overset{\circ}{I} \right|^2 = 1(10\sqrt{10})^2 = 1000W$$

$$P_{ολ} = P_{Z_1} + P_{\pi} = 2000 + 1000 = 3000W$$



Σχήμα 5.23: Κύκλωμα παραδείγματος 5.16

β) Έστω $\overset{\circ}{Z}_2 = a + jb$. Τότε προκύπτει:

$$\overset{\circ}{Z}_1 \parallel \overset{\circ}{Z}_2 = \overset{\circ}{Z}_{\pi}^* = 1 - j \text{ και επομένως:}$$

$$\frac{\overset{\circ}{Z}_1 \cdot \overset{\circ}{Z}_2}{\overset{\circ}{Z}_1 + \overset{\circ}{Z}_2} = \frac{2(a + jb)}{2 + a + jb} = 1 - j$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει: $a - b - 2 = 0$ και $a + b + 2 = 0$. Λύνοντας τις δύο εξισώσεις προκύπτει ότι $\overset{\circ}{Z}_2 = -j2$.

γ) $\overset{\circ}{Z} = \overset{\circ}{Z}_1 \parallel \overset{\circ}{Z}_2 = 1 - j$ και $\overset{\circ}{Z} + \overset{\circ}{Z}_{\pi} = 1 - j + 1 + j = 2$. Τότε:

$$\overset{\circ}{I} = \frac{\overset{\circ}{V}_{\pi}}{\overset{\circ}{Z} + \overset{\circ}{Z}_{\pi}} = \frac{100}{1 - j + 1 + j} = \frac{100}{2} = 50A$$

Επομένως:

$$P_Z = \operatorname{Re}[\overset{\circ}{Z}_1] \cdot \left| \overset{\circ}{I} \right|^2 = 1 \cdot 50^2 = 2500W$$

$$P_{\pi} = \operatorname{Re}[\overset{\circ}{Z}_{\pi}] \cdot \left| \overset{\circ}{I} \right|^2 = 1 \cdot 50^2 = 2500W$$

Για να βρεθούν οι P_{Z_1} και P_{Z_2} αρχικά υπολογίζεται η $\overset{\circ}{V}_Z$ κατά μήκος της $\overset{\circ}{Z}$:

$$\overset{\circ}{V}_Z = \overset{\circ}{I} \overset{\circ}{Z} = 50(1-j)$$

$$\text{Τότε } \overset{\circ}{I}_{Z_1} = \frac{\overset{\circ}{V}_Z}{\overset{\circ}{Z}_1} = 50(1-j)2 = 25\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ και}$$

$$P_{Z_1} = \operatorname{Re}[\overset{\circ}{Z}_1] \cdot \left| \overset{\circ}{I}_{Z_1} \right|^2 = 2(25\sqrt{10})^2 = 2500W$$

$$P_{Z_2} = 0W$$

$$P_{ολ} = P_\pi + P_{Z_1} = 5000W$$

$$\text{Τελικά: } P_{Z_2} = 0W \text{ και } P_{Z_1} = P_Z = 2500W$$

5.11. Υπέρθεση πραγματικής ισχύος από διαφορετικές πηγές

Έστω ένα κύκλωμα που περιέχει δύο AC πηγές με δύο διαφορετικές συχνότητες ω_1 και ω_2 . Αν βρεθεί μία κοινή περίοδος για τις δύο πηγές (για παράδειγμα $\omega_1 = m\omega$, $\omega_2 = n\omega$ όπου $\omega = 2\pi/T$ και $m \neq n$), τότε είναι δυνατή η υπέρθεση (επαλληλία) για κάθε μία πραγματική ισχύ ξεχωριστά για παράδειγμα $P = P_1 + P_2$, όπου P_1 είναι η πραγματική ισχύς από τη μία πηγή και P_2 είναι η πραγματική ισχύς από τη δεύτερη πηγή. Το παραπάνω συμπέρασμα γενικεύεται και για την περίπτωση n διαφορετικών ημιτονοειδών πηγών που λειτουργούν ανεξάρτητα σε ένα κύκλωμα. Δηλαδή ισχύει η υπέρθεση για την ισχύ κάθε μίας πηγής όπως φαίνεται και από την παρακάτω σχέση:

$$P = \sum_{k=1}^n P_k$$

Παράδειγμα 5.17

Σε ένα κύκλωμα μία αντίσταση των 10Ω συνδέεται σε σειρά με ένα πηνίο με αυτεπαγωγή $5mH$. Στο κύκλωμα αυτό υπάρχουν δύο πηγές τάσης $v_1 = 5\cos\omega_1 t$ και $v_2 = 10\cos(\omega_2 t + 60^\circ)$ όπως φαίνεται στο σχήμα 5.24. Να βρεθεί η πραγματική ισχύς για α) $\omega_2 = 2\omega_1 = 4000rad/s$, β) $\omega_2 = \omega_1 = 2000rad/s$ και γ) $\omega_1 = 2000rad/s$ και $\omega_2 = 1000\sqrt{2}rad/s$.

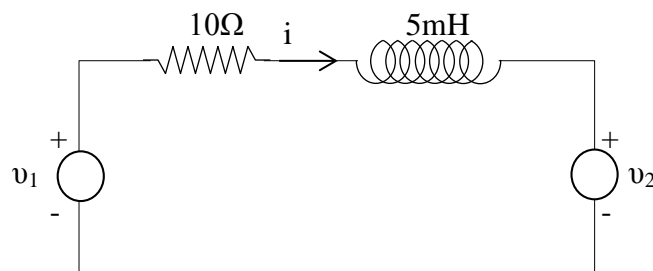
Απάντηση:

Η πηγή τάσης v_1 παράγει από μόνη της ρεύμα i_1 . Ομοίως η πηγή τάσης v_2 παράγει από μόνη της ρεύμα i_2 . Η στιγμιαία ισχύς p και η πραγματική ισχύς P είναι:

$$p = Ri^2 = R(i_1 - i_2)^2 = Ri_1^2 + Ri_2^2 - 2Ri_1i_2$$

$$P = \langle p \rangle = R\langle i_1^2 \rangle + R\langle i_2^2 \rangle - 2R\langle i_1i_2 \rangle = P_1 + P_2 - 2R\langle i_1i_2 \rangle$$

Όπου $\langle p \rangle$ είναι η μέση τιμή της p . Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στην πρόσθεση της P_1 με την P_2 πρέπει να ληφθεί υπόψη και ο όρος $\langle i_1i_2 \rangle$ ο οποίος εξαρτάται από τα ω_1 και ω_2 και μπορεί να είναι μηδέν ή όχι.



Σχήμα 5.24: Κύκλωμα παραδείγματος 5.17

α) Επειδή η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος έχει διαφορετική τιμή για $\omega_1 = 2000\text{rad/s}$ και για $\omega_2 = 4000\text{rad/s}$, το ρεύμα γράφεται μόνο στο πεδίο του χρόνου. Εφαρμόζοντας υπέρθεση (επαλληλία) για τις δύο πηγές, προκύπτει ότι το ρεύμα είναι $i = i_1 - i_2$, όπου i_1 και i_2 είναι τα ρεύματα λόγω του v_1 και του v_2 αντίστοιχα.

$$\overset{\circ}{I}_1 = \frac{\overset{\circ}{V}_1}{\overset{\circ}{Z}_1} = \frac{5}{10 + j10} = 0.35 \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$i_1(t) = 0.35 \cos(2000t - 45^\circ)$$

$$P_1 = \frac{RI_1^2}{2} = \frac{10 \cdot 0.35^2}{2} = 0.625 \text{ W}$$

$$\overset{\circ}{I}_2 = \frac{\overset{\circ}{V}_2}{\overset{\circ}{Z}_2} = \frac{10 \angle 60^\circ}{10 + j20} = 0.45 \angle -3.4^\circ \text{ A}$$

$$i_2(t) = 0.45 \cos(4000t - 3.4^\circ)$$

$$P_2 = \frac{RI_2^2}{2} = \frac{10 \cdot 0.45^2}{2} = 1 \text{ W}$$

$$i(t) = i_1(t) - i_2(t) = 0.35 \cos(2000t - 45^\circ) - 0.45 \cos(4000t - 3.4^\circ)$$

Σε αυτή την περίπτωση $\langle i_1 i_2 \rangle = 0$ επειδή $\langle \cos(2000t - 45^\circ) \cos(4000t - 3.4^\circ) \rangle = 0$.
 Επομένως από την υπέρθεση προκύπτει $P = P_1 + P_2 = 0.625 + 1 = 1.625W$.

β) Η τάση (phasor) στα άκρα της σύνθετης αντίστασης είναι:

$$\overset{\circ}{V} = \overset{\circ}{V}_1 - \overset{\circ}{V}_2 = 5 - 10 \angle 60^\circ = -j5\sqrt{3}V$$

Το ρεύμα (phasor) θα είναι:

$$\overset{\circ}{I} = \frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{Z}} = \frac{-j5\sqrt{3}}{10\sqrt{2} \angle 45^\circ} \approx \frac{-j8.66}{14.14 \angle 45^\circ} = 0.61 \angle -135^\circ A$$

Επομένως το ρεύμα στο πεδίο του χρόνου θα είναι:

$$i(t) = 0.61 \cos(2000t - 135^\circ)$$

Η πραγματική ισχύς είναι $P = \frac{RI^2}{2} = 5 \cdot 0.61^2 = 1.875W$

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι ισχύει $P > P_1 + P_2$.

γ) Εφαρμόζοντας υπέρθεση (επαλληλία) στο πεδίο του χρόνου προκύπτουν:

$$i_1(t) = 0.35 \cos(2000t - 45^\circ), \quad P_1 = 0.625W$$

$$i_2(t) = 0.41 \cos(1000\sqrt{2}t - 35.3^\circ), \quad P_2 = 0.833W$$

$$i(t) = i_1(t) - i_2(t) = 0.35 \cos(2000t - 45^\circ) - 0.41 \cos(1000\sqrt{2}t - 35.3^\circ)$$

$$P = \left\langle \frac{Ri^2}{2} \right\rangle = P_1 + P_2 - 1.44 \left\langle \cos(2000t - 45^\circ) \cos(1000\sqrt{2}t - 35.3^\circ) \right\rangle$$

Ο όρος $\langle \cos(2000t - 45^\circ) \cos(1000\sqrt{2}t - 35.3^\circ) \rangle$ δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί καθώς δεν μπορεί να βρεθεί μία κοινή περίοδος. Η πραγματική ισχύς εξαρτάται από τη διάρκεια για την οποία υπολογίζεται η μέση τιμή του παραπάνω όρου.

5.12. Λυμένα προβλήματα

1) Το ρεύμα, του οποίου η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 5.2, εισέρχεται σε ένα πυκνωτή με χωρητικότητα $0.5\mu F$ ο οποίος είναι συνδεδεμένος σε σειρά με μία αντίσταση των $1k\Omega$. Να βρεθούν και να σχεδιαστούν:

- α) η τάση v κατά μήκος του συνδυασμού (σύνδεση σε σειρά) πυκνωτή και αντίστασης
 β) η στιγμιαία ισχύς p που εισέρχεται στο φορτίο RC
 γ) Να συγκριθούν τα αποτελέσματα με τα αποτελέσματα των παραδειγμάτων 5.1 και 5.2.

Απάντηση:

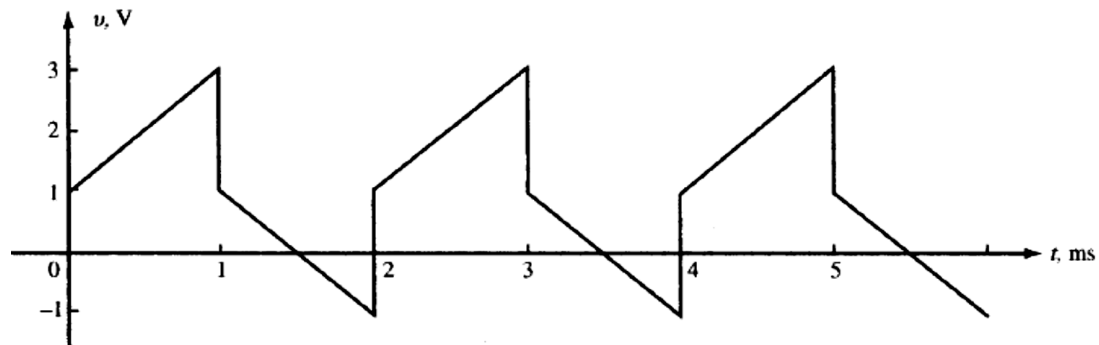
α) Από το σχήμα 5.2 προκύπτει ότι στη διάρκεια μίας περιόδου, οι τάσεις είναι:

$$v_R = \begin{cases} 1V & (0 < t < 1ms) \\ -1V & (1 < t < 2ms) \end{cases}$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \begin{cases} 2000t(V) & (0 < t < 1ms) \\ 4 - 2000t(V) & (1 < t < 2ms) \end{cases}$$

$$v = v_R + v_C = \begin{cases} 1 + 2000t(V) & (0 < t < 1ms) \\ 3 - 2000t(V) & (1 < t < 2ms) \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της v φαίνεται στο σχήμα 5.25.



Σχήμα 5.25: Γραφική παράσταση v άσκησης 1 (ερώτημα α)

β) Κατά τη διάρκεια μίας περιόδου:

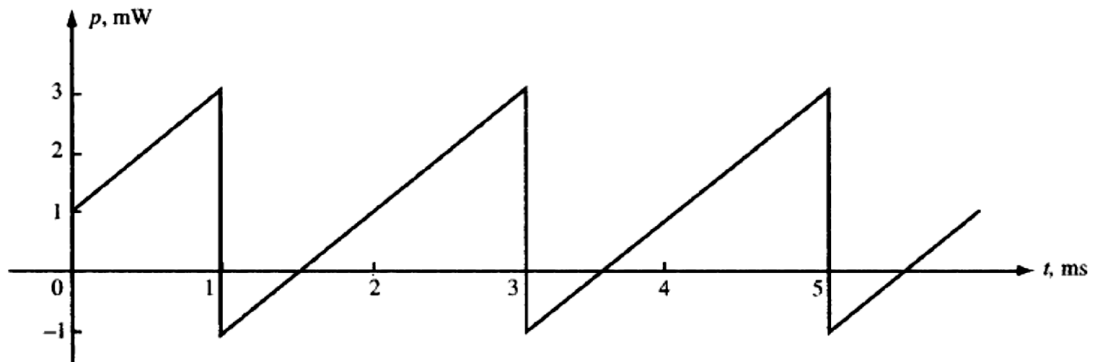
$$p_R = Ri^2 = 1mW$$

$$p_C = v_C i = \begin{cases} 2000t(mW) & (0 < t < 1ms) \\ 2000t - 4(mW) & (1 < t < 2ms) \end{cases}$$

$$p = v i = p_R + p_C = \begin{cases} 1 + 2000t(mW) & (0 < t < 1ms) \\ 2000t - 3(mW) & (1 < t < 2ms) \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της p φαίνεται στο σχήμα 5.26.

γ) Η μέση ισχύς που εισέρχεται στο κύκλωμα κατά τη διάρκεια μιας περιόδου ισούται με την ισχύ που καταναλώνεται στην αντίσταση. Είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που προέκυψε και στο παράδειγμα 5.1. Επιπλέον η ισχύς που ανταλλάσσεται μεταξύ της πηγής και του κυκλώματος επίσης συμφωνεί με τα αποτελέσματα που προέκυψαν στο παράδειγμα 5.2.



Σχήμα 5.26: Γραφική παράσταση p άσκησης 1 (ερώτημα β)

2) Μία εναλλασσόμενη τάση των 1V τροφοδοτεί: α) μία αντίσταση 1Ω, β) ένα φορτίο $\overset{\circ}{Z} = 1 + j$ και γ) ένα φορτίο $\overset{\circ}{Z} = 1 - j$. Να υπολογιστεί η πραγματική ισχύς P για τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις.

Απάντηση:

$$\alpha) P = \frac{V^2}{R} = \frac{1}{1} = 1W$$

$$\beta) I = \frac{V}{|Z|} = \frac{V}{|1 + j|} = \frac{1}{\sqrt{2}} A$$

$$P = RI^2 = 0.5W$$

$$\gamma) I = \frac{V}{|Z|} = \frac{V}{|1 - j|} = \frac{1}{\sqrt{2}} A$$

$$P = RI^2 = 0.5W$$

3) Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες που σχετίζονται με την ισχύ σε ένα κύκλωμα όπου η εφαρμοζόμενη τάση είναι $v = 150 \cos(\omega t + 10^\circ)V$ και το ρεύμα που προκύπτει είναι $i = 5 \cos(\omega t - 50^\circ)A$

Απάντηση:

Αρχικά υπολογίζεται η μιγαδική ισχύς:

$$\overset{\circ}{S} = \overset{\circ}{V}_\varepsilon \overset{\circ}{I}_\varepsilon^* = \left(\frac{150}{\sqrt{2}} \angle 10^\circ\right) \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \angle 50^\circ\right) = 375 \angle 60^\circ = 187.5 + j342.8$$

Επομένως: $P = 187.5W$, $Q = 342.8VAR$ (επαγωγική συμπεριφορά εφόσον $Q > 0$),
 $S = 375VA$, $\Sigma I = \cos 60^\circ = 0.5$ (μεταπορείας).

4) Σε ένα κύκλωμα όπου είναι συνδεδεμένα σε σειρά δύο στοιχεία, η πραγματική ισχύς είναι $940W$ και ο συντελεστής ισχύος είναι 0.707 προπορείας. Να βρεθούν τα στοιχεία του κυκλώματος αν η εφαρμοζόμενη τάση είναι $v = 99 \cos(6000t + 30^\circ)V$.

Απάντηση:

Η ενδεικνύμενη τιμή της εφαρμοζόμενης τάσης είναι $V_\varepsilon = \frac{99}{\sqrt{2}} = 70V$.

Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$P = V_\varepsilon I_\varepsilon \cos \theta \Leftrightarrow 940 = 70 \cdot I_\varepsilon \cdot 0.707 \Leftrightarrow I_\varepsilon = 19A$$

$$\text{Τότε } P = RI_\varepsilon^2 \Leftrightarrow R = \frac{P}{I_\varepsilon^2} \Leftrightarrow R = \frac{940}{19^2} \Leftrightarrow R = 2.6\Omega$$

Για συντελεστή ισχύος προπορείας: $\theta = \cos^{-1} 0.707 = -45^\circ$ οπότε:

$$\overset{\circ}{Z} = R - jX_C \text{ όπου } X_C = R \tan 45^\circ = 2.6\Omega$$

$$\text{Τελικά: } X_C = 2.6\Omega = \frac{1}{\omega C} \Leftrightarrow C = 64.1\mu F$$

5) Σε ένα κύκλωμα είναι συνδεδεμένα σε σειρά δύο στοιχεία και διαρρέονται από ρεύμα $i = 4.24 \cos(5000t + 45^\circ)A$. Η πραγματική ισχύς είναι $180W$ και ο συντελεστής ισχύος είναι $0,8$ μεταπορείας. Να βρεθούν τα στοιχεία.

Απάντηση:

Η ενδεικνύμενη τιμή του ρεύματος είναι $I_\varepsilon = \frac{4.24}{\sqrt{2}} = 3A$. Τότε:

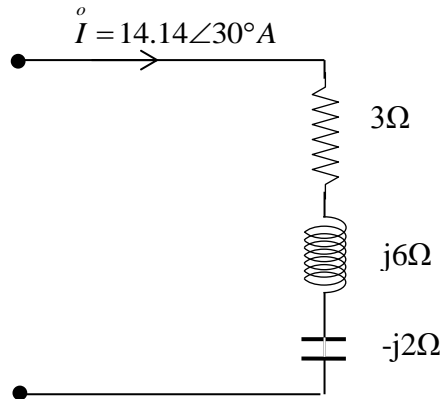
$$\text{Τότε } P = RI_\varepsilon^2 \Leftrightarrow R = \frac{P}{I_\varepsilon^2} \Leftrightarrow R = \frac{180}{3^2} \Leftrightarrow R = 20\Omega$$

Για συντελεστή ισχύος μεταπορείας: $\theta = \cos^{-1} 0.8 = +36.87^\circ$ οπότε το δεύτερο στοιχείο είναι ένα πηνίο:

$$\frac{Q}{P} = \frac{I_{\varepsilon}^2 X_L}{180} = \tan 36.87^\circ \Leftrightarrow X_L = 15\Omega$$

Τελικά $X_L = \omega L \Leftrightarrow L = 3mH$

6) Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες σχετικά με την ισχύ στο κύκλωμα του σχήματος 5.27 και να σχεδιαστεί το τρίγωνο ισχύος.



Σχήμα 5.27: Κύκλωμα άσκησης 6

Απάντηση:

Η ενδεικνύμενη τιμή του ρεύματος είναι $I_{\varepsilon} = \frac{14.14}{\sqrt{2}} = 10A$. Τότε:

$$P = 10^2 \cdot 3 = 300W$$

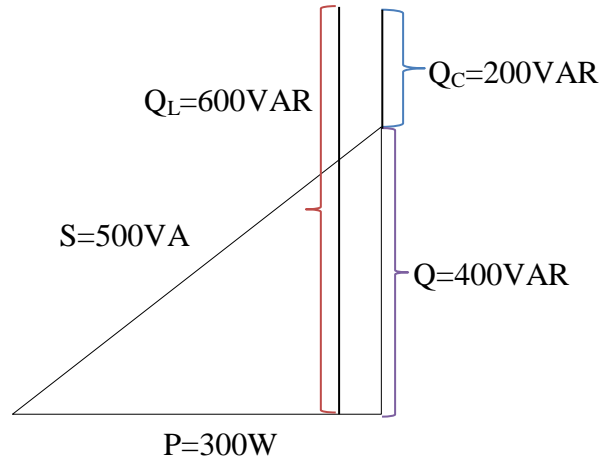
$$Q_{j6\Omega} = 10^2 \cdot 6 = 600VAR \text{ επαγωγική συμπεριφορά}$$

$$Q_{-j2\Omega} = 10^2 \cdot 2 = 200VAR \text{ χωρητική συμπεριφορά}$$

$$S = \sqrt{300^2 + (600 - 200)^2} = 500VA$$

$$\Sigma I = \frac{P}{S} = 0.6 \text{ μεταφορείας}$$

Το τρίγωνο ισχύος φαίνεται στο σχήμα 5.28.



Σχήμα 5.28: Τρίγωνο ισχύος άσκησης 6

7. Σε ένα κύκλωμα είναι συνδεδεμένα σε σειρά μία αντίσταση $R=10\Omega$ και ένας πυκνωτής ($X_C = 5\Omega$) ενώ η εφαρμοζόμενη τάση είναι 120V. Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες που σχετίζονται με την ισχύ.

Απάντηση:

$$Z = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.18\Omega$$

$$I_\varepsilon = \frac{120}{11.18} = 10.73A$$

Τότε:

$$P = I_\varepsilon^2 R = 1152W$$

$$Q = I_\varepsilon^2 X_C = 576VAR \text{ (χωρητική συμπεριφορά)}$$

$$S = \sqrt{1152^2 + 576^2} = 1288VA$$

$$\Sigma I = \frac{1152}{1288} = 0.894 \text{ προπορείας}$$

8) Οι σύνθετες αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z}_1 = 5.83 \angle -59^\circ \Omega$ και $\overset{\circ}{Z}_2 = 8.94 \angle 63.43^\circ \Omega$ είναι συνδεδεμένες σε σειρά και διαρρέονται από ρεύμα $I_\varepsilon = 5A$. Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες που σχετίζονται με την ισχύ.

Απάντηση:

$$Z_{o\lambda} = Z_1 + Z_2 = 7 + j3\Omega$$

$$P_{o\lambda} = 5^2 \cdot 7 = 175W$$

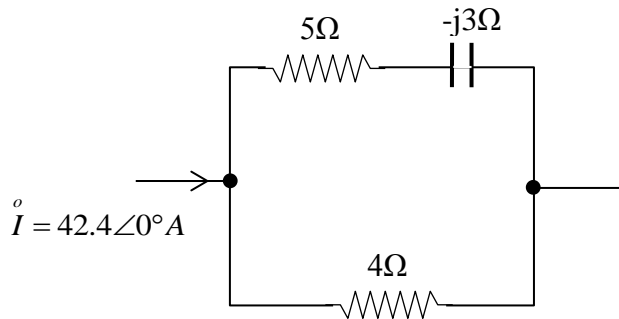
$$Q_{o\lambda} = 5^2 \cdot 3 = 75VAR \text{ επαγωγική συμπεριφορά}$$

Επομένως:

$$S_{o\lambda} = \sqrt{175^2 + 75^2} = 190.4VA$$

$$\Sigma I = \frac{175}{190.4} = 0.919 \text{ μεταφορείας}$$

9) Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες που σχετίζονται με την ισχύ στο κύκλωμα του σχήματος 5.29.



Σχήμα 5.29: Κύκλωμα άσκησης 9

Απάντηση:

Με διαίρεση ρευμάτων προκύπτει:

$$I_5 = 17.88\angle 18.43^\circ A$$

$$I_4 = 26.05\angle -12.53^\circ A$$

$$P_{o\lambda} = \left(\frac{17.88}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 5 + \left(\frac{26.05}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 4 = 2156W$$

$$Q_{o\lambda} = \left(\frac{17.88}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 3 = 480VAR \text{ χωρητική συμπεριφορά}$$

$$S_{o\lambda} = \sqrt{2156^2 + 480^2} = 2209VA$$

$$\Sigma I = \frac{2156}{2209} = 0.976 \text{ προπορείας}$$

Εναλλακτική μέθοδος επίλυσης:

$$Z_{\sigma}^{\circ} = \frac{4(5 - j3)}{9 - j3} = 2.4 - j0.53\Omega$$

Τότε:

$$P = \left(\frac{42.4}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2.4 = 2157W$$

$$Q = \left(\frac{42.4}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 0.53 = 476VAR \text{ χωρητική συμπεριφορά}$$

10) Για το κύκλωμα του σχήματος 5.30:

α) Να βρεθεί ο συντελεστής ισχύος

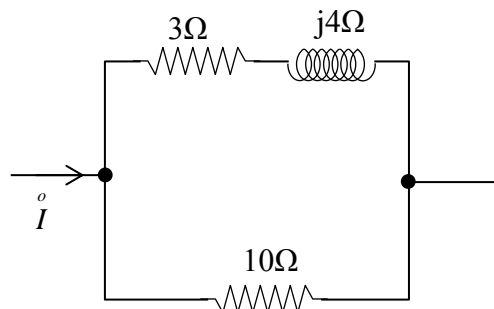
β) Αν η ολική ισχύς είναι 1100W, ποια είναι η ισχύς σε καθεμία αντίσταση ξεχωριστά;

Απάντηση:

α) Χωρίς να έχει καθοριστεί συγκεκριμένη τάση ή ρεύμα για το κύκλωμα του σχήματος 5.30, τα μεγέθη P, Q και S δεν είναι δυνατό να υπολογιστούν. Ωστόσο ο συντελεστής ισχύος είναι η γωνία της ισοδύναμης σύνθετης αντίστασης.

$$Z_{\sigma}^{\circ} = \frac{10(3 + j4)}{13 + j4} = 3.68 \angle 36.03^{\circ}\Omega$$

$$\Sigma I = \cos 36.03^{\circ} = 0.809 \text{ μεταπορείας}$$



Σχήμα 5.30: Κύκλωμα άσκησης 10

β) Με διαίρεση ρευμάτων προκύπτει:

$$\frac{I_{\varepsilon,1}^{\circ}}{I_{\varepsilon,2}^{\circ}} = \frac{Z_2^{\circ}}{Z_1^{\circ}} = \frac{10}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\frac{P_{3\Omega}}{P_{10\Omega}} = \frac{3 \cdot I_{\varepsilon,1}^{\circ 2}}{10 \cdot I_{\varepsilon,2}^{\circ 2}} = \frac{6}{5}$$

Επομένως εφόσον $P_{3\Omega} + P_{10\Omega} = 1100W$ προκύπτει:

$$P_{3\Omega} = 600W \text{ και } P_{10\Omega} = 500W$$

11) Να υπολογιστεί ο συντελεστής ισχύος σε ένα κύκλωμα με δύο παράλληλους κλάδους. Ο πρώτος κλάδος έχει $Z_1^{\circ} = 2 + j4\Omega$ και ο δεύτερος $Z_2^{\circ} = 6\Omega$. Ποια νέα τιμή πρέπει να πάρει ο αντιστάτης των 6Ω έτσι ώστε ο συντελεστής ισχύος να είναι ίσος με 0.9 μεταφορείας;

Απάντηση:

$$Y_{i\sigma}^{\circ} = \frac{1}{2 + j4} + \frac{1}{6} = 0.334 \angle -36.84^{\circ} S$$

$$\Sigma I = \cos(-36.84^{\circ}) = 0.8 \text{ μεταφορείας}$$

Ο συντελεστής ισχύος είναι μεταφορείας γιατί η γωνία της σύνθετης αντίστασης είναι θετική (εφόσον η γωνία της σύνθετης αγωγιμότητας είναι αρνητική). Κατόπιν, για να αλλάξει η τιμή του συντελεστή ισχύος σε 0.9 θα πρέπει να ισχύει:

$\cos^{-1} 0.9 = -25.84^{\circ}$. Τότε η νέα ισοδύναμη αγωγιμότητα θα είναι:

$$Y_{i\sigma}'^{\circ} = \frac{1}{2 + j4} + \frac{1}{R} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{R} \right) - j \frac{1}{5}$$

Επιπλέον πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{R}} = \tan 25.84^{\circ} \Leftrightarrow R = 3.2\Omega$$

12) Μία τάση $28.28\angle 60^\circ\text{V}$ εφαρμόζεται σε ένα δίκτυο με δύο παράλληλους κλάδους. Ο πρώτος κλάδος έχει $Z_1 = 4\angle 30^\circ$ και ο δεύτερος $Z_2 = 5\angle 60^\circ$. Να βρεθεί το τρίγωνο ισχύος για κάθε κλάδο. Στη συνέχεια να συνδυαστούν τα δύο τρίγωνα σε ένα κοινό ολικό τρίγωνο ισχύος.

Απάντηση:

$$I_1 = \frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{Z}_1} = 7.07\angle 30^\circ\text{A}$$

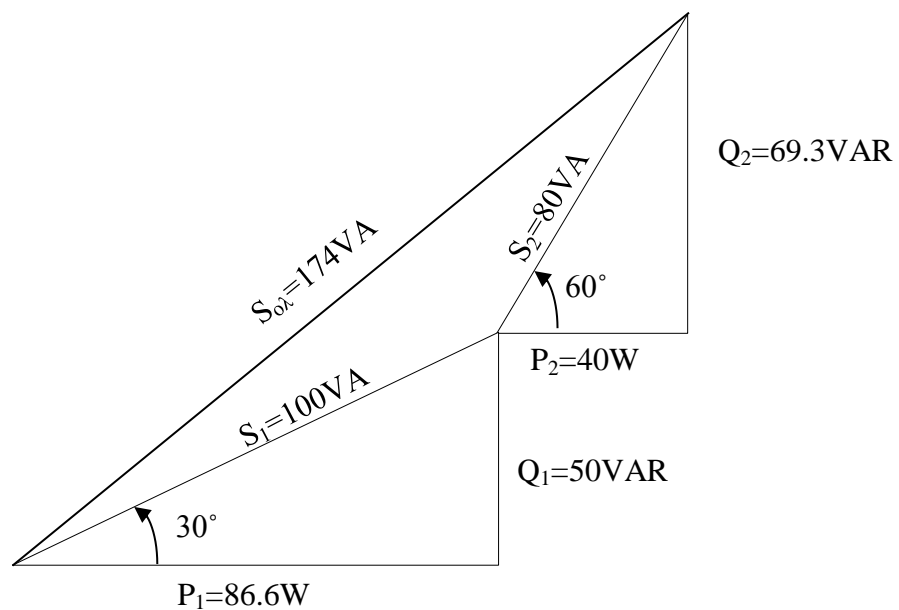
$$I_2 = \frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{Z}_2} = 5.66\angle 0^\circ\text{A}$$

$$S_1 = \left(\frac{28.28}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ \right) \left(\frac{7.07}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ \right) = 100\angle 30^\circ = 86.6 + j50$$

$$S_2 = \left(\frac{28.28}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ \right) \left(\frac{5.66}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \right) = 80\angle 60^\circ = 40 + j69.3$$

$$S_{ολ} = S_1 + S_2 = 126.6 + j119.3 = 174\angle 43.3^\circ\text{VA}$$

Τα τρίγωνα ισχύος και το άθροισμά τους φαίνεται στο σχήμα 5.31.



Σχήμα 5.31: Τρίγωνα ισχύος άσκησης 12

13) Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες σχετικά με την ισχύ σε ένα κύκλωμα όπου τρία φορτία είναι συνδεδεμένα παράλληλα. Για το κάθε φορτίο ισχύει: φορτίο 1: 250VA, $\Sigma I=0.5$ μεταπορείας, φορτίο 2: 180W, $\Sigma I=0.8$ προπορείας, φορτίο 3: 300VA, 100VAR επαγωγική συμπεριφορά. Να υπολογιστεί η πραγματική και η άεργος ισχύς για κάθε φορτίο ξεχωριστά καθώς επίσης και η ολική πραγματική και άεργος ισχύς.

Απάντηση:

Φορτίο 1

Γνωστά είναι τα εξής: $S = 250VA$ και $\cos(\theta) = 0.5$ μεταπορείας. Τότε:

$$P = 250 \cdot 0.5 = 125W$$

$$Q = \sqrt{250^2 - 125^2} = 216.5VAR \text{ επαγωγική συμπεριφορά}$$

Φορτίο 2

Γνωστά είναι τα εξής: $P = 180W$ και $\cos(\theta) = 0.8 \Leftrightarrow \theta = -36.87^\circ$ προπορείας. Τότε:

$$Q = 180 \tan(-36.87^\circ) = 135VAR \text{ χωρητική συμπεριφορά.}$$

Φορτίο 3

Γνωστά είναι τα εξής: $S = 300VA$ και $Q = 100VAR$ επαγωγική συμπεριφορά. Τότε:

$$P = \sqrt{300^2 - 100^2} = 282.8W$$

Οι ολικές τιμές για κάθε ισχύ είναι:

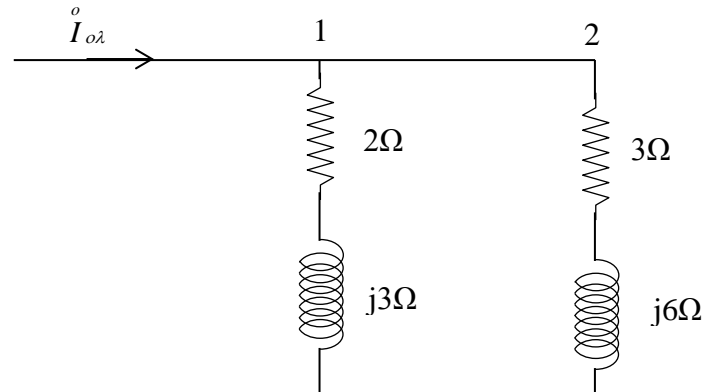
$$P_{ολ} = 125 + 180 + 282.8 = 587.8W$$

$$Q_{ολ} = 216.5 - 135 + 100 = 181.5VAR \text{ επαγωγική συμπεριφορά}$$

$$S_{ολ}^o = 587.8 + j181.5 = 615.2 \angle 17.16^\circ$$

Επομένως $S = 615.2VA$ και $\Sigma I = \cos 17.16^\circ = 0.955$ μεταπορείας

14) Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες για την ισχύ και το ολικό ρεύμα στο κύκλωμα του σχήματος 5.32, αν στον κλάδο 2 ισχύει $S_2 = 1490VA$.



Σχήμα 5.32: Κύκλωμα άσκησης 14

Απάντηση:

Από τη σχέση $S_2^{\circ} = I_{\varepsilon,2}^2 \cdot Z_2^{\circ}$ προκύπτει:

$$I_{\varepsilon,2}^2 = \frac{1490}{\sqrt{3^2 + 6^2}} = 222A^2$$

Και με διαίρεση ρευμάτων:

$$\frac{I_1^{\circ}}{I_2^{\circ}} = \frac{3 + j6}{2 + j3} \text{ από όπου προκύπτει } I_{\varepsilon,1}^2 = \frac{3^2 + 6^2}{2^2 + 3^2} I_{\varepsilon,2}^2 = \frac{45}{13} \cdot 222 = 768A^2$$

Οπότε:

$$S_1^{\circ} = I_{\varepsilon,1}^2 \cdot Z_1^{\circ} = 768(2 + j3) = 1536 + j2304$$

$$S_2^{\circ} = I_{\varepsilon,2}^2 \cdot Z_2^{\circ} = 223(3 + j6) = 666 + j1332$$

$$S_{oi}^{\circ} = S_1^{\circ} + S_2^{\circ} = 2202 + j3636$$

Από όπου προκύπτει: $P_{oi} = 2202W$, $Q_{oi} = 3636VAR$ επαγωγική συμπεριφορά

$$S_{oi} = \sqrt{2202^2 + 3636^2} = 425IVA$$

$$\Sigma I = \frac{2202}{4251} = 0.518 \text{ μεταφορείας.}$$

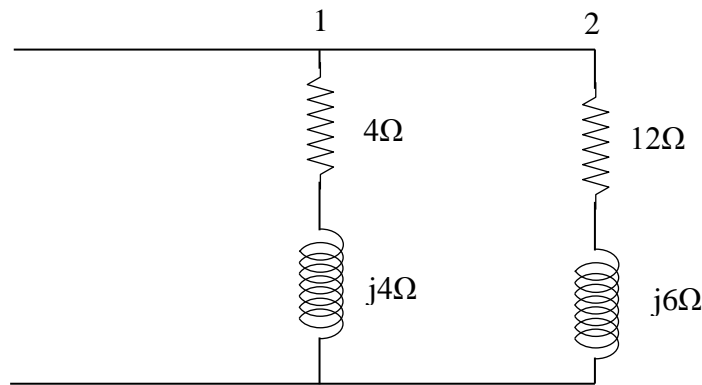
Εφόσον η γωνία της τάσης είναι άγνωστη, είναι δυνατό να βρεθεί μόνο το μέτρο του $I_{ολ}^{\circ}$. Με διαίρεση ρευμάτων προκύπτει:

$$I_2^{\circ} = \frac{2 + j3}{5 + j9} I_{ολ}^{\circ} \quad \text{ή} \quad I_{ε,2}^{\circ} = \frac{2^3 + 3^2}{5^2 + 9^2} I_{ε,ολ}^{\circ} = \frac{13}{106} I_{ε,ολ}^{\circ}$$

και επομένως:

$$I_{ε,ολ}^{\circ 2} = \frac{106}{13} \cdot 222 = 1811 A^2 \Leftrightarrow I_{ε,ολ}^{\circ} = 42.6 A$$

15) Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες για την ισχύ και το ολικό ρεύμα στο κύκλωμα του σχήματος 5.33, αν η ολική άεργος ισχύς είναι 2500VAR (επαγωγική συμπεριφορά). Να υπολογιστούν οι P_1 και P_2 .



Σχήμα 5.33: Κύκλωμα άσκησης 15

Απάντηση:

Η ισοδύναμη σύνθετη αγωγιμότητα είναι:

$$Y_{\sigma}^{\circ} = Y_1^{\circ} + Y_2^{\circ} = 0.2488 \angle -39.57^{\circ} S$$

$$P_{ολ} = 2500 \cot 39.57 = 3025 W$$

$$S_{ολ}^{\circ} = 3025 + j2500 = 3924 \angle 39.57^{\circ} VA$$

$$\Sigma I = \frac{P_{ολ}}{S_{ολ}} = 0.771 \text{ μεταφορείας}$$

$$\text{Ο λόγος των ρευμάτων είναι: } \frac{I_1^{\circ}}{I_2^{\circ}} = \frac{Y_1^{\circ}}{Y_2^{\circ}} = \frac{0.177}{0.0746}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4 \cdot I_1^2}{12 \cdot I_2^2} = 1.88 \text{ και}$$

$$P_1 + P_2 = 3025W$$

Από όπου προκύπτει: $P_1 = 1975W$ και $P_2 = 1050W$.

16) Σε ένα φορτίο των 300kW με συντελεστή ισχύος 0.65 μεταφορείας, γίνεται βελτίωση του συντελεστή ισχύος σε 0.9 μεταφορείας με τη χρήση παράλληλων πυκνωτών. Πόσα kVAR πρέπει να διοχευτετούν στο κύκλωμα από τους πυκνωτές για να γίνει η βελτίωση του συντελεστή ισχύος και ποια είναι η % μείωση στη φαινόμενη ισχύ.

Απάντηση:

Αρχικά υπολογίζονται οι γωνίες που αντιστοιχούν στους δύο συντελεστές ισχύος.

$$\cos^{-1} 0.65 = 49.46^\circ$$

$$\cos^{-1} 0.9 = 25.84^\circ$$

Τότε όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.34:

$$Q = 300 \tan 49.46^\circ = 350.7kVAR \text{ (επαγωγική συμπεριφορά)}$$

$$Q - Q_C = 300 \tan 25.84^\circ = 145.3kVAR \text{ (επαγωγική συμπεριφορά)}$$

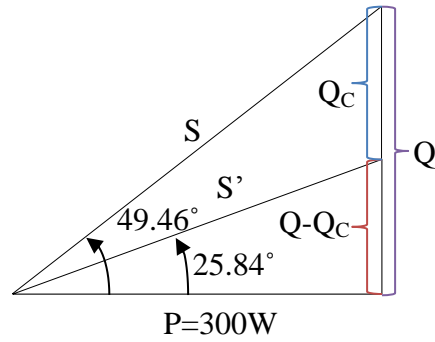
Από τα δύο παραπάνω προκύπτει: $Q_C = 205.4kVAR$ (χωρητική συμπεριφορά)

Επίσης:

$$S = \frac{300}{0.65} = 461.5kVA$$

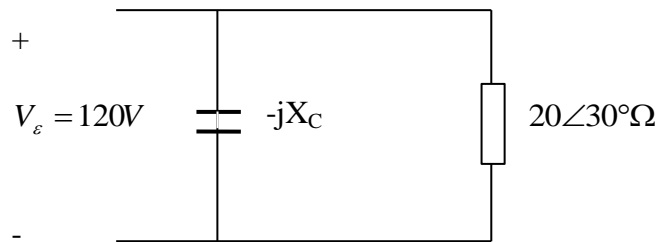
$$S' = \frac{300}{0.9} = 333.3kVA$$

Η μείωση είναι $\frac{461.5 - 333.3}{461.5} \cdot 100\% = 27.8\%$



Σχήμα 5.34: Τρίγωνο ισχύος άσκησης 16

17) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα C του πυκνωτή που χρειάζεται για τη βελτίωση του συντελεστή ισχύος σε 0.95 μεταφορείας στο κύκλωμα που φαίνεται στο σχήμα 5.35, αν η ενδεικνύμενη τιμή της τάσης είναι 120V και η συχνότητα 60Hz.



Σχήμα 5.35: Κύκλωμα άσκησης 17

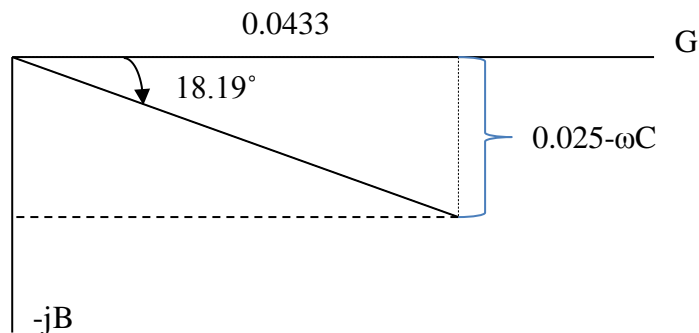
Απάντηση:

$$\text{Για τις αγωγιμότητες ισχύει: } Y_{ισ}^o = j\omega C + \frac{1}{20\angle 30^\circ} = 0.0433 - j(0.025 - \omega C)S$$

Από το διάγραμμα των αγωγιμοτήτων στο σχήμα 5.36 προκύπτει:

$$\theta = \cos^{-1} 0.95 = 18.19^\circ$$

$$0.025 - \omega C = 0.0433 \cdot \tan 18.19^\circ \Leftrightarrow \omega C = 0.0108 \Leftrightarrow C = 28.6\mu F$$



Σχήμα 5.36: Διάγραμμα αγωγιμοτήτων άσκησης 17

18) Σε ένα κύκλωμα με σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z} = 10\angle 60^\circ \Omega$ βελτιώνεται ο συντελεστής ισχύος με την παράλληλη τοποθέτηση ενός πυκνωτή με χωρητική αντίδραση 20Ω . Να βρεθεί το ποσοστό % μείωσης στο ρεύμα.

Απάντηση:

Εφόσον $\overset{\circ}{I} = \overset{\circ}{V} \overset{\circ}{Y}$ η μείωση στο ρεύμα υπολογίζεται από το λόγο των σύνθετων αγωγιμοτήτων πριν και μετά την προσθήκη του πυκνωτή.

$$Y_{\pi\kappa\nu}^{\circ} = 0.1\angle -60^\circ S$$

$$Y_{\mu\epsilon\iota}^{\circ} = 0.05\angle 90^\circ + 0.1\angle -60^\circ = 0.062\angle -36.2^\circ S$$

$$\frac{I_{\mu\epsilon\iota}}{I_{\pi\kappa\nu}} = \frac{0.062}{0.1} = 0.62$$

Επομένως η μείωση είναι 38%.

19) Ένας μετασχηματιστής έχει ονομαστική ισχύ 25kVA και τροφοδοτεί ένα φορτίο των 12kW με συντελεστή ισχύος 0.6 μεταπορείας. α) Τι ποσοστό της ισχύος του μετασχηματιστή μεταχειρίζεται το φορτίο; Πόσα kW επιπρόσθετου φορτίου (με μοναδιαίο συντελεστή ισχύος) μπορούν να προστεθούν προτού ο μετασχηματιστής ξεπεράσει την ονομαστική ισχύ του.

β) Αν το επιπρόσθετο φορτίο έχει συντελεστή ισχύος 0.866 προπορείας, πόσα kVA μπορούν να προστεθούν χωρίς ο μετασχηματιστής να ξεπεράσει την ονομαστική ισχύ του;

Απάντηση:

α) Για το φορτίο των 12kW είναι $S = \frac{12}{0.6} = 20kVA$. Επομένως ο μετασχηματιστής

δουλεύει στο: $\frac{20}{25} \cdot 100\% = 80\%$ της ονομαστικής ισχύος του.

Το επιπρόσθετο φορτίο με μοναδιαίο συντελεστή ισχύος δεν αλλάζει την άεργο ισχύ:

$$Q = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16kVAR$$

Τότε σε συνθήκες λειτουργίας στην ονομαστική ισχύ:

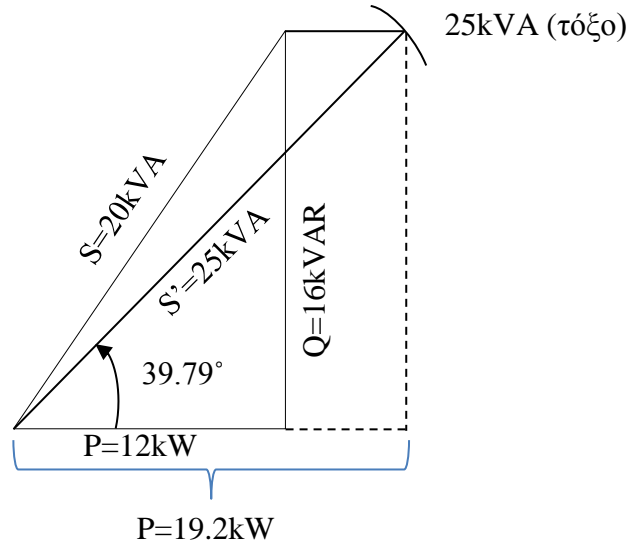
$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{16}{25}\right) = 39.79^\circ$$

$$P' = 25 \cos 39.79^\circ = 19.2 \text{ kW}$$

Επομένως η επιπρόσθετη πραγματική ισχύς είναι:

$$P_+ = 19.2 - 12 = 7.2 \text{ kW}$$

Τα παραπάνω μεγέθη απεικονίζονται στο σχήμα 5.37, όπου η λειτουργία στην ονομαστική ισχύ υποδηλώνεται με ένα τόξο ακτίνας 25° .



Σχήμα 5.37: Τρίγωνο ισχύος άσκησης 19

β) Για το αρχικό φορτίο ισχύει:

$$\overset{\circ}{S} = 12 + j16 \text{ kVA}$$

Ενώ για το επιπρόσθετο φορτίο ισχύει:

$$\overset{\circ}{S}_2 = S_2 \angle -30^\circ = 0.866 \cdot S_2 - j0.5 \cdot S_2 \text{ (kVA)}$$

Η ολική μιγαδική ισχύς είναι:

$$\overset{\circ}{S}_{ολ} = (12 + j0.866S_2) + j(16 - 0.5S_2) \text{ (kVA)}$$

Τότε:

$$S_{ολ}^2 = (12 + j0.866S_2)^2 + (16 - 0.5S_2)^2 = 25^2$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$S_2 = 12.8kVA$$

20) Ένας επαγωγικός κινητήρας με ονομαστική ισχύ 1.56kW δουλεύει στο 85% των δυνατοτήτων του. Σε αυτό το φορτίο ο συντελεστής ισχύος είναι 0.8 μεταπορείας. Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες που σχετίζονται με την ισχύ.

Απάντηση:

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = 0.85 \Leftrightarrow P_{in} = \frac{1.5}{0.85} = 1.765kW$$

Τότε:

$$S_{in} = \frac{1.765}{0.8} = 2.206kVA$$

$$Q_{in} = \sqrt{2.206^2 - 1.765^2} = 1.324kVAR$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα ενός επαγωγικού κινητήρα περιέχει μία μεταβλητή αντίσταση η οποία είναι συνάρτηση του φορτίου του άξονα. Ο συντελεστής ισχύος είναι επομένως μεταβλητός και κυμαίνεται από 0.3 κατά την εκκίνηση έως 0.85 για πλήρες φορτίο.

21) Μία αντίσταση των 10Ω είναι συνδεδεμένη σε σειρά με ένα πηνίο με αυτεπαγωγή 46mH. α) Να υπολογιστεί το ρεύμα αν τα δύο στοιχεία συνδεθούν σε μία πηγή 100V και 60Hz. β) Να υπολογιστεί ο συντελεστής ισχύος γ) Αν συνδεθεί παράλληλα στα δύο στοιχεία ένας πυκνωτής έτσι ώστε ο συντελεστής ισχύος να γίνει μονάδα, να υπολογιστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή.

Απάντηση:

$$\alpha) \overset{\circ}{Z} = R + j\omega L = 20\angle 60^\circ \Omega$$

Τότε:

$$\overset{\circ}{I} = \frac{100\angle 0^\circ}{20\angle 60^\circ} = 5\angle -60^\circ A$$

β) Ο συντελεστής ισχύος είναι:

$$\Sigma I = \cos 60^\circ = 0.5 \text{ μεταπορείας}$$

γ) Η σύνθετη αγωγιμότητα του κυκλώματος μετά την προσθήκη του πυκνωτή είναι:

$$\overset{\circ}{Y} = \frac{1}{\overset{\circ}{Z}} + j\omega C = \frac{1}{10 + j17.34} + j377C = \frac{1}{40} + j(377C - 0.0434)$$

Για να είναι ο συντελεστής ισχύος ίσος με τη μονάδα θα πρέπει το φανταστικό μέρος να ισούται με το μηδέν. Επομένως προκύπτει ότι:

$$C = \frac{0.0434}{377} = 115 \mu F$$

22) Μία σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z} = (15 + j20)\Omega$ τροφοδοτείται από μία πηγή 125V και 60Hz . Πόση ενέργεια παρέχεται στην αντίσταση κατά τη διάρκεια μίας περιόδου της εφαρμοζόμενης τάσης;

Απάντηση:

Έστω $\overset{\circ}{V} = 125\angle 0^\circ$. Τότε:

$$\overset{\circ}{I} = \frac{125\angle 0^\circ}{15 + j20} = 5\angle -53.1^\circ$$

$$P = 125 \cdot 5 \cos(53.1^\circ) = 375W$$

$$E = P \cdot t = 375 \frac{J}{s} \cdot \frac{1}{60} s = 6.25J$$

23) Ένα κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα 2A στα 120V και καταναλώνει 120W ισχύ. Ένας πυκνωτής συνδέεται σε σειρά με το παραπάνω κύκλωμα. Προκύπτει ότι το μέτρο του ρεύματος αυξάνεται. Να υπολογιστούν οι τιμές των στοιχείων του κυκλώματος.

Απάντηση:

Έστω $\overset{\circ}{Z} = Z\angle \phi \Omega$.

Επειδή το ρεύμα αυξάνεται όταν ο πυκνωτής συνδέεται σε σειρά, το αρχικό κύκλωμα έχει επαγωγική συμπεριφορά και η γωνία ϕ είναι θετική.

$$\phi = \cos^{-1} \frac{P}{VI} = \cos^{-1} \frac{120}{2 \cdot 120} = 60^\circ$$

$$\left| \overset{\circ}{Z} \right| = \frac{V}{I} = \frac{120}{2} = 60\Omega$$

$$\overset{\circ}{Z} = 60\angle 60^\circ = 30 + j51.96$$

$$R = 30\Omega$$

$$\omega L = 51.96\Omega \Leftrightarrow L = \frac{51.96}{377} = 137.83mH$$

24) Δύο σύνθετες αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z}_1 = 10\angle -53.13^\circ\Omega$ και $\overset{\circ}{Z}_2 = 20\angle 36.87^\circ\Omega$ είναι συνδεδεμένες παράλληλα. Ο συνδυασμός των αντιστάσεων τροφοδοτείται από μία πηγή τάσης και το ολικό ρεύμα είναι $2 + jA$. α) Να υπολογιστεί η μιγαδική ισχύς για κάθε κλάδο. β) Να επαληθευτεί ότι η ολική μιγαδική ισχύς είναι το άθροισμα της μιγαδικής ισχύος κάθε κλάδου.

Απάντηση:

α) Η ολική σύνθετη αγωγιμότητα είναι:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Y} &= \overset{\circ}{Y}_1 + \overset{\circ}{Y}_2 = \frac{1}{\overset{\circ}{Z}_1} + \frac{1}{\overset{\circ}{Z}_2} = \frac{1}{10}\angle 53.13^\circ + \frac{1}{20}\angle -36.87^\circ = 0.06 + j0.08 + 0.04 - j0.03 = \\ &= 0.1 + j0.05 = 0.1118\angle 26.5^\circ S \end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{I} = 2 + j = 2.236\angle 26.5^\circ A$$

$$\overset{\circ}{V} = \frac{\overset{\circ}{I}}{\overset{\circ}{Y}} = \frac{2.236\angle 26.5^\circ}{0.1118\angle 26.5^\circ} = 20\angle 0^\circ V$$

$$\overset{\circ}{I}_1 = \overset{\circ}{V} \overset{\circ}{Y}_1 = (20\angle 0^\circ) \left(\frac{1}{10}\angle 53.13^\circ\right) = 2\angle 53.13^\circ A$$

$$\overset{\circ}{I}_2 = \overset{\circ}{V} \overset{\circ}{Y}_2 = (20\angle 0^\circ) \left(\frac{1}{20}\angle -36.87^\circ\right) = 1\angle -36.87^\circ A$$

$$\overset{\circ}{S}_1 = \overset{\circ}{V} \overset{\circ}{I}_1^* = (20\angle 0^\circ)(2\angle -53.13^\circ) = 40\angle -53.13^\circ = 24 - j32VA$$

$$\overset{\circ}{S}_2 = \overset{\circ}{V} \overset{\circ}{I}_2^* = (20\angle 0^\circ)(1\angle 36.87^\circ) = 20\angle 36.87^\circ = 16 + j12VA$$

β) Ισχύει:

$$\overset{\circ}{S} = \overset{\circ}{S}_1 + \overset{\circ}{S}_2 = \overset{\circ}{V} \overset{\circ}{I}_1^* = 40 - j20VA$$

Αλλιώς:

$$\overset{\circ}{S} = \overset{\circ}{V} \overset{\circ}{I}^* = (20\angle 0^\circ)(2.236\angle -26.5^\circ) = 44.72\angle -26.5^\circ = 40 - j19.95VA$$

Όπως αποδείχτηκε η ολική μιγαδική ισχύς είναι το άθροισμα της μιγαδικής ισχύος κάθε κλάδου. Η μικρή διαφορά στην τιμή οφείλεται στη στρογγυλοποίηση.

25) Μία αντίσταση $R=10\Omega$, ένα πηνίο $L=0.1H$ και ένας πυκνωτής είναι συνδεδεμένα παράλληλα και ο συνδυασμός τους τροφοδοτείται από μία πηγή τάσης $110V$ και $60Hz$. α) Να υπολογιστεί το ρεύμα εισόδου και η πραγματική ισχύς εισόδου β) να υπολογιστεί η γωνία φάσης, γ) Να υπολογιστεί η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση των 10Ω .

Απάντηση:

$$\alpha) \overset{\circ}{Y}_1 = \frac{1}{R} = \frac{1}{10} + j0 = 0.1 + j0$$

$$\overset{\circ}{Y}_2 = \frac{1}{j\omega L} = 0 - \frac{j}{377 \cdot 0.1} = 0 - j0.0265$$

$$\overset{\circ}{Y}_3 = \frac{1}{\frac{-j}{\omega C}} = j\omega C = j377 \cdot 600 \cdot 10^{-6} = 0 + j0.2262$$

Επομένως:

$$\overset{\circ}{Y} = \overset{\circ}{Y}_1 + \overset{\circ}{Y}_2 + \overset{\circ}{Y}_3 = 0.1 + j0.1997 = 0.223\angle 63.4^\circ S$$

Έστω $\overset{\circ}{V} = 110\angle 0^\circ$ Τότε το ρεύμα εισόδου είναι:

$$\overset{\circ}{I} = \overset{\circ}{V} \overset{\circ}{Y} = (110\angle 0^\circ)(0.223\angle 63.4^\circ) = 24.57\angle 63.4^\circ A = 11 + j21.97A$$

Η πραγματική ισχύς εισόδου είναι:

$$P = VI \cos \phi = 110 \cdot 24.57 \cos 63.4^\circ = 1210W$$

β) Η γωνία φάσης είναι 63.4° .

$$\gamma) \text{Είναι } P_R = \frac{V^2}{R} = \frac{110^2}{10} = 1210W$$

26) Μία αντίσταση των 5Ω συνδέεται σε σειρά με ένα πηνίο με σύνθετη αντίσταση 3Ω . Ο συνδυασμός τους συνδέεται σε σειρά με μία αντίσταση των 4Ω . α) Αν το ολικό ρεύμα εισόδου είναι $40\angle 0^\circ A$ να βρεθεί ο συντελεστής ισχύος του κυκλώματος. Είναι ο συντελεστής ισχύος εξαρτώμενος από το ρεύμα ή την τάση εισόδου; β) Να υπολογιστεί η μιγαδική ισχύς.

Απάντηση:

α) Είναι:

$$\overset{\circ}{Z} = \frac{(5 - j3) \cdot 4}{5 - j3 + 4} = \frac{20 - j12}{9 - j3} = 2.4 - j0.53 = 2.46\angle -12.45^\circ \Omega$$

$$\Sigma I = \cos(-12.45^\circ) = 0.976 \text{ προπορείας}$$

Ο συντελεστής ισχύος δεν εξαρτάται από την είσοδο.

$$\beta) P = I^2 R = 40^2 \cdot 2.4 = 3840W$$

$$Q = I^2 X = 40^2 \cdot 0.53 = 848VAR$$

Επομένως:

$$\overset{\circ}{S} = P - jQ = 3840 - j848VA$$

5.13. Άλυτες ασκήσεις

5.1) Σε ένα κύκλωμα η εφαρμοζόμενη τάση είναι $v = 14.14\cos\omega t$ (V) και το ρεύμα είναι $i = 17.1\cos(\omega t - 14.05^\circ)$ (mA). Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες που σχετίζονται με την ισχύ.

(Απάντηση: $P = 117mW$, $Q = 29.3mVAR$, $\Sigma I = 0.97$ μεταπορείας)

5.2) Σε ένα κύκλωμα η εφαρμοζόμενη τάση είναι $v = 340\sin(\omega t - 60^\circ)$ (V) και το ρεύμα είναι $i = 13.3\sin(\omega t - 48.7^\circ)$ (A). Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες που σχετίζονται με την ισχύ.

(Απάντηση: $P = 2217W$, $Q = 443VAR$, $\Sigma I = 0.981$ προπορείας)

5.3) Ένα κύκλωμα έχει συνδεδεμένα σε σειρά δύο στοιχεία για τα οποία ισχύει $R = 5\Omega$ και $X_L = 15\Omega$. Η ενδεικνύμενη τιμή της τάσης κατά μήκος της αντίστασης είναι 31.6V. Να υπολογιστεί η μιγαδική ισχύς και ο συντελεστής ισχύος.

(Απάντηση: $200 + j600VA$, $\Sigma I = 0.316$ μεταπορείας)

5.4) Ένα κύκλωμα έχει σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z} = 8 - j6\Omega$ και η εφαρμοζόμενη τάση είναι $70.7\angle -90^\circ V$. Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες που σχετίζονται με την ισχύ.

(Απάντηση: $P = 200W$, $Q = 150VAR$, $\Sigma I = 0.8$ προπορείας)

5.5) Να υπολογιστεί η σύνθετη αντίσταση ενός κυκλώματος αν η μιγαδική ισχύς είναι $\overset{\circ}{S} = 5031\angle -26.57^\circ VA$ για εφαρμοζόμενη τάση $212.1\angle 0^\circ V$

(Απάντηση: $4 - j2\Omega$)

5.6) Να υπολογιστεί η σύνθετη αντίσταση ενός κυκλώματος αν η φαινόμενη ισχύς είναι $3500VA$, ο συντελεστής ισχύος είναι 0.76 μεταπορείας και η ενδεικνύμενη τιμή του ρεύματος είναι $18A$.

(Απάντηση: $10.8\angle 40.54^\circ\Omega$)

5.7) Ένα κύκλωμα έχει δύο παράλληλους κλάδους. Ο πρώτος έχει σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z}_1 = 10\angle 0^\circ\Omega$ ενώ ο δεύτερος $\overset{\circ}{Z}_2 = 8\angle -30^\circ\Omega$. Το ολικό ρεύμα είναι $i = 7.07\cos(\omega t - 90^\circ)$ (A). Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες που σχετίζονται με την ισχύ.

(Απάντηση: $P = 110W$, $Q = 32.9VAR$, $\Sigma I = 0.958$ προπορείας)

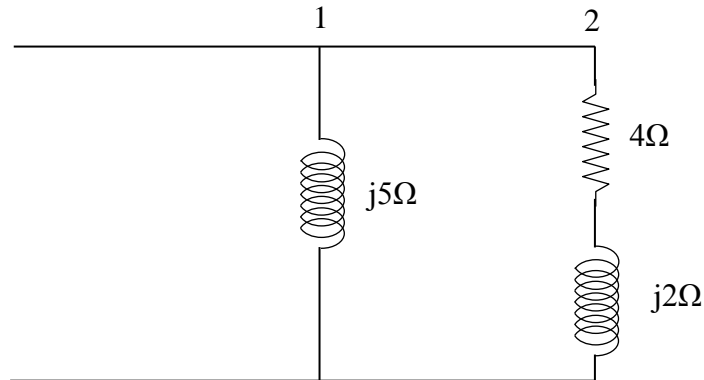
5.8) Ένα κύκλωμα έχει δύο παράλληλους κλάδους. Ο πρώτος έχει σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z}_1 = 2 - j5\Omega$ ενώ ο δεύτερος $\overset{\circ}{Z}_2 = 1 + j\Omega$. Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες που σχετίζονται με την ισχύ αν η αντίσταση των 2Ω καταναλώνει $20W$.

(Απάντηση: $P = 165W$, $Q = 95VAR$, $\Sigma I = 0.867$ μεταπορείας)

5.9) Ένα κύκλωμα έχει δύο παράλληλους κλάδους. Ο πρώτος έχει σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z}_1 = 4\angle -30^\circ\Omega$ ενώ ο δεύτερος $\overset{\circ}{Z}_2 = 5\angle 60^\circ\Omega$. Η ενδεικνύμενη τιμή της εφαρμοζόμενη τάσης είναι $20V$. Να σχεδιαστούν τα τρίγωνα ισχύος για κάθε κλάδο ξεχωριστά και στη συνέχεια να ενωθούν για να σχηματίσουν το ενιαίο τρίγωνο ισχύος.

(Απάντηση: $S_{\omega\lambda} = 128.1VA$, $\Sigma I = 0.989$ μεταπορείας)

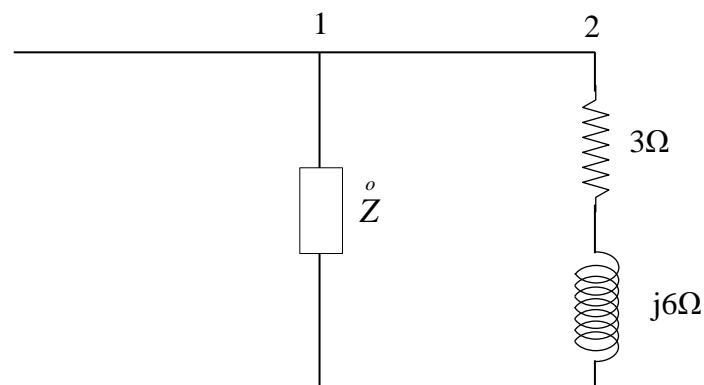
5.10) Να υπολογιστεί η μιγαδική ισχύς για το κύκλωμα του σχήματος 5.38 αν ο πρώτος κλάδος λαμβάνει 8kVAR.



Σχήμα 5.38: Κύκλωμα άσκησης 5.10

(Απάντηση: $\overset{\circ}{S} = 8 + j12kVA$, $\Sigma I = 0.555$ μεταφορείας)

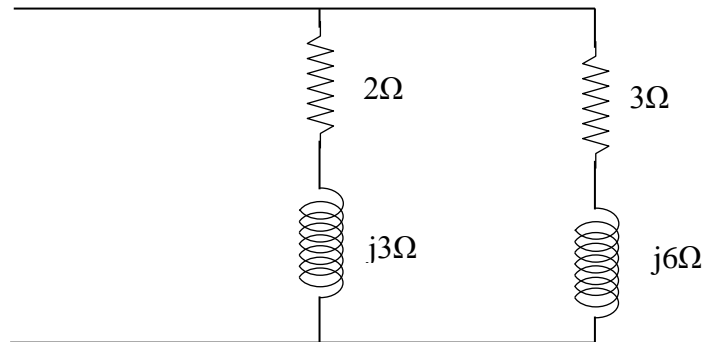
5.11) Στο κύκλωμα του σχήματος 5.39, να υπολογιστεί η $\overset{\circ}{Z}$ αν $S_{ολ} = 3373VA$, $\Sigma I = 0.938$ προφορείας και η αντίσταση των 3Ω έχει πραγματική ισχύ 666W.



Σχήμα 5.39: Κύκλωμα άσκησης 5.11

(Απάντηση: $2 - j2\Omega$)

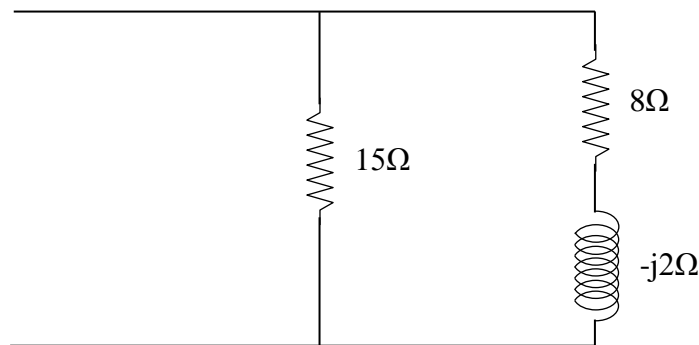
5.12) Το κύκλωμα του σχήματος 5.40 έχει ολική πραγματική ισχύ ίση με 1500W. Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες που σχετίζονται με την ισχύ.



Σχήμα 5.40: Κύκλωμα άσκησης 5.12

(Απάντηση: $\overset{\circ}{S} = 1500 + j2471\text{VA}$, $\Sigma I = 0.519$ μεταφορείας)

5.13) Να υπολογιστεί η πραγματική ισχύς στις αντιστάσεις 15Ω και 8Ω στο σχήμα 5.41 αν η ολική πραγματική ισχύς στο κύκλωμα είναι ίση με 2000W.



Σχήμα 5.41: Κύκλωμα άσκησης 5.13

(Απάντηση: 723W, 1277W)

5.14) Ένα κύκλωμα αποτελείται από τρεις παράλληλους κλάδους για τους οποίους ισχύει: $\overset{\circ}{Z}_1 = 25\angle 15^\circ\Omega$, $\overset{\circ}{Z}_2 = 15\angle 60^\circ\Omega$ και $\overset{\circ}{Z}_3 = 15\angle 90^\circ\Omega$. Η εφαρμοζόμενη τάση είναι ίση με $\overset{\circ}{V} = 339.4\angle -30^\circ\text{V}$. Να υπολογιστεί η ολική φαινόμενη ισχύς και ο ολικός συντελεστής ισχύος.

(Απάντηση: 4291VA, $\Sigma I = 0.966$ μεταφορείας)

5.15) Σε ένα κύκλωμα είναι συνδεδεμένα παράλληλα τρία φορτία. Για το κάθε φορτίο ισχύει: Φορτίο 1: 5kW, $\Sigma I=0.8$ μεταπορείας, Φορτίο 2: 4kVA, 2kVAR (χωρητική συμπεριφορά), Φορτίο 3: 6kVA, $\Sigma I=0.9$ μεταπορείας. Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες που σχετίζονται με την ισχύ.

(Απάντηση: 14.535kVA, $\Sigma I=0.954$ μεταπορείας)

5.16) Σε ένα κύκλωμα είναι συνδεδεμένα παράλληλα τρία φορτία. Για το κάθε φορτίο ισχύει: Φορτίο 1: 200VA, $\Sigma I=0.7$ μεταπορείας, Φορτίο 2: 350VA, $\Sigma I=0.5$ μεταπορείας, Φορτίο 3: 275VA, $\Sigma I=1$. Να βρεθούν όλες οι πληροφορίες που σχετίζονται με την ισχύ.

(Απάντηση: $\overset{\circ}{S} = 590 + j444VA$, $\Sigma I=0.799$ μεταπορείας)

5.17) Ένα φορτίο (4500VA) με συντελεστή ισχύος 0.75 μεταπορείας τροφοδοτείται από μία πηγή των 60Hz με ενδεινύμενη τιμή τάσης 240V. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα (σε μF) του πυκνωτή, που αν συνδεθεί παράλληλα με το φορτίο θα βελτιώσει το συντελεστή ισχύος σε α) 0.9 μεταπορείας, β) 0.9 προπορείας. γ) Τι ποσοστό μείωσης υφίσταται το ρεύμα και η ολική φαινόμενη ισχύς στο ερώτημα α; δ) Τι περαιτέρω ποσοστό μείωσης υφίσταται το ρεύμα και η ολική φαινόμενη ισχύς στο ερώτημα α;

(Απάντηση: α) 61.8 μF , β) 212 μF , γ) 16.1%, δ) καθόλου)

5.18) Η προσθήκη πυκνωτών (20kVAR) βελτίωσε το συντελεστή ισχύος ενός συγκεκριμένου φορτίου σε 0.9 μεταπορείας. Να προσδιοριστεί η μιγαδική ισχύς πριν την προσθήκη των πυκνωτών αν η τελική φαινόμενη ισχύς είναι 185kVA.

(Απάντηση: $\overset{\circ}{S} = 166.5 + j100.6kVA$)

5.19) Σε ένα φορτίο (25kVA) με συντελεστή ισχύος 0.8 μεταπορείας προστίθεται νέο φορτίο με μοναδιαίο συντελεστή ισχύος. Πόσα kW καταναλώνει το νέο φορτίο, αν ο νέο ολικός συντελεστής ισχύος είναι ίσος με 0.85 μεταπορείας.

(Απάντηση: 4.2kW)

5.20) Ένας μετασχηματιστής 500kVA δουλεύει σε πλήρες φορτίο με συντελεστή ισχύος 0.6 μεταπορείας. Στη συνέχεια προστίθενται στο κύκλωμα πυκνωτές και ο συντελεστής ισχύος βελτιώνεται σε 0.9 μεταπορείας. Ύστερα από τη διόρθωση τι ποσοστό kVA μεταφέρει ο μετασχηματιστής;

(Απάντηση: 66.7%)

5.21) Ένας μετασχηματιστής 100kVA δουλεύει στο 80% του πλήρες φορτίου με συντελεστή ισχύος 0.85 μεταπορείας. Πόσα kVA επιπρόσθετου φορτίου με συντελεστή ισχύος 0.6 μεταπορείας θα φέρουν το μετασχηματιστή σε λειτουργία πλήρους φορτίου.

(Απάντηση: 21.2kVA)

5.22) Ένας μετασχηματιστής 250kVA δουλεύει σε πλήρες φορτίο με συντελεστή ισχύος 0.8 μεταπορείας. α) Πόσα kVAR από πυκνωτές πρέπει να προστεθούν έτσι ώστε ο συντελεστής ισχύος να γίνει 0.9 μεταπορείας; β) Μετά τη βελτίωση του συντελεστή ισχύος, προστίθεται ένα νέο φορτίο με συντελεστή ισχύος 0.5 μεταπορείας. Πόσα kVA από το νέο φορτίο θα φέρουν το μετασχηματιστή στα καθορισμένα kVA και ποιος είναι ο τελικός συντελεστής ισχύος;

(Απάντηση: α) 53.1kVAR, β) 33.35kVA, 0.867 μεταπορείας)

5.23) Ένα φορτίο (65kVA) με συντελεστή ισχύος μεταπορείας συνδυάζεται με ένα σύγχρονο κινητήρα (25kVA) ο οποίος λειτουργεί με $\Sigma I=0.6$ προπορείας. Να υπολογιστεί ο συντελεστής ισχύος του φορτίου (65kVA), αν ο ολικός συντελεστής ισχύος είναι 0.85 μεταπορείας.

(Απάντηση: 0.585 μεταπορείας)

5.24) Ένας κινητήρας επαγωγής (2000kVA) έχει συντελεστή ισχύος 0.8 μεταπορείας. Στη συνέχεια προστίθενται σύγχρονοι κινητήρες (500kVA) με μοναδιαίο συντελεστή ισχύος. Αν ο ολικός συντελεστής ισχύος είναι 0.9 μεταπορείας, ποιος είναι ο συντελεστής ισχύος των σύγχρονων κινητήρων;

(Απάντηση: 0.92 προπορείας)

5.25) Να υπολογιστεί η μέγιστη ενέργεια του πηνίου στο παράδειγμα 5.17 (α) και να αποδειχθεί ότι είναι μεγαλύτερη από το μέγιστο της επιμέρους ενέργειας όταν η κάθε πηγή εφαρμόζεται ξεχωριστά (E_1 και E_2).

(Απάντηση: $E = 1.6mJ$, $E_1 = 306\mu J$, $E_2 = 506\mu J$)

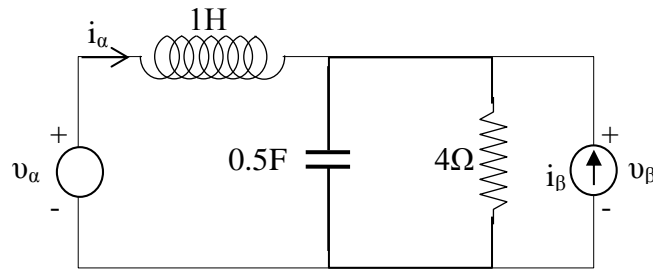
5.26) Η τάση στα άκρα και το ρεύμα σε ένα κύκλωμα είναι $V_\varepsilon = 120V$ και $I_\varepsilon = 30\angle -60^\circ A$ για $f = 60Hz$. Να υπολογιστεί η μιγαδική ισχύς. Να υπολογιστεί επίσης η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος και το ισοδύναμο κύκλωμα που αποτελείται από δύο στοιχεία σε σειρά.

(Απάντηση: $\overset{\circ}{S} = 1800 + j3117.7VA$, $\overset{\circ}{Z} = 2 + j3.464 = R + j\omega L$, $R = 2\Omega$, $L = 9.2mH$)

5.27) Στο κύκλωμα του σχήματος 5.42 η πηγή τάσης έχει ενδεικνύμενη τιμή 10V στα $\omega = 1 \text{ rad/s}$ και η πηγή ρεύματος είναι μηδέν. Α) Να υπολογιστεί η πραγματική και η άεργος ισχύς που μεταφέρεται από την πηγή τάσης. β) Να υπολογιστεί η ενδεικνύμενη τιμή του ρεύματος στην αντίσταση και η πραγματική ισχύς που απορροφάται από την αντίσταση καθώς επίσης και η άεργος ισχύς στο πηνίο και στον πυκνωτή. Να επαληθευτεί η ισότητα μεταξύ πραγματικής και άεργου ισχύος ανάμεσα στην πηγή και τα στοιχεία R, L, C.

(Απάντηση: α) $P = 80W$, $Q = -60VAR$,

β) $I_{\epsilon,R} = 5\sqrt{2}A$, $P_R = 80W$, $Q_C = -160VAR$, $Q_L = 100VAR$, $P_R = P$, $Q = Q_L + Q_C$)



Σχήμα 5.42: Κύκλωμα άσκησης 5.27

5.28) Στο κύκλωμα του σχήματος 5.42 είναι $v_a = 10\sqrt{2} \cos t$ και $i_b = 10\sqrt{2} \cos 2t$. α) Να υπολογιστεί η πραγματική ισχύς που μεταφέρεται από κάθε πηγή. β) Να υπολογιστεί το ρεύμα στην αντίσταση και η πραγματική ισχύς που καταναλώνεται από αυτή.

(Απάντηση: α) $P_a = P_b = 80W$,

β) $i_R = 2\sqrt{10} \cos(t - 26.5^\circ) + 2\sqrt{10} \cos(2t - 63.4^\circ)$, $P_R = 160W$)

5.29) Μία ac πηγή έχει ενδεικνύμενη πηγή τάσης 6kV και μεταφέρει ισχύ 100kW με συντελεστή ισχύος 0.8 μεταπορείας σε δύο παράλληλα φορτία. Οι συντελεστές ισχύος για το κάθε φορτίο είναι $\Sigma I_1 = 0.7$ μεταπορείας και $\Sigma I_2 = 0.1$ προπορείας. α) Να υπολογιστεί η πραγματική ισχύς που καταναλώνεται σε κάθε φορτίο. β) Να υπολογιστεί η σύνθετη αντίσταση κάθε φορτίου και ο συνδυασμός τους.

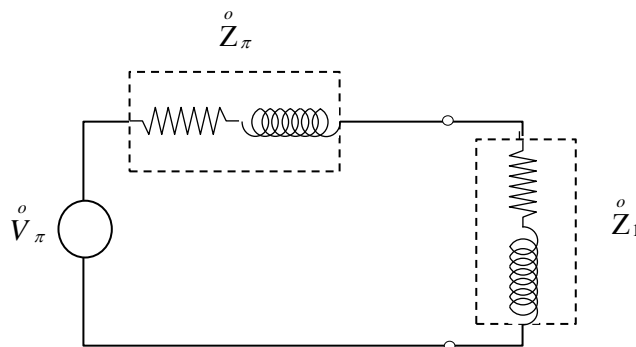
(Απάντηση: α) $P_1 = 97.54kW$, $P_2 = 2.46kW$

β) $\overset{\circ}{Z}_1 = 0.244 \angle -84.26^\circ \Omega$, $\overset{\circ}{Z}_2 = 0.043 \angle 45.57^\circ \Omega$, $\overset{\circ}{Z} = 0.048 \angle 36.87^\circ \Omega$)

5.30) Μία πηγή τάσης μοντελοποιείται από μία ιδανική πηγή τάσης $\overset{\circ}{V}_\pi$ με ενδεικνύμενη τιμή τάσης 320V σε σειρά με μία σύνθετη αντίσταση $\overset{\circ}{Z}_\pi = 50 + j100\Omega$.

Η πηγή τροφοδοτεί ένα φορτίο $\overset{\circ}{Z} = 200 + j100\Omega$ όπως φαίνεται στο σχήμα 5.43. α) Να υπολογιστεί η πραγματική και η άεργος ισχύς που μεταφέρεται από την πηγή. β) Να υπολογιστεί η πραγματική και η άεργος ισχύς που καταναλώνεται από το φορτίο. γ) Ένα στοιχείο jX προστίθεται παράλληλα στο φορτίο $\overset{\circ}{Z}$. Να υπολογιστεί το X έτσι ώστε η ισχύς που αποδίδεται στο $\overset{\circ}{Z}$ να είναι μέγιστη.

(Απάντηση: α) $P_\pi = 250W$, $Q_\pi = 200VAR$,
 β) $P = 200W$, $Q = 100VAR$,
 γ) $X = -100\Omega$)



Σχήμα 5.43: Κύκλωμα άσκησης 5.30

Κεφάλαιο 6: Τριφασικά δίκτυα

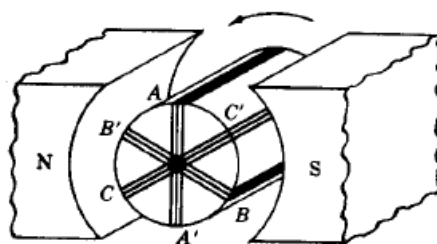
6.1. Εισαγωγή

Η ηλεκτρική ενέργεια παράγεται και διανέμεται μέσω τριφασικών δικτύων, επομένως η μελέτη της συνδεσμολογίας και της λειτουργίας τους έχει μεγάλη σημασία. Ένα τριφασικό δίκτυο αποτελείται από μία πηγή τάσης ac (συναντάται επίσης και ως εναλλακτήρας), η οποία παράγει τρεις ημιτονοειδείς συναρτήσεις τάσης. Αυτές οι συναρτήσεις έχουν το ίδιο μέτρο αλλά η φάση τους διαφέρει κατά 120° . Η ηλεκτρική ενέργεια μεταφέρεται σε τρία ή τέσσερα καλώδια τα οποία ονομάζονται ηλεκτρικές γραμμές. Τα περισσότερα από τα τριφασικά δίκτυα που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό είναι συμμετρικά, δηλαδή τα ρεύματα κάθε γραμμής έχουν ίδιο μέτρο αλλά η φάση τους διαφέρει κατά 120° . Γενικά στα συστήματα ισχύος είναι επιθυμητή η σταθερή παροχή ενέργειας από την παραγωγή ως τον καταναλωτή και γι' αυτό χρησιμοποιούνται και το τριφασικό σύστημα παραγωγής και μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας.

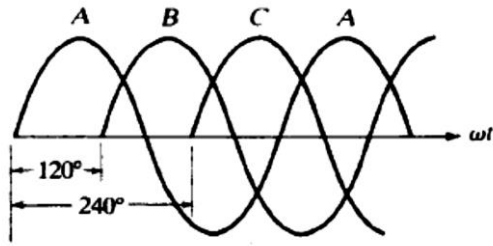
6.2. Τριφασικά δίκτυα

Για την παραγωγή της ηλεκτρικής ενέργειας χρησιμοποιούνται τριφασικές γεννήτριες. Κάθε στοιχειώδης γεννήτρια αποτελείται από ένα ακίνητο μέρος που ονομάζεται στάτης και ένα κινούμενο που ονομάζεται δρομέας. Στον στάτη τοποθετούνται τρία τυλίγματα (πηνία) με γωνιακή απόκλιση 120° το ένα από το άλλο όπως φαίνεται στο σχήμα 6.1. Στα τυλίγματα αυτά αναπτύσσονται τρεις ημιτονοειδείς τάσεις ίδιας συχνότητας αλλά η καθεμία έχει διαφορά φάσης 120° σε σχέση με την άλλη. Κανονικά τα μέτρα των τάσεων είναι ίσα και τότε λέμε ότι η γεννήτρια είναι συμμετρική.

Αν ο δρομέας περιστρέφεται με τη φορά των δεικτών του ρολογιού (δεξιόστροφα) τότε ο δρομέας συναντά τα πηνία με τη σειρά A-B-C-A-B-C. Στην περίπτωση αυτή οι τάσεις κάθε πηνίου έχουν κυματομορφές όπως φαίνεται στο σχήμα 6.2. Η τάση για το πηνίο B καθυστερεί κατά 120° σε σχέση με την τάση στο πηνίο A ενώ η τάση στο πηνίο C καθυστερεί κατά 240° . Ένα τέτοιου είδους σύστημα τάσεων ονομάζεται ευθύ συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων. Αν ο δρομέας περιστρέφεται αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού (αριστερόστροφα) τότε ο δρομέας συναντά τα πηνία με τη σειρά A-C-B-A-C-B. Ένα τέτοιου είδους σύστημα τάσεων ονομάζεται αντίστροφο συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων.



Σχήμα 6.1: Τριφασική γεννήτρια



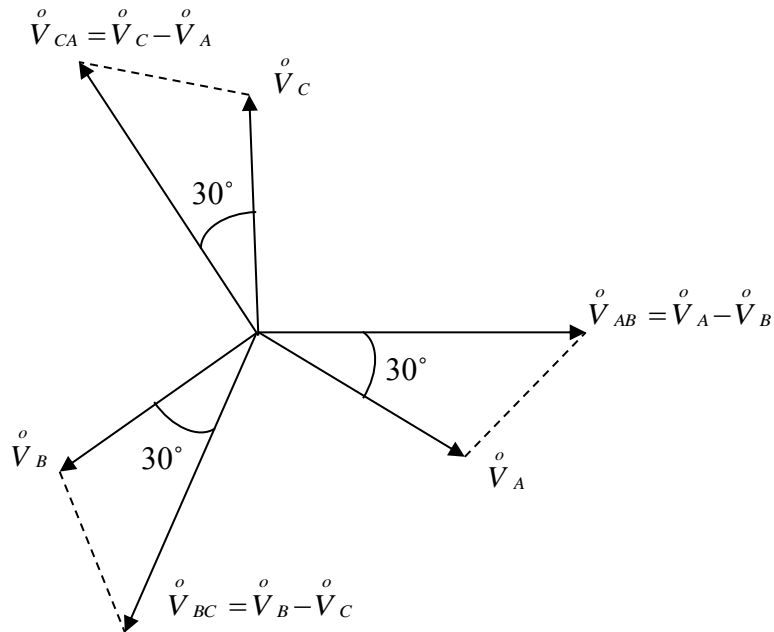
Σχήμα 6.2: Ευθύ συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων

Οι τάσεις σε ένα ευθύ συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων στο πεδίο του χρόνου (καθώς επίσης και τα αντίστοιχα phasors) δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$v_A(t) = V\sqrt{2} \cos \omega t, \quad v_B(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t - 120^\circ), \quad v_C(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t - 240^\circ) \quad (6.1)$$

$$\overset{\circ}{V}_A(t) = V\angle 0^\circ, \quad \overset{\circ}{V}_B(t) = V\angle -120^\circ, \quad \overset{\circ}{V}_C(t) = V\angle -240^\circ \quad (6.2)$$

Το διάγραμμα με τα phasor της τάσης φαίνεται στο σχήμα 6.3.

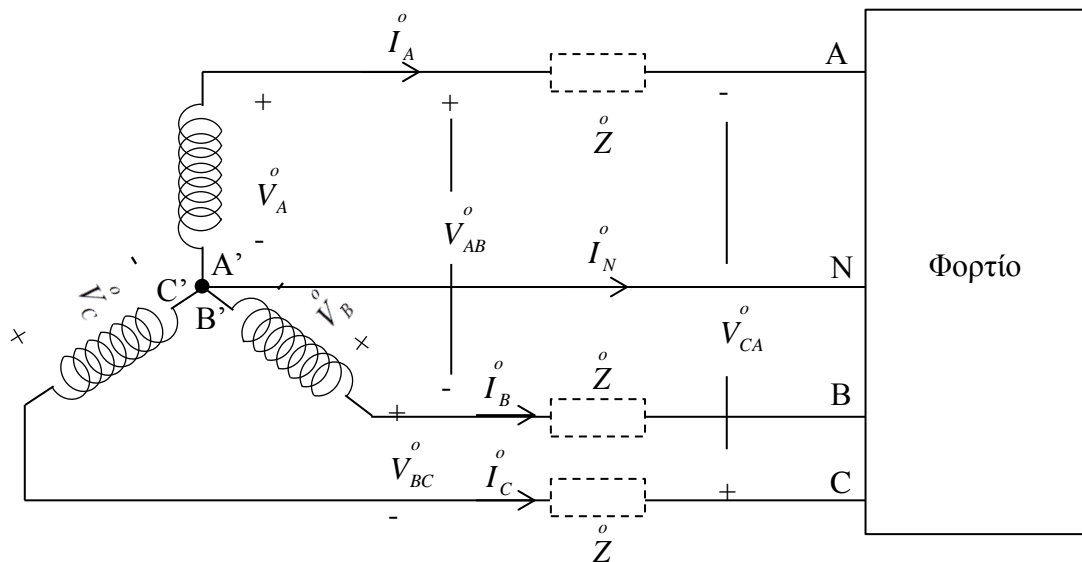


Σχήμα 6.3: Διάγραμμα phasor τάσης σε ένα ευθύ συμμετρικό τριφασικό σύστημα

6.3. Σύνδεση σε αστέρα (Y) και τρίγωνο (Δ)

Τα άκρα των τριών πηνίων είναι δυνατό να συνδεθούν με δύο διαφορετικούς τρόπους: σε αστέρα (Y) ή τρίγωνο (Δ). Στη σύνδεση σε αστέρα (Y) τα άκρα των πηνίων A', B', C' ενώνονται σε ένα κοινό σημείο που καθορίζει τον ουδέτερο N. Τα άλλα άκρα των πηνίων A, B, C συνδέονται με το φορτίο και αποτελούν τις τρεις γραμμές του τριφασικού συστήματος. Αν στο σημείο του ουδέτερου συνδεθεί μία επιπλέον γραμμή τότε το σύστημα των τριών γραμμών γίνεται σύστημα με τέσσερις γραμμές μεταφοράς. Στο σχήμα 6.4 φαίνεται ένα σύστημα με τέσσερις γραμμές (σύνδεση σε αστέρα Y).

Στη σύνδεση σε αστέρα (Y) υπάρχουν δύο ομάδες τάσεων. Στην πρώτη ομάδα ανήκουν οι τάσεις μεταξύ της κάθε γραμμής A, B, C και του ουδέτερου N. Αυτές ονομάζονται φασικές τάσεις και συμβολίζονται με $\overset{\circ}{V}_A, \overset{\circ}{V}_B, \overset{\circ}{V}_C$. Οι τάσεις αυτές έχουν το ίδιο μέτρο και διαφορά φάσης 120° . Στη δεύτερη ομάδα ανήκουν οι τάσεις μεταξύ των φάσεων A, B, C . Οι τάσεις αυτές ονομάζονται πολικές τάσεις και συμβολίζονται με $\overset{\circ}{V}_{AB}, \overset{\circ}{V}_{BC}, \overset{\circ}{V}_{CA}$. Οι τάσεις αυτές έχουν το ίδιο μέτρο και διαφορά φάσης 120° . Αντιθέτως όπως φαίνεται και στο σχήμα 6.4 υπάρχει ένα ρεύμα το οποίο ρέει από την τροφοδοσία μέσω των γραμμών στο φορτίο.

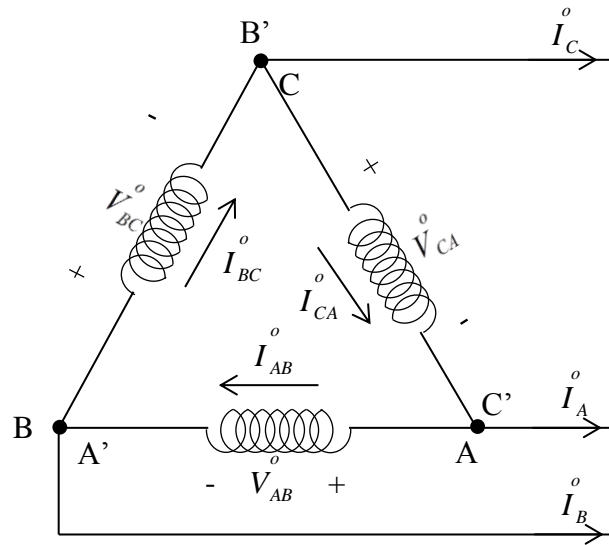


Σχήμα 6.4: Σύνδεση σε αστέρα (Y)

Στη σύνδεση σε τρίγωνο (Δ) τα άκρα των πηνίων ενώνονται με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα 6.5 σχηματίζοντας ένα τρίγωνο. Στη σύνδεση σε τρίγωνο δεν υπάρχει ουδέτερος και το σύστημα δε είναι δυνατό να γίνει τεσσάρων γραμμών με εξαίρεση τη χρήση ενός μετασχηματιστή με σύνδεση τριγώνου-αστέρα (Δ-Y). Στη σύνδεση σε τρίγωνο (Δ) οι πολικές τάσεις είναι ίδιες με τις φασικές τάσεις όπως φαίνεται και στο σχήμα 6.5. Όμως τα ρεύματα γραμμής $\overset{\circ}{I}_A, \overset{\circ}{I}_B, \overset{\circ}{I}_C$ διαφέρουν από τα φασικά ρεύματα $\overset{\circ}{I}_{AB}, \overset{\circ}{I}_{BC}, \overset{\circ}{I}_{CA}$ όπως φαίνεται και στο σχήμα 6.5.

Οι συνδέσεις σε αστέρα (Y) ή τρίγωνο (Δ) ισχύουν όχι μόνο για τριφασικές γεννήτριες αλλά είναι δυνατό να εφαρμοστούν και σε τριφασικούς μετασχηματιστές

και για σύνδεση τριφασικού φορτίου. Γενικά η σύνδεση σε αστέρα (Y) προτιμάται στις γεννήτριες ενώ και οι δύο συνδέσεις χρησιμοποιούνται σε μετασχηματιστές και φορτία.



Σχήμα 6.5: Σύνδεση σε τρίγωνο (Δ)

6.4. Phasor τάσης σε τριφασικό δίκτυο

Η επιλογή της γωνίας φάσης για μία τάση σε ένα τριφασικό δίκτυο επηρεάζει όλες τις γωνίες των άλλων τάσεων. Επιπλέον η διαφορά φάσης που έχουν τα phasors της τάσης μεταξύ τους καθορίζει αν το σύστημα είναι ευθύ συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων ή αντίστροφο συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων. Για παράδειγμα αν η τάση $\overset{\circ}{V}_A$ έχει γωνία 120° μεγαλύτερη από τη γωνία της $\overset{\circ}{V}_B$, τότε η v_{AN} προηγείται της v_{BN} κατά 120° και επομένως η ακολουθία είναι ABC (ευθύ συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων). Γενικά σε αυτό το κεφάλαιο ως μέγεθος αναφοράς, (μέγεθος αναφοράς σημαίνει ότι έχει γωνία 0°) θα θεωρείται η πολική τάση $\overset{\circ}{V}_{BC}$, δηλαδή θα είναι $\overset{\circ}{V}_{BC} = \sqrt{3}V \angle 0^\circ$.

Συγκεντρωτικά σε ένα ευθύ συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων (ABC) όπως αυτό που φαίνεται στο σχήμα 6.6, αν V_ϕ είναι το μέτρο της φασικής τάσης τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\overset{\circ}{V}_{AB} = \sqrt{3}V_\phi \angle 120^\circ$$

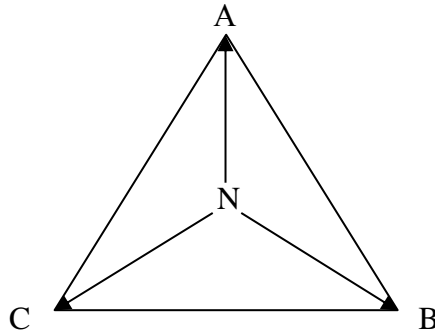
$$\overset{\circ}{V}_{BC} = \sqrt{3}V_\phi \angle 0^\circ$$

$$\overset{\circ}{V}_{CA} = \sqrt{3}V_\phi \angle 240^\circ$$

$$\overset{\circ}{V}_A = \overset{\circ}{V}_B = \overset{\circ}{V}_C = V_\phi \angle 90^\circ$$

$$V_B^o = V_B^o = V_\phi \angle -30^\circ$$

$$V_C^o = V_C^o = V_\phi \angle -150^\circ$$



Σχήμα 6.6: Ευθύ συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων (ABC)

Αντίστοιχα, σε ένα αντίστροφο συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων (CBA) όπως αυτό που φαίνεται στο σχήμα 6.7, αν V_ϕ είναι το μέτρο της φασικής τάσης τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$V_{AB}^o = \sqrt{3}V_\phi \angle 240^\circ$$

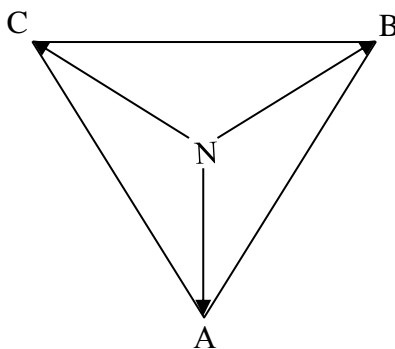
$$V_{BC}^o = \sqrt{3}V_\phi \angle 0^\circ$$

$$V_{CA}^o = \sqrt{3}V_\phi \angle 120^\circ$$

$$V_A^o = V_A^o = V_\phi \angle -90^\circ$$

$$V_B^o = V_B^o = V_\phi \angle 30^\circ$$

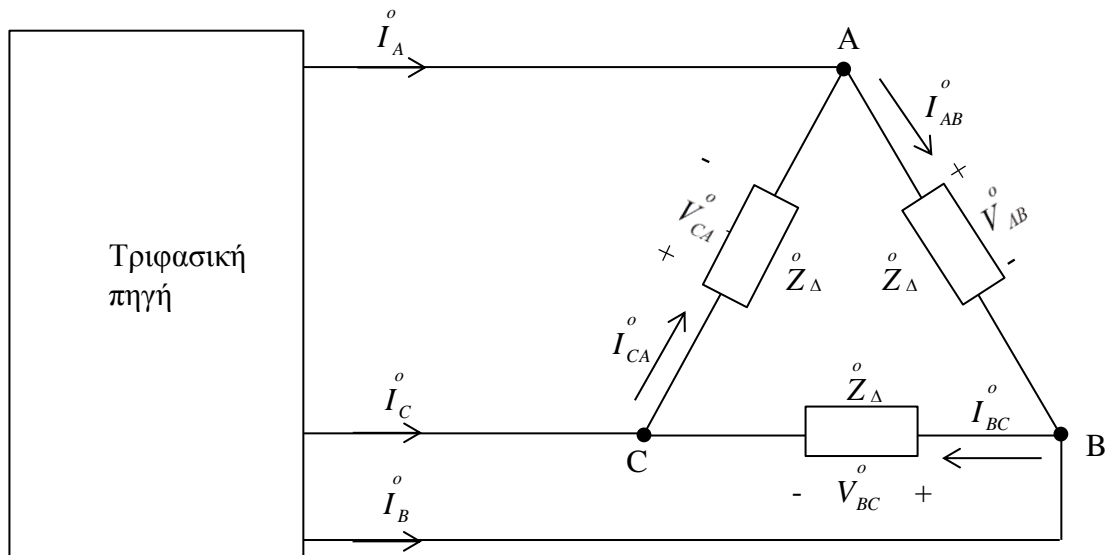
$$V_C^o = V_C^o = V_\phi \angle 150^\circ$$



Σχήμα 6.7: Αντίστροφο συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων (CBA)

6.5. Συμμετρικό φορτίο με σύνδεση τριγώνου

Τρεις ίσες σύνθετες αντιστάσεις που είναι συνδεδεμένες όπως στο σχήμα 6.8 αποτελούν ένα συμμετρικό φορτίο με σύνδεση τριγώνου. Τα ρεύματα που διαρρέουν τις σύνθετες αντιστάσεις ονομάζονται φασικά ρεύματα ή ρεύματα φορτίου, έχουν τα ίδια μέτρα ενώ οι φάσεις τους διαφέρουν κατά 120° . Τα ρεύματα γραμμής έχουν επίσης ίσα μέτρα και οι φάσεις του διαφέρουν κατά 120° . Με σύμβαση θεωρείται ότι η κατεύθυνση των ρευμάτων είναι από την πηγή στο φορτίο.



Σχήμα 6.8: Συμμετρικό φορτίο με σύνδεση τριγώνου

Παράδειγμα 6.1

Ένα τριφασικό σύστημα ABC με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης 120V έχει τρεις σύνθετες αντιστάσεις των $5\angle 45^\circ\Omega$ σε σύνδεση τριγώνου (Δ). Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής και να σχεδιαστεί το διάγραμμα με τα phasor της τάσης και του ρεύματος.

Απάντηση:

Η μέγιστη πολική τάση είναι: $120\sqrt{2} = 169.7\text{V}$. Οι πολικές τάσεις για το σύστημα ABC θα είναι:

$$V_{AB}^o = 169.7\angle 120^\circ\text{V}$$

$$V_{BC}^o = 169.7\angle 0^\circ\text{V}$$

$$V_{CA}^o = 169.7\angle 240^\circ\text{V}$$

Οι δείκτες στα ρεύματα καταδεικνύουν τη φορά του ρεύματος. Για παράδειγμα το ρεύμα I_{AB}^o περνάει από τη σύνθετη αντίσταση με φορά από τη γραμμή A προς τη γραμμή B. Επομένως τα φασικά ρεύματα είναι:

$$I_{AB}^{\circ} = \frac{V_{AB}^{\circ}}{Z} = \frac{169.7 \angle 120^{\circ}}{5 \angle 45^{\circ}} = 33.9 \angle 75^{\circ} A$$

$$I_{BC}^{\circ} = \frac{V_{BC}^{\circ}}{Z} = \frac{169.7 \angle 0^{\circ}}{5 \angle 45^{\circ}} = 33.9 \angle -45^{\circ} A$$

$$I_{CA}^{\circ} = \frac{V_{CA}^{\circ}}{Z} = \frac{169.7 \angle 240^{\circ}}{5 \angle 45^{\circ}} = 33.9 \angle 195^{\circ} A$$

Από το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff υπολογίζεται το ρεύμα γραμμής I_A° :

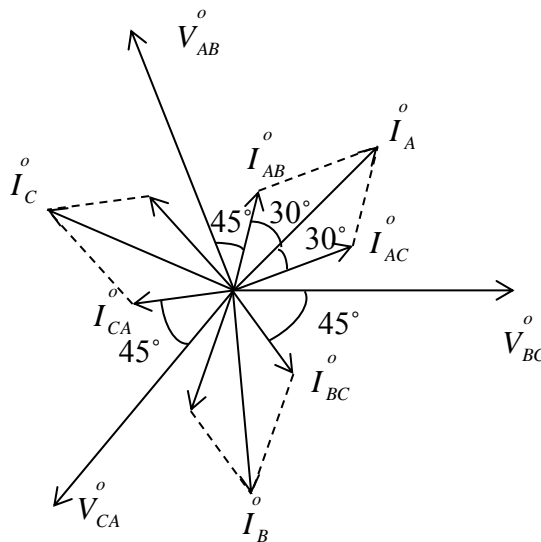
$$I_A^{\circ} = I_{AB}^{\circ} - I_{CA}^{\circ} = 33.9 \angle 75^{\circ} - 33.9 \angle 195^{\circ} = 58.7 \angle 45^{\circ} A$$

Ομοίως:

$$I_B^{\circ} = 58.7 \angle -75^{\circ} A \text{ και}$$

$$I_C^{\circ} = 58.7 \angle 165^{\circ} A$$

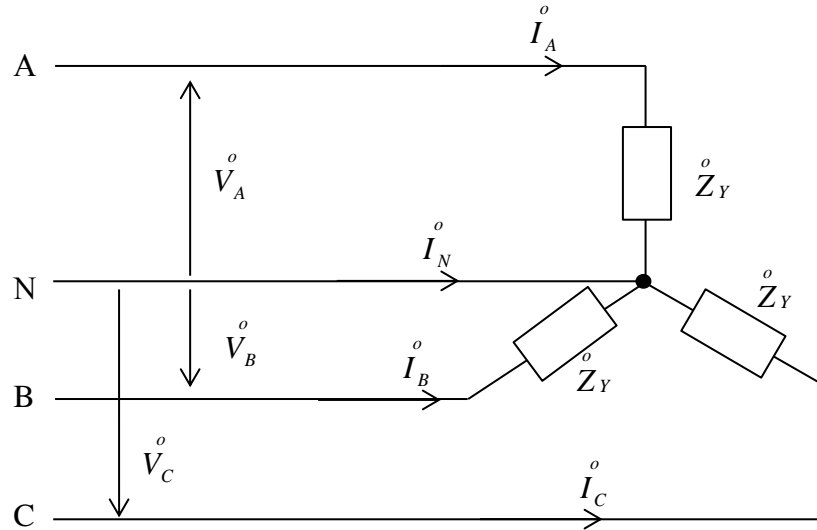
Τα phasor της τάσης και του ρεύματος παριστάνονται στο διάγραμμα του σχήματος 6.9. Εφόσον σχεδιαστεί ένα ρεύμα, τα άλλα ρεύματα σχεδιάζονται με βάση τη συμμετρία του διαγράμματος των phasor. Επίσης παρατηρείται ότι: $33.9 \cdot \sqrt{3} = 58.7$ όπως και υπολογίστηκε από το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff . Δηλαδή ισχύει: $I_{\gamma p} = \sqrt{3}I_{\phi}$ για ένα συμμετρικό φορτίο με σύνδεση τριγώνου (Y).



Σχήμα 6.9: Διάγραμμα phasor τάσεων και ρευμάτων παραδείγματος 6.1

6.6. Συμμετρικό φορτίο με σύνδεση αστέρα

Τρεις ίσες σύνθετες αντιστάσεις που είναι συνδεδεμένες όπως στο σχήμα 6.10 αποτελούν ένα συμμετρικό φορτίο με σύνδεση αστέρα. Τα ρεύματα που διαρρέουν τις σύνθετες αντιστάσεις είναι ίδια με τα ρεύματα γραμμής. Με σύμβαση θεωρείται ότι η κατεύθυνση των ρευμάτων είναι από την πηγή στο φορτίο.



Σχήμα 6.10: Συμμετρικό φορτίο με σύνδεση αστέρα

Παράδειγμα 6.2

Ένα τριφασικό σύστημα CBA με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης 120V έχει τρεις σύνθετες αντιστάσεις των $20\angle -30^\circ\Omega$ σε σύνδεση αστέρα (Y). Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής και να σχεδιαστεί το διάγραμμα με τα phasor της τάσης και του ρεύματος.

Απάντηση:

Η μέγιστη πολική τάση είναι: 169.7V και η φασική τάση είναι $\frac{169.7}{\sqrt{3}} = 98V$. Οι φασικές τάσεις για το σύστημα CBA είναι:

$$V_A^o = 98\angle -90^\circ V$$

$$V_B^o = 98\angle 30^\circ V$$

$$V_C^o = 98\angle 150^\circ V$$

Οπότε:

$$I_A^{\circ} = \frac{V_A^{\circ}}{Z} = \frac{98\angle -90^{\circ}}{20\angle -30^{\circ}} = 4.9\angle -60^{\circ}A$$

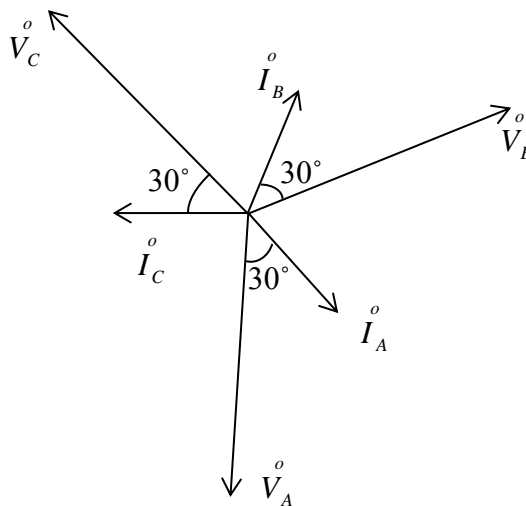
Ομοίως:

$$I_B^{\circ} = 4.9\angle 60^{\circ}A$$

$$I_C^{\circ} = 4.9\angle 180^{\circ}A$$

Το διάγραμμα phasor για τις τάσεις και τα ρεύματα φαίνεται στο σχήμα 6.11. Εφόσον σχεδιαστεί ένα ρεύμα γραμμής, τα υπόλοιπα σχεδιάζονται με βάση τη συμμετρία του διαγράμματος phasor. Και τα τρία ρεύματα γραμμής διέρχονται μέσα από τον ουδέτερο. Επομένως το ρεύμα του ουδέτερου είναι το αρνητικό άθροισμα των ρευμάτων γραμμής:

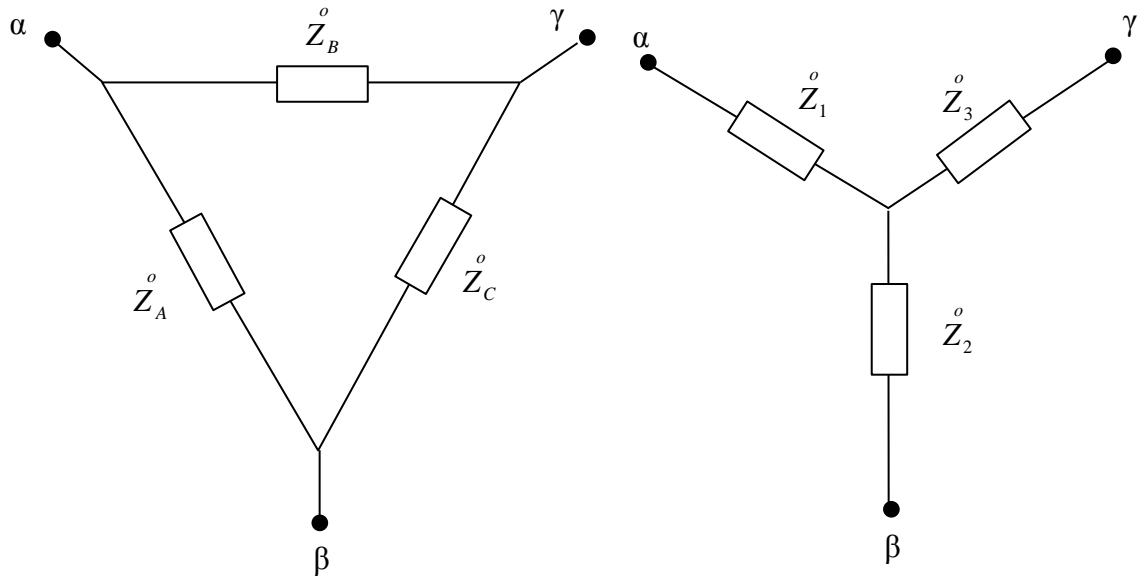
$$I_N^{\circ} = -(I_A^{\circ} + I_B^{\circ} + I_C^{\circ}) = 0$$



Σχήμα 6.11: Διάγραμμα phasor τάσεων και ρευμάτων παραδείγματος 6.2

6.7. Ισοδύναμες συνδέσεις σε αστέρα (Y) και τρίγωνο (Δ)

Στο σχήμα 6.12 φαίνονται τρεις σύνθετες αντιστάσεις με σύνδεση τριγώνου (Δ) και τρεις σύνθετες αντιστάσεις με σύνδεση αστέρα (Y). Για τη μετατροπή από σύνδεση αστέρα σε σύνδεση τριγώνου και αντίστροφα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:



Σχήμα 6.12: Τρεις σύνθετες αντιστάσεις με σύνδεση τριγώνου (Δ) αριστερά και τρεις σύνθετες αντιστάσεις με σύνδεση αστέρα (Y) δεξιά

Μετατροπή από σύνδεση αστέρα (Y) σε σύνδεση τριγώνου (Δ)

$$Z_A^{\circ} = \frac{Z_1^{\circ} Z_2^{\circ} + Z_1^{\circ} Z_3^{\circ} + Z_2^{\circ} Z_3^{\circ}}{Z_3^{\circ}}$$

$$Z_B^{\circ} = \frac{Z_1^{\circ} Z_2^{\circ} + Z_1^{\circ} Z_3^{\circ} + Z_2^{\circ} Z_3^{\circ}}{Z_2^{\circ}}$$

$$Z_C^{\circ} = \frac{Z_1^{\circ} Z_2^{\circ} + Z_1^{\circ} Z_3^{\circ} + Z_2^{\circ} Z_3^{\circ}}{Z_1^{\circ}}$$

Μετατροπή από σύνδεση τριγώνου (Δ) σε σύνδεση αστέρα (Y)

$$Z_1^{\circ} = \frac{Z_A^{\circ} Z_B^{\circ}}{Z_A^{\circ} + Z_B^{\circ} + Z_C^{\circ}}$$

$$Z_2^{\circ} = \frac{Z_A^{\circ} Z_C^{\circ}}{Z_A^{\circ} + Z_B^{\circ} + Z_C^{\circ}}$$

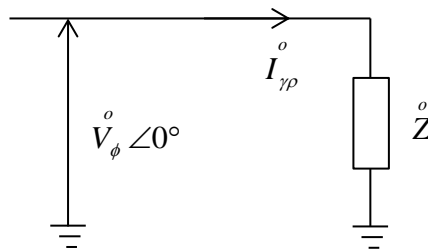
$$Z_3^{\circ} = \frac{Z_B^{\circ} Z_C^{\circ}}{Z_A^{\circ} + Z_B^{\circ} + Z_C^{\circ}}$$

Σημειώνεται ότι αν οι τρεις σύνθετες αντιστάσεις σε μία σύνδεση είναι ίσες τότε το ίδιο θα ισχύει και για την ισοδύναμη σύνδεση με $\frac{Z_{\Delta}^{\circ}}{Z_Y^{\circ}} = 3$.

6.8. Μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα για συμμετρικά τριφασικά φορτία

Στο σχήμα 6.10 φαίνεται ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση αστέρα (Y). Σε πολλές περιπτώσεις (όπως για παράδειγμα στον υπολογισμό της ισχύος) μόνο το μέτρο του ρεύματος της γραμμής είναι απαραίτητο. Αυτό μπορεί να υπολογιστεί και από ένα μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα (σχήμα 6.13) το οποίο αντιπροσωπεύει μία μόνο φάση από το αρχικό τριφασικό σύστημα. Η φασική τάση σε αυτή την περίπτωση θεωρείται ως το μέγεθος αναφοράς με γωνία φάσης ίση με το μηδέν. Ως αποτέλεσμα θα είναι $I_{\phi}^{\circ} = I_{\phi} \angle -\theta$ όπου θ είναι η γωνία της σύνθετης αντίστασης. Αν ζητούνται όλα τα ρεύματα γραμμής $I_A^{\circ}, I_B^{\circ}, I_C^{\circ}$, τότε οι γωνίες του καθενός μπορούν να υπολογιστούν προσθέτοντας $-\theta$ στις γωνίες των $V_A^{\circ}, V_B^{\circ}, V_C^{\circ}$. Ακόμα παρατηρείται ότι η γωνία του ρεύματος γραμμής $I_{\gamma\phi}^{\circ}$ δίνει το συντελεστή ισχύος για κάθε φάση, $\Sigma I = \cos \theta$.

Η μέθοδος αυτή είναι δυνατό να εφαρμοστεί και σε ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση τριγώνου (Δ) αν το φορτίο αντικατασταθεί από το ισοδύναμό του σε σύνδεση αστέρα (Y) όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 6.7 ($\frac{Z_{\Delta}^{\circ}}{Z_Y^{\circ}} = 3$).



Σχήμα 6.13: Μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα ενός συμμετρικού φορτίου σε σύνδεση αστέρα

Παράδειγμα 6.3

Να επιλυθεί εκ νέου το παράδειγμα 6.2 με τη μέθοδο του μονοφασικού ισοδύναμου κυκλώματος.

Απάντηση:

Το μονοφασικό ισοδύναμο του κυκλώματος του παραδείγματος 6.2 φαίνεται στο σχήμα 6.14 όπου το σύμβολο Y καταδεικνύει τον τρόπο σύνδεσης του αρχικού φορτίου.

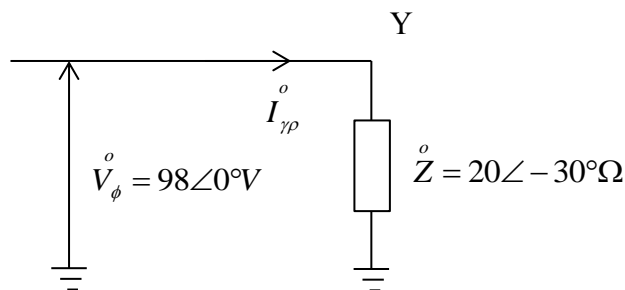
$$I_{\phi}^{\circ} = \frac{V_{\phi}^{\circ}}{Z} = \frac{98\angle 0^{\circ}}{20\angle -30^{\circ}} = 4.9\angle 30^{\circ} A$$

Από το σχήμα 6.7 οι γωνίες των $V_A^{\circ}, V_B^{\circ}, V_C^{\circ}$ είναι $-90^{\circ}, 30^{\circ}, 150^{\circ}$ αντίστοιχα. Επομένως:

$$I_A^{\circ} = 4.9\angle -60^{\circ} A$$

$$I_B^{\circ} = 4.9\angle 60^{\circ} A$$

$$I_C^{\circ} = 4.9\angle 180^{\circ} A$$



Σχήμα 6.14: Μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα παραδείγματος 6.3

6.9. Μη συμμετρικό φορτίο με σύνδεση τριγώνου

Στην περίπτωση που ένα φορτίο σε σύνδεση τριγώνου είναι μη συμμετρικό (οι σύνθετες αντιστάσεις των τριών φάσεων δεν είναι ίσες μεταξύ τους) υπολογίζονται αρχικά τα φασικά ρεύματα και στη συνέχεια εφαρμόζεται ο νόμος ρευμάτων του Kirchhoff για να προκύψουν και τα ρεύματα γραμμής. Τα ρεύματα θα είναι προφανώς άνισα και δε θα ισχύει η συμμετρία που ισχύει στην περίπτωση του συμμετρικού φορτίου.

Παράδειγμα 6.4

Σε ένα τριφασικό ABC σύστημα με 339.4V όπως φαίνεται στο σχήμα 6.15 είναι συνδεδεμένο ένα φορτίο με σύνδεση τριγώνου για το οποίο ισχύει:

$$Z_{AB}^{\circ} = 10\angle 0^{\circ}\Omega, Z_{BC}^{\circ} = 10\angle 30^{\circ}\Omega, Z_{CA}^{\circ} = 15\angle -30^{\circ}\Omega.$$

Να υπολογιστούν τα φασικά και τα ρεύματα γραμμής και να σχεδιαστεί το διάγραμμα των phasors.

Απάντηση:

$$I_{AB}^{\circ} = \frac{V_{AB}^{\circ}}{Z_{AB}^{\circ}} = \frac{339.4\angle 120^{\circ}}{10\angle 0^{\circ}} = 33.94\angle 120^{\circ}A$$

Ομοίως:

$$I_{BC}^{\circ} = 33.94\angle -30^{\circ}A$$

$$I_{CA}^{\circ} = 22.63\angle 270^{\circ}A$$

Τότε:

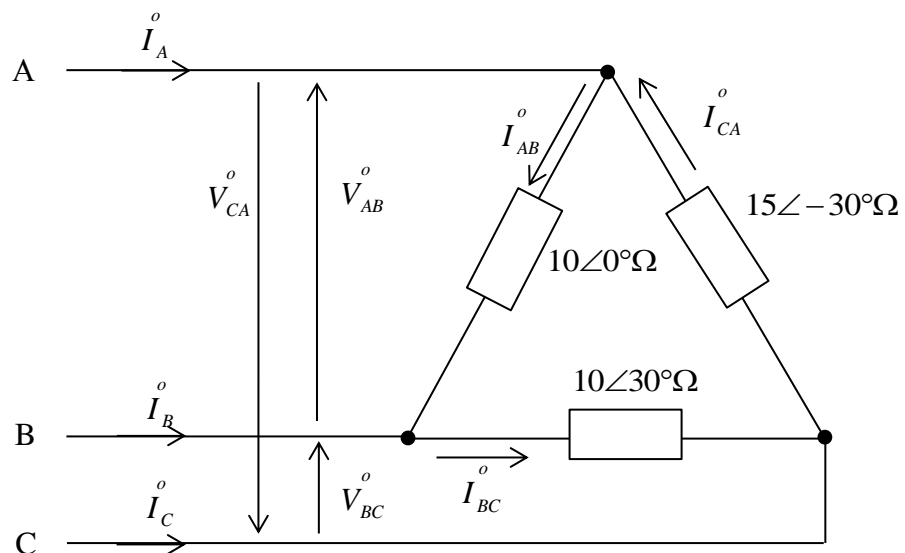
$$I_A^{\circ} = I_{AB}^{\circ} + I_{AC}^{\circ} = 33.94\angle 120^{\circ} - 22.63\angle 270^{\circ} = 54.72\angle 108.1^{\circ}A$$

Επίσης:

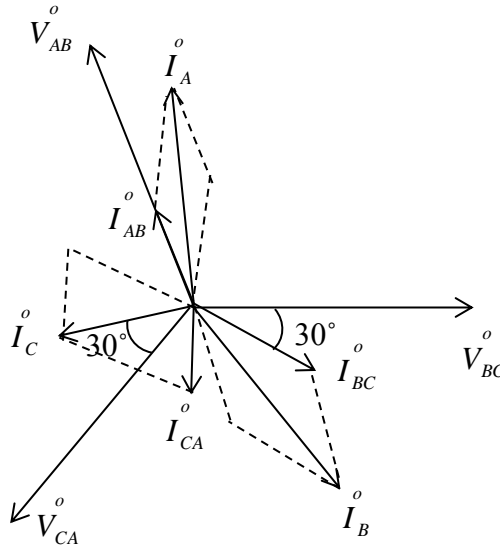
$$I_B^{\circ} = 65.56\angle -45^{\circ}A \text{ και}$$

$$I_C^{\circ} = 29.93\angle -169.1^{\circ}A$$

Το διάγραμμα με τα phasor φαίνεται στο σχήμα 6.16.



Σχήμα 6.15: Τριφασικό ABC σύστημα παραδείγματος 6.4



Σχήμα 6.16: Διάγραμμα phasor τάσεων και ρευμάτων παραδείγματος 6.4

6.10. Μη συμμετρικό φορτίο με σύνδεση αστέρα

Ο ουδέτερος (σε ένα σύστημα με τέσσερις γραμμές) μεταφέρει το ρεύμα που προκύπτει από την ασυμμετρία του φορτίου και διατηρεί το μέτρο της φασικής τάσης κατά μήκος κάθε φάσης. Τα ρεύματα γραμμής είναι άνισα γι' αυτό και στο διάγραμμα phasor τα ρεύματα δεν έχουν καμμία συμμετρία. Χωρίς τον ουδέτερο αγωγό (σε ένα σύστημα με τρεις γραμμές), οι σύνθετες αντιστάσεις που είναι συνδεδεμένες σε αστέρα θα έχουν φασικές τάσεις με διαφορετικά μέτρα.

Παράδειγμα 6.5

Σε ένα τριφασικό CBA σύστημα με 150V όπως φαίνεται στο σχήμα 6.17 είναι συνδεδεμένο ένα φορτίο με σύνδεση αστέρα για το οποίο ισχύει:

$$Z_A = 6\angle 0^\circ \Omega, Z_B = 6\angle 30^\circ \Omega, Z_C = 5\angle 45^\circ \Omega$$

Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής και να σχεδιαστεί το διάγραμμα των phasors.

Απάντηση:

$$I_A = \frac{V_A}{Z_A} = \frac{86.6\angle -90^\circ}{6\angle 0^\circ} = 14.43\angle -90^\circ \text{ A}$$

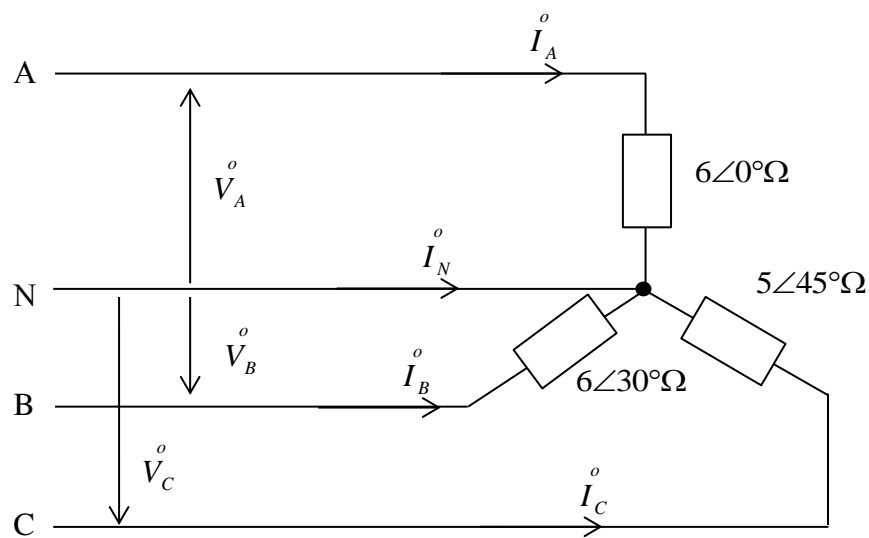
Επίσης:

$$I_B^{\circ} = \frac{V_B^{\circ}}{Z_B^{\circ}} = \frac{86.6 \angle 30^{\circ}}{6 \angle 30^{\circ}} = 14.43 \angle 0^{\circ} \text{ A και}$$

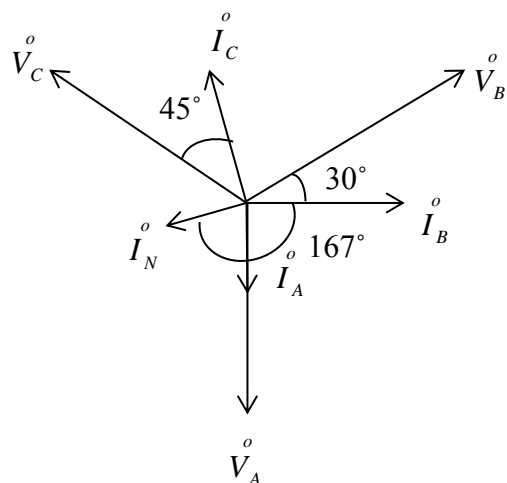
$$I_C^{\circ} = \frac{V_C^{\circ}}{Z_C^{\circ}} = \frac{86.6 \angle 150^{\circ}}{5 \angle 45^{\circ}} = 17.32 \angle 105^{\circ} \text{ A}$$

$$I_N^{\circ} = -(14.43 \angle -90^{\circ} + 14.43 \angle 0^{\circ} + 17.32 \angle 105^{\circ}) = 10.21 \angle -167^{\circ} \text{ A}$$

Το διάγραμμα με τα phasor φαίνεται στο σχήμα 6.18.



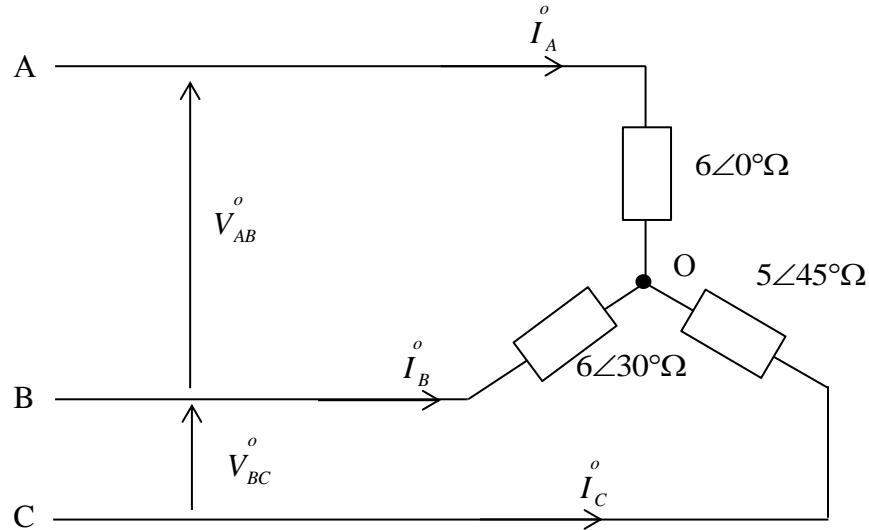
Σχήμα 6.17: Τριφασικό CBA σύστημα παραδείγματος 6.5



Σχήμα 6.18: Διάγραμμα phasor τάσεων και ρευμάτων παραδείγματος 6.5

Παράδειγμα 6.6

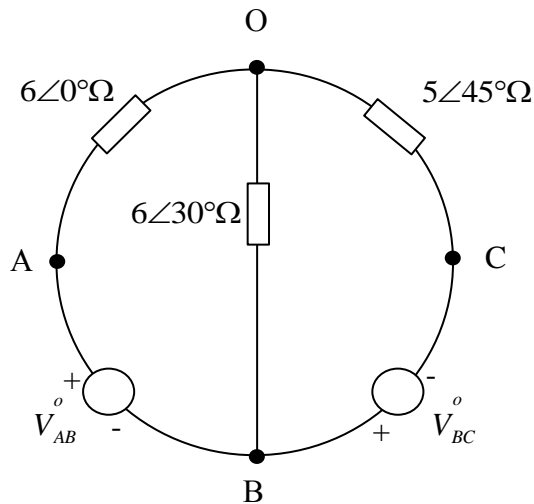
Στο σχήμα 6.19 φαίνεται το ίδιο κύκλωμα με αυτό του παραδείγματος 6.5 με τη διαφορά ότι έχει αφαιρεθεί ο ουδέτερος αγωγός. Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής και η απόκλιση τάσης V_{ON}^o από τον ουδέτερο.



Σχήμα 6.19: Τριφασικό CBA σύστημα παραδείγματος 6.6 χωρίς ουδέτερο αγωγό

Απάντηση:

Το κύκλωμα του σχήματος 6.19 ξανασχεδιάζεται στο σχήμα 6.20, το οποίο θα βοηθήσει στην επίλυση.



Σχήμα 6.20: Κύκλωμα παραδείγματος 6.6

Ο κόμβος B θεωρείται ότι είναι ο κόμβος αναφοράς.

$$\frac{V_{OB}^{\circ} - V_{AB}^{\circ}}{Z_A^{\circ}} + \frac{V_{OB}^{\circ}}{Z_B^{\circ}} + \frac{V_{OB}^{\circ} + V_{BC}^{\circ}}{Z_C^{\circ}} = 0$$

$$V_{OB}^{\circ} \left(\frac{1}{6\angle 0^{\circ}} + \frac{1}{6\angle 30^{\circ}} + \frac{1}{5\angle 45^{\circ}} \right) = \frac{150\angle 240^{\circ}}{6\angle 0^{\circ}} - \frac{150\angle 0^{\circ}}{5\angle 45^{\circ}} \Leftrightarrow V_{OB}^{\circ} = 66.76\angle -152.85^{\circ}V$$

Τότε:

$$I_B^{\circ} = -\frac{V_{OB}^{\circ}}{Z_B^{\circ}} = 11.13\angle -2.85^{\circ}A$$

Από τη σχέση: $V_{OA}^{\circ} + V_{AB}^{\circ} = V_{OB}^{\circ} \Leftrightarrow V_{OA}^{\circ} = 100.7\angle 81.08^{\circ}V$ και

$$I_A^{\circ} = -\frac{V_{OA}^{\circ}}{Z_A^{\circ}} = 16.78\angle -98.92^{\circ}A$$

Ομοίως:

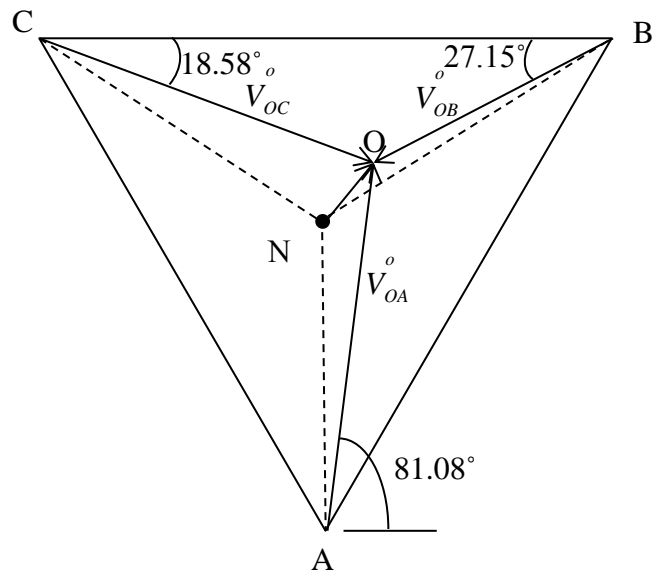
Από τη σχέση: $V_{OC}^{\circ} = V_{OB}^{\circ} - V_{CB}^{\circ} \Leftrightarrow V_{OC}^{\circ} = 95.58\angle -18.58^{\circ}V$ και

$$I_C^{\circ} = 19.12\angle 116.4^{\circ}A$$

Το σημείο Ο «μετατοπίζεται» σε σχέση με τον ουδέτερο Ν και η απόκλιση αυτή μετράται με μία τάση V_{ON}° .

$$V_{ON}^{\circ} = V_{OA}^{\circ} + V_{AN}^{\circ} = 100.7\angle 81.08^{\circ} + \frac{150}{\sqrt{3}}\angle -90^{\circ} = 20.24\angle 39.53^{\circ}V$$

Το διάγραμμα με τα Phasor των τάσεων και των ρευμάτων (σχήμα 6.21) καταδεικνύει τη μετατόπιση του σημείο Ο από το κέντρο βάρους του τριγώνου.



Σχήμα 6.21: Διάγραμμα phasor τάσεων και ρευμάτων παραδείγματος 6.6

6.11. Τριφασική ισχύς

Η ισχύς που αποδίδεται από τις τρεις φάσεις μιας συμμετρικής γεννήτριας σε τρεις ίσες σύνθετες αντιστάσεις με γωνία φάσης θ είναι:

$$p_A(t) = V_\phi I_\phi \cos \theta + V_\phi I_\phi \cos(2\omega t - \theta)$$

$$p_B(t) = V_\phi I_\phi \cos \theta + V_\phi I_\phi \cos(2\omega t - 240^\circ - \theta)$$

$$p_C(t) = V_\phi I_\phi \cos \theta + V_\phi I_\phi \cos(2\omega t - 480^\circ - \theta)$$

όπου V_ϕ, I_ϕ είναι οι φασικές τιμές της τάσεις και του ρεύματος αντίστοιχα.

$$\begin{aligned} p_{ολ}(t) &= p_A(t) + p_B(t) + p_C(t) = \\ &= 3V_\phi I_\phi \cos \theta + V_\phi I_\phi [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - 240^\circ - \theta) + \cos(2\omega t - 480^\circ - \theta)] \end{aligned}$$

Όμως $\cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - 240^\circ - \theta) + \cos(2\omega t - 480^\circ - \theta) = 0$ για όλα τα t .

Επομένως:

$$p_{ολ}(t) = 3V_\phi I_\phi \cos \theta = P$$

Η ολική στιγμιαία ισχύς είναι ίση με την ολική πραγματική ισχύ. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και με όρους πολικής τάσης V_π και ρεύματος γραμμής I_{gp} .

Συγκεντρωτικά:

Σε σύνδεση τριγώνου (Δ) : $V_{\pi} = V_{\phi}$ και $I_{\gamma\rho} = \sqrt{3}I_{\phi}$. Επομένως: $P = \sqrt{3}V_{\pi}I_{\gamma\rho} \cos \theta$

Σε σύνδεση αστέρα (Y) : $V_{\pi} = \sqrt{3}V_{\phi}$ και $I_{\gamma\rho} = I_{\phi}$. Επομένως: $P = \sqrt{3}V_{\pi}I_{\gamma\rho} \cos \theta$

Η έκφραση $\sqrt{3}V_{\pi}I_{\gamma\rho} \cos \theta$ δίνει την ισχύ σε ένα τριφασικό συμμετρικό σύστημα ανεξάρτητα από τον τρόπο σύνδεσης. Ο συντελεστής ισχύος σε ένα τριφασικό σύστημα είναι ίσος με $\cos \theta$. Η ολική τάση V_{π} γενικά είναι γνωστή στα βιομηχανικά συστήματα. Αν το φορτίο είναι συμμετρικό, η ολική ισχύς υπολογίζεται από το ρεύμα γραμμής και το συντελεστή ισχύος.

Συνοψίζοντας, η πραγματική ισχύς, η άεργος ισχύς, η φαινόμενη ισχύς και ο συντελεστής ισχύος σε ένα τριφασικό σύστημα δίνονται από τις σχέσεις:

$$P = \sqrt{3}V_{\pi}I_{\gamma\rho} \cos \theta$$

$$Q = \sqrt{3}V_{\pi}I_{\gamma\rho} \sin \theta$$

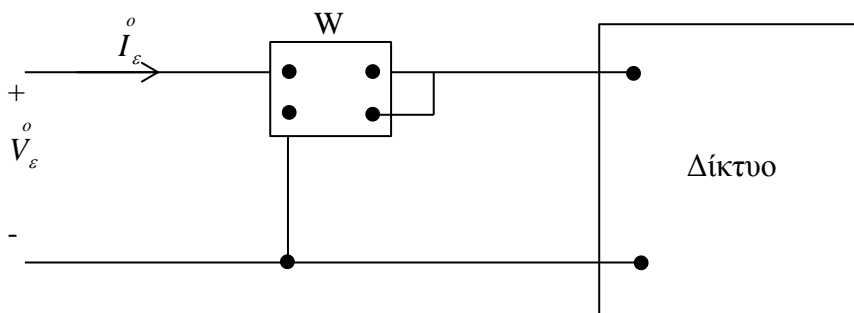
$$S = \sqrt{3}V_{\pi}I_{\gamma\rho}$$

$$\Sigma I = \frac{P}{S}$$

Όλες οι τάσεις και τα ρεύματα που αναφέρονται στους παραπάνω τύπους είναι ενδεικνύμενες τιμές.

6.12. Μέτρηση ισχύος στα τριφασικά δίκτυα

Ένα βαττόμετρο ac έχει ένα βολτομετρικό και ένα αμπερομετρικό τύλιγμα και μετράει το γινόμενο της ενδεικνύμενης τιμής της τάσης, της ενδεικνύμενης τιμής του ρεύματος και του συνημιτόνου της γωνίας φάσης μεταξύ της τάσης και του ρεύματος. Σύμφωνα με τα παραπάνω το βαττόμετρο στο σχήμα 6.22 θα μετρήσει την πραγματική ισχύ που αποδίδεται στο δίκτυο.



Σχήμα 6.22: Μέτρηση ισχύος με βαττόμετρο

$$P = V_{\varepsilon} I_{\varepsilon} \cos \theta = \operatorname{Re}(\overset{\circ}{V}_{\varepsilon} \overset{\circ}{I}_{\varepsilon})$$

Δύο βαττόμετρα συνδεδεμένα σε οποιοσδήποτε δύο γραμμές ενός τριφασικού συστήματος θα μετρήσουν σωστά την ολική τριφασική πραγματική ισχύ από το άθροισμα των ενδείξεων των δύο βαττομέτρων. Στο σχήμα 6.23 τα βαττόμετρα που είναι τοποθετημένα στις γραμμές A και C, θα έχουν ενδείξεις:

$$W_A = \operatorname{Re}(\overset{\circ}{V}_{\varepsilon,AB} \overset{\circ}{I}_{\varepsilon,A}) = \operatorname{Re}(\overset{\circ}{V}_{\varepsilon,AB} \overset{\circ}{I}_{\varepsilon,AB}) + \operatorname{Re}(\overset{\circ}{V}_{\varepsilon,AB} \overset{\circ}{I}_{\varepsilon,AC})$$

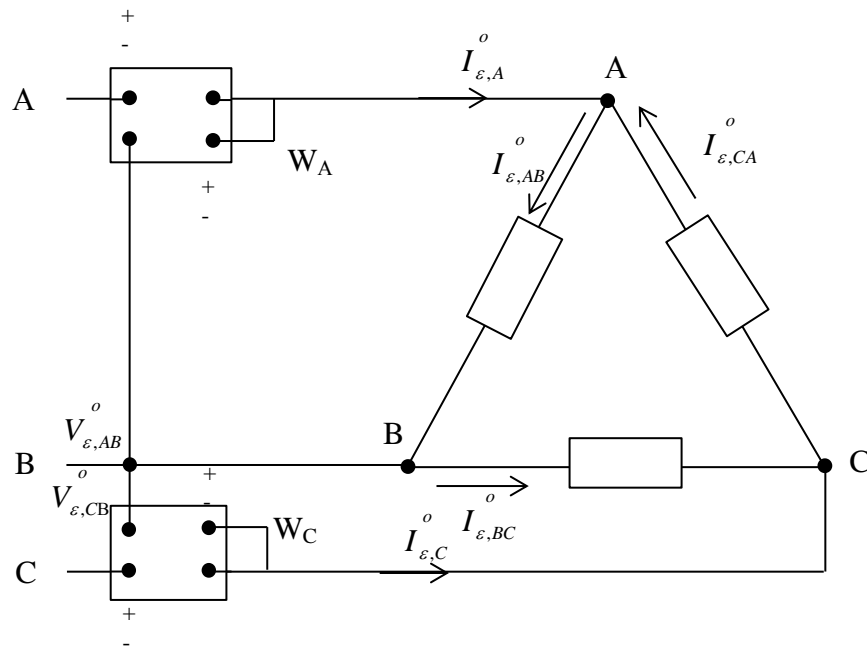
$$W_C = \operatorname{Re}(\overset{\circ}{V}_{\varepsilon,CB} \overset{\circ}{I}_{\varepsilon,C}) = \operatorname{Re}(\overset{\circ}{V}_{\varepsilon,CB} \overset{\circ}{I}_{\varepsilon,CA}) + \operatorname{Re}(\overset{\circ}{V}_{\varepsilon,CB} \overset{\circ}{I}_{\varepsilon,CB})$$

Στις παραπάνω σχέσεις οι εκφράσεις που προκύπτουν από το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff $\overset{\circ}{I}_A = \overset{\circ}{I}_{AB} + \overset{\circ}{I}_{AC}$ και $\overset{\circ}{I}_C = \overset{\circ}{I}_{CA} + \overset{\circ}{I}_{CB}$ χρησιμοποιήθηκαν για να αντικαταστήσουν τα ρεύματα γραμμής με τα φασικά ρεύματα. Η ένδειξη W_A είναι η πραγματική ισχύς P_{AB} για σύνδεση τριγώνου και αντίστοιχα η ένδειξη W_C είναι η πραγματική ισχύς P_{CB} . Αν προστεθούν οι δύο εξισώσεις τότε:

$$W_A + W_C = P_{AB} + \operatorname{Re}[(\overset{\circ}{V}_{\varepsilon,AB} - \overset{\circ}{V}_{\varepsilon,CB}) \overset{\circ}{I}_{\varepsilon,AC}] + P_{CB} = P_{AB} + P_{AC} + P_{CB}$$

αφού από το νόμο τάσεων του Kirchhoff ισχύει: $\overset{\circ}{V}_{\varepsilon,AB} - \overset{\circ}{V}_{\varepsilon,CB} = \overset{\circ}{V}_{\varepsilon,AC}$.

Ανάλογα αποτελέσματα προκύπτουν και για φορτίο σε σύνδεση αστέρα (Y).



Σχήμα 6.23: Μέτρηση ισχύος σε τριφασικά δίκτυα

Συμμετρικά φορτία

Όταν τρεις ίσες σύνθετες αντιστάσεις $Z \angle \theta$ είναι συνδεδεμένες σε τρίγωνο (Δ), τα φασικά ρεύματα διαφέρουν κατά 30° σε σχέση με τα ρεύματα γραμμής. Στο σχήμα 6.24 φαίνεται το διάγραμμα των Phasor που αντιστοιχούν στο σχήμα 6.23 με την προϋπόθεση ότι το σύστημα είναι ευθύ συμμετρικό (ABC). Προκύπτει ότι η τάση V_{AB}^o προηγείται του ρεύματος I_A^o κατά $\theta + 30^\circ$, ενώ η τάση V_{CB}^o προηγείται του ρεύματος I_C^o κατά $\theta - 30^\circ$. Ως αποτέλεσμα τα δύο βαττόμετρα θα έχουν ενδείξεις:

$$W_A = V_{\varepsilon,AB}^o I_{\varepsilon,A}^o \cos(\theta + 30^\circ)$$

$$W_C = V_{\varepsilon,CB}^o I_{\varepsilon,C}^o \cos(\theta - 30^\circ)$$

ή γενικά εφόσον η ακολουθία των τάσεων δεν είναι γνωστή:

$$W_1 = V_{\varepsilon,\pi}^o I_{\varepsilon,\gamma\rho}^o \cos(\theta + 30^\circ)$$

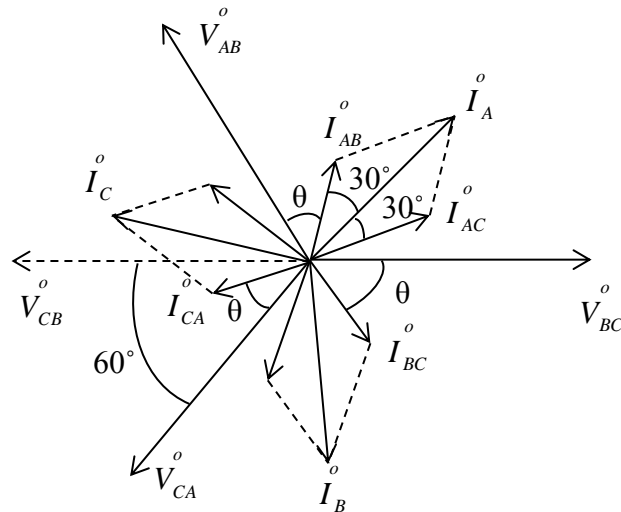
$$W_2 = V_{\varepsilon,\pi}^o I_{\varepsilon,\gamma\rho}^o \cos(\theta - 30^\circ)$$

Οι παραπάνω σχέσεις, ισχύουν επίσης και για σύνδεση σε αστέρα (Y).

Αν από τις παραπάνω σχέσεις που αντιπροσωπεύουν τις ενδείξεις των δύο βαττομέτρων απαλειφθεί ο όρος $V_{\varepsilon,\pi}^o I_{\varepsilon,\gamma\rho}^o$ τότε προκύπτει η σχέση:

$$\tan \theta = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} \right)$$

Επομένως από τις ενδείξεις των δύο βαττομέτρων είναι δυνατό να βρεθεί η γωνία θ . Πρακτικά τα συμμετρικά φορτία συνήθως είναι επαγωγικά ($\theta > 0$).



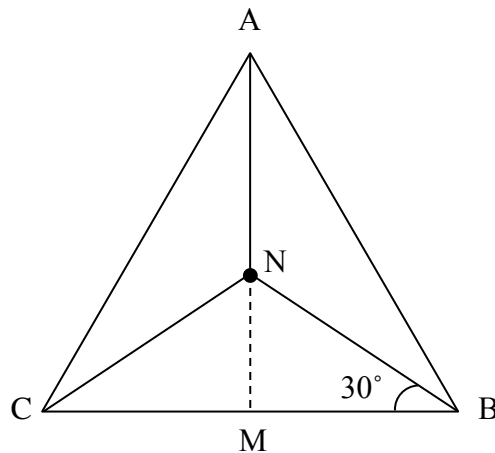
Σχήμα 6.24: Διάγραμμα phasor τάσεων και ρευμάτων κυκλώματος σχήματος 6.23

6.13. Λυμένες ασκήσεις

1) Να αποδειχθεί ότι σε ένα τριφασικό σύστημα ισχύει η σχέση $V_\pi = \sqrt{3}V_\phi$ όπου V_π είναι η πολική τάση και V_ϕ είναι η φασική τάση.

Απάντηση:

Η απόδειξη γίνεται μέσω του διαγράμματος phasor (σχήμα 6.25) για ένα σύστημα ABC:



Σχήμα 6.25: Διάγραμμα phasor άσκησης 1

Η πλευρά NB παριστάνει τη φασική τάση V_{ϕ}° ενώ η πλευρά BC παριστάνει την πολική τάση V_{π}° . Από το τρίγωνο NBM η πλευρά MB ισούται με $V_{\phi}^{\circ} \cos 30^{\circ} = V_{\phi}^{\circ} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

. Επίσης ισχύει $BC=2MB$.

Επομένως για τα μέτρα της πολικής και της φασικής τάσης ισχύει:

$$V_{\pi} = 2 \cdot V_{\phi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}V_{\phi}$$

2) Ένα τριφασικό ABC σύστημα με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με 70.7V έχει ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση τριγώνου με σύνθετες αντιστάσεις $20\angle 45^{\circ}\Omega$. Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής και να σχεδιαστεί το διάγραμμα phasor.

Απάντηση:

Το κύκλωμα φαίνεται στο σχήμα 6.26. Το μέγιστο μέτρο της τάσης είναι:

$$V_{\max} = \sqrt{2}V_{\varepsilon} = 100V$$

Οι γωνίες για τις τάσεις προκύπτουν από την ανάλυση που έχει γίνει για το ευθύ τριφασικό σύστημα ABC στην ενότητα 6.4 (σχήμα 6.6). Τότε:

$$I_{AB}^{\circ} = \frac{V_{AB}^{\circ}}{Z} = \frac{100\angle 120^{\circ}}{20\angle 45^{\circ}} = 5\angle 75^{\circ}A$$

Ομοίως:

$$I_{BC}^{\circ} = 5\angle -45^{\circ}A$$

$$I_{CA}^{\circ} = 5\angle 195^{\circ}A$$

Τα ρεύματα γραμμής είναι:

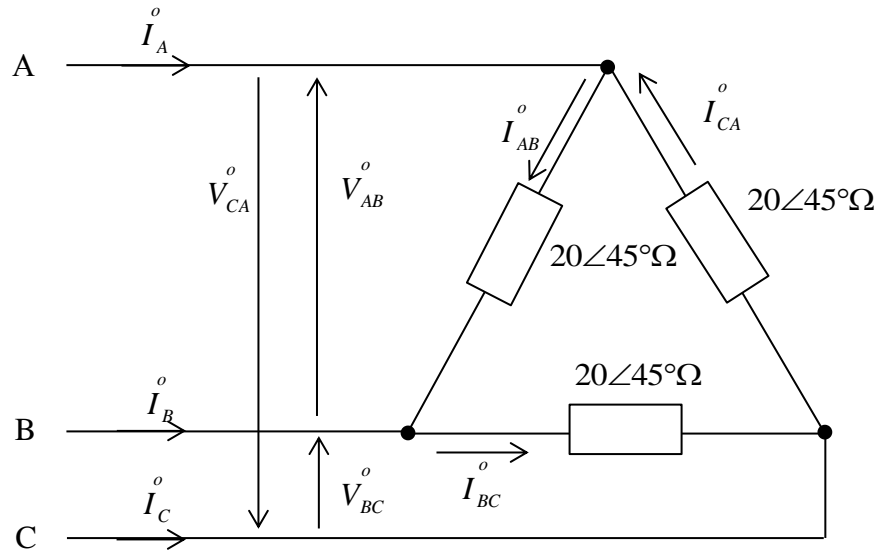
$$I_A^{\circ} = I_{AB}^{\circ} + I_{AC}^{\circ} = 5\angle 75^{\circ} - 5\angle 195^{\circ} = 8.65\angle 45^{\circ}A$$

Ομοίως:

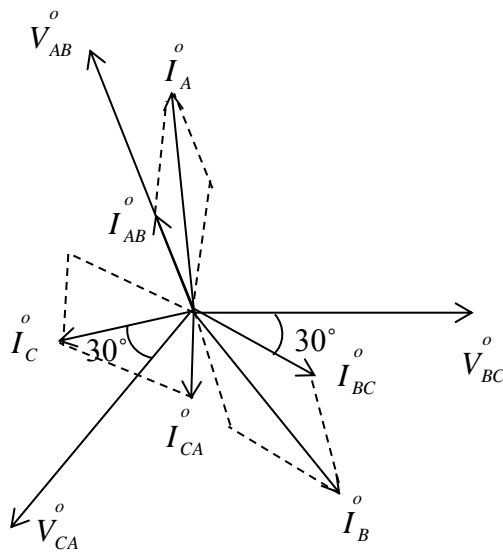
$$I_B^{\circ} = 8.65\angle -75^{\circ}A$$

$$I_C^{\circ} = 8.65\angle 165^{\circ}A$$

Το διάγραμμα phasor φαίνεται στο σχήμα 6.27.



Σχήμα 6.26: Κύκλωμα άσκησης 2



Σχήμα 6.27: Διάγραμμα phasor τάσεων και ρευμάτων άσκησης 2

3) Ένα τριφασικό CBA σύστημα με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με 106.1V έχει ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση αστέρα με σύνθετες αντιστάσεις $5\angle -30^\circ\Omega$ (σχήμα 6.28). Να υπολογιστούν τα ρεύματα και να σχεδιαστεί το διάγραμμα phasor.

Απάντηση:

Επειδή τα φορτία που είναι συνδεδεμένα σε αστέρα είναι συμμετρικά ο ουδέτερος δεν διαρρέεται από ρεύμα. Το μέτρο της πολικής τάσης είναι: $V_\pi = \sqrt{2} \cdot 106.1 = 150V$.

Τότε το μέτρο της φασικής τάσης είναι: $V_\phi = \frac{150}{\sqrt{3}} = 86.6V$. Επίσης:

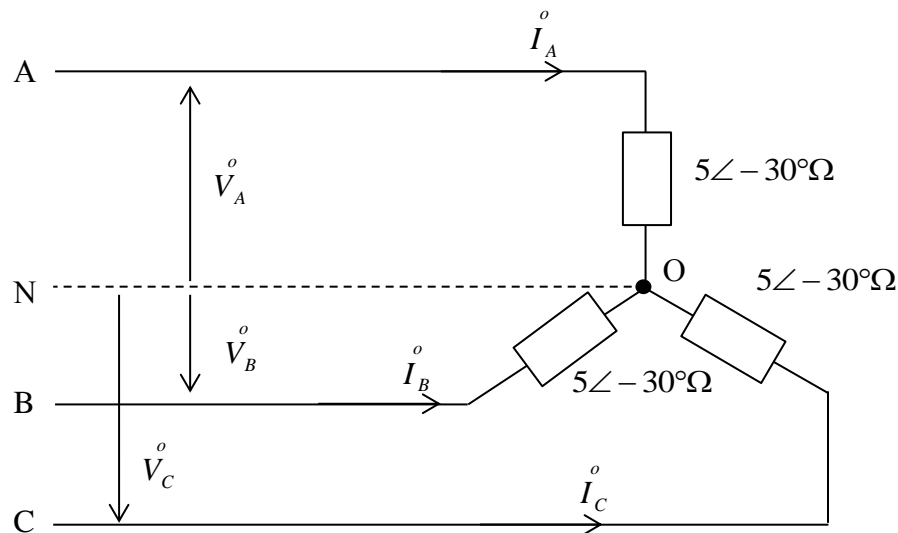
$$I_A^{\circ} = \frac{V_A^{\circ}}{Z} = \frac{86.6\angle -90^\circ}{5\angle -30^\circ} = 17.32\angle -60^\circ A$$

Ομοίως:

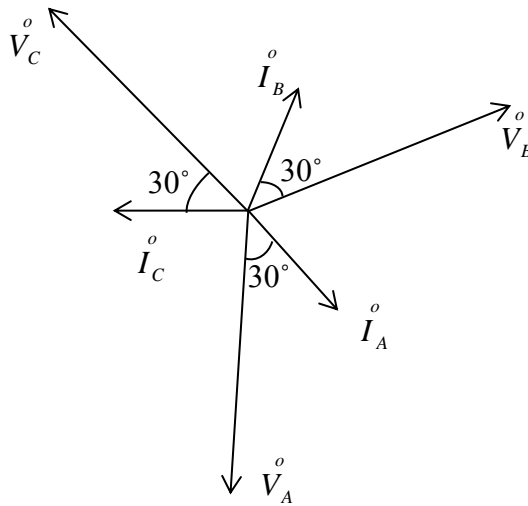
$$I_B^{\circ} = 17.32\angle 60^\circ A$$

$$I_C^{\circ} = 17.32\angle 180^\circ A$$

Το διάγραμμα των Phasor φαίνεται στο σχήμα 6.29. Τα ρεύματα γραμμής προηγούνται κατά 30° σε σχέση με τις φασικές τάσεις.



Σχήμα 6.28: Κύκλωμα άσκησης 3

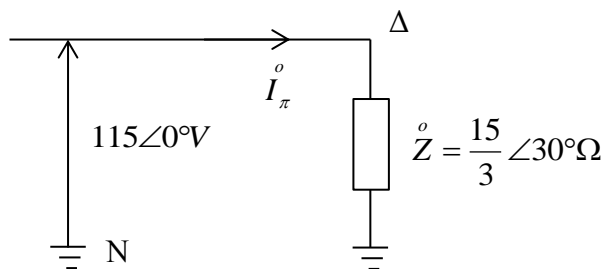


Σχήμα 6.29: Διάγραμμα phasor τάσεων και ρευμάτων άσκησης 3

4) Ένα τριφασικό σύστημα CBA με τρεις γραμμές έχει ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με 106.1V και συμμετρικό φορτίο συνδεδεμένο σε τρίγωνο με σύνθετες αντιστάσεις $Z = 15 \angle 30^\circ \Omega$. Να υπολογιστούν τα φασικά ρεύματα και τα ρεύματα γραμμής με τη μέθοδο του μονοφασικού ισοδύναμου κυκλώματος.

Απάντηση:

Το ισοδύναμο μονοφασικό κύκλωμα φαίνεται στο σχήμα 6.30.



Σχήμα 6.30: Μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα άσκησης 4

$$V_\phi^o = \frac{141.4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 115.5V \text{ οπότε:}$$

$$I_{\pi p}^o = \frac{115.5 \angle 0^\circ}{\frac{15}{3} \angle 30^\circ} = 23.1 \angle -30^\circ A$$

Τα ρεύματα γραμμής σύμφωνα με την ακολουθία ABC υστερούν σε σχέση με τις φασικές τάσεις κατά 30° :

$$\overset{\circ}{I}_A = 23.1 \angle 60^\circ \text{ A}$$

$$\overset{\circ}{I}_B = 23.1 \angle -60^\circ \text{ A}$$

$$\overset{\circ}{I}_C = 23.1 \angle 180^\circ \text{ A}$$

Τα φασικά ρεύματα έχουν μέτρο $\overset{\circ}{I}_\phi = \frac{I_{\gamma\rho}}{\sqrt{3}} = 13.3 \text{ A}$ υστερούν σε σχέση με τις πολικές τάσεις κατά 30° :

$$\overset{\circ}{I}_{AB} = 13.3 \angle 90^\circ \text{ A}$$

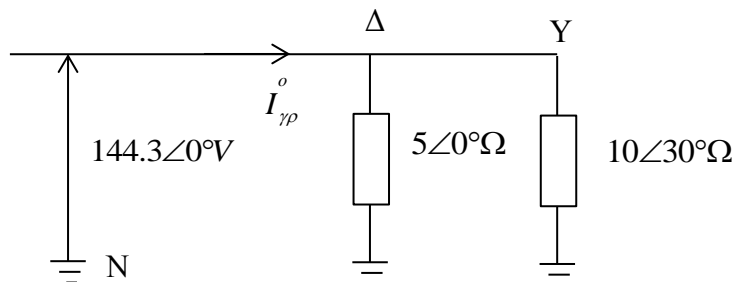
$$\overset{\circ}{I}_{BC} = 13.3 \angle -30^\circ \text{ A}$$

$$\overset{\circ}{I}_{CA} = 13.3 \angle 210^\circ \text{ A}$$

5) Ένα τριφασικό σύστημα με τρεις γραμμές έχει ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με 176.8 V τροφοδοτεί δύο συμμετρικά φορτία ένα σε σύνδεση τριγώνου με $\overset{\circ}{Z}_\Delta = 15 \angle 0^\circ \Omega$ και ένα σε σύνδεση αστέρα με $\overset{\circ}{Z}_Y = 10 \angle 30^\circ \Omega$. α) Να υπολογιστεί η ολική ισχύς. β) Ποιες θα είναι οι ενδείξεις αν εφαρμοστεί η μέθοδος των δύο βαττομέτρων;

Απάντηση:

α) Αρχικά γίνεται μετατροπή του φορτίου σε σύνδεση τριγώνου σε σύνδεση αστέρα. Στη συνέχεια χρησιμοποιείται το μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα που φαίνεται στο σχήμα 6.31 για να υπολογιστεί το ρεύμα γραμμής.



Σχήμα 6.31: Μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα άσκησης 5

$$I_{\gamma\rho}^{\circ} = \frac{144.3\angle 0^{\circ}}{5\angle 0^{\circ}} + \frac{144.3\angle 0^{\circ}}{10\angle 30^{\circ}} = 42\angle -9.9^{\circ} \text{ A}$$

$$P = \sqrt{3}V_{\pi,\varepsilon} I_{\pi,\varepsilon} \cos \theta = \sqrt{3}(176.8)(29.7) \cos 9.9^{\circ} = 8959 \text{ W}$$

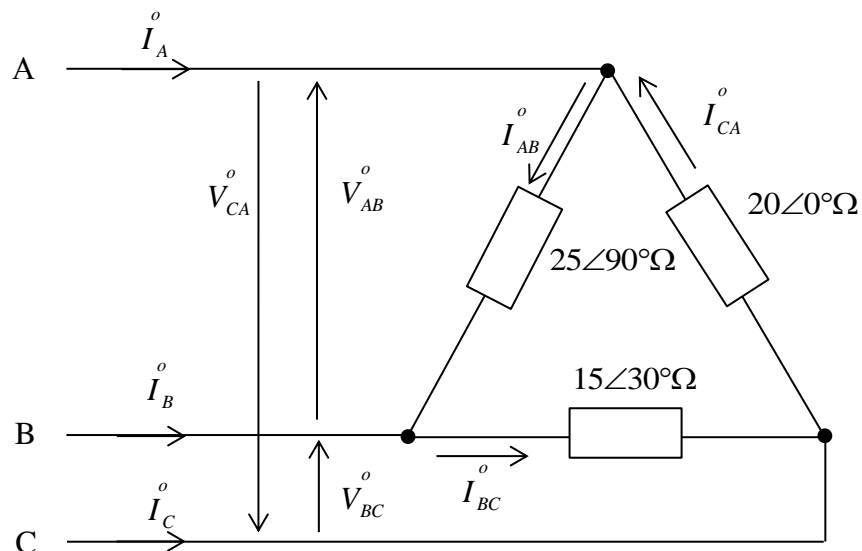
β) Η γωνία του ρεύματος γραμμής (-9.9°), είναι η αντίθετη της γωνίας της ισοδύναμης αντίστασης του παράλληλου συνδυασμού των σύνθετων αντιστάσεων $5\angle 0^{\circ}\Omega$ και $10\angle 30^{\circ}\Omega$. Επομένως η γωνία που θα χρησιμοποιηθεί στους τύπους της ενότητας 6.12 θα είναι $\theta=9.9^{\circ}$:

$$W_1 = V_{\varepsilon,\pi}^{\circ} I_{\varepsilon,\gamma\rho}^{\circ} \cos(\theta + 30^{\circ}) = 176.8 \cdot 29.7 \cos 39.9^{\circ} = 4028 \text{ W}$$

$$W_2 = V_{\varepsilon,\pi}^{\circ} I_{\varepsilon,\gamma\rho}^{\circ} \cos(\theta - 30^{\circ}) = 176.8 \cdot 29.7 \cos(-20.1^{\circ}) = 4931 \text{ W}$$

Το άθροισμά τους $W_1 + W_2 = 8959 \text{ W}$ μας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό του ερωτήματος α.

6) Μία τριφασική τροφοδοσία με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με 240 V έχει ένα μη συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση τριγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα 6.32. Να υπολογιστούν α) η ολική ισχύς β) τα ρεύματα γραμμής και γ) η ένδειξη των βαττομέτρων που τοποθετούνται στις γραμμές Α και Β.



Σχήμα 6.32: Κύκλωμα άσκησης 6

Απάντηση:

α) Οι υπολογισμοί για την ισχύ μπορούν να γίνουν χωρίς να είναι γνωστή η ακολουθία του συστήματος. Οι ενδεικνύμενες τιμές των φασικών ρευμάτων είναι:

$$I_{AB,\varepsilon} = \frac{240}{25} = 9.6A$$

$$I_{BC,\varepsilon} = \frac{240}{15} = 16A$$

$$I_{CA,\varepsilon} = \frac{240}{20} = 12A$$

Επομένως η μιγαδική ισχύς για κάθε μία φάση είναι:

$$S_{AB}^{\circ} = (9.6)^2 \cdot 25 \angle 90^{\circ} = 2304 \angle 90^{\circ} = 0 + j2304$$

$$S_{BC}^{\circ} = (16)^2 \cdot 15 \angle 30^{\circ} = 3840 \angle 30^{\circ} = 3325 + j1920$$

$$S_{CA}^{\circ} = (12)^2 \cdot 20 \angle 0^{\circ} = 2880 \angle 0^{\circ} = 2880 + j0$$

Η ολική μιγαδική ισχύς είναι το άθροισμα των παραπάνω:

$$S_{ολ}^{\circ} = 6205 + j4224$$

Επομένως είναι $P_{ολ} = 6205W$ και $Q_{ολ} = 4224VAR$ (επαγωγική συμπεριφορά)

β) Για να υπολογιστούν τα ρεύματα πρέπει να θεωρηθεί μία ακολουθία, έστω η ABC. Τότε:

$$I_{AB}^{\circ} = \frac{339.4 \angle 120^{\circ}}{25 \angle 90^{\circ}} = 13.6 \angle 30^{\circ} A$$

$$I_{BC}^{\circ} = \frac{339.4 \angle 0^{\circ}}{15 \angle 30^{\circ}} = 22.6 \angle -30^{\circ} A$$

$$I_{CA}^{\circ} = \frac{339.4 \angle 240^{\circ}}{20 \angle 0^{\circ}} = 17 \angle 240^{\circ} A$$

Τα ρεύματα γραμμής εφαρμόζοντας το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff στους κόμβους προκύπτουν:

$$I_A^{\circ} = I_{AB}^{\circ} + I_{AC}^{\circ} = 13.6 \angle 30^{\circ} - 17 \angle 240^{\circ} = 29.6 \angle 46.7^{\circ} A$$

$$\overset{\circ}{I}_B = \overset{\circ}{I}_{BC} + \overset{\circ}{I}_{BA} = 22.6\angle -30^\circ - 13.6\angle 30^\circ = 19.7\angle -66.7^\circ \text{ A}$$

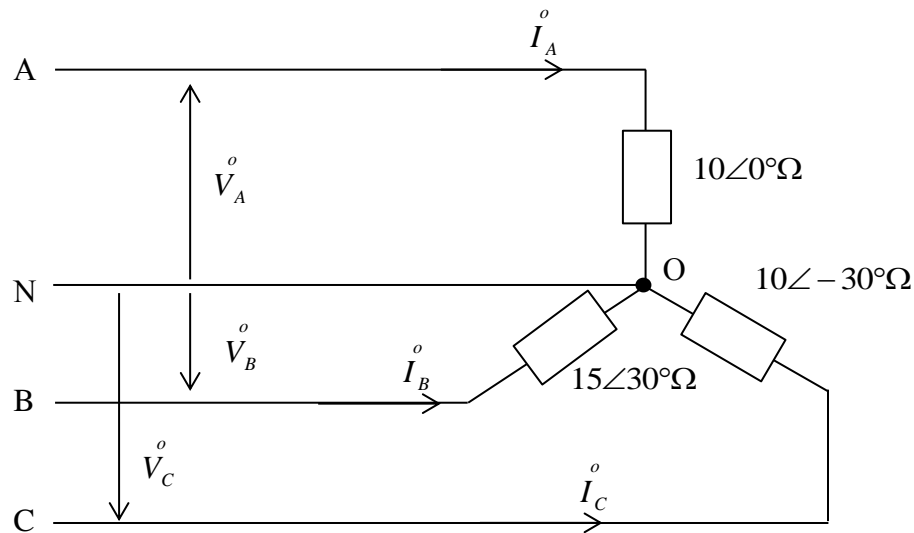
$$\overset{\circ}{I}_C = \overset{\circ}{I}_{CA} + \overset{\circ}{I}_{CB} = 17\angle 240^\circ - 22.6\angle -30^\circ = 28.3\angle -173.1^\circ \text{ A}$$

$$\gamma) W_A = \text{Re}(V_{\varepsilon,AC} \overset{\circ}{I}_{\varepsilon,A}) = \text{Re}(240\angle 60^\circ \cdot \frac{29.6}{\sqrt{2}}\angle -46.7^\circ) = \text{Re}(5023\angle 13.3^\circ) = 4888 \text{ W}$$

$$W_B = \text{Re}(V_{\varepsilon,BC} \overset{\circ}{I}_{\varepsilon,B}) = \text{Re}(240\angle 0^\circ \cdot \frac{19.7}{\sqrt{2}}\angle 66.7^\circ) = \text{Re}(3343\angle 66.7^\circ) = 1322 \text{ W}$$

Το άθροισμά τους $W_A + W_B = 6210 \text{ W}$ μας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό του ερωτήματος α.

7) Ένα τριφασικό ABC σύστημα με τέσσερις γραμμές και πολική τάση $\overset{\circ}{V}_{BC} = 294.2\angle 0^\circ \text{ V}$, έχει ένα φορτίο σε σύνδεση αστέρα με $\overset{\circ}{Z}_A = 10\angle 0^\circ \Omega$, $\overset{\circ}{Z}_B = 15\angle 30^\circ \Omega$ και $\overset{\circ}{Z}_C = 10\angle -30^\circ \Omega$ όπως φαίνεται στο σχήμα 6.33. Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής και το ρεύμα του ουδέτερου.



Σχήμα 6.33: Κύκλωμα άσκησης 7

Απάντηση:

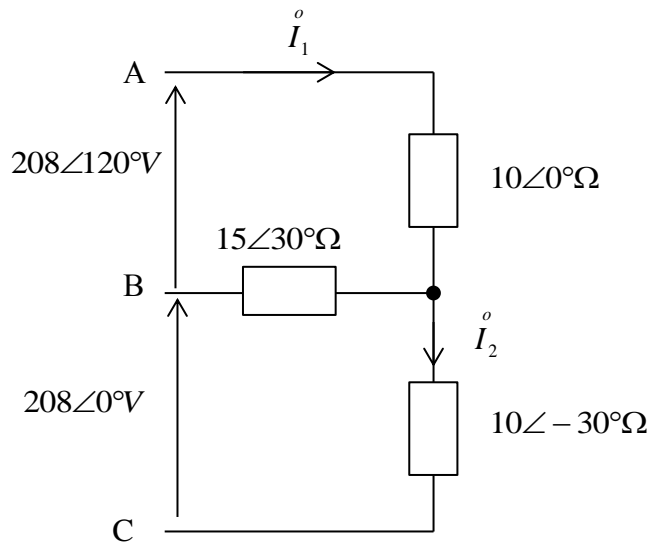
$$\overset{\circ}{I}_A = \frac{169.9\angle 90^\circ}{10\angle 0^\circ} = 16.99\angle 90^\circ \text{ A}$$

$$\overset{\circ}{I}_B = \frac{169.9\angle -30^\circ}{15\angle 30^\circ} = 11.33\angle -60^\circ \text{ A}$$

$$\overset{\circ}{I}_B = \frac{169.9 \angle -150^\circ}{10 \angle -30^\circ} = 16.99 \angle -120^\circ \text{ A}$$

$$\overset{\circ}{I}_N = -(\overset{\circ}{I}_A + \overset{\circ}{I}_B + \overset{\circ}{I}_C) = 8.04 \angle 69.5^\circ \text{ A}$$

8) Οι τρεις σύνθετες αντιστάσεις σε σύνδεση αστέρα $\overset{\circ}{Z}_A = 10 \angle 0^\circ \Omega$, $\overset{\circ}{Z}_B = 15 \angle 30^\circ \Omega$ και $\overset{\circ}{Z}_C = 10 \angle -30^\circ \Omega$ όπως φαίνεται στο σχήμα 6.34, τροφοδοτούνται από ένα τριφασικό ABC σύστημα στο οποίο είναι $\overset{\circ}{V}_{BC} = 208 \angle 0^\circ \text{ V}$. Να υπολογιστούν οι τάσεις κατά μήκος των σύνθετων αντιστάσεων και η απόκλιση τάσης $\overset{\circ}{V}_{ON}$ από τον ουδέτερο.



Σχήμα 6.34: Κύκλωμα άσκησης 8

Απάντηση:

Με τη μέθοδο ρευμάτων προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} 10 \angle 0^\circ + 15 \angle 30^\circ & -15 \angle 30^\circ \\ -15 \angle 30^\circ & 15 \angle 30^\circ + 10 \angle -30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{I}_1 \\ \overset{\circ}{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208 \angle 120^\circ \\ 208 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

Επιλύοντας προκύπτει: $\overset{\circ}{I}_1 = 14.16 \angle 86.09^\circ \text{ A}$ και $\overset{\circ}{I}_2 = 10.21 \angle 52.41^\circ \text{ A}$.

Τα ρεύματα γραμμής είναι:

$$\overset{\circ}{I}_A = \overset{\circ}{I}_1 = 14.16 \angle 86.09^\circ \text{ A}$$

$$\overset{\circ}{I}_B = \overset{\circ}{I}_2 - \overset{\circ}{I}_1 = 8.01 \angle -48.93^\circ \text{ A}$$

$$\overset{\circ}{I}_C = -\overset{\circ}{I}_2 = 10.21 \angle -127.59^\circ \text{ A}$$

Οι τάσεις στα άκρα κάθε φορτίου είναι:

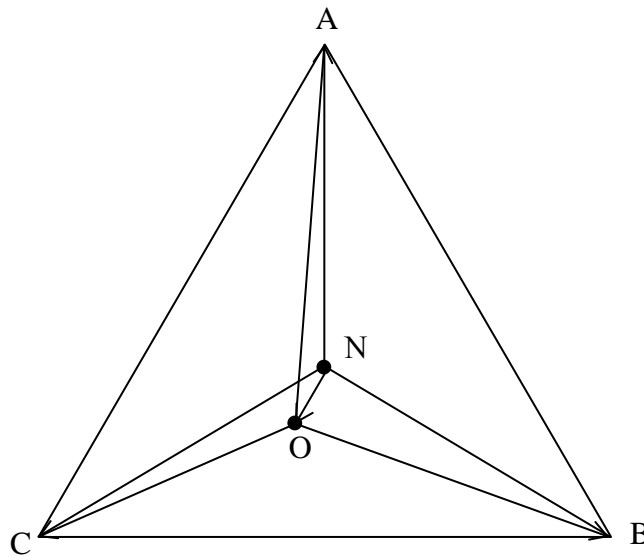
$$\overset{\circ}{V}_{AO} = \overset{\circ}{I}_A \overset{\circ}{Z}_A = 141.6 \angle 86.09^\circ \text{ V}$$

$$\overset{\circ}{V}_{BO} = \overset{\circ}{I}_B \overset{\circ}{Z}_B = 120.2 \angle -18.93^\circ \text{ V}$$

$$\overset{\circ}{V}_{CO} = \overset{\circ}{I}_C \overset{\circ}{Z}_C = 102.1 \angle -157.59^\circ \text{ V}$$

$$\overset{\circ}{V}_{ON} = \overset{\circ}{V}_{OA} + \overset{\circ}{V}_{AN} = 141.6 \angle -93.91^\circ + 120.1 \angle 90^\circ = 23.3 \angle -114.53^\circ \text{ V}$$

Το διάγραμμα των phasor φαίνεται στο σχήμα 6.35.



Σχήμα 6.35: Διάγραμμα phasor τάσεων και ρευμάτων άσκησης 8

9) Να υπολογιστεί η ολική ισχύς για το κύκλωμα της άσκησης 8. Στη συνέχεια να συγκριθεί η τιμή που θα προκύψει από τις ενδείξεις των βαττομέτρων στις γραμμές B και C.

Απάντηση:

Η ισχύ για κάθε φάση είναι:

$$P_A = I_{A,\varepsilon}^2 R_A = \left(\frac{14.16}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 10 = 1002.5W$$

$$P_B = I_{B,\varepsilon}^2 R_B = \left(\frac{8.01}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 15 \cos 30^\circ = 417W$$

$$P_C = I_{C,\varepsilon}^2 R_C = \left(\frac{10.21}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 10 \cos 30^\circ = 451.4W$$

Επομένως η ολική πραγματική ισχύς είναι 1870.9W.

Από τις τάσεις και τα ρεύματα που υπολογίστηκαν στην άσκηση 8, οι ενδείξεις των βαττομέτρων είναι:

$$W_B = \operatorname{Re}(V_{\varepsilon,BA}^{\circ} I_{\varepsilon,B}^{\circ}) = \operatorname{Re}\left(\frac{208}{\sqrt{2}} \angle -60^\circ \cdot \frac{8.01}{\sqrt{2}} \angle 48.93^\circ\right) = 817.1W$$

$$W_C = \operatorname{Re}(V_{\varepsilon,CA}^{\circ} I_{\varepsilon,C}^{\circ}) = \operatorname{Re}\left(\frac{208}{\sqrt{2}} \angle 240^\circ \cdot \frac{10.21}{\sqrt{2}} \angle 127.59^\circ\right) = 1052.8W$$

Όπου $V_{\varepsilon,BA}^{\circ} = V_{BO}^{\circ} + V_{OA}^{\circ}$ και $V_{\varepsilon,CA}^{\circ} = V_{CO}^{\circ} + V_{OA}^{\circ}$.

Η ολική ισχύς (άθροισμα ενδείξεων βαττομέτρων) είναι 1869.9W.

10) Ένα τριφασικό συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση τριγώνου έχει ενδείξεις βαττομέτρων 1154W και 557W αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η σύνθετη αντίσταση του φορτίου αν η πολική τάση είναι 141.4V.

Απάντηση:

$$\pm \tan \theta = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} \right) = \sqrt{3} \frac{577}{1731} = 0.577 \Leftrightarrow \theta = \pm 30^\circ$$

Είναι γνωστό ότι ισχύει η σχέση $P_{ολ} = \sqrt{3} V_{\varepsilon,\pi} I_{\varepsilon,\gamma\rho} \cos \theta$

Επίσης:

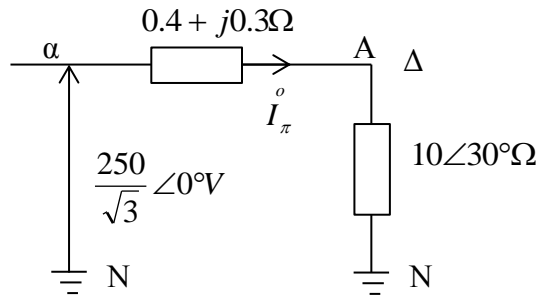
$$Z_{\Delta} = \frac{V_{\varepsilon,\pi}}{I_{\varepsilon,\phi}} = \frac{\sqrt{3} V_{\varepsilon,\pi}}{I_{\varepsilon,\gamma\rho}} \stackrel{(1)}{=} \frac{2V_{\varepsilon,\pi}^2 \cos \theta}{P_{ολ}} = \frac{3 \cdot 100^2 \cos 30^\circ}{1154 + 577} = 15\Omega$$

Επομένως: $Z_{\Delta}^{\circ} = 15 \angle \pm 30^\circ \Omega$

11) Ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση τριγώνου με $Z_{\Delta}^{\circ} = 30\angle 30^{\circ}\Omega$ συνδέεται με ένα τριφασικό σύστημα των 250V με σύνθετες αντιστάσεις $Z_C^{\circ} = 0.4 + j0.3\Omega$. Να υπολογιστεί η πολική τάση στο φορτίο.

Απάντηση:

Το μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα φαίνεται στο σχήμα 6.36.



Σχήμα 6.36: Μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα άσκησης 11

Με διαίρεση τάσεων, η τάση κατά μήκος του φορτίου είναι:

$$V_{AN}^{\circ} = \left(\frac{10\angle 30^{\circ}}{0.4 + j0.3 + 10\angle 30^{\circ}} \right) \left(\frac{250}{\sqrt{3}} \angle 0^{\circ} \right) = 137.4 \angle -0.33^{\circ}V$$

Από όπου: $V_{\pi}^{\circ} = 137.4 \cdot \sqrt{3} = 238V$

Από τα μέτρα προκύπτει ότι η πολική τάση στο φορτίο 238V αντιπροσωπεύει μία πτώση τάσης ίση με 12V. Το μέγεθος του σύρματος και το συνολικό μήκος ελέγχουν την αντίσταση στη Z_C° , ενώ το υλικό του αγωγού (π.χ., χάλυβας, αλουμίνιο, ή ίνες), καθώς και το μήκος, επηρεάζει την επαγωγική αντίδραση.

12) Ένας επαγωγικός κινητήρας λειτουργεί στο 85% των δυνατοτήτων του με συντελεστή ισχύος 0.8 μεταπορείας με πολική τάση 480V. Αν η ισχύς εξόδου του κινητήρα είναι 14954W, να υπολογιστεί η ενδεικνύμενη τιμή του ρεύματος γραμμής.

Απάντηση:

Ισχύει η σχέση:

$$P_{\varepsilon\sigma} = \frac{P_{\varepsilon\zeta}}{0.85} = \frac{14954}{0.85} = 17.55 \cdot 10^3 W$$

Επιπλέον ισχύει για την ισχύ εισόδου:

$$P_{\varepsilon\sigma} = \sqrt{3}V_{\varepsilon,\pi} I_{\varepsilon,\gamma\rho} \cdot \Sigma I \Leftrightarrow I_{\varepsilon,\gamma\rho} = \frac{P_{\varepsilon\sigma}}{\sqrt{3}V_{\varepsilon,\pi} \cdot \Sigma I} = \frac{17.55 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 480 \cdot 0.8} = 26.4A$$

13) Σε ένα τριφασικό ABC σύστημα τριών γραμμών είναι: $I_A^{\circ} = 10\angle -30^{\circ}A$, $I_B^{\circ} = 8\angle 45^{\circ}A$ και $V_{AB}^{\circ} = 208\angle 60^{\circ}V$. Να υπολογιστεί η ένδειξη του βαττομέτρου που είναι συνδεδεμένο στη γραμμή C. Επίσης να υπολογιστεί η τάση V_{BC}° .

Απάντηση:

Είναι $V_{\pi} = 208V$. Επίσης:

$$I_C^{\circ} = -I_A^{\circ} - I_B^{\circ} = -10\angle -30^{\circ} - 8\angle 45^{\circ} = 14.3\angle -177.4A$$

Επειδή το σύστημα είναι ABC προκύπτει:

$$V_{CB}^{\circ} = 208\angle 120^{\circ}V$$

Επομένως η ένδειξη του βαττομέτρου είναι:

$$P_{\varepsilon\sigma} = V_{\varepsilon,\pi} I_{\varepsilon,C} \cos \theta = 208 \cdot 14.3 \cos[120 - (-177.4)] = 1.37kW$$

14) Ένα τριφασικό σύστημα (450V-25Hz) τροφοδοτεί ένα συμμετρικό τριφασικό ωμικό φορτίο. Αν το ρεύμα γραμμής είναι 100A να υπολογιστεί η πραγματική και η άεργος ισχύς στο φορτίο.

Απάντηση:

Ο συντελεστής ισχύος θα είναι μοναδιαίος επειδή το φορτίο είναι ωμικό. Είναι:

$$P = \sqrt{3}V_{\varepsilon,\pi} I_{\varepsilon,\gamma\rho} \cos 0^{\circ} = \sqrt{3} \cdot 450 \cdot 100 \cdot 1 = 77.94W$$

$$Q = \sqrt{3}V_{\varepsilon,\pi} I_{\varepsilon,\gamma\rho} \sin 0^{\circ} = \sqrt{3} \cdot 450 \cdot 100 \cdot 0 = 0$$

15) Ένα συμμετρικό φορτίο (3kW, 220V) σε σύνδεση τριγώνου διαρρέεται από ρεύμα γραμμής 10A. Να υπολογιστεί η σύνθετη αντίσταση κάθε φορτίου.

Απάντηση:

Είναι $V_\phi = 220V$ και $I_\phi = \frac{I_{\gamma\rho}}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = 5,77A$

$$Z = \frac{220}{5,77} = 38,1\Omega$$

$$P = \sqrt{3}V_{\varepsilon,\pi}I_{\varepsilon,\gamma\rho} \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{P}{\sqrt{3}V_{\varepsilon,\pi}I_{\varepsilon,\gamma\rho}} = \frac{3000}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 10} = 0,7873$$

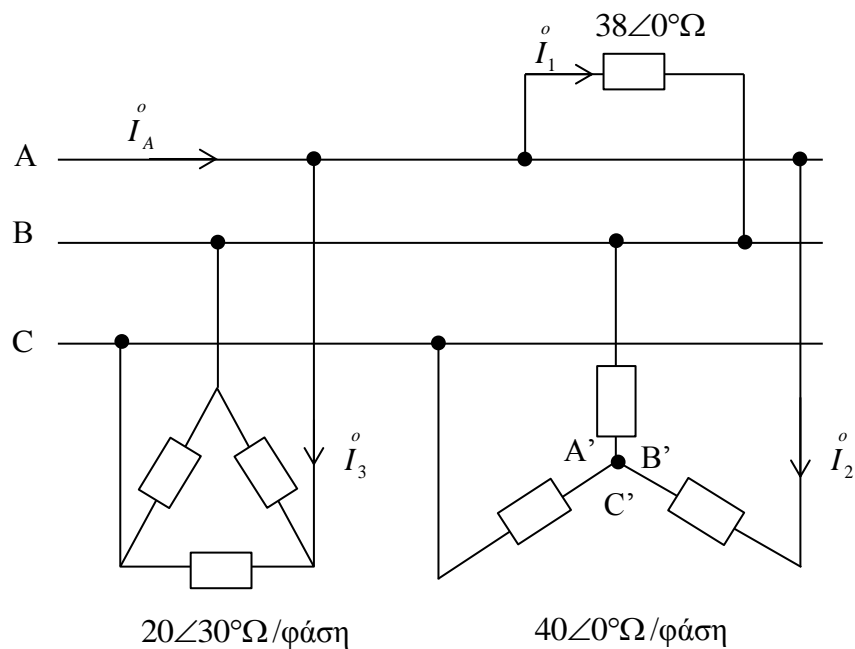
Έστω το φορτίο ότι είναι $\overset{\circ}{Z} = R + jX$. Θα είναι:

$$R = Z \cos \theta = 38,1 \cdot 0,7873 = 30\Omega$$

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{38,1^2 - 30^2} = 23,5\Omega$$

Επομένως: $\overset{\circ}{Z} = 30 + j23,5\Omega$

16) Στο κύκλωμα του σχήματος 6.37 να υπολογιστούν τα ρεύματα $\overset{\circ}{I}_1$, $\overset{\circ}{I}_2$, $\overset{\circ}{I}_3$ και $\overset{\circ}{I}_A$.



Σχήμα 6.37: Κύκλωμα άσκησης 16

Απάντηση:

$$\overset{\circ}{I}_1 = \frac{450\angle 0^\circ}{38\angle 0^\circ} = 11,84\angle 0^\circ A$$

$$V_{AA'}^{\circ} = \frac{450}{\sqrt{3}} \angle -30^{\circ} = 259.8 \angle -30^{\circ} \text{V}$$

$$I_1^{\circ} = \frac{V_{AA'}^{\circ}}{40 \angle 0^{\circ}} = \frac{259.8 \angle -30^{\circ}}{40 \angle 0^{\circ}} = 6.5 \angle -30^{\circ} \text{A}$$

$$I_3^{\circ} = \frac{V_{AB}^{\circ}}{20 \angle 30^{\circ}} + \frac{V_{AC}^{\circ}}{20 \angle 30^{\circ}} = \frac{450 \angle 0^{\circ}}{20 \angle 30^{\circ}} + \frac{-450 \angle 120^{\circ}}{20 \angle 30^{\circ}} = 38.97 \angle -60^{\circ} \text{A}$$

$$I_A^{\circ} = I_1^{\circ} + I_2^{\circ} + I_3^{\circ} = 11.84 \angle 0^{\circ} + 6.5 \angle -30^{\circ} + 38.97 \angle -60^{\circ} = 52.3 \angle -45^{\circ} \text{A}$$

17) Τρεις σύνθετες αντιστάσεις $Z_{AB}^{\circ} = 8 \angle 20^{\circ} \Omega$, $Z_{BC}^{\circ} = 15 \angle 65^{\circ} \Omega$ και $Z_{CA}^{\circ} = 10 \angle 0^{\circ} \Omega$ είναι συνδεδεμένες σε τρίγωνο και τροφοδοτούνται από μία τριφασική πηγή 300V. α) Να υπολογιστεί το ρεύμα I_A° . β) Να υπολογιστεί το ρεύμα I_A° αν η ακολουθία της πηγής αντιστραφεί.

Απάντηση:

$$\alpha) I_A^{\circ} = \frac{V_{AB}^{\circ}}{Z_{AB}^{\circ}} + \frac{V_{AC}^{\circ}}{Z_{AC}^{\circ}} = \frac{300}{8 \angle 20^{\circ}} + \frac{-300}{10 \angle 0^{\circ}} = 63.48 \angle -37.68^{\circ} \text{A}$$

$$\beta) I_A^{\circ} = \frac{V_{AC}^{\circ}}{Z_{AC}^{\circ}} + \frac{V_{AB}^{\circ}}{Z_{AB}^{\circ}} = \frac{-300 \angle 120^{\circ}}{16 \angle 65^{\circ}} + \frac{300 \angle 0^{\circ}}{8 \angle 20^{\circ}} = 37.66 \angle -50.87^{\circ} \text{A}$$

18) Δύο βαττόμετρα που είναι συνδεδεμένα για να μετρήσουν την τριφασική ισχύ έχουν ενδείξεις 60kW και 40kW αντίστοιχα. α) Να προσδιοριστεί η ολική ισχύς και ο συντελεστής ισχύος, β) Να προσδιοριστεί η ολική μιγαδική ισχύς, γ) Να υπολογιστεί η άεργος ισχύς ανά φάση.

Απάντηση:

$$\alpha) P = W_1 + W_2 = 60 + 40 = 100 \text{kW}$$

$$\tan \theta = \sqrt{3} \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} = \sqrt{3} \frac{40 - 60}{40 + 60} = -0.3464 \Leftrightarrow \theta = -19.1^{\circ}$$

Ο συντελεστής ισχύος είναι: $\cos(-19.1^{\circ}) = 0.945$ μεταφορείας

$$\beta) \text{ Είναι: } S \cos \theta = W_1 + W_2 \Leftrightarrow S = \frac{60 + 40}{0.945} = 105.8 \text{ kVA}$$

$$\gamma) \text{ Η ολική άεργος ισχύς είναι: } Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{105.8^2 - 100^2} = 34.6 \text{ kVAR}$$

Επομένως η άεργος ισχύς ανά φάση είναι:

$$Q_{\text{φάση}} = \frac{1}{3} Q = \frac{1}{3} \cdot 34.6 = 11.53 \text{ kVAR}$$

19) Μία τριφασική πηγή των 440V τροφοδοτεί ένα φορτίο (10kVA) σε σύνδεση αστέρα με συντελεστή ισχύος 0.8 μεταπορείας και ένα φορτίο (10kVA) σε σύνδεση τριγώνου με μοναδιαίο συντελεστή ισχύος. α) Να υπολογιστεί η ολική μιγαδική ισχύς. β) Να υπολογιστεί ο ολικός συντελεστής ισχύος. γ) Να γίνει επαλήθευση του αποτελέσματος του ερωτήματος β με υπολογισμό μέσω πραγματικής ισχύος. δ) Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής για κάθε φορτίο.

Απάντηση:

$$\alpha) P = P_Y + P_{\Delta} = 10 \cdot 0.8 + 10 \cdot 1 = 18 \text{ kW}$$

$$Q = Q_Y + Q_{\Delta} = 10 \cdot 0.6 + 0 = 6 \text{ kVAR}$$

$$S = P + jQ = 18 + j6 = 18.97 \angle 18.43^\circ \text{ kVA}$$

$$\beta) \cos \theta = \cos 18.43 = 0.95$$

$$\gamma) I_{\gamma\phi} = \frac{S}{\sqrt{3}V_{\pi}} = \frac{18.97 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 440} = 24.89 \text{ A}$$

$$P = \sqrt{3}V_{\gamma\phi}I_{\pi} \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{P}{\sqrt{3}V_{\gamma\phi}I_{\pi}} = \frac{18000}{\sqrt{3} \cdot 440 \cdot 24.89} = 0.949 \approx 0.95$$

$$\delta) S_Y = \sqrt{3}V_{\pi}I_Y \Leftrightarrow I_Y = \frac{10000}{\sqrt{3} \cdot 440} = 13.12 \text{ A}$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{3}V_{\pi}I_{\Delta} \Leftrightarrow I_{\Delta} = \frac{10000}{\sqrt{3} \cdot 440} = 13.12 \text{ A}$$

20) Ένα τριφασικό φορτίο (100kVA) με 230V λειτουργεί με συντελεστή ισχύος 0.8 μεταπορείας. Ο συντελεστής ισχύος βελτιώνεται σε 0.8 προπορείας με την προσθήκη

πυκνωτών. Όμως οι πυκνωτές έχουν απώλειες και «απαιτούν» 50kW ισχύ όταν συνδεθούν με την τριφασική πηγή. Να υπολογιστεί η μιγαδική ισχύς των πυκνωτών.

Απάντηση:

Η αρχική άεργος ισχύς (πριν την προσθήκη πυκνωτών) είναι:

$$Q_a = 100 \cdot 0.6 = 60kVAR$$

Η τελική άεργος ισχύς είναι:

$$Q_{\text{τελ}} = 100 \cdot (-0.6) = -60kVAR$$

Η άεργος ισχύς των πυκνωτών είναι:

$$Q_C = Q_a - Q_{\text{τελ}} = 60 - (-60) = 120kVAR$$

Επομένως η μιγαδική ισχύς των πυκνωτών είναι:

$$S_C = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{50^2 + 120^2} = 130kVA$$

21) Να υπολογιστεί η έκφραση για την άεργο ισχύ σε ένα τριφασικό σύστημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των δύο βαττομέτρων.

Απάντηση:

Είναι γνωστό από την ενότητα 6.12 για τα συμμετρικά φορτία, ότι οι ενδείξεις των βαττομέτρων για την πραγματική ισχύ είναι οι εξής:

$$W_1 = V_{\varepsilon,\pi}^{\circ} I_{\varepsilon,\gamma\rho}^{\circ} \cos(\theta + 30^{\circ})$$

$$W_2 = V_{\varepsilon,\pi}^{\circ} I_{\varepsilon,\gamma\rho}^{\circ} \cos(\theta - 30^{\circ})$$

Αν αφαιρεθούν οι δύο παραπάνω σχέσεις κατά μέλη προκύπτει:

$$W_1 - W_2 = V_{\varepsilon,\pi}^{\circ} I_{\varepsilon,\gamma\rho}^{\circ} [\cos(\theta + 30^{\circ}) - \cos(\theta - 30^{\circ})] = V_{\varepsilon,\pi}^{\circ} I_{\varepsilon,\gamma\rho}^{\circ} \sin \theta$$

Όμως $Q = \sqrt{3} V_{\varepsilon,\pi}^{\circ} I_{\varepsilon,\gamma\rho}^{\circ} \sin \theta$. Επομένως η ολική άεργος ισχύς σύμφωνα με τις ενδείξεις των δύο βαττομέτρων είναι:

$$Q = \sqrt{3}(W_1 - W_2)$$

22) Ένα τριφασικό φορτίο λειτουργεί στα 440V και ο συντελεστής ισχύος είναι 0.6 μεταφορείας. Δύο βαττόμετρα που μετρούν την πραγματική ισχύ έχουν συνολική ένδειξη ίση με 20kW. Να υπολογιστεί η ένδειξη του κάθε βαττομέτρου.

Απάντηση:

Είναι $\cos \theta = 0.6 \Leftrightarrow \theta = 53.13^\circ$. Επίσης:

$$\tan \theta = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} \right) = \tan 53.13^\circ = 1.33 \text{ Επομένως:}$$

$$W_2 - W_1 = \frac{1.33}{\sqrt{3}} (W_2 + W_1) = \frac{1.33}{\sqrt{3}} \cdot 20 = 15.4$$

Στη συνέχεια επιλύεται το σύστημα $\left\{ \begin{array}{l} W_2 + W_1 = 20 \\ W_2 - W_1 = 15.4 \end{array} \right\}$ και προκύπτουν:

$$W_1 = 2.3kW \text{ και } W_2 = 17.7kW$$

23) Σύμφωνα με τη μέθοδο των δύο βαττομέτρων: α) Για ποια τιμή συντελεστή ισχύος οι ενδείξεις των δύο βαττομέτρων θα είναι ίσες; β) Για ποια τιμή συντελεστή ισχύος η ένδειξη του ενός βαττομέτρου θα είναι μηδενική;

Απάντηση:

α) Οι ενδείξεις των βαττομέτρων είναι ίσες έστω W. Τότε ισχύει:

$$\tan \theta = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{W - W}{W + W} \right) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$$

Επομένως ο συντελεστής ισχύος είναι: $\cos \theta = \cos 0^\circ = 1$.

β) Έστω $W_1 = 0$. Τότε:

$$\tan \theta = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{W_2}{W_2} \right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1} \sqrt{3} = 60^\circ$$

Επομένως ο συντελεστής ισχύος είναι: $\cos \theta = \cos 60^\circ = 0.5$.

24) Ένα συμμετρικό τριφασικό φορτίο σε σύνδεση τριγώνου έχει σύνθετες αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z} = 10 \angle 45^\circ \Omega$. Το φορτίο είναι συνδεδεμένο με μία τροφοδοσία 200V. Πόση ισχύς καταναλώνεται συνολικά από το φορτίο;

Απάντηση:

$$Z_{\phi\acute{\alpha}\sigma\eta}^{\circ} = 10\angle 45^{\circ}\Omega = 7.07 + j7.07$$

$$I_{\gamma\rho}^{\circ} = \frac{V_{\pi}^{\circ}}{Z} = \frac{200\angle 0^{\circ}}{10\angle 45^{\circ}} = 20\angle -45^{\circ}A$$

$$P_{\phi\acute{\alpha}\sigma\eta} = (I_{\gamma\rho})^2 R = 20^2 \cdot 7.07 = 2828W$$

$$P_{ολ} = 3 \cdot P_{\phi\acute{\alpha}\sigma\eta} = 3 \cdot 2828 = 8484W$$

25) Να γίνει η μετατροπή ενός τριφασικού φορτίου από σύνδεση τριγώνου σε σύνδεση αστέρα. Δίνονται: $Z_A^{\circ} = 10\Omega$, $Z_B^{\circ} = 4 - j3\Omega$ και $Z_C^{\circ} = 3 - j4\Omega$.

Απάντηση:

$$Z_1^{\circ} = \frac{10(4 - j3)}{10 + 4 - j3 + 3 + j4} = 2.936\angle -40.24^{\circ}\Omega$$

$$Z_2^{\circ} = \frac{10(3 + j4)}{10 + 4 - j3 + 3 + j4} = 2.936\angle 49.8^{\circ}\Omega$$

$$Z_3^{\circ} = \frac{(4 - j3)(3 + j4)}{10 + 4 - j3 + 3 + j4} = 1.468\angle 12.9^{\circ}\Omega$$

26) Να υπολογιστεί το ρεύμα γραμμής σε ένα τριφασικό φορτίο σε σύνδεση αστέρα, αν η πολική τάση είναι 220V. Δίνονται: $Z_1^{\circ} = 3\Omega$, $Z_2^{\circ} = 6\Omega$ και $Z_3^{\circ} = 9\Omega$.

Απάντηση:

Επειδή η απευθείας λύση είναι πιο περίπλοκη και χρονοβόρα, γίνεται μετατροπή από σύνδεση αστέρα σε σύνδεση τριγώνου. Επομένως:

$$Z_{AB}^{\circ} = \frac{Z_1^{\circ} Z_2^{\circ} + Z_1^{\circ} Z_3^{\circ} + Z_2^{\circ} Z_3^{\circ}}{Z_3^{\circ}} = \frac{18 + 54 + 27}{9} = 11\Omega$$

Τότε:

$$I_A^{\circ} = I_{AB}^{\circ} - I_{CA}^{\circ} = \frac{V_{AB}^{\circ}}{11} - \frac{V_{CA}^{\circ}}{16.5} = \frac{220\angle 0^{\circ}}{11} - \frac{220\angle 120^{\circ}}{16.5} = 29.06\angle -23.42^{\circ}A$$

6.14. Άλυτες ασκήσεις

6.1) Τρεις σύνθετες αντιστάσεις των $10\angle 53.13^\circ\Omega$ συνδέονται σε τρίγωνο σε ένα τριφασικό σύστημα CBA με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με 240V. Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής.

$$(Απάντηση: \overset{\circ}{I}_A = 58.8\angle -143.13^\circ A, \overset{\circ}{I}_B = 58.8\angle -23.13^\circ A, \overset{\circ}{I}_C = 58.8\angle 96.87^\circ A)$$

6.2) Τρεις σύνθετες αντιστάσεις των $4.2\angle -35^\circ\Omega$ συνδέονται σε τρίγωνο σε ένα τριφασικό σύστημα ABC με $\overset{\circ}{V}_{BC} = 495\angle 0^\circ V$. Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής.

$$(Απάντηση: \overset{\circ}{I}_A = 20.41\angle 125^\circ A, \overset{\circ}{I}_B = 20.41\angle 5^\circ A, \overset{\circ}{I}_C = 20.41\angle -115^\circ A)$$

6.3) Ένα τριφασικό σύστημα τριών γραμμών με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με 100V έχει ρεύματα $\overset{\circ}{I}_A = 15.41\angle -160^\circ A, \overset{\circ}{I}_B = 15.41\angle -40^\circ A, \overset{\circ}{I}_C = 15.41\angle 80^\circ A$. Ποια είναι η ακολουθία του συστήματος και ποιες είναι οι τιμές των σύνθετων αντιστάσεων αν η σύνδεση είναι τριγώνου;

$$(Απάντηση: CBA, 15.9\angle 70^\circ\Omega)$$

6.4) Τρεις σύνθετες αντιστάσεις των $6\angle 45^\circ\Omega$ συνδέονται σε αστέρα σε ένα τριφασικό σύστημα CBA (τεσσάρων γραμμών) με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με 208V. Να υπολογιστούν τα τέσσερα ρεύματα γραμμής.

$$(Απάντηση: \overset{\circ}{I}_A = 28.31\angle -135^\circ A, \overset{\circ}{I}_B = 28.31\angle -15^\circ A, \overset{\circ}{I}_C = 28.31\angle 105^\circ A, \overset{\circ}{I}_N = 0)$$

6.5) Ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση αστέρα, με σύνθετες αντιστάσεις $65\angle -20^\circ\Omega$ συνδέεται σε ένα τριφασικό CBA σύστημα τριών γραμμών όπου $\overset{\circ}{V}_{AB} = 678.8\angle -120^\circ V$. Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής.

$$(Απάντηση: \overset{\circ}{I}_A = 6.03\angle -70^\circ A, \overset{\circ}{I}_B = 6.03\angle 50^\circ A, \overset{\circ}{I}_C = 6.03\angle 170^\circ A)$$

6.6) Ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση τριγώνου, με σύνθετες αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z}_\Delta = 5\angle 45^\circ\Omega$ και ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση αστέρα, με σύνθετες αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z}_Y = 5\angle 45^\circ\Omega$ τροφοδοτούνται από ένα τριφασικό ABC σύστημα με

ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με 480V. Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής με τη μέθοδο του μονοφασικού ισοδύναμου.

$$(Απάντηση: \overset{\circ}{I}_A = 168.9 \angle 93.36^\circ A, \overset{\circ}{I}_B = 168.9 \angle -26.64^\circ A, \overset{\circ}{I}_C = 168.9 \angle -146.64^\circ A)$$

6.7) Ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση τριγώνου, με σύνθετες αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z}_\Delta = 27 \angle -25^\circ \Omega$ και ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση αστέρα, με σύνθετες αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z}_Y = 10 \angle -30^\circ \Omega$ τροφοδοτούνται από ένα τριφασικό ABC σύστημα με $\overset{\circ}{V}_{CN} = 169.8 \angle -150^\circ V$. Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής.

$$(Απάντηση: \overset{\circ}{I}_A = 35.8 \angle 117.36^\circ A, \overset{\circ}{I}_B = 35.8 \angle -2.64^\circ A, \overset{\circ}{I}_C = 35.8 \angle -122.64^\circ A)$$

6.8) Ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση τριγώνου, με σύνθετες αντιστάσεις $\overset{\circ}{Z}_\Delta = 10 \angle -36.9^\circ \Omega$ και ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση αστέρα, τροφοδοτούνται από ένα τριφασικό ABC σύστημα με $\overset{\circ}{V}_{CA} = 141.4 \angle 240^\circ V$. Αν $\overset{\circ}{I}_B = 40.44 \angle 13.41^\circ A$, ποιες είναι οι σύνθετες αντιστάσεις του φορτίου σε σύνδεση αστέρα;

$$(Απάντηση: 5 \angle -53.3^\circ \Omega)$$

6.9) Ένα τριφασικό ABC σύστημα με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με 500V, έχει ένα φορτίο σε σύνδεση τριγώνου για το οποίο ισχύει: $\overset{\circ}{Z}_{AB} = 10 \angle 30^\circ \Omega$, $\overset{\circ}{Z}_{BC} = 25 \angle 0^\circ \Omega$, $\overset{\circ}{Z}_{CA} = 20 \angle -30^\circ \Omega$. Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής.

$$(Απάντηση: \overset{\circ}{I}_A = 106.1 \angle 90^\circ A, \overset{\circ}{I}_B = 76.15 \angle -68.2^\circ A, \overset{\circ}{I}_C = 45.28 \angle -128.65^\circ A)$$

6.10) Ένα τριφασικό ABC σύστημα με $\overset{\circ}{V}_{BC} = 294.2 \angle 0^\circ V$, έχει ένα φορτίο σε σύνδεση τριγώνου για το οποίο ισχύει: $\overset{\circ}{Z}_{AB} = 5 \angle 0^\circ \Omega$, $\overset{\circ}{Z}_{BC} = 4 \angle 30^\circ \Omega$, $\overset{\circ}{Z}_{CA} = 6 \angle -15^\circ \Omega$. Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής.

$$(Απάντηση: \overset{\circ}{I}_A = 99.7 \angle 99.7^\circ A, \overset{\circ}{I}_B = 127.9 \angle -43.3^\circ A, \overset{\circ}{I}_C = 77.1 \angle -127.1^\circ A)$$

6.11) Ένα τριφασικό CBA σύστημα με τέσσερις γραμμές έχει ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με 100V και ένα φορτίο σε σύνδεση αστέρα για το οποίο ισχύει:

$\overset{\circ}{Z}_A = 3\angle 0^\circ\Omega$, $\overset{\circ}{Z}_B = 3.61\angle 56.31^\circ\Omega$, $\overset{\circ}{Z}_C = 2.24\angle -26.57^\circ\Omega$. Να υπολογιστούν τα ρεύματα $\overset{\circ}{I}_A, \overset{\circ}{I}_B, \overset{\circ}{I}_C, \overset{\circ}{I}_N$.

$$(Απάντηση: \overset{\circ}{I}_A = 27.2\angle -90^\circ A, \overset{\circ}{I}_B = 22.6\angle -26.3^\circ A, \overset{\circ}{I}_C = 36.4\angle 176.6^\circ A, \\ \overset{\circ}{I}_N = 38.6\angle 65.3^\circ A)$$

6.12) Ένα τριφασικό ABC σύστημα με τέσσερις γραμμές έχει $\overset{\circ}{V}_{BC} = 294.2\angle 0^\circ V$ και ένα φορτίο σε σύνδεση αστέρα για το οποίο ισχύει: $\overset{\circ}{Z}_A = 12\angle 45^\circ\Omega$, $\overset{\circ}{Z}_B = 10\angle 30^\circ\Omega$, $\overset{\circ}{Z}_C = 8\angle 0^\circ\Omega$. Να υπολογιστούν τα ρεύματα $\overset{\circ}{I}_A, \overset{\circ}{I}_B, \overset{\circ}{I}_C, \overset{\circ}{I}_N$.

$$(Απάντηση: \overset{\circ}{I}_A = 14.16\angle 45^\circ A, \overset{\circ}{I}_B = 16.99\angle -60^\circ A, \overset{\circ}{I}_C = 21.24\angle -150^\circ A, \\ \overset{\circ}{I}_N = 15.32\angle 90.4^\circ A)$$

6.13) Ένα φορτίο σε σύνδεση αστέρα με $\overset{\circ}{Z}_A = 10\angle 0^\circ\Omega$, $\overset{\circ}{Z}_B = 10\angle 60^\circ\Omega$, $\overset{\circ}{Z}_C = 10\angle -60^\circ\Omega$ συνδέεται σε ένα τριφασικό ABC σύστημα τριών γραμμών με ενδεικνύμενη τιμή τάσης ίση με 141.4V. Να υπολογιστούν οι τάσεις $\overset{\circ}{V}_A, \overset{\circ}{V}_B, \overset{\circ}{V}_C$ και η απόκλιση τάσης από τον ουδέτερο $\overset{\circ}{V}_{ON}$. Να σχεδιαστεί επίσης το διάγραμμα Phasor.

$$(Απάντηση: \overset{\circ}{V}_A = 173.2\angle 90^\circ V, \overset{\circ}{V}_B = 100\angle 0^\circ V, \overset{\circ}{V}_C = 100\angle 180^\circ V, \\ \overset{\circ}{V}_{ON} = 57.73\angle -90^\circ V)$$

6.14) Ένα φορτίο σε σύνδεση αστέρα με $\overset{\circ}{Z}_A = 10\angle -60^\circ\Omega$, $\overset{\circ}{Z}_B = 10\angle 0^\circ\Omega$, $\overset{\circ}{Z}_C = 10\angle 60^\circ\Omega$ συνδέεται σε ένα τριφασικό CBA σύστημα τριών γραμμών με ενδεικνύμενη τιμή τάσης ίση με 147.4V. Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής.

$$(Απάντηση: \overset{\circ}{I}_A = 20.8\angle -60^\circ A, \overset{\circ}{I}_B = 0, \overset{\circ}{I}_C = 20.8\angle 120^\circ A)$$

6.15) Ένα τριφασικό ABC σύστημα τριών γραμμών με ενδεικνύμενη τιμή τάσης ίση με 200V και συμμετρικό φορτίο, έχει ρεύμα γραμμής $\overset{\circ}{I}_A = 13.61\angle 60^\circ A$. Να υπολογιστεί η ολική ισχύς.

$$(Απάντηση: 2887W)$$

6.16) Δύο συμμετρικά φορτία σε σύνδεση τριγώνου με σύνθετες αντιστάσεις $20\angle -60^\circ\Omega$ και $18\angle 45^\circ\Omega$ αντίστοιχα, συνδέονται σε ένα τριφασικό σύστημα για το οποίο η πολική τάση είναι $V_{BC}^{\circ} = 212.1\angle 0^\circ V$. Να υπολογιστεί η ισχύς για κάθε φορτίο ανά φάση. Στη συνέχεια να εφαρμοστεί η μέθοδος του ισοδύναμου μονοφασικού κυκλώματος και να υπολογιστούν: το ολικό ρεύμα γραμμής, η ολική ισχύς και να γίνει σύγκριση της ολικής ισχύος με το άθροισμα κάθε ισχύος ανά φάση.

(Απάντηση: $562.3W, 883.6W, 4337.5W = 3(562.3W) + 3(883.6W)$)

6.17) Ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση τριγώνου με σύνθετες αντιστάσεις $20\angle 45^\circ\Omega$ έχει ρεύματα γραμμής $8.65A$ για πολική τάση $100V$. Να υπολογιστούν οι ενδείξεις δύο βαττομέτρων που μετρούν την ολική πραγματική ισχύ.

(Απάντηση: $111.9W, 417.7W$)

6.18) Να υπολογιστούν οι ενδείξεις δύο βαττομέτρων σε ένα τριφασικό σύστημα τριών γραμμών με ενδεικνύμενη τιμή τάσης ίση με $240V$ και συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση τριγώνου με σύνθετες αντιστάσεις $20\angle 80^\circ\Omega$.

(Απάντηση: $1706W, 3206W$)

6.19) Ένα τριφασικό ABC σύστημα τριών γραμμών με $V_{BC}^{\circ} = 311.1\angle 0^\circ V$ έχει ρεύματα γραμμής $I_A^{\circ} = 61.5\angle 116.6^\circ A$, $I_B^{\circ} = 61.2\angle -48^\circ A$, $I_C^{\circ} = 16.1\angle 218^\circ A$. Να υπολογιστούν οι ενδείξεις των βαττομέτρων στις γραμμές: α) A και B, β) B και C, γ) A και C.

(Απάντηση: α) $5266W, 6370W$, β) $9312W, 2322W$, γ) $9549W, 1973W$)

6.20) Ένα τριφασικό ABC σύστημα τριών γραμμών με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με $440V$ έχει ρεύματα γραμμής $I_A^{\circ} = 27.9\angle 90^\circ A$, $I_B^{\circ} = 81\angle -9.9^\circ A$, $I_C^{\circ} = 81\angle 189.9^\circ A$. Να υπολογιστούν οι ενδείξεις των βαττομέτρων στις γραμμές: α) A και B, β) B και C.

(Απάντηση: α) $7.52kW, 24.8kW$, β) $16.16kW, 16.16kW$)

6.21) Δύο βαττόμετρα σε ένα τριφασικό σύστημα τριών γραμμών με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με $120V$ έχουν ενδείξεις $1500W$ και $500W$. Ποια είναι η σύνθετη αντίσταση του συμμετρικού φορτίου σε σύνδεση τριγώνου;

(Απάντηση: $16.3\angle \pm 40.9^\circ\Omega$)

6.22) Ένα τριφασικό ABC σύστημα τριών γραμμών έχει ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με 173.2V. Δύο βαττόμετρα στις γραμμές A και B έχουν ενδείξεις 301W και 1327W αντίστοιχα. Να υπολογιστούν οι σύνθετες αντιστάσεις του συμμετρικού φορτίου σε σύνδεση αστέρα. (Σημείωση: Εφόσον η ακολουθία έχει καθοριστεί, είναι δυνατό να βρεθεί και η γωνία της σύνθετης αντίστασης).

(Απάντηση: $10\angle -70^\circ\Omega$)

6.23) Ένα τριφασικό ABC σύστημα τριών γραμμών με $V_{BC}^{\circ} = 339.4\angle 0^\circ V$ έχει συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση αστέρα με $Z_Y = 15\angle 60^\circ\Omega$. Οι γραμμές μεταξύ του συστήματος και του φορτίου έχουν σύνθετες αντιστάσεις $2.24\angle 26.57^\circ\Omega$. Να βρεθεί το μέτρο της πολικής τάσης στο φορτίο.

(Απάντηση: 301.1V)

6.24) Μία τριφασική γεννήτρια με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με 6000V τροφοδοτεί τέσσερα συμμετρικά φορτία συνδεδεμένα παράλληλα: 1. 16kW με $\Sigma I=0.8$ μεταπορείας, 2. 24kW με $\Sigma I=0.6$ μεταπορείας, 3. 4kW με $\Sigma I=1$ και 4. 1kW με $\Sigma I=0.1$ προπορείας. α) Να υπολογιστούν η ολική ισχύς P που παρέχεται από τη γεννήτρια, η άεργος ισχύς Q, η φαινόμενη ισχύς S, ο συντελεστής ισχύος και η ενδεικνύμενη τιμή του ρεύματος γραμμής. β) Να υπολογιστεί η άεργος ισχύς του φορτίου Q_C που πρέπει να συνδεθεί παράλληλα για να γίνει ο συντελεστής ισχύος 0.9 μεταπορείας και στη συνέχεια να υπολογιστεί η φαινόμενη ισχύς και η ενδεικνύμενη τιμή του ρεύματος γραμμής.

(Απάντηση: α) $P=45kW$, $Q=34.05kVAR$, $S=56.43kVA$, $\Sigma I=0.8$ μεταπορείας,
 $I_{\gamma\pi}=5.35A$
 β) $Q_C=-12.25kVAR$, $S=50kVA$, $I_{\gamma\pi}=5.35A$)

6.25) Ένα συμμετρικό φορτίο σε σύνδεση τριγώνου με σύνθετες αντιστάσεις $Z_{\Delta} = 6 + j9\Omega$ συνδέεται σε μία τριφασική γεννήτρια με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης ίση με 400V. Οι γραμμές μεταξύ του φορτίου και της γεννήτριας έχουν αντιστάσεις 1Ω η καθεμία. α) Να υπολογιστούν η ενδεικνύμενη τιμή του ρεύματος γραμμής, η ισχύς που παρέχεται από τη γεννήτρια και η ισχύς που απορροφάται από το φορτίο. β) Να βρεθεί η ενδεικνύμενη τιμή της τάσης στο φορτίο.

(Απάντηση: α) $I_{\gamma\pi}=54.43A$, $P_{\gamma\epsilon\nu}=26666W$, $Q_{\phi}=17777VAR$, β) $V=340V$)

6.26) Μία τριφασική γεννήτρια τροφοδοτεί δύο συμμετρικά φορτία (9kW με $\Sigma I=0.8$ μεταπορείας και 12kW με $\Sigma I=0.6$ μεταπορείας) μέσω τριών καλωδίων με αντίσταση 1Ω το καθένα. Η ενδεικνύμενη τιμή της πολικής τάσης στο φορτίο είναι 220V. Να υπολογιστεί η ενδεικνύμενη τιμή της πολικής τάσης στη γεννήτρια.

(Απάντηση: 230V)

6.27) Ένα συμμετρικό φορτίο με σύνδεση τριγώνου έχει σύνθετες αντιστάσεις $456 + j60\Omega$. Να υπολογιστεί η πραγματική ισχύς που μεταφέρεται σε αυτό για ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης: α) 400V, β) 390V.

(Απάντηση: α) 3.84kW, β) 3.65kW)

6.28) Να υπολογιστεί η αλλαγή στην πραγματική ισχύ που μεταφέρεται σε ένα τριφασικό συμμετρικό φορτίο, αν η ενδεικνύμενη τιμή της τάσης πολλαπλασιάζεται με έναν παράγοντα α.

(Απάντηση: Η ισχύς πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα α^2)

6.29) Τι συμβαίνει στην πραγματική ισχύ ενός τριφασικού συστήματος τριών γραμμών με συμμετρικό φορτίο, αν η μία φάση αποσυνδεθεί;

(Απάντηση: Η ισχύς μειώνεται στο μισό)

6.30) Μία τριφασική γεννήτρια με ενδεικνύμενη τιμή πολικής τάσης 6000V συνδέεται σε ένα συμμετρικό φορτίο μέσω τριών γραμμών με αντίσταση 1Ω η καθεμία, παρέχοντας συνολικά 200kW. Να υπολογιστεί η απόδοση (ο λόγος της ισχύος που απορροφάται από το φορτίο προς την ισχύ που αποδίδεται στο σύστημα) αν ο συντελεστής ισχύος είναι α) 0.6, β) 0.9.

(Απάντηση: α) 98.5%, β) 99.3%)

Κεφάλαιο 7: Μεταβατικά Φαινόμενα (Κυκλώματα πρώτης τάξης)

7.1. Εισαγωγή

Όταν σε ένα κύκλωμα υπάρξει αλλαγή στις συνθήκες λειτουργίας του, όπως για παράδειγμα αλλαγή στην εφαρμοζόμενη τάση ή αλλαγή σε κάποιο στοιχείο του κυκλώματος, τότε παρατηρείται μία μεταβατική περίοδος κατά την οποία τα ρεύματα των κλάδων και οι τάσεις των στοιχείων αλλάζουν από τις παλιές τιμές στις καινούριες. Αυτή η περίοδος ονομάζεται μεταβατική περίοδος. Αφού παρέλθει η μεταβατική περίοδος το κύκλωμα αναφέρεται ότι είναι στη μόνιμη κατάσταση. Η γραμμική διαφορική εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα έχει δύο μέρη: τη γενική λύση (complementary function) και την ειδική λύση (particular solution). Η γενική λύση αντιστοιχεί στη μεταβατική περίοδο, ενώ η ειδική λύση στη μόνιμη κατάσταση. Τα κυκλώματα των οποίων η συμπεριφορά περιγράφεται με μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές ονομάζονται κυκλώματα πρώτης τάξης. Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η απόκριση κυκλωμάτων πρώτης τάξης με διάφορες αρχικές συνθήκες και πηγές.

7.2. Εκφόρτιση πυκνωτή σε κύκλωμα RC (αντίσταση-πυκνωτής)

Έστω ότι ένας πυκνωτής έχει διαφορά δυναμικού V_0 μεταξύ των δύο αγωγίμων πλακών του. Αν συνδεθεί μία αντίσταση στο κύκλωμα, τότε το αποθηκευμένο φορτίο μετακινείται από τη μία πλάκα στην άλλη και με αυτό τον τρόπο εμφανίζεται ένα ρεύμα i . Επομένως η τάση του πυκνωτή v μειώνεται σταδιακά μέχρι το μηδέν και το ίδιο ισχύει και για το ρεύμα. Στο κύκλωμα RC του σχήματος 7.1 ισχύουν οι σχέσεις:

$Ri = v$ και $i = -C \frac{dv}{dt}$. Αν απαλείφει το ρεύμα i από τις δύο προηγούμενες σχέσεις τότε προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0 \quad (7.1)$$

Η μοναδική συνάρτηση για την οποία επαληθεύεται η παραπάνω εξίσωση είναι μία εκθετική συνάρτηση της μορφής Ae^{st} . Αν αντικατασταθούν στην εξίσωση 7.1 το v με Ae^{st} και το $\frac{dv}{dt}$ με sAe^{st} τότε:

$$sAe^{st} + \frac{1}{RC}Ae^{st} = A\left(s + \frac{1}{RC}\right)e^{st} = 0$$

από την οποία προκύπτει:

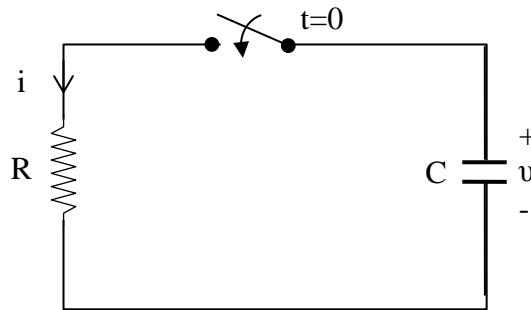
$$s + \frac{1}{RC} = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{1}{RC} \quad (7.2)$$

Από την εκφώνηση προκύπτει ότι: $v(0) = A = V_o$. Επομένως οι κυματομορφές $v(t)$ και $i(t)$ είναι:

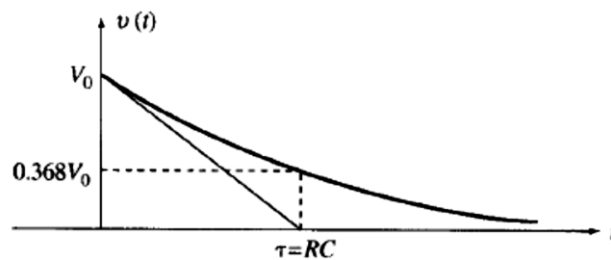
$$v(t) = V_o e^{-\frac{t}{RC}}, t > 0 \quad (7.3)$$

$$i(t) = -C \frac{dv}{dt} = \frac{V_o}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, t > 0 \quad (7.4)$$

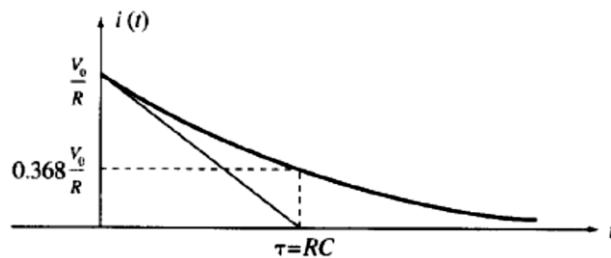
Η τάση και το ρεύμα σε ένα πυκνωτή είναι εκθετικές συναρτήσεις με αρχικές τιμές V_o και $\frac{V_o}{R}$ αντίστοιχα. Καθώς μεγαλώνει ο χρόνος, η τάση και το ρεύμα μειώνονται ως την τιμή μηδέν με σταθερά χρόνου ίση με $\tau = RC$, όπως φαίνεται στα σχήματα 7.2 και 7.3.



Σχήμα 7.1: Κύκλωμα RC (αντίσταση-πυκνωτής)



Σχήμα 7.2: Κυματομορφή τάσης κυκλώματος RC (αντίσταση-πυκνωτής)



Σχήμα 7.3: Κυματομορφή ρεύματος κυκλώματος RC (αντίσταση-πυκνωτής)

Παράδειγμα 7.1

Η τάση κατά μήκος ενός πυκνωτή $1\mu\text{F}$ είναι 10V για $t < 0$. Για $t = 0$, μία αντίσταση $1\text{M}\Omega$ συνδέεται κατά μήκος των αγωγίων πλακών του πυκνωτή. Να υπολογιστεί η σταθερά χρόνου τ , η τάση $v(t)$ και η τιμή της για $t = 5\text{s}$.

Απάντηση:

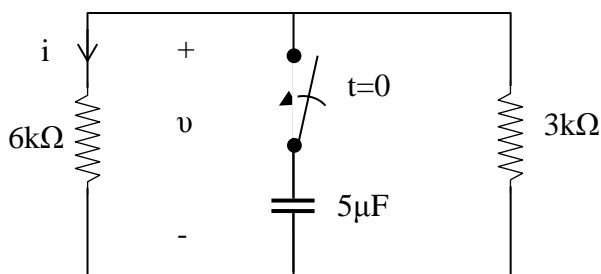
$$\tau = RC = 10^6 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 1\text{s}$$

$$v(t) = 10e^{-t} \text{ (V)}, t > 0$$

$$v(5) = 10e^{-5} = 0.067 \text{ (V)}$$

Παράδειγμα 7.2

Ένας πυκνωτής $5\mu\text{F}$ με αρχική τάση ίση με 4V συνδέεται σε ένα παράλληλο συνδυασμό μίας αντίστασης $3\text{k}\Omega$ με μία αντίσταση $6\text{k}\Omega$ (σχήμα 7.4). Να υπολογιστεί το ρεύμα i στην αντίσταση $6\text{k}\Omega$.



Σχήμα 7.4: Κύκλωμα παραδείγματος 7.2

Απάντηση:

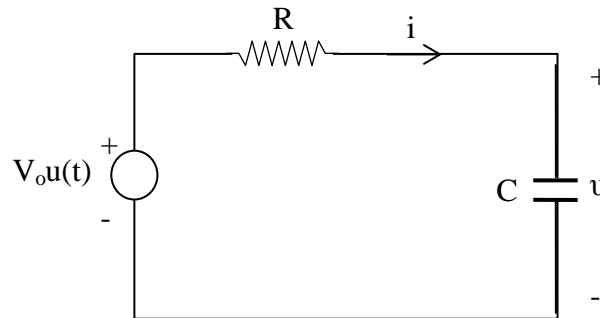
Η ισοδύναμη αντίσταση των δύο παράλληλων αντιστάσεων είναι $R = 2\text{k}\Omega$. Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι $\tau = RC = 10^{-2} \text{ s}$. Η τάση και το ρεύμα στην αντίσταση $6\text{k}\Omega$ είναι:

$$v(t) = 4e^{-100t} \text{ (V)}$$

$$i = \frac{v}{6000} = 0.67e^{-100t} \text{ (mA)}$$

7.3. Συνεχής τάση (dc) στα άκρα ενός πυκνωτή

Στο κύκλωμα του σχήματος 7.5 ένας αρχικά αφόρτιστος πυκνωτής συνδέεται σε μία μπαταρία τάσης V_o και με μία αντίσταση R τη χρονική στιγμή $t=0$.



Σχήμα 7.5: Κύκλωμα RC

Για $t>0$ αν εφαρμοστεί ο νόμος τάσεων Kirchhoff στο βρόχο του σχήματος 7.5 προκύπτει η σχέση: $Ri + v = V_o$. Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή το ρεύμα

$i = C \frac{dv}{dt}$ προκύπτει:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = \frac{1}{RC}V_o \quad t>0 \quad (7.5)$$

Η αρχική συνθήκη είναι η $v(0^+) = v(0^-) = 0$.

Η λύση πρέπει να ικανοποιεί και την εξίσωση 7.5 και την αρχική συνθήκη. Η ειδική λύση $v_{ei}(t) = V_o$ ικανοποιεί την εξίσωση 7.5 αλλά όχι και την αρχική συνθήκη. Η

γενική λύση $v_{\gamma}(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ προστίθεται στην ειδική λύση και προκύπτει η ολική λύση:

$$v(t) = v_{ei}(t) + v_{\gamma}(t) = V_o + Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (7.6)$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται το πλάτος A έτσι ώστε να ικανοποιεί και την εξίσωση 7.5 και την αρχική συνθήκη. Επομένως:

$$v(0^+) = V_o + A = 0 \Leftrightarrow A = -V_o$$

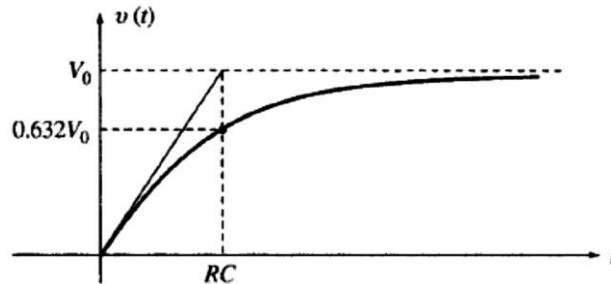
Άρα η ολική λύση θα είναι:

$$v(t) = V_o(1 - e^{-\frac{t}{RC}})u(t) \quad (7.7)$$

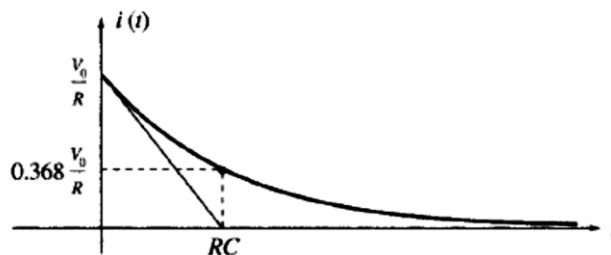
Ενώ το ρεύμα θα είναι:

$$i(t) = \frac{V_o}{R} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) \quad (7.8)$$

Η γραφική παράσταση για την τάση και το ρεύμα φαίνονται στα σχήματα 7.6 και 7.7 αντίστοιχα.



Σχήμα 7.6: Γραφική παράσταση τάσης για το κύκλωμα του σχήματος 7.5



Σχήμα 7.7: Γραφική παράσταση ρεύματος για το κύκλωμα του σχήματος 7.5

Παράδειγμα 7.3

Ένας πυκνωτής ($4\mu\text{F}$) με αρχική τάση $v(0^-) = 2\text{V}$ συνδέεται με μία μπαταρία τάσης 12V και με μία αντίσταση $R=5\text{k}\Omega$ για $t=0$. Να υπολογιστεί η τάση και το ρεύμα κατά μήκος του πυκνωτή για $t>0$.

Απάντηση:

Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι $\tau = RC = 0.02\text{s}$. Σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε στο παράδειγμα 7.2 προκύπτει:

$$v(t) = 12 + Ae^{-50t}$$

Από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει:

$$v(0^-) = v(0^+) = 12 + A = 2 \Leftrightarrow A = -10$$

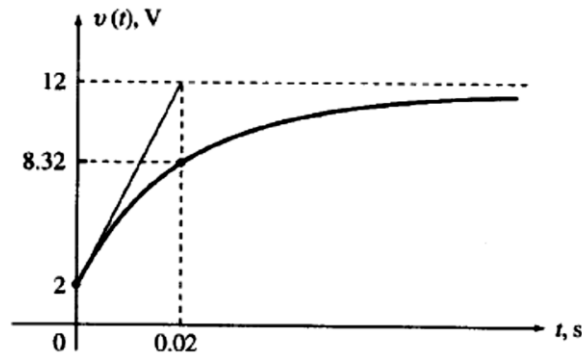
Επομένως για $t>0$ προκύπτει:

$$v(t) = 12 - 10e^{-50t} \text{ (V)}$$

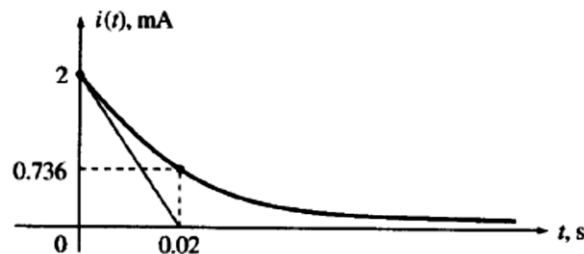
$$i(t) = \frac{12 - v}{5000} = 2 \cdot 10^{-3} e^{-50t} \text{ (A)} = 2e^{-50t} \text{ (mA)}$$

Το ρεύμα είναι δυνατό να υπολογιστεί και από τη σχέση $i = C \frac{dv}{dt}$.

Η τάση αυξάνει εκθετικά από την αρχική τιμή των 2V στην τελική τιμή των 12V με σταθερά χρόνου ίση με 20ms όπως φαίνεται στο σχήμα 7.8 ενώ το ρεύμα μειώνεται από 2mA στο μηδέν όπως φαίνεται στο σχήμα 7.9.



Σχήμα 7.8: Γραφική παράσταση τάσης για το κύκλωμα του παραδείγματος 7.3



Σχήμα 7.9: Γραφική παράσταση ρεύματος για το κύκλωμα του παραδείγματος 7.3

7.4. Κύκλωμα RL (αντίσταση-πηνίο) χωρίς πηγή

Στο κύκλωμα RL του σχήματος 7.10 γίνεται η υπόθεση ότι για $t=0$ το ρεύμα είναι I_0 .

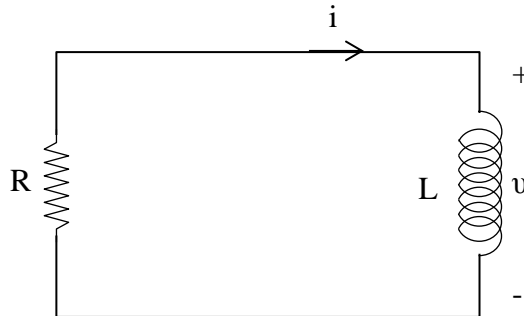
Για $t>0$ το ρεύμα i πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $Ri + L \frac{di}{dt} = 0$. Η λύση της εξίσωσης είναι η $i = Ae^{st}$. Με αντικατάσταση προκύπτουν τα A και s :

$$A(R + Ls)e^{st} = 0 \Leftrightarrow R + Ls = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{R}{L}$$

Από την αρχική συνθήκη προκύπτει: $i(0) = A = I_0$. Επομένως συνολικά:

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}} \text{ για } t > 0$$

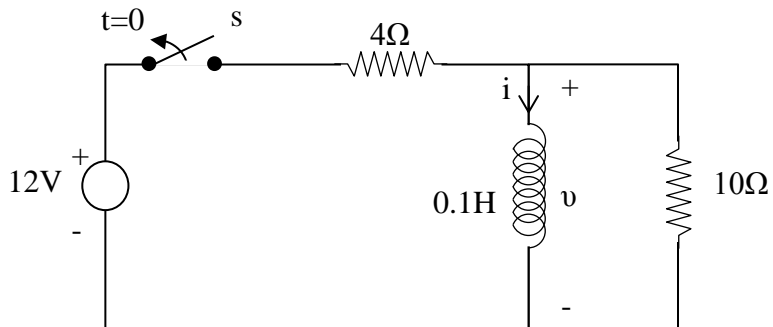
Η σταθερά χρόνου για το κύκλωμα είναι $\frac{L}{R}$.



Σχήμα 7.10: Κύκλωμα RL

Παράδειγμα 7.4

Μία μπαταρία 12V όπως φαίνεται στο σχήμα 7.11 αποσυνδέεται για $t=0$. Να υπολογιστεί το ρεύμα και η τάση στα άκρα του πηνίου.



Σχήμα 7.11: Κύκλωμα παραδείγματος 7.4

Απάντηση:

Έστω ότι ο διακόπτης s είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα. Το ρεύμα στο πηνίο είναι τότε σταθερό και η τάση είναι ίση με μηδέν. Το κύκλωμα για $t=0^-$ φαίνεται στο σχήμα 7.12 με $i(0^-) = \frac{12}{4} = 3A$.

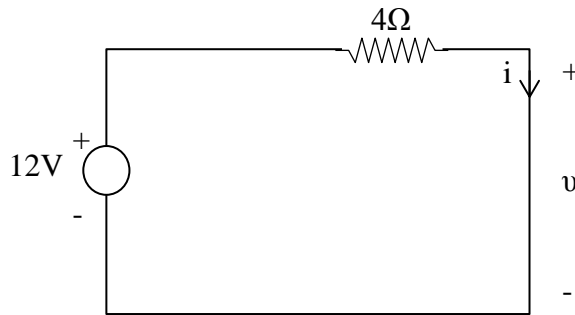
Αφότου η μπαταρία αποσυνδεθεί για $t > 0$ το κύκλωμα είναι όπως φαίνεται στο σχήμα 7.13. Για $t > 0$ το ρεύμα μειώνεται εκθετικά από 3A σε μηδενική τιμή. Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι $\frac{L}{R} = \frac{1}{100} s$.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του παραδείγματος 7.3 για $t > 0$ το ρεύμα και η τάση στα άκρα του πηνίου είναι αντίστοιχα:

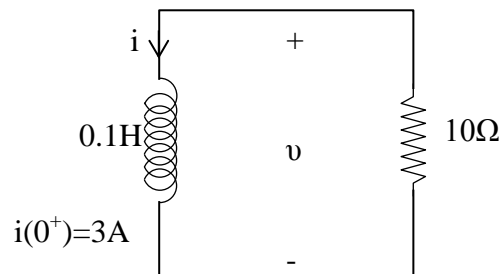
$$i(t) = 3e^{-100t}$$

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = -30e^{-100t} \text{ (V)}$$

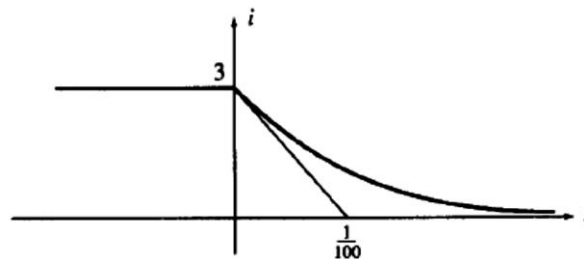
Η γραφικές παραστάσεις του ρεύματος και της τάσης φαίνονται στα σχήματα 7.14 και 7.15 αντίστοιχα.



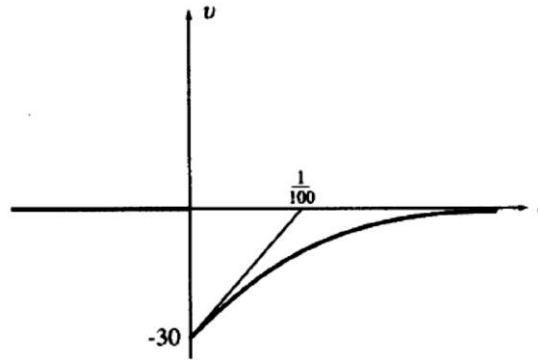
Σχήμα 7.12: Κύκλωμα παραδείγματος 7.4 για $t=0^-$



Σχήμα 7.13: Κύκλωμα παραδείγματος 7.4 για $t>0$



Σχήμα 7.14: Γραφική παράσταση ρεύματος για το κύκλωμα του παραδείγματος 7.4



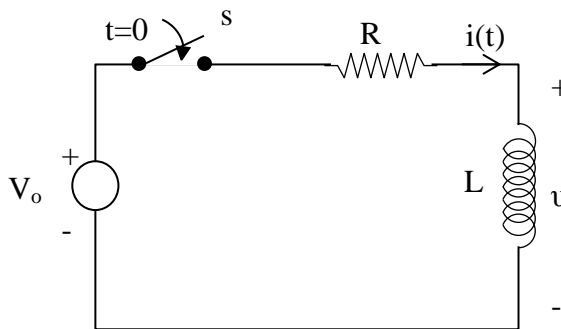
Σχήμα 7.15: Γραφική παράσταση τάσης για το κύκλωμα του παραδείγματος 7.4

7.5. Συνεχής τάση (dc) στα άκρα ενός πηνίου

Έστω ότι εφαρμόζεται μία dc πηγή σε ένα κύκλωμα RL όπως στο κύκλωμα 7.16. Αν εφαρμοστεί ο νόμος τάσεων του Kirchhoff στο βρόχο του κυκλώματος 7.16, τότε προκύπτει η παρακάτω διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_o \quad \text{για } t > 0 \quad (7.9)$$

Η αρχική συνθήκη είναι $i(0^+) = 0$.



Σχήμα 7.16: Κύκλωμα RL

Ισχύει: $i = i_\gamma(t) + i_{εt}(t)$ όπου $i_\gamma(t) = Ae^{-\frac{Rt}{L}}$ και $i_{εt}(t) = \frac{V_o}{R}$. Επομένως:

$$i = Ae^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{V_o}{R}$$

Η σταθερά A μπορεί να βρεθεί από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή:

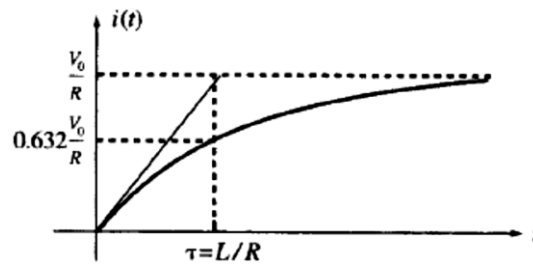
$$i(0^+) = 0 \Leftrightarrow A + \frac{V_o}{R} = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{V_o}{R}$$

Το ρεύμα στο πηνίο και η τάση κατά μήκος του δίνεται από τις σχέσεις 7.10 και 7.11 αντίστοιχα. Το ρεύμα θα αυξάνεται εκθετικά από την τιμή μηδέν μέχρι μία σταθερή τιμή και η σταθερά χρόνου θα είναι $\frac{L}{R}$.

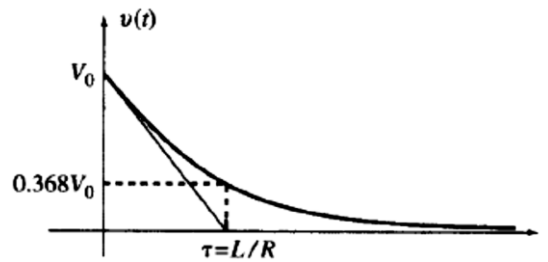
$$i(t) = \frac{V_o}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) \quad \text{για } t > 0 \quad (7.10)$$

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = V_o e^{-\frac{Rt}{L}} \quad \text{για } t > 0 \quad (7.11)$$

Οι γραφικές παραστάσεις για το ρεύμα και την τάση φαίνονται στα σχήματα 7.17 και 7.18 αντίστοιχα.



Σχήμα 7.17: Γραφική παράσταση ρεύματος για το κύκλωμα RL του σχήματος 7.16



Σχήμα 7.18: Γραφική παράσταση τάσης για το κύκλωμα RL του σχήματος 7.16

7.6. Επισκόπηση εκθετικής συνάρτησης

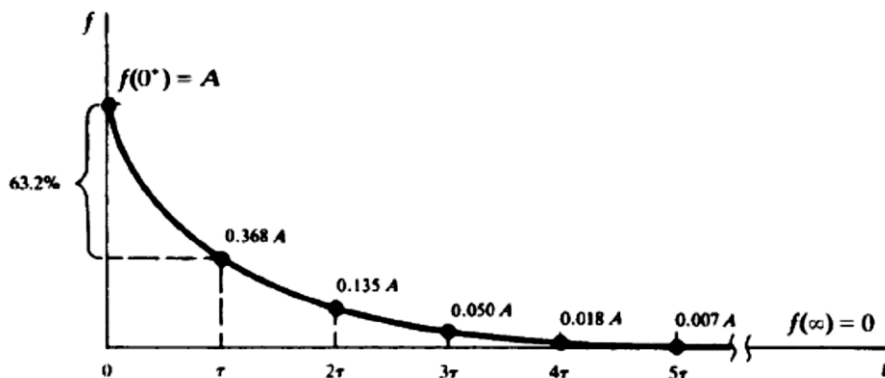
Η εκθετική συνάρτηση απόσβεσης είναι δυνατό να γραφεί στη μορφή $e^{-\frac{t}{\tau}}$, όπου τ είναι η σταθερά χρόνου (μετριέται σε sec). Για το RC κύκλωμα της ενότητας 7.2 η σταθερά χρόνου είναι $\tau = RC$, ενώ για το κύκλωμα RL της ενότητας 7.4 η σταθερά χρόνου είναι $\tau = \frac{L}{R}$. Η γενική συνάρτηση απόσβεσης γράφεται:

$$f(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0)$$

Η συνάρτηση απόσβεσης σχεδιάζεται στο σχήμα 7.19. Στον οριζόντιο άξονα ο χρόνος μετριέται σε πολλαπλάσια του τ . Από εκεί προκύπτει ότι:

$$f(\tau) = Ae^{-1} = 0.368A$$

που σημαίνει ότι για $t=\tau$ η συνάρτηση έχει τιμή 36.8% της αρχικής τιμής. Για $t=5\tau$ η συνάρτηση έχει τιμή ίση με $0.0067A$, η οποία είναι μικρότερη από το 1% της αρχικής τιμής. Πρακτικά, η μεταβατική περίοδος θεωρείται συνήθως για χρονικό διάστημα μετά από $t=5\tau$.

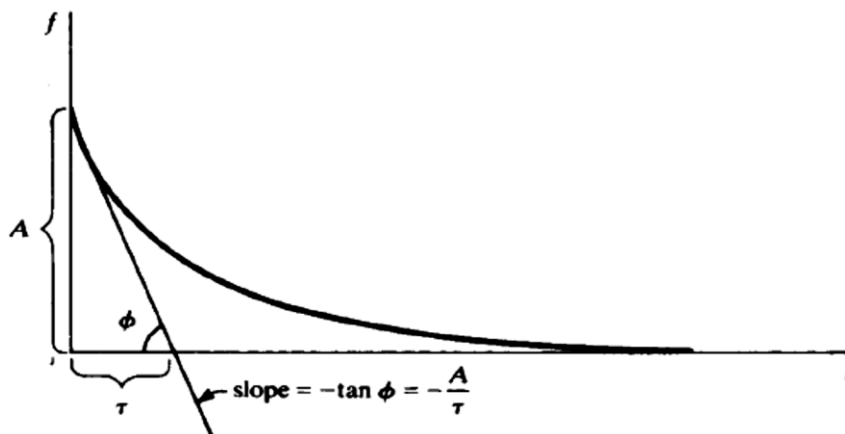


Σχήμα 7.19: Γενική συνάρτηση απόσβεσης

Η εφαπτόμενη στην εκθετική καμπύλη για $t=0^+$, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της σταθεράς χρόνου. Ισχύει δηλαδή η σχέση:

$$\text{κλίση} = f'(0^+) = -\frac{A}{\tau}$$

Η εφαπτομένη τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $t=\tau$ όπως φαίνεται στο σχήμα 7.20. Γενικά η εφαπτομένη για $t=t_0$ τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $t_0 + \tau$. Επομένως αν είναι γνωστές δύο τιμές $f(t_0)$ και $f'(t_0)$, είναι δυνατό να σχεδιαστεί όλη η καμπύλη.



Σχήμα 7.20: Εφαπτομένη συνάρτησης απόσβεσης

Στην περίπτωση που δεν είναι γνωστή η εκθετική συνάρτηση παρά μόνο κάποια σημεία τα οποία ενδεχομένως να προέρχονται από τις μετρήσεις οργάνων, τότε χρησιμοποιείται οποιοδήποτε ζεύγος δεδομένων προκειμένου να βρεθεί η ζητούμενη εξίσωση. Για παράδειγμα για δύο σημεία που φαίνονται στο σχήμα 7.21 ισχύουν οι σχέσεις:

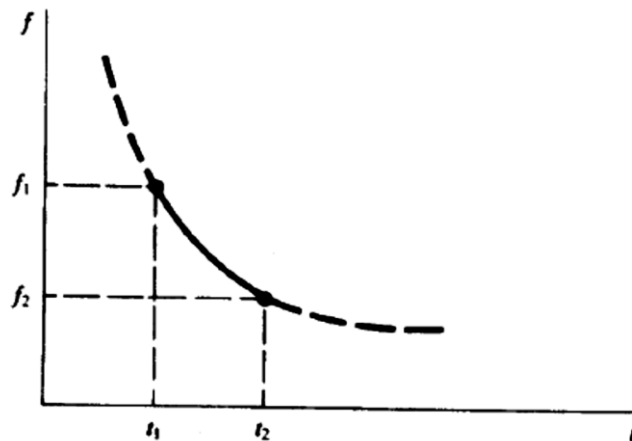
$$f_1 = Ae^{-\frac{t_1}{\tau}}$$

$$f_2 = Ae^{-\frac{t_2}{\tau}}$$

Από τη λύση των δύο παραπάνω σχέσεων προκύπτει η σταθερά χρόνου:

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln f_1 - \ln f_2}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται και το πλάτος A .



Σχήμα 7.21: Υπολογισμός συνάρτησης απόσβεσης αν είναι γνωστά δύο σημεία

7.7. Σύνθετα κυκλώματα RL και RC πρώτης τάξης

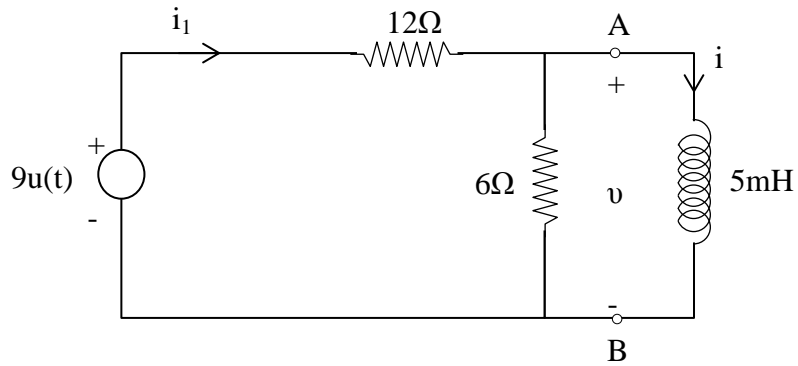
Πιο σύνθετα κυκλώματα που περιέχουν αντιστάσεις, πηγές και ένα πηνίο ή ένα πυκνωτή είναι δυνατό να μετατραπούν σε ισοδύναμο Norton ή Thévenin με ακροδέκτες τα άκρα του πηνίου ή του πυκνωτή. Με αυτό τον τρόπο το σύνθετο κύκλωμα απλοποιείται σε ένα RL ή RC κύκλωμα, το οποίο λύνεται με τον τρόπο που περιγράφηκε στις προηγούμενες ενότητες.

Αν η πηγή του κυκλώματος μετατραπεί κάποια χρονική στιγμή σε dc πηγή, τότε τα ρεύματα και οι τάσεις θα είναι εκθετικές συναρτήσεις με την ίδια σταθερά χρόνου και πιθανώς διαφορετικές αρχικές και τελικές τιμές. Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος που περιέχει πηνίο θα είναι R/L όπου R η αντίσταση του ισοδύναμου Thévenin όπως φαίνεται από τα άκρα του πηνίου. Αντίστοιχα, η σταθερά χρόνου του κυκλώματος

που περιέχει πυκνωτή θα είναι RC όπου R η αντίσταση του ισοδύναμου Thévenin, όπως φαίνεται από τα άκρα του πυκνωτή. Thévenin

Παράδειγμα 7.5

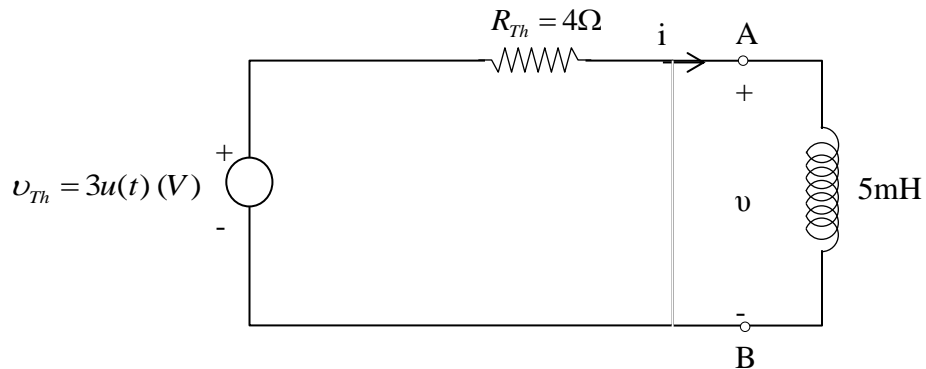
Να υπολογιστούν τα i, v, i_1 στο κύκλωμα του σχήματος 7.22.



Σχήμα 7.22: Κύκλωμα παραδείγματος 7.5

Απάντηση:

Το ισοδύναμο κύκλωμα Thévenin αριστερά από το πηνίο (άκρα A και B) φαίνεται στο σχήμα 7.23 με $R_{Th} = 4\Omega$ και $v_{Th} = 3u(t) (V)$.



Σχήμα 7.23: Ισοδύναμο Thévenin κυκλώματος παραδείγματος 7.5

Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι $\tau = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4} s = 1.25ms$.

Η αρχική τιμή του ρεύματος στο πηνίο είναι μηδέν. Η τελική τιμή είναι:

$$i(\infty) = \frac{v_{Th}}{R_{Th}} = \frac{3V}{4\Omega} = 0.75A$$

Επομένως:

$$i = 0.75(1 - e^{-80\alpha})u(t) \text{ (A)}$$

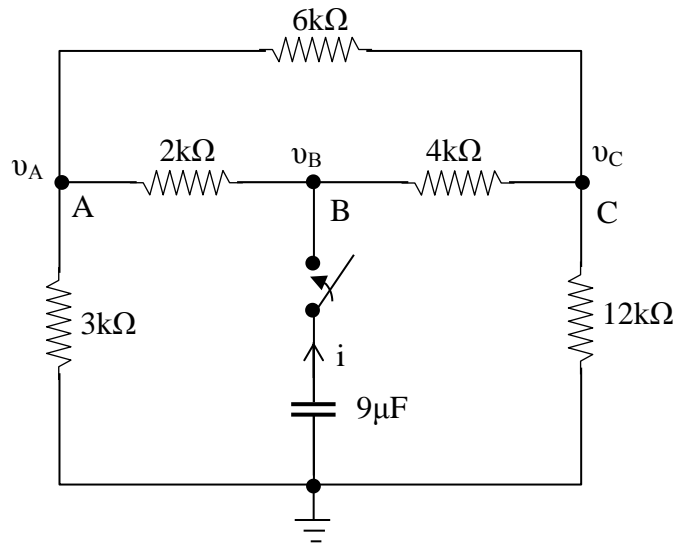
$$v = L \frac{di}{dt} = 3e^{-80\alpha}u(t) \text{ (V)}$$

$$i_1 = \frac{9-v}{12} = \frac{1}{4}(3 - e^{-80\alpha})u(t) \text{ (A)}$$

Η τάση v είναι δυνατό να βρεθεί και κατευθείαν από την αρχική τιμή $v(0^+) = \frac{9 \cdot 6}{12+6} = 3V$, την τελική τιμή $v(\infty) = 0$ και από τη σταθερά χρόνου.

Παράδειγμα 7.6

Στο κύκλωμα του σχήματος 7.24 ο πυκνωτής $9\mu F$ συνδέεται στο κύκλωμα για $t=0$. Αυτή τη χρονική στιγμή η τάση του πυκνωτή είναι $v_o = 17V$. Να υπολογιστούν τα μεγέθη $v_A, v_B, v_C, i_{AB}, i_{AC}, i_{BC}$ για $t>0$.



Σχήμα 7.24: Κύκλωμα παραδείγματος 7.6

Απάντηση:

Εφαρμόζεται ο νόμος ρευμάτων του Kirchhoff στους κόμβους A, B και C για $t>0$ για να υπολογιστούν οι τάσεις. Προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\text{Κόμβος A: } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) v_A - \frac{1}{2} v_B - \frac{1}{6} v_C = 0 \Leftrightarrow 6v_A - 3v_B - v_C = 0$$

$$\text{Κόμβος B: } -\frac{1}{2}v_A - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)v_B - 10^3 i - \frac{1}{4}v_C = 0 \Leftrightarrow -2v_A + 3v_B - v_C = 4 \cdot 10^3 i$$

$$\text{Κόμβος C: } -\frac{1}{6}v_A - \frac{1}{4}v_B + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)v_C = 0 \Leftrightarrow -2v_A - 3v_B + 6v_C = 0$$

Από την επίλυση των τριών παραπάνω εξισώσεων προκύπτουν οι τάσεις των κόμβων:

$$v_A = \frac{7}{3} \cdot 10^3 i$$

$$v_B = \frac{34}{9} \cdot 10^3 i$$

$$v_C = \frac{8}{3} \cdot 10^3 i$$

Το κύκλωμα πέρα από τα άκρα του πυκνωτή είναι ισοδύναμο με μία αντίσταση:

$$R = \frac{v_B}{i} = \frac{34}{9} k\Omega$$

Ο πυκνωτής εκφορτίζεται από την αρχική του τάση V_0 με εκθετικό ρυθμό και σταθερά χρόνου: $\tau = RC = \frac{34}{9} \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^{-6} = 0.034s$.

Για $t > 0$ οι τάσεις και τα ρεύματα είναι:

$$v_B = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 17e^{-\frac{1000t}{34}} \quad (V)$$

$$i = -C \frac{dv_B}{dt} = \frac{9 \cdot 17 \cdot 10^{-3}}{34} e^{-\frac{1000t}{34}} = 4.5 \cdot 10^{-3} e^{-\frac{1000t}{34}} \quad (A)$$

$$v_A = \frac{7}{3} \cdot 10^3 i = 10.5e^{-\frac{1000t}{34}} \quad (V)$$

$$v_C = \frac{8}{3} \cdot 10^3 i = 12e^{-\frac{1000t}{34}} \quad (V)$$

$$v_{AB} = v_A - v_B = -6.5e^{-\frac{1000t}{34}} \quad (V)$$

$$i_{AB} = \frac{v_{AB}}{2000} = -3.25 \cdot 10^{-3} e^{-\frac{1000t}{34}} \quad (A)$$

$$v_{AB} = v_A - v_C = -1.5e^{-\frac{1000t}{34}} \quad (V)$$

$$i_{AC} = \frac{v_{AC}}{6000} = -0.25 \cdot 10^{-3} e^{-\frac{1000t}{34}} \quad (A)$$

$$v_{BC} = v_B - v_C = 5e^{-\frac{1000t}{34}} \quad (V)$$

$$i_{BC} = \frac{v_{BC}}{4000} = 1.25 \cdot 10^{-3} e^{-\frac{1000t}{34}} \quad (A)$$

Όλες οι τάσεις και τα ρεύματα είναι εκθετικές συναρτήσεις και έχουν την ίδια σταθερά χρόνου. Για λόγους ευκολίας συνήθως χρησιμοποιούνται οι μονάδες V, mA, kΩ και ms για την τάση, το ρεύμα, την αντίσταση και το χρόνο αντίστοιχα. Επομένως οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται:

$$v_A = 10.5e^{-\frac{t}{34}} \quad (V)$$

$$v_B = 17e^{-\frac{t}{34}} \quad (V)$$

$$v_C = 12e^{-\frac{t}{34}} \quad (V)$$

$$v_{AB} = -6.5e^{-\frac{t}{34}} \quad (V)$$

$$v_{AC} = -1.5e^{-\frac{t}{34}} \quad (V)$$

$$v_{BC} = 5e^{-\frac{t}{34}} \quad (V)$$

$$i_{AB} = -3.25e^{-\frac{t}{34}} \quad (mA)$$

$$i_{AC} = -0.25e^{-\frac{t}{34}} \quad (mA)$$

$$i_{BC} = 1.25e^{-\frac{t}{34}} \quad (mA)$$

$$i = 4.5e^{-\frac{t}{34}} \quad (mA)$$

7.8. Μεταβατικά φαινόμενα σε κυκλώματα με πηνία και πυκνωτές όταν η τροφοδοσία είναι πηγές DC

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα, ο εκθετικός όρος της απόκρισης των κυκλωμάτων RL και RC ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου. Για $t \rightarrow \infty$, το κύκλωμα φτάνει στη μόνιμη κατάσταση και η απόκριση αποτελείται μόνο από ένα dc μέρος.

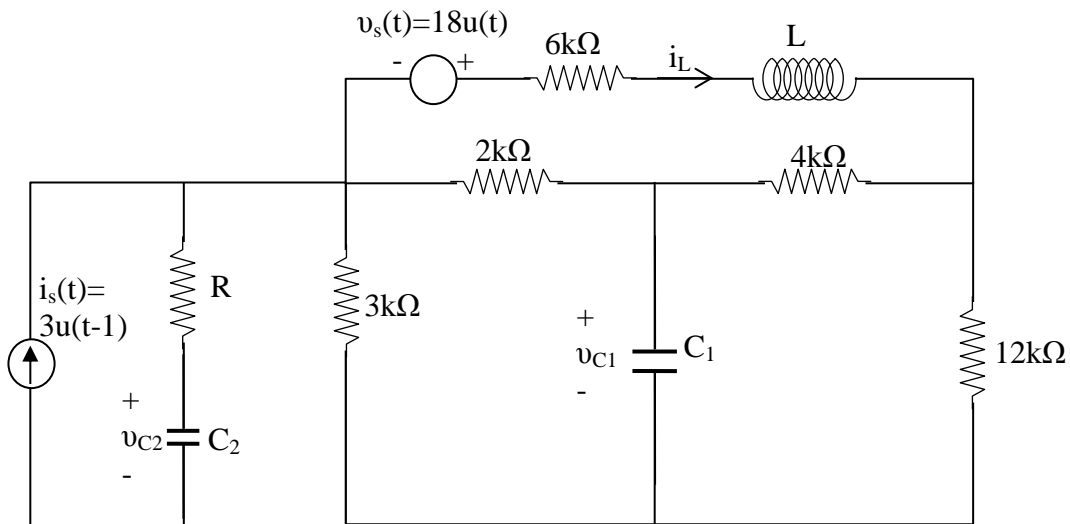
Θεωρητικά απαιτείται άπειρος χρόνος για να φτάσουν τα κυκλώματα RL και RC στην μόνιμη dc κατάσταση. Ωστόσο, για $t=5\tau$, ο εκθετικός όρος μειώνεται στο 0.67% της αρχικής τιμής του. Για $t=10\tau$, ο εκθετικός όρος μειώνεται στο 0.0045% της αρχικής τιμής του. Επομένως πρακτικά σε μία τέτοια χρονική περίοδο το κύκλωμα έχει φτάσει στη μόνιμη κατάσταση.

Στα RLC κυκλώματα στην dc μόνιμη κατάσταση όλα τα ρεύματα και οι τάσεις στο κύκλωμα είναι σταθεροί αριθμοί. Όταν η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή είναι σταθερός αριθμός, τότε το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή είναι μηδέν. Όλοι οι πυκνωτές επομένως εμφανίζονται ως ανοιχτοκύκλωμα στην dc μόνιμη κατάσταση. Ομοίως όταν το ρεύμα στα άκρα ενός πηνίου είναι σταθερός αριθμός, τότε η τάση στα άκρα του πηνίου είναι μηδέν. Όλα τα πηνία επομένως εμφανίζονται ως βραχυκύκλωμα στην dc μόνιμη κατάσταση.

Στην dc μόνιμη κατάσταση επομένως, το κύκλωμα απλοποιείται αρκετά καθώς οι τάσεις και τα ρεύματα είναι σταθεροί αριθμοί και η ανάλυση του κυκλώματος δεν περιλαμβάνει διαφορικές εξισώσεις.

Παράδειγμα 7.7

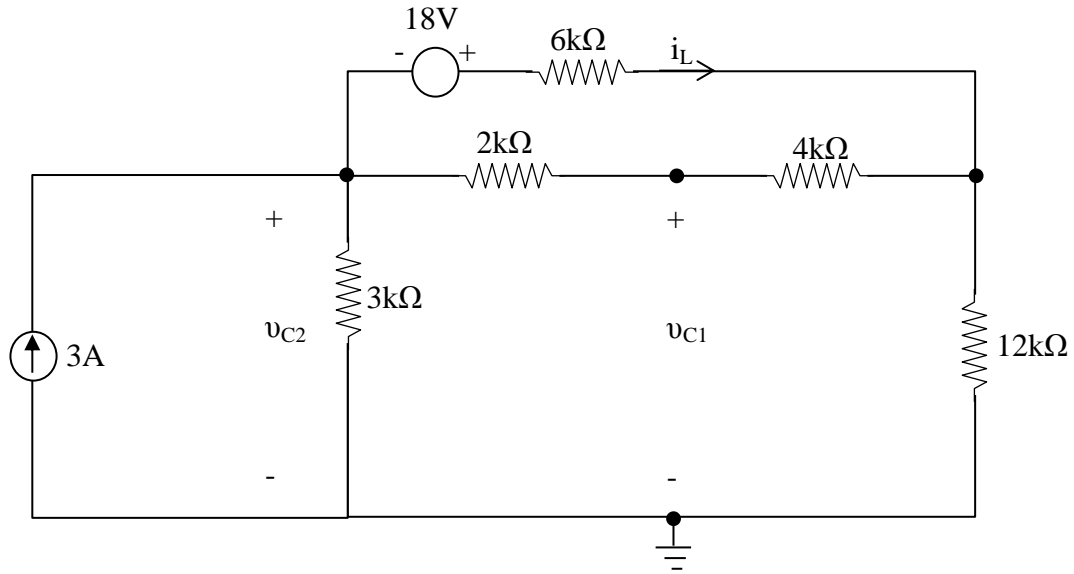
Να υπολογιστούν τα i_L, v_{C1}, v_{C2} στη μόνιμη κατάσταση για το κύκλωμα του σχήματος 7.25.



Σχήμα 7.25: Κύκλωμα παραδείγματος 7.7

Απάντηση:

Όταν το κύκλωμα φτάσει στη μόνιμη κατάσταση, θα έχει γίνει όπως το κύκλωμα του σχήματος 7.26.



Σχήμα 7.26: Κύκλωμα παραδείγματος 7.7 στη μόνιμη κατάσταση

Το ρεύμα του πηνίου και οι τάσεις των πυκνωτών υπολογίζονται με εφαρμογή του νόμου ρευμάτων του Kirchhoff στους κόμβους A και B. Επομένως:

$$\text{Κόμβος A: } \frac{v_A}{3} + \frac{v_A - v_B}{6} + \frac{v_A + 18 - v_B}{6} = 3 \Leftrightarrow 2v_A - v_B = 0$$

$$\text{Κόμβος B: } \frac{v_B}{12} + \frac{v_B - v_A}{6} + \frac{v_B - 18 - v_A}{6} = 0 \Leftrightarrow -4v_A + 5v_B = 36$$

Λύνοντας ως προς v_A και v_B προκύπτει: $v_A = 6V$ και $v_B = 12V$. Από το κύκλωμα 7.26 προκύπτουν επίσης:

$$i_L = 2mA, v_{C1} = 8V, v_{C2} = 6V$$

Παράδειγμα 7.8

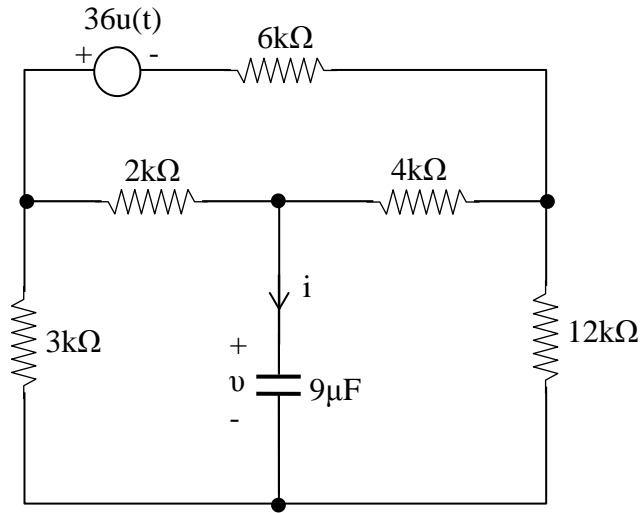
Να υπολογιστούν τα i και v για το κύκλωμα του σχήματος 7.27.

Απάντηση:

Για $t=0$ η τάση κατά μήκος του πυκνωτή είναι μηδέν. Η τελική του τιμή λαμβάνεται από την dc ανάλυση και είναι $-2V$. Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος του σχήματος 7.27, όπως προέκυψε και από το παράδειγμα 7.6 είναι ίση με $0.034s$. Επομένως:

$$v = -2(1 - e^{-\frac{1000t}{34}})u(t) \text{ (V)}$$

$$i = C \frac{dv}{dt} = -\frac{9 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^3}{34} e^{-\frac{1000t}{34}} u(t) \text{ (A)} = -0.53 e^{-\frac{1000t}{34}} u(t) \text{ (mA)}$$



Σχήμα 7.27: Κύκλωμα παραδείγματος 7.8

7.9. Μεταβατικό φαινόμενο κατά τη στιγμή κλεισίματος του διακόπτη

Ένα απότομο κλείσιμο ενός διακόπτη μιας πηγής οδηγεί σε ξαφνικές αλλαγές στην τιμή μεγεθών όπως η τάση και το ρεύμα στο κύκλωμα. Μία ξαφνική ανύψωση της τάσης σε ένα πυκνωτή απαιτεί ένα υψηλό ρεύμα. Ομοίως μία ξαφνική ανύψωση του ρεύματος σε ένα πηνίο απαιτεί μία κρουστική τάση. Αν δεν υπάρχουν τέτοιες απότομες αλλαγές στην τιμή της τάσης ή του ρεύματος, τότε η τάση στους πυκνωτές και τα ρεύματα στα πηνία παραμένουν συνεχή. Επομένως οι συνθήκες για το L και το C μετά το κλείσιμο του διακόπτη, είναι δυνατό να υπολογιστούν από τις συνθήκες που επικρατούσαν πριν το κλείσιμο του διακόπτη.

Παράδειγμα 7.9

Στο κύκλωμα του σχήματος 7.28 ο διακόπτης S κλείνει για $t=0$. Να υπολογιστούν τα i και v .

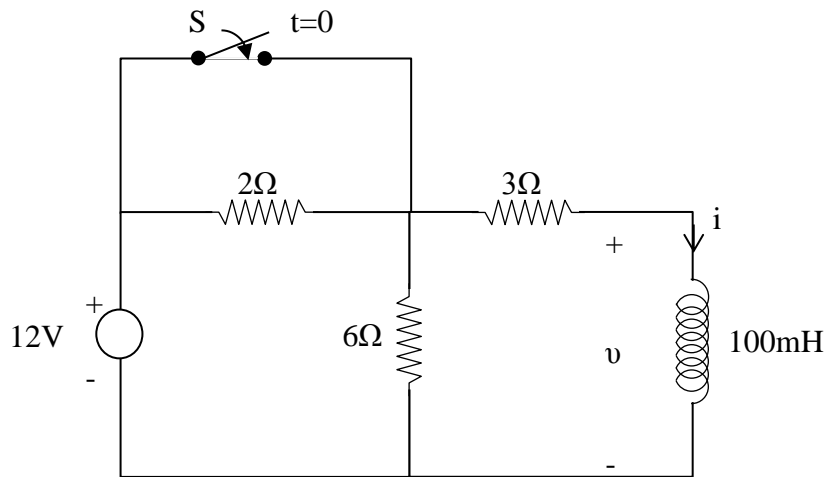
Απάντηση:

Για $t=0^-$ το κύκλωμα είναι στη μόνιμη κατάσταση και το πηνίο λειτουργεί ως βραχυκύκλωμα με $v(0^-) = 0$ όπως φαίνεται στο σχήμα 7.29. Το ρεύμα του πηνίου είναι: $i(0^-) = 2A$. Αφού κλείσει ο διακόπτης για $t=0$, το κύκλωμα θα γίνει όπως το κύκλωμα του σχήματος 7.30. Για $t>0$, το ρεύμα είναι εκθετικό με σταθερά χρόνου $\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{30} s$, αρχική τιμή $i(0^+) = i(0^-) = 2A$ και τελική τιμή $\frac{12}{3} = 4A$. Η τάση και το ρεύμα του πηνίου είναι:

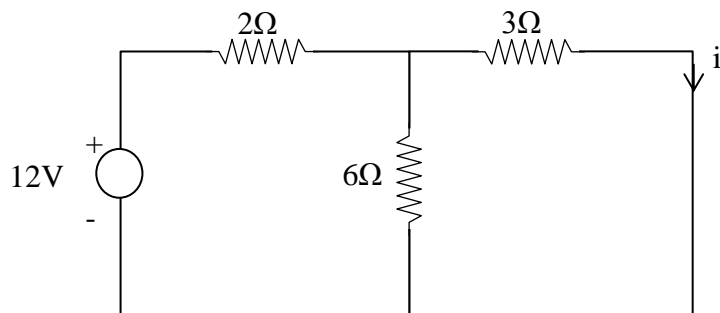
Για $t<0$: $i = 2A$ και $v = 0$

Για $t>0$: $i = 4 - 2e^{-30t}$ (A) και $v = L \frac{di}{dt} = 6e^{-30t}$ (V)

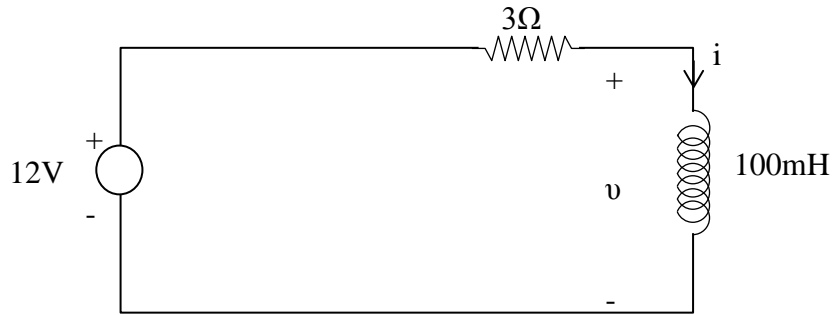
Οι γραφικές παραστάσεις της τάσης και του ρεύματος φαίνονται στα σχήματα 7.31 και 7.32 αντίστοιχα.



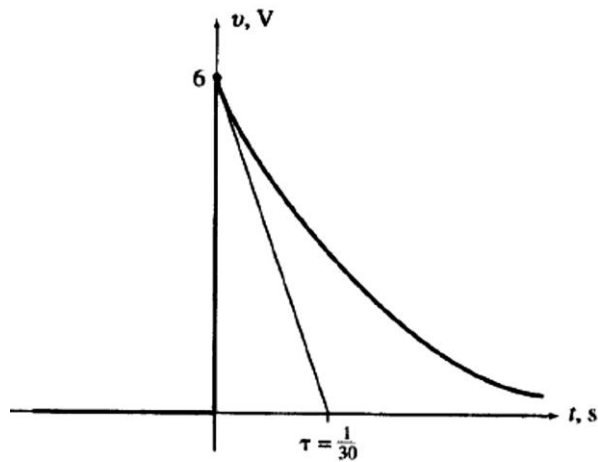
Σχήμα 7.28: Κύκλωμα παραδείγματος 7.9



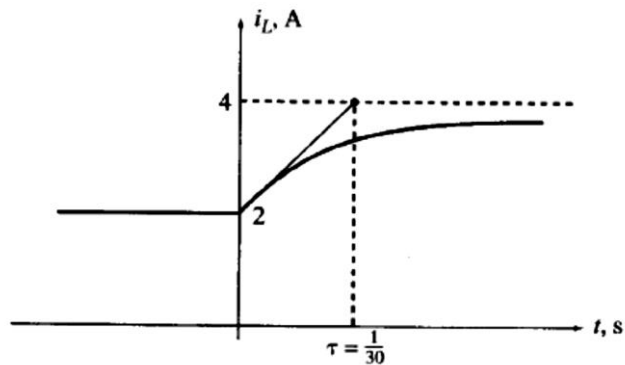
Σχήμα 7.29: Κύκλωμα παραδείγματος 7.9 στη μόνιμη κατάσταση



Σχήμα 7.30: Κύκλωμα παραδείγματος 7.9 για $t=0$



Σχήμα 7.31: Διάγραμμα τάσης παραδείγματος 7.9

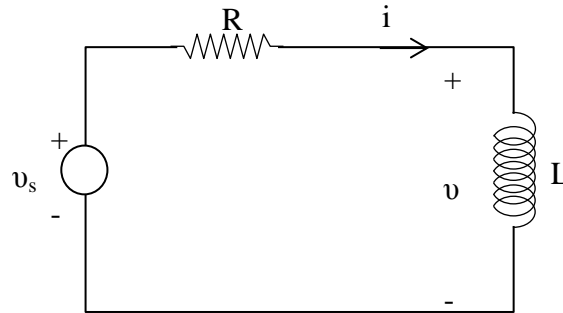


Σχήμα 7.32: Διάγραμμα ρεύματος παραδείγματος 7.9

Παράδειγμα 7.10

Να υπολογιστούν τα i και v για $t=0^-$ και $t=0^+$ στο κύκλωμα του σχήματος 7.33.

Δίνεται ότι: $R=5\Omega$, $L=10\text{mH}$ και $v_s = \begin{cases} 5\text{V} & , t < 0 \\ 5 \sin \omega t \text{ (V)} & , t > 0 \end{cases}$.



Σχήμα 7.33: Κύκλωμα παραδείγματος 7.10

Απάντηση:

Για $t=0^-$, είναι $i(0^-) = \frac{5}{5} = 1A$ και $v(0^-) = 0$. Κατά τη διάρκεια της μετάβασης από $t=0^-$ σε $t=0^+$, το ρεύμα του πηνίου είναι συνεχές και δεν υπάρχει κρουστική τάση για να παράγει κάποιου είδους ασυνέχεια. Επομένως $i(0^-) = i(0^+) = 1A$. Για να βρεθεί η $v(0^+)$ εφαρμόζεται ο νόμος τάσεων Kirchhoff για $t=0^+$: $v_s = Ri + v$ και επίσης $v_s(0^+) = 0$. Επομένως $v(0^+) = v_s(0^+) - ri(0^+) = -5V$.

7.10. Απόκριση κυκλωμάτων πρώτης τάξης σε ένα παλμό

Σε αυτή την ενότητα περιγράφεται η απόκριση ενός κυκλώματος πρώτης τάξης σε έναν ορθογώνιο παλμό. Θα μελετηθούν κυκλώματα RL και RC όπου η είσοδος είναι δυνατό να είναι ρεύμα ή τάση. Για παράδειγμα στο κύκλωμα του σχήματος 7.34, η πηγή τάσης δίνει ένα παλμό διάρκειας T και ύψους V_o . Για $t < 0$ τα i και v είναι μηδέν. Για τη διάρκεια του παλμού, τα i και v σύμφωνα με την ενότητα 7.3 γράφονται:

$$v = V_o(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), 0 < t < T \quad (7.12)$$

$$i = \frac{V_o}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, 0 < t < T \quad (7.13)$$

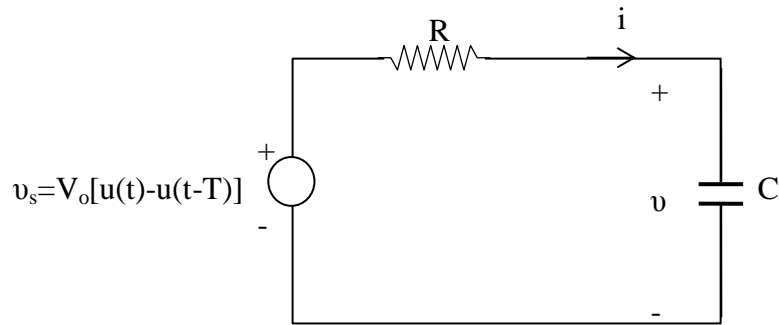
Όταν ο παλμός σταματά, το κύκλωμα μένει χωρίς πηγή με τον πυκνωτή να έχει αρχική τάση ίση με V_T .

$$V_T = V_o(1 - e^{-\frac{T}{RC}}) \quad (7.14)$$

Τότε τα i και v σύμφωνα με την ενότητα 7.2 αν ληφθεί υπόψη και η μετατόπιση T γράφονται:

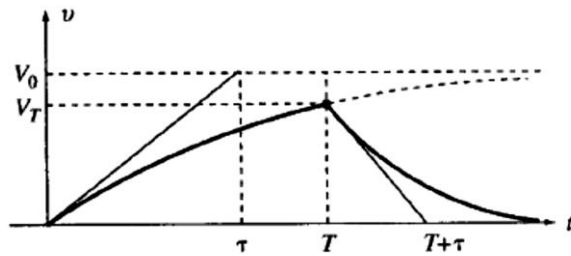
$$v = V_T e^{-\frac{(t-T)}{RC}}, t > T \quad (7.15)$$

$$i = -\frac{V_T}{R} e^{-\frac{(t-T)}{RC}}, t > T \quad (7.16)$$

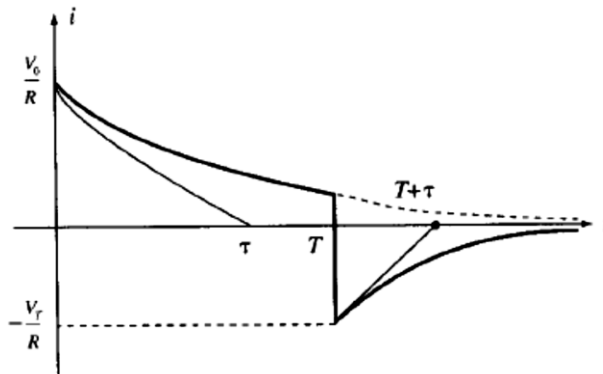


Σχήμα 7.34: Κύκλωμα RL με πηγή τάσης παλμού διάρκειας T και ύψους V_0

Οι γραφικές παραστάσεις της τάσης και του ρεύματος φαίνονται στα σχήματα 7.35 και 7.36 αντίστοιχα.



Σχήμα 7.35: Διάγραμμα τάσης κυκλώματος σχήματος 7.34



Σχήμα 7.36: Διάγραμμα ρεύματος κυκλώματος σχήματος 7.34

Παράδειγμα 7.11

Στο κύκλωμα του σχήματος 7.34 η πηγή τάσης είναι ένας παλμός διάρκειας T με ύψος V_o . Επίσης είναι $R=1k\Omega$ και $C=1\mu F$. Να υπολογιστούν τα i και v αν α) $V_o = 1V$ και $T=1ms$, β) α) $V_o = 10V$ και $T=0.1ms$ και γ) $V_o = 100V$ και $T=0.01ms$.

Απάντηση:

Η σταθερά χρόνου είναι: $\tau = RC = 1ms$. Για ευκολία, ο χρόνος θα εκφράζεται σε ms, οι τάσεις σε V και τα ρεύματα σε mA. Με βάση τις εξισώσεις 7.12-7.13, 7.14 και 7.15-7.16 προκύπτουν:

α) $V_o = 1V$ και $T=1ms$

Για $0 < t < 1ms$:

$$v = (1 - e^{-t})$$

$$i = e^{-t}$$

$$V_T = (1 - e^{-1}) = 0.632V$$

Για $t > 1ms$:

$$v = 0.632e^{-(t-1)} = 1.72e^{-t}$$

$$i = -1.72e^{-t}$$

β) $V_o = 10V$ και $T=0.1ms$

Για $0 < t < 0.1ms$:

$$v = 10(1 - e^{-t})$$

$$i = 10e^{-t}$$

$$V_T = 10(1 - e^{-0.1}) = 0.95V$$

Για $t > 0.1ms$:

$$v = 0.95e^{-(t-0.1)} = 1.05e^{-t}$$

$$i = -1.05e^{-t}$$

γ) $V_o = 100V$ και $T=0.01ms$

Για $0 < t < 0.01 \text{ms}$:

$$v = 100(1 - e^{-t}) \approx 100t$$

$$i = 100e^{-t} \approx 100(1 - t)$$

$$V_T = 100(1 - e^{-0.01}) = 0.995V$$

Χρησιμοποιείται και η προσέγγιση $e^{-t} = 1 - t$ όταν $t \ll 1$.

Για $t > 0.01 \text{ms}$:

$$v = 0.995e^{-(t-0.01)} = 1.01e^{-t}$$

$$i = -1.01e^{-t}$$

Καθώς ο παλμός της τάσης εισόδου πλησιάζει μία κρουστική τάση, η τάση και το ρεύμα του πυκνωτή προσεγγίζουν τις τιμές $v = e^{-t}u(t)$ (V) και $i = \delta(t) - e^{-t}u(t)$

7.11. Κρουστική απόκριση κυκλωμάτων RC και RL

Ένας στενός παλμός είναι δυνατό να μοντελοποιηθεί ως μία κρουστική συνάρτηση. Το εμβαδό κάτω από τον παλμό είναι ενδεικτικό της τιμής της. Η κρουστική απόκριση είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στην ανάλυση και σύνθεση κυκλωμάτων. Μπορεί να προκύψει με διάφορους τρόπους:

- Με τον υπολογισμό του ορίου της απόκρισης ενός στενού παλμού. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται προσέγγιση ορίου όπως εξετάζεται αναλυτικά και στα παραδείγματα 7.11 και 7.12.
- Με την παράγωγο της βηματικής απόκρισης
- Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης απευθείας.

Η κρουστική απόκριση συνήθως συμβολίζεται με $h(t)$.

Παράδειγμα 7.12

Να υπολογιστούν τα όρια των i και v του κυκλώματος του σχήματος 7.34 με παλμό τάσης μοναδιαίου εμβαδού καθώς η διάρκεια του παλμού μειώνεται ως την τιμή μηδέν.

Απάντηση:

Με βάση τις εξισώσεις 7.12-7.13, 7.14 και 7.15-7.16 με $V_o = \frac{1}{T}$ υπολογίζονται τα όρια καθώς το T τείνει το μηδέν. Από την εξίσωση 7.14 προκύπτει:

$$\lim_{T \rightarrow 0} V_T = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-\frac{T}{RC}})}{T} = \frac{1}{RC}$$

Με βάση τις εξισώσεις 7.15 και 7.16 προκύπτουν τα εξής:

Για $t < 0$ είναι: $h_v = 0$ και $h_i = 0$

Για $0^- < t < 0^+$ είναι: $0 \leq h_v \leq \frac{1}{RC}$ και $h_i \leq \frac{1}{R} \delta(t)$

Για $t > 0$ είναι: $h_v(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$ και $h_i(t) = -\frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}}$

Επομένως:

$$h_v(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) \quad \text{και} \quad h_i(t) = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

Παράδειγμα 7.13

Να βρεθούν οι κρουστικές αποκρίσεις για το RC κύκλωμα του σχήματος 7.34 υπολογίζοντας την παράγωγο της μοναδιαίας βηματικής απόκρισης.

Απάντηση:

Μία μοναδιαία κρουστική συνάρτηση θεωρείται ως η παράγωγος μίας μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης. Σύμφωνα με τις ιδιότητες των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, η κρουστική απόκριση υπολογίζεται από την παράγωγο της βηματικής απόκρισης. Οι βηματικές αποκρίσεις από προηγούμενες ενότητες είναι οι:

$$v(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) u(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

Οι παράγωγοι των βηματικών αποκρίσεων οι οποίες δίνουν εντέλει και τις κρουστικές αποκρίσεις είναι:

$$h_v(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

$$h_i(t) = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

Παράδειγμα 7.14

Να βρεθούν οι κρουστικές αποκρίσεις $h_i(t)$, $h_v(t)$ και $h_{i1}(t)$ του RL κυκλώματος του σχήματος 7.22 υπολογίζοντας την παράγωγο της μοναδιαίας βηματικής απόκρισης.

Απάντηση:

Η απόκριση του κυκλώματος σε βηματική συνάρτηση πλάτους 9 έχει ήδη υπολογιστεί στο παράδειγμα 7.5. Οι παράγωγοι των βηματικών αποκρίσεων οι οποίες δίνουν εντέλει και τις κρουστικές αποκρίσεις είναι:

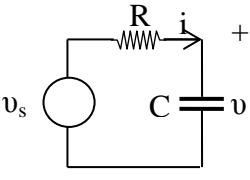
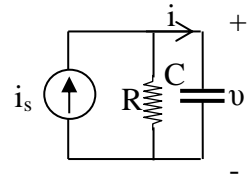
$$h_i(t) = \frac{1}{9} \frac{d}{dt} [0.75(1 - e^{-800t})u(t)] = \frac{200}{3} e^{-800t} u(t)$$

$$h_v(t) = \frac{1}{9} \frac{d}{dt} [3e^{-800t} u(t)] = -\frac{800}{3} e^{-800t} u(t) + \frac{1}{3} \delta(t)$$

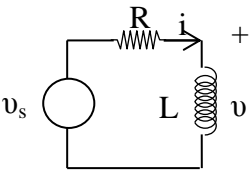
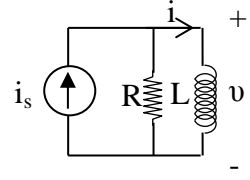
$$h_{i1}(t) = \frac{1}{9} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4} (3 - e^{-800t}) u(t) \right] = \frac{200}{9} e^{-800t} u(t) + \frac{1}{18} \delta(t)$$

7.12. Συνοπτική παρουσίαση βηματικών και κρουστικών αποκρίσεων σε κυκλώματα RC και RL

Οι αποκρίσεις κυκλωμάτων RC και RL σε βηματικές και κρουστικές εισόδους συνοψίζονται στους πίνακες 7.1 και 7.2. Κάποια αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον πίνακα αυτό έχουν υπολογιστεί σε προηγούμενες ενότητες. Τα υπόλοιπα αποτελέσματα θα υπολογιστούν αναλυτικά στις λυμένες ασκήσεις σε επόμενη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου.

Κύκλωμα RC	Μοναδιαία βηματική απόκριση	Μοναδιαία κρουστική απόκριση
	$v_s = u(t)$ $\left\{ \begin{array}{l} v = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})u(t) \\ i = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) \end{array} \right\}$	$v_s = \delta(t)$ $\left\{ \begin{array}{l} h_v = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) \\ h_i = -\frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) + \frac{1}{R} \delta(t) \end{array} \right\}$
	$i_s = u(t)$ $\left\{ \begin{array}{l} v = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})u(t) \\ i = e^{-\frac{t}{RC}} u(t) \end{array} \right\}$	$i_s = \delta(t)$ $\left\{ \begin{array}{l} h_v = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) \\ h_i = -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) + \delta(t) \end{array} \right\}$

Πίνακας 7.1: Βηματικές και Κρουστικές αποκρίσεις σε RC κυκλώματα

Κύκλωμα RL	Μοναδιαία βηματική απόκριση	Μοναδιαία κρουστική απόκριση
	$v_s = u(t)$ $\left\{ \begin{array}{l} v = e^{-\frac{Rt}{L}} u(t) \\ i = \frac{1}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) u(t) \end{array} \right\}$	$v_s = \delta(t)$ $\left\{ \begin{array}{l} h_v = \frac{R}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} u(t) + \delta(t) \\ h_i = -\frac{1}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} u(t) \end{array} \right\}$
	$i_s = u(t)$ $\left\{ \begin{array}{l} v = R e^{-\frac{Rt}{L}} u(t) \\ i = (1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) u(t) \end{array} \right\}$	$i_s = \delta(t)$ $\left\{ \begin{array}{l} h_v = -\frac{R^2}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} u(t) + R \delta(t) \\ h_i = \frac{R}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} u(t) \end{array} \right\}$

Πίνακας 7.2: Βηματικές και Κρουστικές αποκρίσεις σε RL κυκλώματα

7.13. Απόκριση κυκλωμάτων RC και RL σε απότομες εκθετικές διεγέρσεις

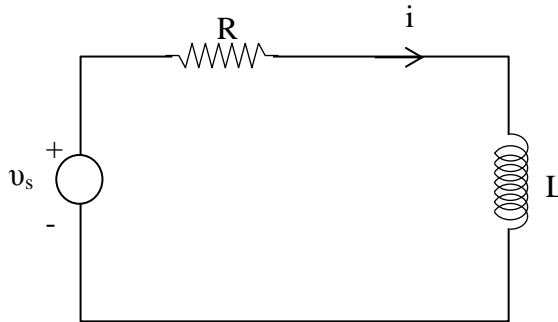
Έστω η διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού που προκύπτει από το κύκλωμα RL του σχήματος 7.37 που έχει μία εκθετική πηγή τάσης $v_s = V_o e^{st} u(t)$, όπως φαίνεται στο

σχήμα 7.38. Το κύκλωμα βρίσκεται σε ηρεμία για $t < 0$. Εφαρμόζοντας το νόμο τάσεων Kirchhoff προκύπτει η εξίσωση:

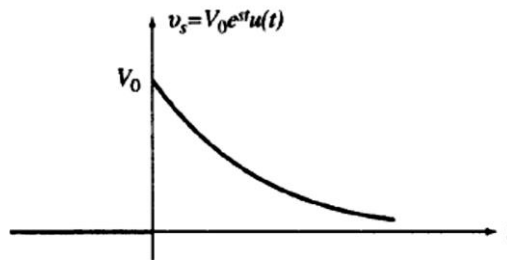
$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_0 e^{st} u(t) \quad (7.17)$$

Για $t > 0$ η λύση είναι η:

$$i(t) = i_\gamma(t) + i_{ei}(t) \quad \text{και} \quad i(0^+) = 0 \quad (7.18)$$



Σχήμα 7.37: Κύκλωμα RL με εκθετική πηγή τάσης



Σχήμα 7.38: Διάγραμμα εκθετικής τάσης του κυκλώματος 7.37

Η φυσική απόκριση $i_\gamma(t)$ (γενική λύση) είναι η λύση της εξίσωσης $Ri + L \frac{di}{dt} = 0$. Σύμφωνα με τη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε στην ενότητα 7.4 προκύπτει ότι:

$$i_\gamma(t) = Ae^{-\frac{Rt}{L}} \quad (7.19)$$

Η απόκριση λόγω της εκθετικής πηγής τάσης $i_{ei}(t)$ (ειδική λύση) θα ικανοποιεί την εξίσωση 7.17 για $t > 0$. Η μόνη συνάρτηση που ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη είναι η:

$$i_{ei}(t) = I_0 e^{st} \quad (7.20)$$

Στη συνέχεια γίνεται αντικατάσταση του i_p στην εξίσωση 7.17 και προκύπτει ότι:

$I_o = \frac{V_o}{R + Ls}$. Επιλέγοντας $A = -\frac{V_o}{R + Ls}$, η οριακή συνθήκη $i(0^+) = 0$ ικανοποιείται επίσης. Επομένως:

$$i(t) = \frac{V_o}{R + Ls} (e^{st} - e^{-\frac{Rt}{L}}) u(t) \quad (7.21)$$

Ειδική περίπτωση: Αν η συνάρτηση της πηγής έχει τον ίδιο εκθετικό παράγοντα με τη φυσική απόκριση ($s = -\frac{R}{L}$), η απόκριση λόγω της εκθετικής πηγής τάσης πρέπει να

είναι $i_{ei}(t) = I_o e^{-\frac{Rt}{L}}$. Η λύση αυτή προκύπτει και με αντικατάσταση στη σχέση 7.17, η οποία επίσης δίνει $I_o = \frac{V_o}{L}$. Η φυσική απόκριση είναι ίδια με την εξίσωση 7.19. Η ολική απόκριση είναι τότε:

$$i(t) = i_y(t) + i_{ei}(t) = (I_o t + A) e^{-\frac{Rt}{L}}$$

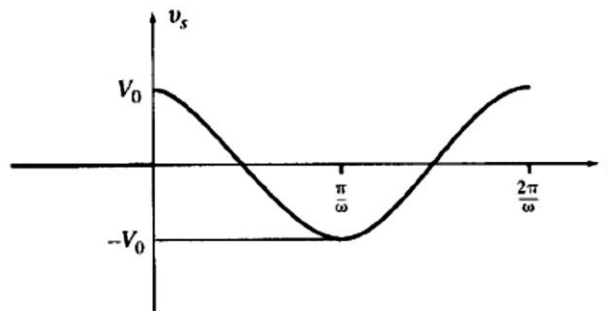
Από τις συνθήκες $i(0^-) = i(0^+) = 0$ προκύπτει ότι $A = 0$ και επομένως

$$i(t) = I_o t e^{-\frac{Rt}{L}} u(t) \text{ όπου } I_o = \frac{V_o}{L}.$$

7.14. Απόκριση κυκλωμάτων RC και RL σε απότομες ημιτονοειδείς διεγέρσεις

Όταν ένα κύκλωμα RL συνδέεται σε μία απότομη ac τάση $v_s = V_o \cos \omega t$ όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 7.39, η διαφορική εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_o (\cos \omega t) u(t) \quad (7.22)$$



Σχήμα 7.39: Διάγραμμα ημιτονοειδούς τάσης

Η λύση είναι $i(t) = i_\gamma(t) + i_{ei}(t)$ όπου $i_\gamma(t) = Ae^{-\frac{Rt}{L}}$ και $i_{ei}(t) = I_o \cos(\omega t - \theta)$.

Αντικαθιστώντας την $i_{ei}(t) = I_o \cos(\omega t - \theta)$ στην εξίσωση 7.22, υπολογίζεται το I_o :

$$I_o = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \text{ και } \theta = \tan^{-1} \frac{L\omega}{R}$$

Τότε:

$$i(t) = i_\gamma(t) + i_{ei}(t) = Ae^{-\frac{Rt}{L}} + I_o \cos(\omega t - \theta), \quad t > 0$$

Από τη συνθήκη $i(0^+) = 0$ προκύπτει ότι $A = -I_o \cos \theta$ και επομένως:

$$i(t) = I_o [\cos(\omega t - \theta) - \cos \theta (e^{-\frac{Rt}{L}})]$$

7.15. Συνοπτική παρουσίαση αποκρίσεων στα κυκλώματα πρώτης τάξης

Έστω η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dv}{dt}(t) + av(t) = f(t) \quad (7.23)$$

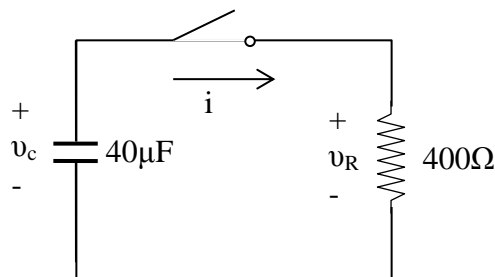
Η απόκριση $v_{ei}(t)$ εξαρτάται από τη συνάρτηση επιβολής $f(t)$. Στον πίνακα 7.3 φαίνονται κάποια χρήσιμα ζευγάρια που συσχετίζουν τη συνάρτηση επιβολής με τη συνάρτηση $v_{ei}(t)$. Οι αποκρίσεις προκύπτουν με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση. Με γραμμικό συνδυασμό μερικών συναρτήσεων που παρουσιάζονται στον πίνακα 7.3 και το χρόνο καθυστέρησης, είναι δυνατό να προκύψει η απόκριση σε νέες συναρτήσεις.

$f(t)$	$v_{εt}(t)$
1	$\frac{1}{a}$
t	$\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}$
$e^{st}, (s \neq -a)$	$\frac{e^{st}}{s+a}$
e^{-at}	te^{-at}
$\cos \omega t$	$A \cos(\omega t - \theta)$ όπου $A = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$ και $\tan \theta = \frac{\omega}{a}$
$e^{-bt} \cos \omega t$	$Ae^{-bt} \cos(\omega t - \theta)$ όπου $A = \frac{1}{\sqrt{(a-b)^2 + \omega^2}}$ και $\tan \theta = \frac{\omega}{a-b}$

Πίνακας 7.3: Αποκρίσεις σε διάφορες συναρτήσεις επιβολής

7.16. Λυμένα προβλήματα

1) Για $t=0^-$, λίγο πριν κλείσει ο διακόπτης στο κύκλωμα του σχήματος 7.40 είναι $v_C = 100V$. Να υπολογιστεί το ρεύμα και το φορτίο του πυκνωτή.



Σχήμα 7.40: Κύκλωμα άσκησης 1

Απάντηση:

Έστω ότι οι πολικότητες ορίζονται όπως είναι σχεδιασμένες στο σχήμα 7.40. Για $t > 0$ ισχύει $v_R = v_C$ και η σταθερά χρόνου είναι $\frac{1}{RC} = 62.5s^{-1}$. Επίσης:

$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 100V$. Επομένως:

$$v_R = v_C = 100e^{-62.5t} \quad (V)$$

$$i = \frac{v_R}{R} = 0.25e^{-62.5t} \quad (A)$$

$$q = C v_C = 4000e^{-62.5t} \quad (\mu C)$$

2) Στην άσκηση 1 να υπολογιστεί η ισχύς και η ενέργεια στην αντίσταση. Στη συνέχεια να γίνει σύγκριση της ενέργειας με την αρχική ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στον πυκνωτή.

Απάντηση:

Η ισχύς στην αντίσταση είναι:

$$p_R = v_R i = 25e^{-125t} \quad (W)$$

Η ενέργεια στην αντίσταση είναι:

$$w_R = \int_0^t p_R dt = \int_0^t 25e^{-125t} dt = 0.2(1 - e^{-125t}) \quad (J)$$

Η αρχική αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή είναι:

$$W_o = \frac{1}{2} C V_o^2 = \frac{1}{2} (40 \cdot 10^{-6}) \cdot 100^2 J = 0.2 = w_R(\infty)$$

Επομένως όλη η αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή μεταφέρεται τελικά στην αντίσταση, όπου και χάνεται λόγω θερμικών απωλειών.

3) Ένα RC κύκλωμα όπως αυτό του σχήματος 7.40 έχει $p_R = 360e^{-\frac{t}{0.00001}} \quad (W)$. Να βρεθεί το αρχικό φορτίο Q_o , αν $R=10\Omega$.

Απάντηση:

Είναι $p_R = P_o e^{-\frac{2t}{RC}} \quad (W)$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι: $\frac{2}{RC} = 10^5 \Leftrightarrow C = 2\mu F$

Άρα:

$$w_R = \int_0^t p_R dt = 3.6(1 - e^{-\frac{t}{0.00001}}) \quad (mJ)$$

Τότε:

$$w_R(\infty) = 3.6mJ = \frac{Q_o^2}{2C}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει: $Q_o = 120\mu C$.

4) Ο διακόπτης του RL κυκλώματος που φαίνεται στο σχήμα 7.41 μετακινείται από τη θέση 1 στη θέση 2 για $t=0$. Να υπολογιστούν οι v_R και v_L αν οι πολικότητες είναι ορισμένες όπως φαίνονται στο σχήμα 7.41.

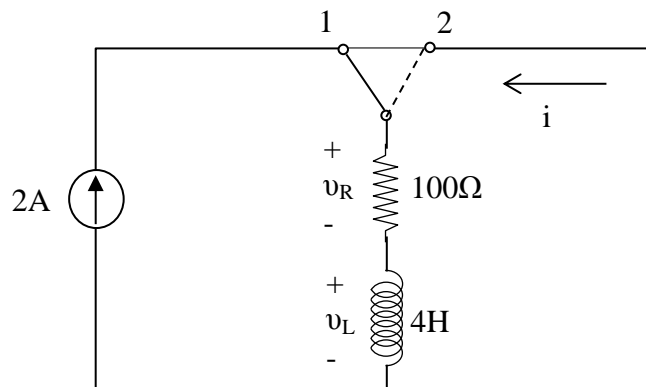
Απάντηση:

Η σταθερή πηγή ρεύματος παράγει ένα ρεύμα που διέρχεται από το πηνίο με την ίδια φορά που διέρχεται και το μεταβατικό ρεύμα i . Επομένως για $t>0$ είναι:

$$i = I_o e^{-\frac{Rt}{L}} = 2e^{-25t} \quad (A)$$

$$v_R = Ri = 200e^{-25t} \quad (V)$$

$$v_L = -v_R = -200e^{-25t} \quad (V)$$



Σχήμα 7.41: Κύκλωμα άσκησης 4

5) Για το κύκλωμα του σχήματος 7.41 να υπολογιστούν τα p_R και p_L .

Απάντηση:

Είναι:

$$p_R = v_R i = 400e^{-50t} \quad (W)$$

$$p_L = v_L i = -400e^{-50t} \quad (W)$$

Το αρνητικό πρόσημο στην ισχύ του πηνίου υποδηλώνει ότι η ενέργεια μεταφέρεται από το πηνίο στην αντίσταση και γι' αυτό και η ισχύς στην αντίσταση είναι θετική.

6) Σε ένα RC κύκλωμα (η αντίσταση και ο πυκνωτής είναι συνδεδεμένα σε σειρά) με $R=5k\Omega$ και $C=20\mu F$, εφαρμόζεται τη στιγμή $t=0$ μία συνεχής πηγή τάσης $100V$. Δεν υπάρχει αρχικό φορτίο στον πυκνωτή. Να υπολογιστούν τα i, v_R, v_C, q για $t>0$.

Απάντηση:

Το φορτίο του πυκνωτή και επομένως και η τάση v_C πρέπει να είναι συνεχής για $t=0$. Επομένως πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$$

Για $t \rightarrow \infty$ τότε $v_C \rightarrow 100V$ που είναι η εφαρμοζόμενη τάση. Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι ίση με: $\tau = RC = 10^{-1}s$. Επομένως από την ενότητα 7.10 προκύπτει:

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + v_C(\infty) = -100e^{-10t} + 100 \quad (V)$$

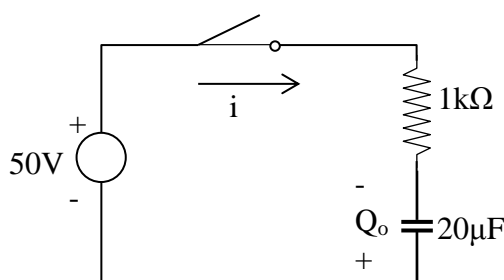
Αν οι τάσεις των στοιχείων είναι και οι δύο θετικές στο σημείο που εισέρχεται το ρεύμα τότε ισχύει ότι $v_R + v_C = 100V$. Επομένως:

$$v_R = 100e^{-10t} \quad (V)$$

$$i = \frac{v_R}{R} = 20e^{-10t} \quad (mA)$$

$$q = Cv_C = 2000(1 - e^{-10t}) \quad (\mu C)$$

7) Ο διακόπτης στο κύκλωμα του σχήματος 7.42 κλείνει για $t=0$. Αυτή τη χρονική στιγμή ο πυκνωτής έχει φορτίο $Q_o = 500\mu C$ με την πολικότητα που φαίνεται στο σχήμα 7.42. Να υπολογιστούν τα i και q για $t>0$ και να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση του q .



Σχήμα 7.42: Κύκλωμα άσκησης 7

Απάντηση:

Για το αρχικό φορτίο η αντίστοιχη τάση είναι $V_o = \frac{Q_o}{C} = 25V$, από όπου προκύπτει:

$v_c(0^+) = -25V$. Το πρόσημο είναι αρνητικό λόγω αντίθετης φοράς του ρεύματος. Επίσης $v_c(\infty) = +50V$ και $\tau = 0.02s$. Επομένως όπως και στην άσκηση 6:

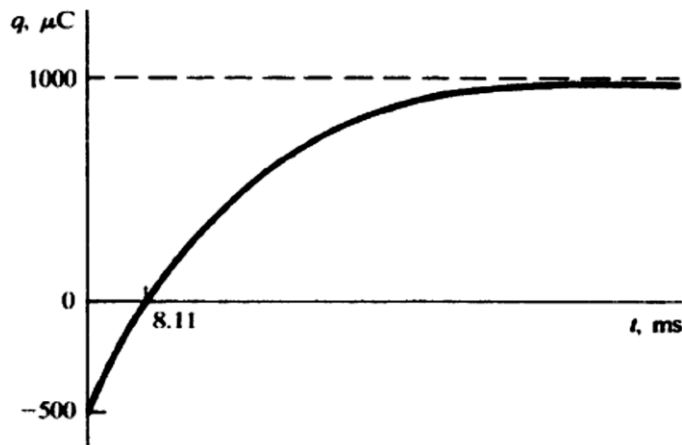
$$v_c = -75e^{-50t} + 50 \quad (V)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτουν:

$$q = Cv_c = -1500e^{-50t} + 1000 \quad (\mu C)$$

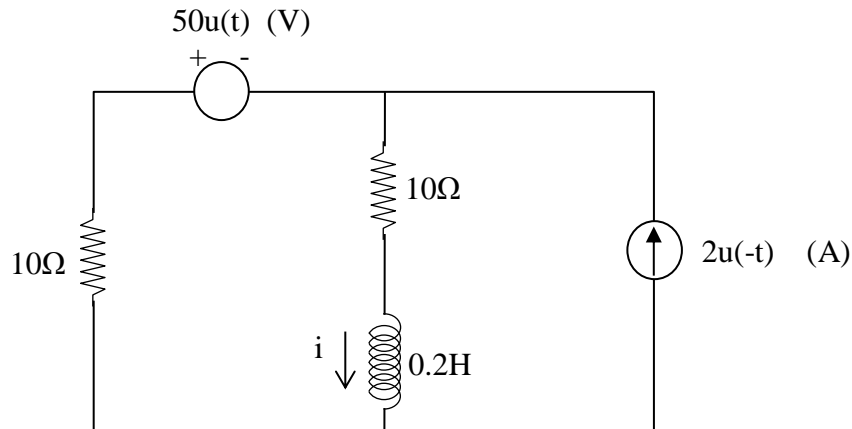
$$i = \frac{dq}{dt} = 75e^{-50t} \quad (mA)$$

Η γραφική παράσταση του φορτίου στο σχήμα 7.43 δείχνει ότι το φορτίο αλλάζει από $500\mu C$ μίας συγκεκριμένης πολικότητας σε $1000\mu F$ αντίθετης πολικότητας.



Σχήμα 7.43: Γραφική παράσταση φορτίου άσκησης 7

8) Να υπολογιστεί το ρεύμα i για όλα τα t στο κύκλωμα του σχήματος 7.44.



Σχήμα 7.44: Κύκλωμα άσκησης 8

Απάντηση:

Για $t < 0$, η πηγή τάσης είναι ένα βραχυκύκλωμα ενώ η πηγή ρεύματος μοιράζει ισodύναμα 2A μεταξύ των δύο αντιστάσεων των 10Ω.

$$i(t) = i(0^-) = i(0^+) = 1A$$

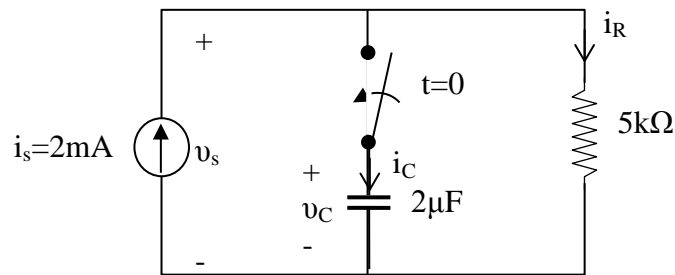
Για $t > 0$, η πηγή ρεύματος αντικαθίσταται από ένα ανοιχτοκύκλωμα ενώ η πηγή τάσης των 50V λειτουργεί στο κύκλωμα RL σειράς ($R=20\Omega$). Επομένως καθώς $t \rightarrow \infty$ είναι: $i \rightarrow -\frac{50}{20} = -2.5A$. Επιπλέον σύμφωνα με την ενότητα 7.3:

$$i(t) = [i(0^+) - i(\infty)]e^{-\frac{Rt}{L}} + i(\infty) = 3.5e^{-100t} - 2.5 \quad (A)$$

Οι εξισώσεις για το ρεύμα μπορούν να γραφούν με τη βοήθεια της μοναδιαίας βηματικής συνάρτηση για όλα τα t ως εξής:

$$i(t) = u(-t) + (3.5e^{-100t} - 2.5)u(t) \quad (A)$$

9) Στο κύκλωμα του σχήματος 7.45 ο διακόπτης κλείνει για $t=0$. Ο πυκνωτής δεν έχει φορτίο για $t<0$. Να υπολογιστούν τα i_R, i_C, v_C, v_s για όλα τα t αν $i_s = 2mA$.



Σχήμα 7.45: Κύκλωμα άσκησης 9

Απάντηση:

Για $t<0$: $i_R = 2mA, i_C = v_C = 0, v_s = 2mA \cdot 5000\Omega = 10V$

Για $t>0$: Η σταθερά χρόνου είναι $\tau = RC = 10ms$. Επίσης:

$$i_R(0^+) = 0, i_R(\infty) = 2mA \text{ και } i_R = 2(1 - e^{-100t}) \text{ (mA)}$$

Η γραφική παράσταση του i_R φαίνεται στο σχήμα 7.46.

$$v_C(0^+) = 0, v_C(\infty) = 2mA \cdot 5k\Omega = 10V \text{ και } v_C = 10(1 - e^{-100t}) \text{ (V)}$$

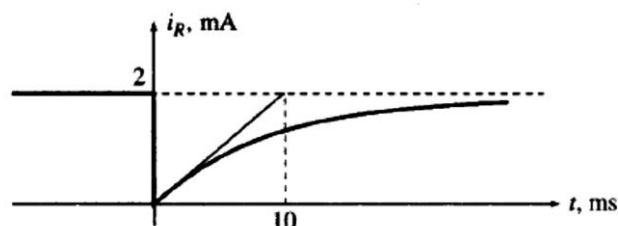
Η γραφική παράσταση του v_C φαίνεται στο σχήμα 7.47.

$$i_C(0^+) = 2mA, i_C(\infty) = 0 \text{ και } i_C = 2e^{-100t} \text{ (mA)}$$

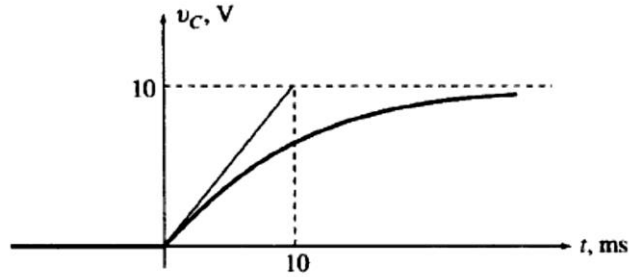
Η γραφική παράσταση του i_C φαίνεται στο σχήμα 7.48.

$$v_s(0^+) = 0, v_s(\infty) = 2mA \cdot 5k\Omega = 10V \text{ και } v_s = 10(1 - e^{-100t}) \text{ (V)}$$

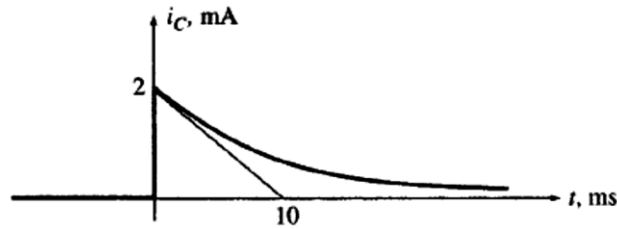
Η γραφική παράσταση του v_s φαίνεται στο σχήμα 7.49.



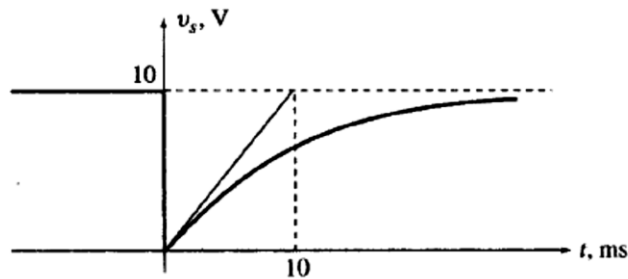
Σχήμα 7.46: Γραφική παράσταση i_R άσκησης 9



Σχήμα 7.47: Γραφική παράσταση v_C άσκησης 9

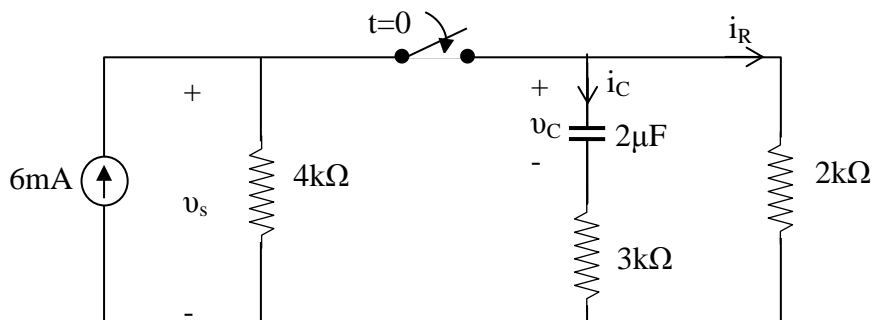


Σχήμα 7.48: Γραφική παράσταση i_C άσκησης 9



Σχήμα 7.49: Γραφική παράσταση v_s άσκησης 9

10) Στο κύκλωμα του σχήματος 7.50, ο διακόπτης ανοίγει για $t=0$. Να υπολογιστούν τα i_R, i_C, v_C, v_s .



Σχήμα 7.50: Κύκλωμα άσκησης 10

Απάντηση:

Για $t < 0$, το κύκλωμα είναι στη μόνιμη κατάσταση με $i_R = \frac{6 \cdot 4}{6+4} = 4mA$, $i_C = 0$ και

$v_C = v_s = 4 \cdot 2 = 8V$. Τη στιγμή που ανοίγει ο διακόπτης για $t=0$, η τάση του πυκνωτή παραμένει ίδια. Αφού ανοίξει ο διακόπτης για $t=0^+$, ο πυκνωτής έχει την ίδια τάση: $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 8V$.

Για $t > 0$, ο πυκνωτής αποφορτίζεται στην αντίσταση των $5k\Omega$, που είναι η ισοδύναμη της σύνδεσης σε σειρά των αντιστάσεων $3k\Omega$ και $2k\Omega$. Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι: $\tau = (2+3) \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 0.01s$. Τα ρεύματα και οι τάσεις είναι:

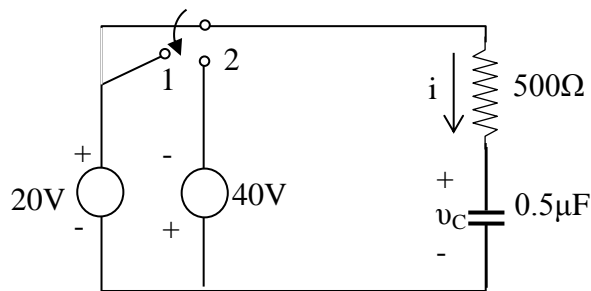
$$v_C = 8e^{-100t} \quad (V)$$

$$i_R = -i_C = \frac{v_C}{5000} = \frac{8}{5000} e^{-100t} = 1.6e^{-100t} \quad (mA)$$

$$v_s = 6mA \cdot 4k\Omega = 24V$$

Αφού για $t > 0$, όλο το ρεύμα $6mA$ διέρχεται από την αντίσταση των $4k\Omega$.

11) Ο διακόπτης στο κύκλωμα του σχήματος 7.51 είναι κλειστός στη θέση 1 και για $t=0$. Στη συνέχεια μετακινείται στη θέση 2 αφού περάσει χρόνος ίσος με μία σταθερά χρόνου, δηλαδή για $t = \tau = 250\mu s$. Να βρεθεί το ρεύμα για $t > 0$.



Σχήμα 7.51: Κύκλωμα άσκησης 11

Απάντηση:

Είναι πιο απλό να υπολογιστεί πρώτα το φορτίο του πυκνωτή και στη συνέχεια με παραγωγή να υπολογιστεί το ζητούμενο ρεύμα.

Για $0 \leq t \leq \tau$, το φορτίο q έχει τη μορφή:

$$q = A \frac{t}{\tau} + B$$

Από την υπόθεση $q(0) = 0$ και τη συνθήκη: $i(0^+) = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{0^+} = \frac{20V}{500\Omega} = 40mA$ προκύπτει ότι: $A = -B = -10\mu C$. Επομένως:

$$q = 10(1 - e^{-4000t}) \quad (\mu C) \quad (0 \leq t \leq \tau)$$

Επίσης ισχύουν:

$$q(\tau) = 10(1 - e^{-1}) \quad (\mu C) \quad \text{και}$$

$$q(\infty) = 0.5\mu F \cdot (-40V) = -20\mu C$$

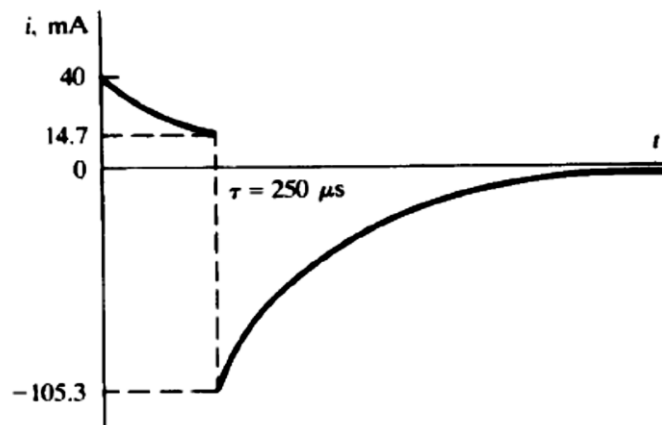
Το φορτίο q ορίζεται για $t \geq \tau$ ως εξής:

$$q = [q(\tau) - q(\infty)]e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau}} + q(\infty) = 71.55e^{-4000t} - 20 \quad (\mu C)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση $q = 10(1 - e^{-4000t}) \quad (\mu C) \quad (0 \leq t \leq \tau)$ και την παραπάνω εξίσωση προκύπτει το ρεύμα i :

$$i = \frac{dq}{dt} = \begin{cases} 40e^{-4000t} & (mA) \quad (0 < t < \tau) \\ -286.2e^{-4000t} & (mA) \quad (t > \tau) \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση του ρεύματος φαίνεται στο σχήμα 7.52.



Σχήμα 7.52: Διάγραμμα ρεύματος άσκησης 11

12) Σε ένα κύκλωμα RL σειράς εφαρμόζεται μία σταθερή τάση V για $t=0$. Σε ποια χρονική στιγμή ισχύει $v_R = v_L$;

Απάντηση:

Το ρεύμα σε ένα RL κύκλωμα είναι μία συνεχής συνάρτηση, που στην προκειμένη περίπτωση ξεκινάει από την τιμή 0 και φτάνει στην τελική τιμή $\frac{V}{R}$. Επομένως για $t > 0$:

$$i = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \text{ και}$$

$$v_R = Ri = V(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Όπου $\tau = \frac{L}{R}$ είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος.

Εφόσον ισχύει $v_R + v_L = V$ οι τάσεις v_R, v_L θα γίνουν ίσες όταν:

$$v_R = \frac{1}{2}V \Leftrightarrow V(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{1}{2}V \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{t}{\tau} = \ln 2 \Leftrightarrow t = 0.693\tau$$

Η χρονική στιγμή που οι τάσεις v_R, v_L γίνονται ίσες είναι ανεξάρτητη από την τιμή του V .

13) Σε ένα κύκλωμα RL σειράς εφαρμόζεται μία σταθερή τάση V για $t=0$. Η τάση κατά μήκος του πηνίου είναι 20V για $t=3.46\text{ms}$ και 5V για $t=25\text{ms}$. Να βρεθεί η τιμή της R αν $L=2\text{H}$.

Απάντηση:

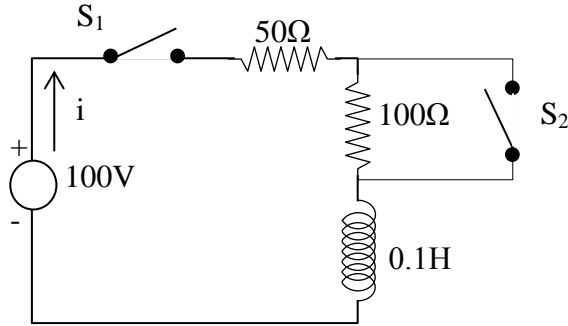
Εφαρμόζοντας τη μέθοδο που περιγράφηκε στην ενότητα 7.6 προκύπτει:

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln v_1 - \ln v_2} = \frac{25 - 3.46}{\ln 20 - \ln 5} = 15.64\text{ms}$$

Και επομένως:

$$R = \frac{L}{\tau} = \frac{2}{15.54 \cdot 10^{-3}} = 128.7\Omega$$

14) Στο κύκλωμα του σχήματος 7.53 ο διακόπτης S_1 κλείνει για $t=0$. Ο διακόπτης S_2 ανοίγει για $t=4\text{ms}$. Να υπολογιστεί το ρεύμα για $t>0$.



Σχήμα 7.53: Κύκλωμα άσκησης 14

Απάντηση:

Καθώς το πηνίο είναι συνδεδεμένο κάθε χρονική στιγμή στο κύκλωμα, το ρεύμα είναι συνεχής συνάρτηση. Στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 4\text{ms}$, η αντίσταση των 100Ω είναι βραχυκυκλωμένη και η σταθερά χρόνου είναι ίση με $\tau = \frac{0,1\text{H}}{50\Omega} = 2\text{ms}$. Επομένως το ρεύμα ξεκινάει από την τιμή 0 και αυξάνει μέχρι τιμή $\frac{100\text{V}}{50\Omega} = 2\text{A}$ (παρόλο που δεν φτάνει ποτέ αυτή την τιμή). Επομένως (όπως και στην άσκηση 12) προκύπτει:

$$i = 2(1 - e^{-\frac{t}{2}}) \quad (\text{A}) \quad (0 \leq t \leq 4)$$

Όπου το t μετράται σε ms. Πιο συγκεκριμένα:

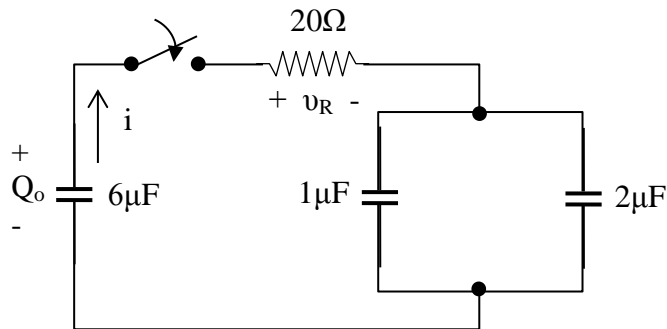
$$i(4) = 2(1 - e^{-2}) = 1.729\text{A}$$

Στο χρονικό διάστημα $t \geq 4\text{ms}$, το ρεύμα ξεκινά από την τιμή 1.729A και μειώνεται μέχρι την τιμή $100/150=0.667\text{A}$ με σταθερά χρόνου ίση με $\tau = \frac{0,1\text{H}}{150\Omega} = \frac{2}{3}\text{ms}$.

Επομένως αν το t μετράται πάλι σε ms ισχύει:

$$i = (1.729 - 0.667)e^{-\frac{t-4}{\frac{2}{3}}} + 0.667 = 428.4e^{-\frac{3t}{2}} + 0.667 \quad (\text{A}) \quad (t \geq 4)$$

15) Στο κύκλωμα του σχήματος 7.54, ο διακόπτης κλείνει για $t=0$, όταν ο πυκνωτής των $6\mu\text{F}$ έχει φορτίο $Q_o = 300\mu\text{C}$. Να βρεθεί η έκφραση για τη μεταβατική τάση v_R .



Σχήμα 7.54: Κύκλωμα άσκησης 15

Απάντηση:

Οι δύο πυκνωτές που είναι συνδεδεμένοι παράλληλα έχουν ισοδύναμη χωρητικότητα ίση με $3\mu\text{F}$. Στη συνέχεια ο παράλληλος συνδυασμός των πυκνωτών είναι σε σειρά με τον πυκνωτή των $6\mu\text{F}$. Επομένως η ολική ισοδύναμη χωρητικότητα είναι ίση με $2\mu\text{F}$. Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι επομένως: $\tau = RC_{\text{ισ}} = 40\mu\text{s}$.

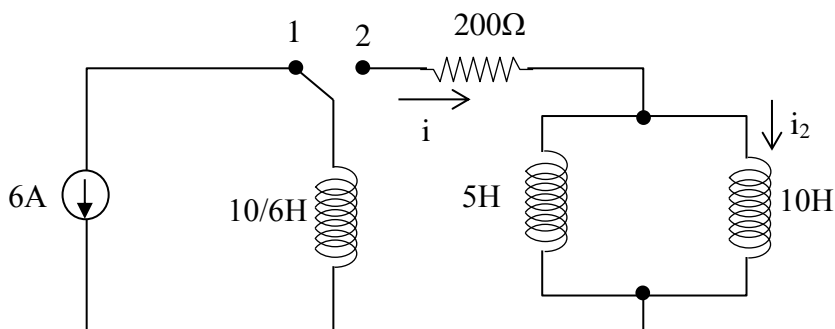
Για $t=0^+$ ο νόμος τάσεων Kirchhoff δίνει $v_R = \frac{300}{6} = 50\text{V}$.

Καθώς $t \rightarrow \infty$ τότε $v_R \rightarrow 0$ (αφού $i \rightarrow 0$) Επομένως:

$$v_R = 50e^{-\frac{t}{\tau}} = 50e^{-\frac{t}{40}} \quad (\text{V})$$

Όπου ο χρόνος μετράται σε μs .

16) Στο κύκλωμα του σχήματος 7.55 ο διακόπτης μετακινείται στη θέση 2 για $t=0$. Να υπολογιστεί το ρεύμα i_2 για $t=34.7\text{ms}$.



Σχήμα 7.55: Κύκλωμα άσκησης 16

Απάντηση:

Αφού κλείσει ο διακόπτης, η ισοδύναμη αυτεπαγωγή (για τις τρεις αυτεπαγωγές) είναι:

$$L_{\sigma} = \frac{10}{6} + \frac{5 \cdot 10}{15} = 5H$$

Τότε η σταθερά χρόνου είναι: $\tau = \frac{5}{200} = 25ms$. Επομένως είναι:

$$i = 6e^{-\frac{t}{25}} \quad (A)$$

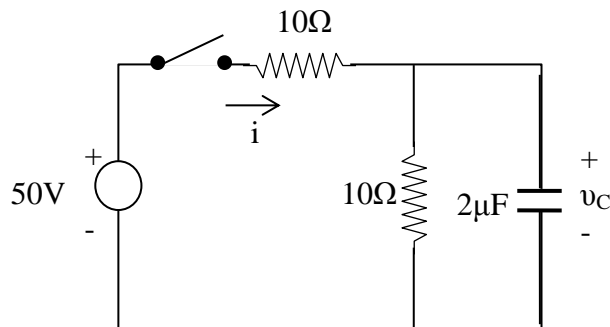
$$i_2 = \frac{5}{15}i = 2e^{-\frac{t}{25}} \quad (A)$$

όπου το t είναι σε ms.

Επομένως για $t=34.7ms$ είναι:

$$i_2(34.7) = 2e^{-\frac{34.7}{25}} = 0.5A$$

17) Στο κύκλωμα του σχήματος 7.56 ο διακόπτης κλείνει για $t=0$. Να υπολογιστεί το ρεύμα i και η τάση του πυκνωτή v_C για $t>0$.



Σχήμα 7.56: Κύκλωμα άσκησης 17

Απάντηση:

Οι δύο αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες παράλληλα όσο αφορά στη φυσική απόκριση του κυκλώματος και επομένως η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι:

$$\tau = R_{\sigma}C = 5\Omega \cdot 2\mu F = 10\mu s$$

Λόγω συνέχειας ισχύει: $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$. Επιπλέον καθώς $t \rightarrow \infty$, ο πυκνωτής γίνεται ανοιχτοκύκλωμα και τότε η ισοδύναμη αντίσταση 20Ω (2 αντιστάσεις των 10Ω σε σειρά) μένει στο κύκλωμα με την πηγή τάσης των $50V$. Επομένως:

$$i(\infty) = \frac{50}{20} = 2.5A$$

$$v_C(\infty) = 2.5A \cdot 10\Omega = 25V$$

Σύμφωνα με την τελική τιμή του v_C , γράφεται:

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + v_C(\infty) = 25(1 - e^{-\frac{t}{10}}) \quad (V)$$

Όπου το t μετράται σε μs .

Το ρεύμα του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = 5e^{-\frac{t}{10}} \quad (A)$$

Και το ρεύμα στην παράλληλη αντίσταση των 10Ω είναι:

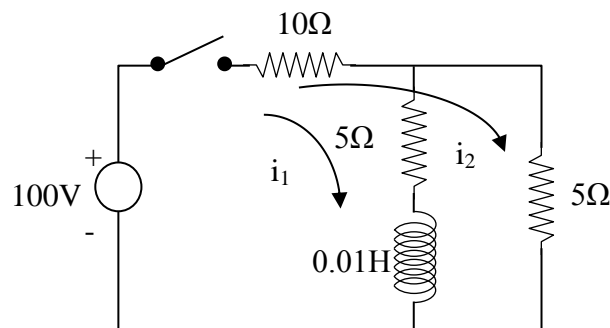
$$i_{10\Omega} = \frac{v_C}{10\Omega} = 2.5(1 - e^{-\frac{t}{10}}) \quad (A)$$

Επομένως:

$$i = i_C + i_{10\Omega} = 2.5(1 + e^{-\frac{t}{10}}) \quad (A)$$

Ως εναλλακτικός τρόπος επίλυσης προτείνεται η ανάθεση ρευμάτων βρόχων και στη συνέχεια η λύση των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν.

18) Ο διακόπτης στο κύκλωμα δύο βρόχων του σχήματος 7.57 κλείνει για $t=0$. Να υπολογιστούν τα ρεύματα i_1, i_2 για $t>0$.



Σχήμα 7.57: Κύκλωμα άσκησης 18

Απάντηση:

Προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$10(i_1 + i_2) + 5i_1 + 0.01 \frac{di_1}{dt} = 100$$

$$10(i_1 + i_2) + 5i_2 = 100 \Leftrightarrow i_2 = \frac{(100 - 10i_1)}{15}$$

Στη συνέχεια γίνεται αντικατάσταση της δεύτερης εξίσωσης στην πρώτη και προκύπτει:

$$\frac{di_1}{dt} + 833i_1 = 3333$$

Η ειδική λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι: $i_1(\infty) = \frac{3333}{833} = 4A$. Επομένως:

$$i_1 = Ae^{-833t} + 4 \quad (A)$$

Η αρχική συνθήκη $i_1(0^-) = i_1(0^+) = 0$ δίνει: $A = -4A$. Άρα:

$$i_1 = 4(1 - e^{-833t}) \quad (A) \text{ και}$$

$$i_2 = 4 + 2.67e^{-833t} \quad (A)$$

Εναλλακτικός τρόπος επίλυσης

Το ισοδύναμο κύκλωμα όπως αυτό φαίνεται από τα άκρα του πηνίου, έχει ισοδύναμη αντίσταση:

$$R_{\sigma} = 5 + \frac{5 \cdot 10}{15} = 8.33\Omega$$

$$\text{Τότε: } \frac{1}{\tau} = \frac{R_{\sigma}}{L} = 833s^{-1}.$$

Για $t \rightarrow \infty$ η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$R_{ολ} = 10 + \frac{5 \cdot 5}{10} = 12.5\Omega$$

Ως αποτέλεσμα το ολικό ρεύμα είναι: $i_{ολ} = \frac{100}{12.5} = 8A$. Για $t = \infty$ το ρεύμα διαιρείται

εξίσου μεταξύ των δύο αντιστάσεων των 5Ω . Σύμφωνα με αυτό το συλλογισμό, το πηνίο θα διαρρέεται από ένα ρεύμα $4A$. Επομένως:

$$i_L = i_1 = 4(1 - e^{-833t}) \quad (A)$$

19) Ένα κύκλωμα RL σειράς, με $R=50\Omega$ και $L=0.2H$ έχει ημιτονοειδή τάση $v=150\sin(500t+0.785)$ (V) η οποία εφαρμόζεται για $t>0$. Να υπολογιστεί το ρεύμα για $t>0$.

Απάντηση:

Η εξίσωση του κυκλώματος για $t>0$ είναι:

$$\frac{di}{dt} + 250i = 750\sin(500t + 0.785)$$

Η λύση αποτελείται από δύο κομμάτια, τη γενική λύση i_γ και την ειδική λύση i_{ei} έτσι ώστε $i = i_\gamma + i_{ei}$. Η γενική λύση είναι η λύση της εξίσωσης

$$\frac{di}{dt} + 250i = 750\sin(500t + 0.785) \text{ όταν το δεξί μέλος αντικατασταθεί με μηδέν:}$$

$$i_\gamma = ke^{-250t}.$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών (method of undetermined coefficients) η ειδική λύση θα είναι: $i_{ei} = A\cos 500t + B\sin 500t$ εφόσον το δεξί μέλος

της εξίσωσης $\frac{di}{dt} + 250i = 750\sin(500t + 0.785)$ είναι δυνατό να εκφραστεί ως συνδυασμός των δύο συναρτήσεων. Τότε:

$$\frac{di_{ei}}{dt} = -500A\sin 500t + 500B\cos 500t$$

Στη συνέχεια γίνεται αντικατάσταση στην εξίσωση του κυκλώματος:

$$\begin{aligned} -500A\sin 500t + 500B\cos 500t + 250A\cos 500t + 250B\sin 500t &= \\ = 530.3\cos 500t + 530.3\sin 500t \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές προκύπτει:

$$-500A + 250B = 530.3 \text{ και}$$

$$500B + 250A = 530.3$$

Επιλύοντας τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει:

$$A = -0.4243A \text{ και } B = 1.273A$$

Επομένως:

$$i_{ei} = -0.4243\cos 500t + 1.273\sin 500t = 1.342\sin(500t - 0.322) \quad (A)$$

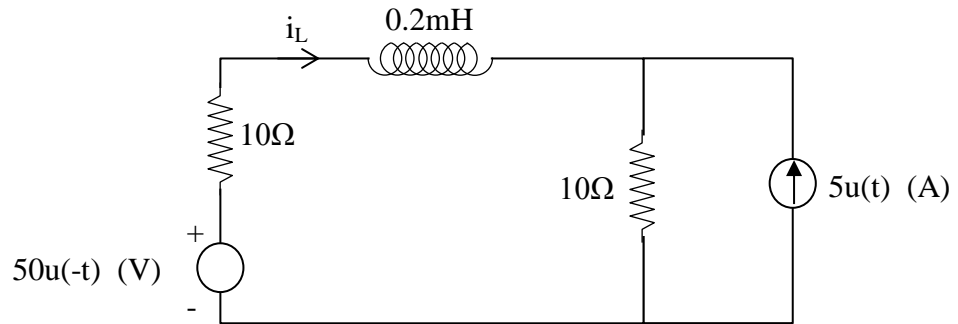
Και:

$$i = i_y + i_{ei} = ke^{-250t} + 1.342\sin(500t - 0.322) \quad (A)$$

Για $t=0$ είναι $i = 0$. Εφαρμόζοντας τη συνθήκη: $k = 0.425A$ και τελικά:

$$i = 0.425e^{-250t} + 1.342\sin(500t - 0.322) \quad (A)$$

20) Για το κύκλωμα του σχήματος 7.58, να υπολογιστεί το ρεύμα i_L για όλες τις χρονικές στιγμές.



Σχήμα 7.58: Κύκλωμα άσκησης 20

Απάντηση:

Για $t < 0$, η πηγή τάσης των 50V προκαλεί την εμφάνιση ενός ρεύματος στο πηνίο ίσο με $\frac{50}{20} = 2.5A$. Η πηγή ρεύματος των 5A εφαρμόζεται για $t > 0$. Καθώς $t \rightarrow \infty$, το ρεύμα μοιράζεται εξίσου ανάμεσα στις δύο αντιστάσεις των 10V. Επομένως $i_L(\infty) = -2.5A$. Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι:

$$\tau = \frac{0.2 \cdot 10^{-3} H}{20\Omega} = \frac{1}{100} ms$$

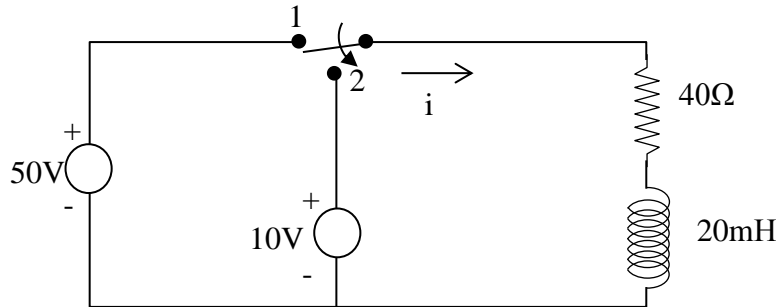
Με βάση τη συνθήκη $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 2.5A$ προκύπτει ότι:

$$i_L = [i_L(0^+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(\infty) = 5e^{-100t} - 2.5 \quad (A)$$

Τελικά με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης το ρεύμα για όλες τις χρονικές στιγμές δίνεται από τη συνδυαστική σχέση:

$$i_L = 2.5u(-t) + (5e^{-100t} - 2.5)u(t) \quad (A)$$

21) Ο διακόπτης στο κύκλωμα του σχήματος 7.59 βρίσκεται στη θέση 1 για μεγάλο χρονικό διάστημα. Μετακινείται στη θέση 2 για $t=0$. Να βρεθεί η έκφραση για το ρεύμα για $t>0$.



Σχήμα 7.59: Κύκλωμα άσκησης 21

Απάντηση:

Με τον διακόπτη στη θέση 1, ισχύει: $i(0^-) = \frac{50}{40} = 1.25A$. Με το πηνίο στο κύκλωμα

ισχύει $i(0^-) = i(0^+)$. Επίσης ισχύει: $i(\infty) = \frac{10}{40} = 0.25A$.

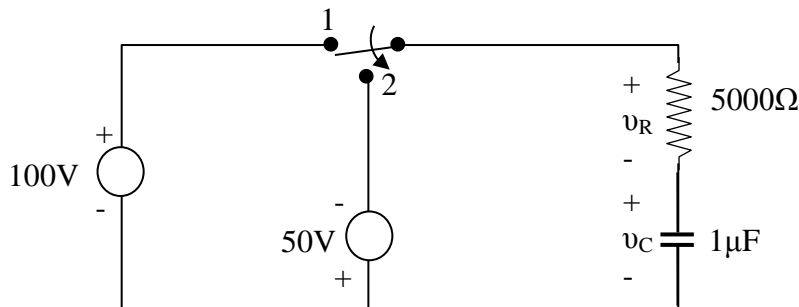
Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{2000} s$$

Επομένως για $t>0$ είναι:

$$i = [i(0^+) - i(\infty)]e^{-2000t} + i(\infty) = 1e^{-2000t} + 0.25 \quad (A)$$

22) Ο διακόπτης του κυκλώματος του σχήματος 7.60 μετακινείται από τη θέση 1 στη θέση 2 για $t=0$. Να υπολογιστούν τα v_C, v_R για $t>0$.



Σχήμα 7.60: Κύκλωμα άσκησης 22

Απάντηση:

Όταν ο διακόπτης είναι στη θέση 1, τότε λόγω της πηγής των 100V είναι $v_C(0^-) = 100V$. Λόγω συνέχειας του φορτίου ισχύει επίσης $v_C(0^-) = v_C(0^+)$.

Στη θέση 2 λόγω της αντίθετης πολικότητας της πηγής των 50V, είναι $v_C(\infty) = -50V$

. Επίσης η σταθερά χρόνου είναι: $\tau = RC = \frac{1}{200} s$. Επομένως:

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-200t} + v_C(\infty) = 150e^{-200t} - 50 \quad (V)$$

Τέλος από την εφαρμογή του νόμου τάσεων του Kirchhoff προκύπτει:

$$v_C + v_R + 50 = 0 \Leftrightarrow v_R = -150e^{-200t} \quad (V)$$

23) Να βρεθούν οι συναρτήσεις για την ενέργεια για το κύκλωμα της άσκησης 22 (σχήμα 7.60).

Απάντηση:

$$w_C = \frac{1}{2} C v_C^2 = 1.25(3e^{-200t} - 1)^2 \quad (mJ)$$

$$w_R = \int_0^t \frac{v_R^2}{R} dt = 11.25(1 - e^{-400t}) \quad (mJ)$$

24) Ένα κύκλωμα RC σειράς με $R = 5k\Omega$ και $C = 20\mu F$, έχει δύο πηγές τάσης συνδεδεμένες σε σειρά: $v_1 = 25u(-t)$ (V) και $v_2 = 25u(t-t')$ (V). Να βρεθεί η έκφραση για την τάση κατά μήκος του πυκνωτή και στη συνέχεια να σχεδιαστεί.

Απάντηση:

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι συνεχής. Για $t \leq 0$ η πηγή τάσης v_1 έχει ως αποτέλεσμα μία τάση στα άκρα του πυκνωτή ίση με 25V.

Για $0 \leq t \leq t'$ και οι δύο πηγές είναι μηδέν, και ως αποτέλεσμα η τάση του πυκνωτή μειώνεται από την τιμή 25V ως την τιμή 0:

$$v_C = 25e^{-\frac{t}{RC}} = 25e^{-10t} \quad (V) \quad (0 \leq t \leq t')$$

$$\text{Ειδικότερα: } v_C(t') = 25e^{-10t'} \quad (V).$$

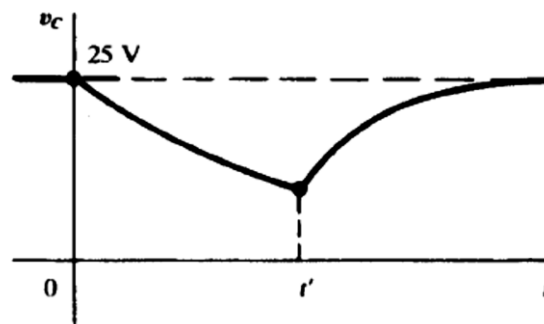
Για $t \geq t'$ η τάση στα άκρα του πυκνωτή αυξάνει από την τιμή $v_C(t')$ ως την τελική τιμή των 25V λόγω της πηγής τάσης v_2 . Επομένως:

$$v_C = [v_C(t') - v_C(\infty)]e^{-\frac{(t-t')}{RC}} + v_C(\infty) = 25[1 - (e^{-10t'} - 1)e^{-10t}] \quad (V) \quad (t \geq t')$$

Τελικά προκύπτει η έκφραση για όλες τις χρονικές στιγμές με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης:

$$v_C = 25u(-t) + 25e^{-10t}[u(t) - u(t-t')] + 25[1 - (e^{-10t'} - 1)e^{-10t}]u(t-t') \quad (V)$$

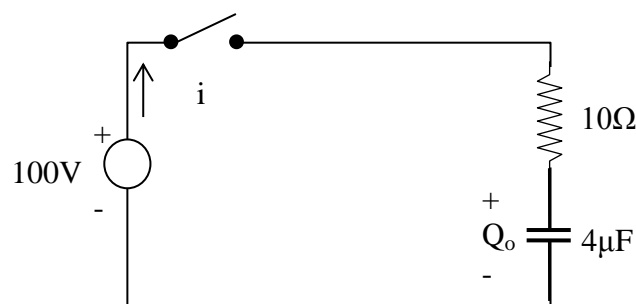
Η γραφική παράσταση της τάσης στα άκρα του πυκνωτή φαίνεται στο σχήμα 7.60.



Σχήμα 7.61: Γραφική παράσταση της τάσης v_C της άσκησης 22

7.17. Άλυτες ασκήσεις

7.1) Ο πυκνωτής του κυκλώματος του σχήματος 7.62 έχει αρχικό φορτίο $Q_0 = 800 \mu C$, με πολικότητα όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο διακόπτης κλείσει για $t=0$, να βρεθεί το ρεύμα και το φορτίο για $t > 0$.



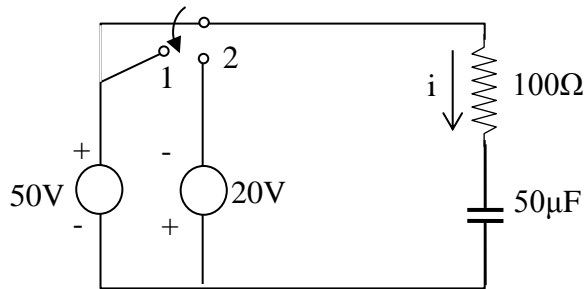
Σχήμα 7.62: Κύκλωμα άσκησης 7.1

(Απάντηση: $i = -10e^{-25000t}$ (A), $q = 4 \cdot 10^{-4}(1 + e^{-25000t})$ (C))

7.2) Ένας πυκνωτής $2\mu\text{F}$ με αρχικό φορτίο $Q_0 = 800\mu\text{C}$ συνδέεται κατά μήκος της αντίστασης των 100Ω για $t=0$. Να υπολογιστεί ο χρόνος στον οποίο η τιμή της τάσης κατά μήκος της αντίστασης πέφτει από τα 40V στα 10V .

(Απάντηση: 0.277ms)

7.3) Στο RC κύκλωμα του σχήματος 7.63, ο διακόπτης κλείνει στη θέση 1 για $t=0$ και στη συνέχεια μετακινείται στη θέση 2 αφού περάσει χρονικό διάστημα ίσο με μία σταθερά χρόνου. Να βρεθεί το ρεύμα για α) $0 < t < \tau$ και β) $t > \tau$.



Σχήμα 7.63: Κύκλωμα άσκησης 7.3

(Απάντηση: α) $0.5e^{-200t}$ (A), β) $-0.516e^{-200(t-\tau)}$ (A))

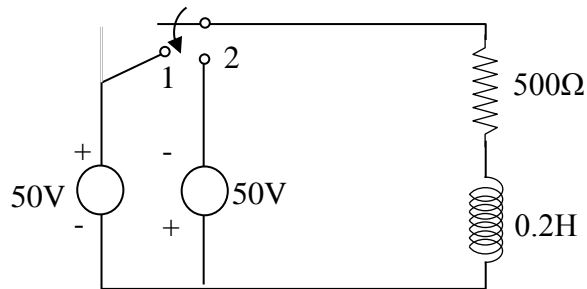
7.4) Ένας πυκνωτής των $10\mu\text{F}$ με αρχικό φορτίο Q_0 συνδέεται κατά μήκος μιας αντίστασης για $t=0$. Αν η ενέργεια του πυκνωτή κατά τη μεταβατική περίοδο είναι $800e^{-4000t}$ (W), να βρεθούν τα R, Q_0 και η αρχική αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή.

(Απάντηση: $50\Omega, 2000\mu\text{C}, 0,2\text{ J}$)

7.5) Σε ένα κύκλωμα RL σειράς, με $R=10\Omega$ και $L=1\text{H}$ συνδέεται μία πηγή τάσης 100V για $t=0$. Να βρεθεί το ρεύμα για $t>0$.

(Απάντηση: $10(1-e^{-10t})$ (A))

7.6) Στο κύκλωμα του σχήματος 7.64 ο διακόπτης κλείνει στη θέση 1 για $t=0$ και στη συνέχεια μετακινείται στη θέση 2 για $t=1\text{ms}$. Να βρεθεί ο χρόνος στον οποίο η τάση στα άκρα της αντίστασης είναι μηδέν.



Σχήμα 7.64: Κύκλωμα άσκησης 7.6

(Απάντηση: 1.261ms)

7.7) Σε ένα κύκλωμα RL σειράς, με $R=100\Omega$ και $L=0.2\text{H}$ συνδέεται μία πηγή τάσης 100V για $t=0$. Στη συνέχεια μία δεύτερη πηγή 50V με την ίδια πολικότητα συνδέεται και αντικαθιστά την πρώτη για $t=t'$. Να βρεθεί η χρονική στιγμή t' έτσι ώστε το ρεύμα να είναι σταθερό στα 0.5A για $t > t'$.

(Απάντηση: 1.39ms)

7.8) Στο κύκλωμα της άσκησης 7.7 η δεύτερη πηγή 50V με αντίθετη πολικότητα αυτή τη φορά συνδέεται και αντικαθιστά την πρώτη για $t=0.5\text{ms}$. Να υπολογιστεί το ρεύμα για α) $0 < t < 0.5\text{ms}$ και β) $t > 0.5\text{ms}$.

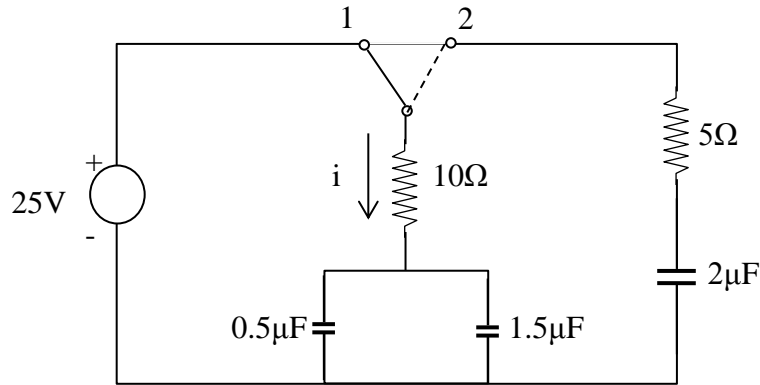
(Απάντηση: α) $1 - e^{-500t}$ (A), β) $0.721e^{-500(t-0.0005)} - 0.5$ (A))

7.9) Μία μεταβατική τάση $35e^{-500t}$ (V) έχει τιμή 25V για $t_1 = 6.73 \cdot 10^{-4}\text{s}$. Να αποδειχθεί ότι για $t = t_1 + \tau$ η συνάρτηση έχει τιμή ίση με το 36.8% της τιμής που είχε για t_1 .

7.10) Μία μεταβατική τάση αυξάνει από την τιμή μηδέν και παίρνει την τιμή 49.5 για $t_1 = 5\text{ms}$ και την τιμή 120 για $t_2 = 20\text{ms}$. Να υπολογιστεί η σταθερά χρόνου.

(Απάντηση: 12.4ms)

7.11) Στο κύκλωμα του σχήματος 7.65 ο διακόπτης μετακινείται στη θέση 1 για $t=0$ και στη συνέχεια στη θέση 2 για $t=3\tau$. Να βρεθεί το μεταβατικό ρεύμα για α) $0 < t < 3\tau$ και β) $t > 3\tau$.



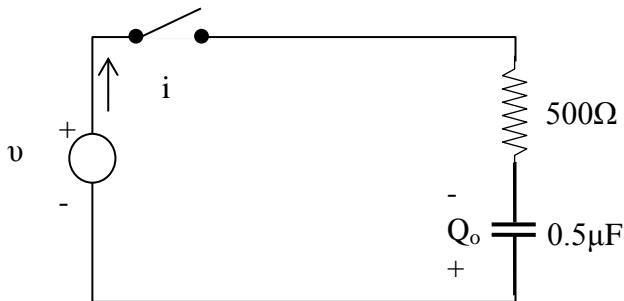
Σχήμα 7.65: Κύκλωμα άσκησης 7.11

(Απάντηση: α) $2.5e^{-5000t}$ (A), β) $-1.58e^{-66700t-0.0006}$ (A))

7.12) Ένα κύκλωμα RL, με $R=300\Omega$ και $L=1H$ έχει τάση $v=100\cos(100t+45^\circ)$ (V), η οποία εφαρμόζεται κλείνοντας το διακόπτη για $t=0$. Να υπολογιστεί το ρεύμα που προκύπτει για $t>0$.

(Απάντηση: $-0.282e^{-300t} + 0.316\cos(100t + 26.6^\circ)$ (A))

7.13) Το RC κύκλωμα του σχήματος 7.66 έχει αρχικό φορτίο πυκνωτή $Q_0 = 25\mu C$, με πολικότητα όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο διακόπτης κλείνει για $t=0$ εφαρμόζοντας τάση $v=100\sin(1000t+30^\circ)$ (V) στο κύκλωμα. Να υπολογιστεί το ρεύμα για $t>0$.



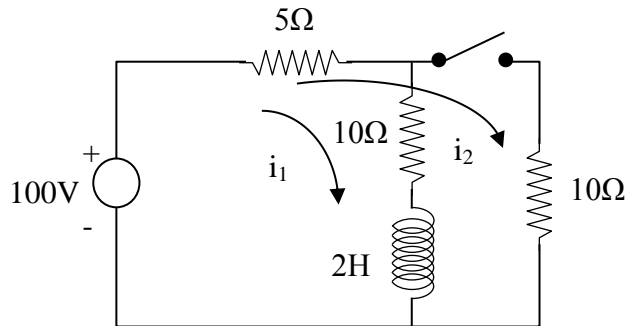
Σχήμα 7.66: Κύκλωμα άσκησης 7.13

(Απάντηση: $153.5e^{-4000t} + 48.4\sin(1000t + 106^\circ)$ (mA))

7.14) Για το κύκλωμα του σχήματος 7.66 ποιο αρχικό φορτίο του πυκνωτή θα οδηγούσε κατευθείαν σε ρεύμα μόνιμης κατάστασης χωρίς μεταβατική κατάσταση;

(Απάντηση: 13.37 μC με αντίθετη πολικότητα από αυτή του σχήματος)

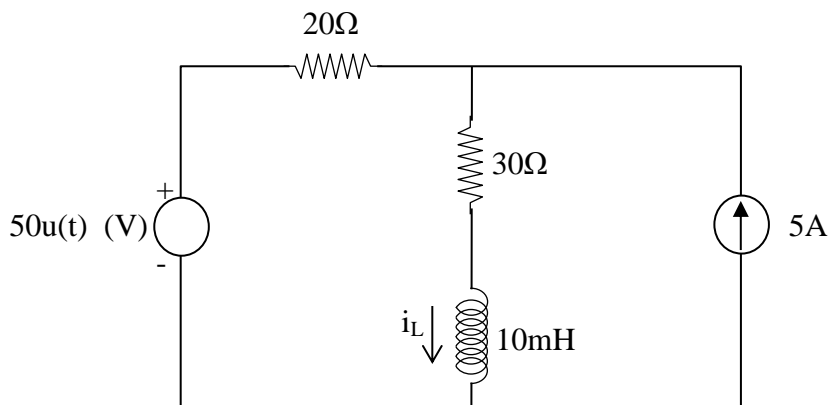
7.15) Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις για το κύκλωμα του σχήματος 7.67 και να βρεθούν από αυτές τα ρεύματα i_1, i_2 . Ο διακόπτης κλείνει για $t=0$ αφού είχε παραμείνει ανοιχτός για μεγάλο χρονικό διάστημα.



Σχήμα 7.67: Κύκλωμα άσκησης 7.15

(Απάντηση: $i_1 = 1.67e^{6.67t} + 5$ (A), $i_2 = -0.555e^{-6.67t} + 5$ (A))

7.16) Στο κύκλωμα RL του σχήματος 7.68 να υπολογιστεί το ρεύμα i_L για τις εξής χρονικές στιγμές: α) -1ms, β) 0^+ , γ) 0.3ms, δ) ∞ .



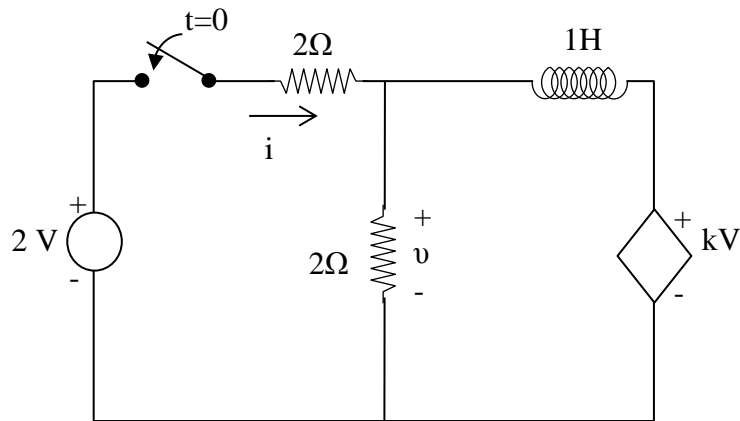
Σχήμα 7.68: Κύκλωμα άσκησης 7.16

(Απάντηση: α) 2A, β) 2A, γ) 2,78A, δ) 3A)

7.17) Ένα κύκλωμα RC σειράς με $R = 2k\Omega$ και $C = 40\mu F$ έχει δύο πηγές τάσεις σε σειρά μεταξύ τους, $v_1 = 50V$ και $v_2 = -100u(t)$ (V). Να υπολογιστούν α) η τάση του πυκνωτή για $t = \tau$, β) η χρονική στιγμή όπου η τάση του πυκνωτή είναι μηδέν και με αντεστραμμένη πολικότητα.

(Απάντηση: α) $-13.2V$, β) $55.5ms$)

7.18) Στο κύκλωμα του σχήματος 7.69, έστω ότι ισχύει $k=0$. Να υπολογιστούν τα v, i αφού κλείσει ο διακόπτης για $t=0$.



Σχήμα 7.69: Κύκλωμα άσκησης 7.18

(Απάντηση: $v = e^{-t}$ (V), $i = 1 - 0.5e^{-t}$ (A))

7.19) Ο διακόπτης στο κύκλωμα του σχήματος 7.69 κλείνει για $t=0$. Να υπολογιστεί η τάση v για $t > 0$ αν οι τιμές του k είναι: α) 0.5, β) 1, γ) 2.

(Απάντηση: α) $v = e^{-\frac{t}{2}}$ (V), β) $v = 1V$, γ) $v = e^t$ (V))

7.20) Ο διακόπτης στο κύκλωμα του σχήματος 7.69, κλείνει για $t=0$. Να υπολογιστεί το ρεύμα i για $t > 0$ αν οι τιμές του k είναι: α) 0.5, β) 1, γ) 2.

(Απάντηση: α) $i = 1 - 0.5e^{-\frac{t}{2}}$ (A), β) $i = 0.5A$, γ) $i = 1 - 0.5e^t$ (A))

Κεφάλαιο 8: Μεταβατικά Φαινόμενα (Κυκλώματα δεύτερης τάξης)

8.1. Εισαγωγή

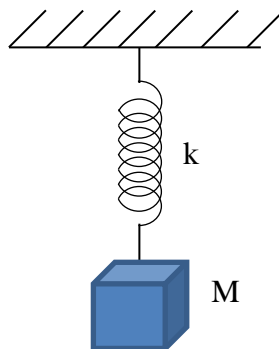
Στο κεφάλαιο για τα μεταβατικά φαινόμενα πρώτης τάξης, μελετήθηκαν κυκλώματα RL και RC με αρχικά ρεύματα ή αρχικό φορτίο για τα οποία προέκυπταν διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης οι οποίες και επιλύονταν για να προκύψουν τα μεταβατικά ρεύματα και τάσεις. Στην περίπτωση στην οποία, σε ένα κύκλωμα υπάρχουν δύο ή περισσότερα πηνία ή πυκνωτές, τότε από τις εξισώσεις του κυκλώματος προκύπτουν διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν παραδείγματα κυκλωμάτων που απαιτούν την επίλυση διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Η ανάλυση τέτοιων κυκλωμάτων απαιτεί την απευθείας εφαρμογή μεθόδων ανάλυσης.

8.2. Κύκλωμα RLC σειράς (αντίσταση-πηνίο-πυκνωτής)

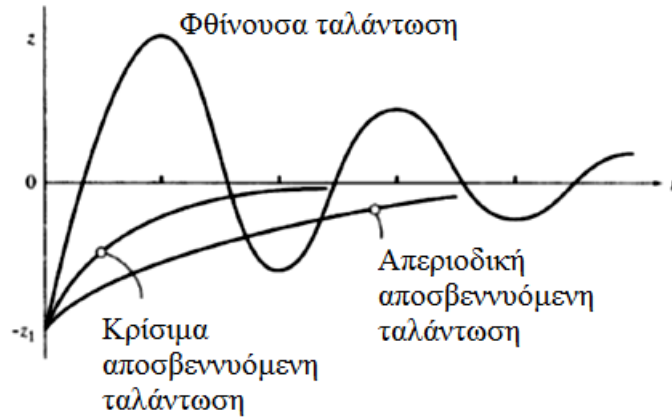
Οι διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, έχουν μία λύση η οποία είναι δυνατό να πάρει τρεις διαφορετικές μορφές. Η κάθεμία από αυτές τις μορφές εξαρτάται από τα στοιχεία του κυκλώματος. Για την καλύτερη κατανόηση της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης θεωρείται το μηχανικό σύστημα του σχήματος 8.1. Το σύστημα αυτό αποτελείται από ένα σώμα μάζας M το οποίο συγκρατείται από ένα ελατήριο σταθεράς k . Αν η μάζα εκτοπιστεί από τη θέση ισορροπίας της και στη συνέχεια αφεθεί ελεύθερη για $t=0$, τότε η μάζα M είναι δυνατό να εκτελέσει ένα από τα παρακάτω είδη κίνησης:

- Απεριοδική αποσβεννυόμενη ταλάντωση (overdamped)
- Κρίσιμα αποσβεννυόμενη ταλάντωση (critically damped)
- Φθίνουσα ταλάντωση (underdamped-oscillatory)

Στο σχήμα 8.2 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις που αντιστοιχούν σε κάθε είδος κίνησης της μάζας M αφού εκτοπιστεί από τη θέση ισορροπίας z_1 για $t=0$.

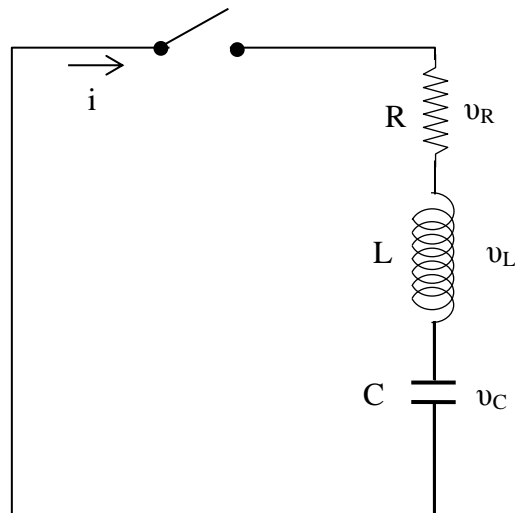


Σχήμα 8.1: Μηχανικό σύστημα



Σχήμα 8.2: Γραφικές παραστάσεις για κάθε είδος κίνησης της μάζας M

Αντίστοιχη περίπτωση με αυτή του μηχανικού συστήματος του σχήματος 8.1 μπορεί να θεωρηθεί ένα κύκλωμα RLC όπως αυτό που φαίνεται στο σχήμα 8.3.



Σχήμα 8.3: Κύκλωμα RLC

Από την εφαρμογή του νόμου τάσεων του Kirchhoff στον κλειστό βρόχο του σχήματος 8.3, αφού κλείσει ο διακόπτης προκύπτει:

$$v_R + v_L + v_C = 0$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως εξής:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = 0$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση και διαιρώντας με L προκύπτει η σχέση:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης δεύτερου βαθμού θα έχει τη μορφή: $i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$. Αντικαθιστώντας τη λύση αυτή στη διαφορική εξίσωση προκύπτει:

$$A_1 e^{s_1 t} \left(s_1^2 + \frac{R}{L} s_1 + \frac{1}{LC} \right) + A_2 e^{s_2 t} \left(s_2^2 + \frac{R}{L} s_2 + \frac{1}{LC} \right) = 0$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση οι παράγοντες s_1 και s_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$ και ως εκ τούτου δίνονται από τις σχέσεις:

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -a + \beta$$

$$s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -a - \beta$$

Όπου $a = \frac{R}{2L}$, $\beta = \sqrt{a^2 - \omega_o^2}$ και $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Στο σημείο αυτό προκύπτουν τρεις περιπτώσεις αντίστοιχες με τις περιπτώσεις κίνησης του μηχανικού συστήματος του σχήματος 8.1:

- Απεριοδική αποσβεννόμενη ταλάντωση (overdamped) ($a > \omega_o$)

Στην περίπτωση αυτή τα μεγέθη a και β είναι πραγματικοί, θετικοί αριθμοί. Τότε η εξίσωση $s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες. Επομένως προκύπτει:

$$i = A_1 e^{(-a+\beta)t} + A_2 e^{(-a-\beta)t} = e^{-at} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t})$$

- Κρίσιμα αποσβεννόμενη ταλάντωση (critically damped) ($a = \omega_o$)

Στην περίπτωση που ισχύει $a = \omega_o$, η διαφορική εξίσωση παίρνει διαφορετική μορφή αφού έχει μία διπλή ρίζα. Ως αποτέλεσμα οι δύο εκθετικοί όροι που αποτελούν την προτεινόμενη λύση δεν ικανοποιούν πλέον την εξίσωση. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η διαφορική εξίσωση γράφεται για $a = \omega_o$:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2a \frac{di}{dt} + a^2 i = 0$$

Η λύση τότε παίρνει τη μορφή:

$$i = e^{-at} (A_1 + A_2 t)$$

- Φθίνουσα ταλάντωση (underdamped-oscillatory) ($a < \omega_o$)

Όταν $a < \omega_o$, οι παράγοντες s_1 και s_2 που είναι οι ρίζες της διαφορικής εξίσωσης όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, θα είναι σε αυτή την περίπτωση μιγαδικοί αριθμοί: $s_1 = a + j\beta$ και $s_2 = a - j\beta$ όπου $\beta = \sqrt{\omega_o^2 - a^2}$. Η λύση γράφεται σε εκθετική μορφή:

$$i = e^{-at}(A_1 e^{j\beta t} + A_2 e^{-j\beta t})$$

Ή αλλιώς σε ημιτονοειδή μορφή ως εξής:

$$i = e^{-at}(A_3 \cos \beta t + A_4 \sin \beta t)$$

Παράδειγμα 8.1

Ένα κύκλωμα RLC σειράς με $R = 200\Omega$, $L = 0.1H$ και $C = 13.33\mu F$, έχει αρχικό φορτίο στον πυκνωτή ίσο με $Q_o = 2.67 \cdot 10^{-3} C$. Ένας διακόπτης κλείνει για $t=0$, επιτρέποντας έτσι στον πυκνωτή να εκφορτιστεί. Να υπολογιστεί το μεταβατικό ρεύμα.

Απάντηση:

Για το συγκεκριμένο κύκλωμα ισχύουν:

$$a = \frac{R}{2L} = 10^3 s^{-1}$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} = 7.5 \cdot 10^5 s^{-2}$$

$$\beta = \sqrt{a^2 - \omega_o^2} = 500 s^{-1}$$

Επομένως:

$$i = e^{-1000t}(A_1 e^{500t} + A_2 e^{-500t})$$

Οι τιμές των σταθερών A_1 και A_2 προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες. Στο πηνίο πρέπει να ισχύει $i(0^+) = i(0^-)$. Επίσης το φορτίο και η τάση στον πυκνωτή για $t=0^+$ πρέπει να είναι ίδια και για $t=0^-$. Επιπλέον πρέπει να ισχύει και η σχέση: $v_C(0^-) = \frac{Q_o}{C} = 200V$. Αν εφαρμοστούν οι δύο αρχικές συνθήκες προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$0 = A_1 + A_2$$

$$\pm 2000 = -500A_1 - 1500A_2$$

Από το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων προκύπτουν:

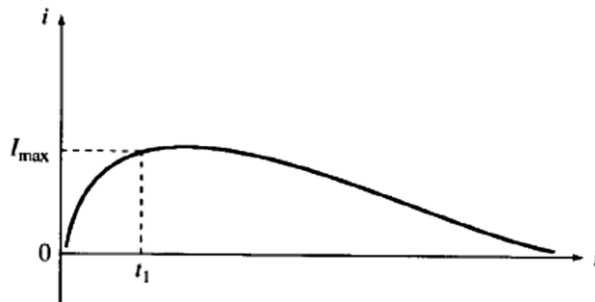
$$A_1 = \pm 2 \text{ και } A_2 = \mp 2$$

Αν θεωρηθεί η σταθερά A_1 θετική, τότε:

$$i = 2e^{-500t} - 2e^{-1500t} \quad (A)$$

Αν θεωρηθεί η A_1 αρνητική, τότε η γραφική παράσταση του ρεύματος «γυρίζει» προς τα κάτω αλλά το σχήμα της παραμένει ίδιο. Τα πρόσημα στις σταθερές A_1 και A_2 καθορίζονται από την πολικότητα της αρχικής τάσης στον πυκνωτή σε συνδυασμό με την καθορισμένη ως θετική κατεύθυνση του ρεύματος.

Η γραφική παράσταση του ρεύματος φαίνεται στο σχήμα 8.4.



Σχήμα 8.4: Γραφική παράσταση ρεύματος παραδείγματος 8.1

Παράδειγμα 8.2

Να επαναληφθεί το παράδειγμα 8.1 για $C = 10\mu F$. Η αλλαγή στην τιμή του πυκνωτή οδηγεί σε $a = \omega_0$.

Απάντηση:

Όπως και στο παράδειγμα 8.1, οι αρχικές συνθήκες καθορίζουν τις τιμές των σταθερών. Εφόσον $i(0^+) = i(0^-)$ ισχύει η σχέση $0 = A_1 + A_2 \cdot 0 \Leftrightarrow A_1 = 0$. Τότε:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(A_2te^{-at}) = A_2(-ate^{-at} + e^{-at})$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

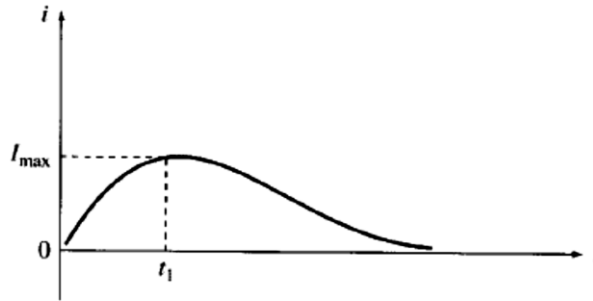
$$A_2 = \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = \pm 2000$$

Επομένως:

$$i = \pm 2000te^{-10^3 t} \text{ (A)}$$

Τα πρόσημα στις σταθερές A_1 και A_2 καθορίζονται από την πολικότητα της αρχικής τάσης στον πυκνωτή σε συνδυασμό με την καθορισμένη ως θετική κατεύθυνση του ρεύματος.

Η γραφική παράσταση του ρεύματος φαίνεται στο σχήμα 8.5.



Σχήμα 8.5: Γραφική παράσταση ρεύματος παραδείγματος 8.2

Οι αποκρίσεις για τις περιπτώσεις της απεριοδικής αποσβεννυόμενης ταλάντωσης και της κρίσιμα αποσβεννυόμενης ταλάντωσης που έχουν σχεδιαστεί στα σχήματα 8.4 και 8.5 αντίστοιχα, είναι παρόμοιες μεταξύ τους. Επιλέγοντας διάφορες τιμές για το t και συγκρίνοντας τα ρεύματα, προκύπτουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα σχετικά με τη χρονική στιγμή t_1 που εμφανίζεται το μέγιστο ρεύμα.

Παράδειγμα 8.3

Να επαναληφθεί το παράδειγμα 8.1 για $C = 1\mu F$.

Απάντηση:

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα:

$$a = \frac{R}{2L} = 1000s^{-1}$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} = 10^7 s^{-2}$$

$$\beta = \sqrt{10^7 - 10^6} = 3000rad/s$$

Επομένως:

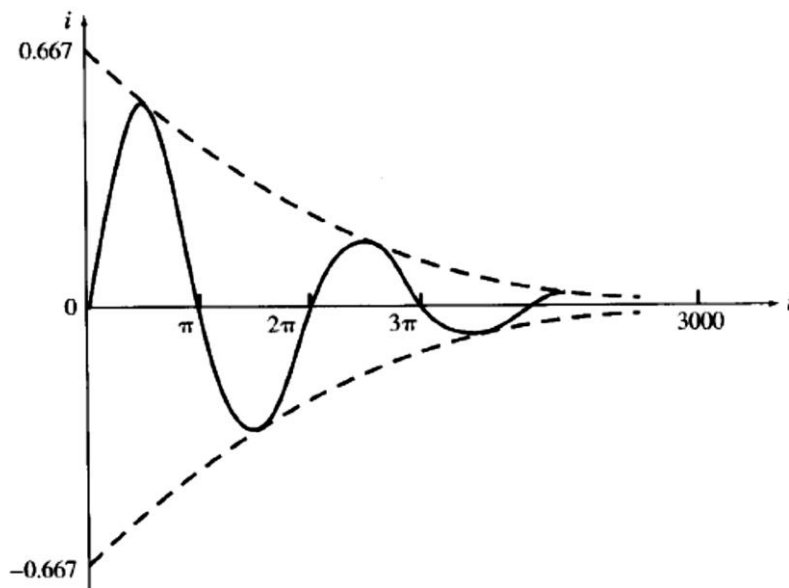
$$i = e^{-1000t} (A_3 \cos 3000 t + A_4 \sin 3000 t)$$

Οι τιμές των σταθερών A_1 και A_2 προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες: $i(0^+) = 0$ και $v_C(0^+) = 200V$. Αν εφαρμοστούν οι δύο αρχικές συνθήκες προκύπτουν: $A_3 = 0$ και $A_4 = \pm 0.667$. Επομένως:

$$i = \pm 0.667 e^{-1000t} (\sin 3000 t) \quad (A)$$

Η γραφική παράσταση του ρεύματος φαίνεται στο σχήμα 8.6.

Η συνάρτηση $\pm 0.667 e^{-1000t}$, που είναι σχεδιασμένη με διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα 8.6, σηματίζει ένα «φάκελο» μέσα στον οποίο περιορίζεται η συνάρτηση του ημιτόνου. Το ρεύμα που ταλαντώνεται έχει συχνότητα ίση με $\beta \text{ rad/s}$ αλλά φθίνει λόγω του εκθετικού όρου e^{-at} .



Σχήμα 8.6: Γραφική παράσταση ρεύματος παραδείγματος 8.3

8.3. Κύκλωμα RLC με παράλληλα στοιχεία (αντίσταση-πηνίο-πυκνωτής)

Η απόκριση του κυκλώματος RLC του σχήματος 8.7 με παράλληλα στοιχεία θα είναι παρόμοια με την απόκριση του κυκλώματος RLC σειράς. Από τη μέθοδο τάσεων κόμβων και προκύπτει μία διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v dt + C \frac{dv}{dt} = 0$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση και διαιρώντας με C προκύπτει:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

Η λύση θα είναι της μορφής:

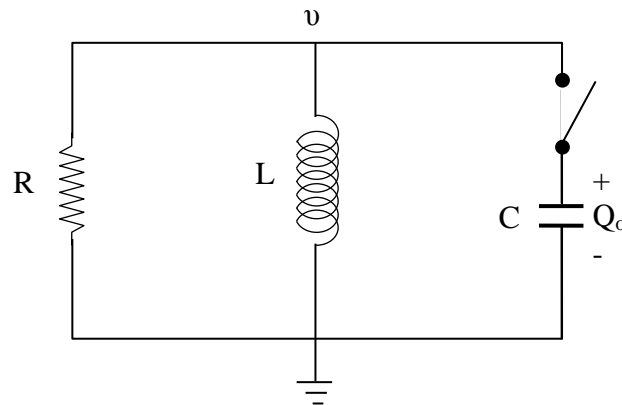
$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Όπου:

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -a + \sqrt{a^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -a - \sqrt{a^2 - \omega_0^2}$$

και $a = \frac{1}{2RC}$ και $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Ο παράγοντας a του κυκλώματος RLC με παράλληλα στοιχεία διαφέρει από τον παράγοντα a του κυκλώματος RLC σειράς.



Σχήμα 8.7: Κύκλωμα RLC με παράλληλα στοιχεία

Η μεταβατική απόκριση συνήθως υπολογίζεται με την υπόθεση ότι ο πυκνωτής έχει αρχικό φορτίο Q_0 και ο διακόπτης κλείνει για $t=0$. Ωστόσο αν μία βηματική συνάρτηση τάσης εφαρμοστεί στο κύκλωμα, η μεταβατική απόκριση θα είναι ίδια.

Προκύπτουν οι εξής περιπτώσεις:

- Απεριοδική αποσβεννόμενη ταλάντωση (overdamped) ($a^2 > \omega_0^2$)

Σε αυτή την περίπτωση η λύση είναι η $v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$.

- Φθίνουσα ταλάντωση (underdamped-oscillatory) ($\omega_0^2 > a^2$)

Στην περίπτωση της φθίνουσας ταλάντωσης για ένα κύκλωμα RLC με παράλληλα στοιχεία προκύπτει μία εξίσωση που έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση της περίπτωσης της φθίνουσας ταλάντωσης για ένα κύκλωμα RLC σειράς. Επομένως:

$$v = e^{-at} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$$

$$\text{Όπου } a = \frac{1}{2RC} \text{ και } \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - a^2}$$

Η συχνότητα ω_d καλείται συχνότητα απόσβεσης του κυκλώματος.

Η περίπτωση της κρίσιμα αποσβεννυόμενης ταλάντωσης (critically damped) δεν εξετάζεται για το κύκλωμα RLC με παράλληλα στοιχεία καθώς δεν έχει πρακτική αξία στη σχεδίαση κυκλωμάτων.

Παράδειγμα 8.4

Ένα κύκλωμα RLC με παράλληλα στοιχεία για το οποίο ισχύουν $R=1000\Omega$, $L=1H$ και $C=0.167\mu F$, έχει αρχική τάση στον πυκνωτή ίση με $V_o=50V$. Να υπολογιστεί η τάση $v(t)$ αν ο διακόπτης κλείνει για $t=0$.

Απάντηση:

Ισχύουν:

$$a = \frac{1}{2RC} = 2994, \quad a^2 = 8.96 \cdot 10^6 \quad \text{και} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 5.99 \cdot 10^6$$

Εφόσον ισχύει $a^2 > \omega_0^2$ το κύκλωμα εκτελεί απεριοδική αποσβεννυόμενη ταλάντωση και επομένως ισχύει:

$$s_1 = -a + \sqrt{a^2 - \omega_0^2} = -1271$$

$$s_2 = -a - \sqrt{a^2 - \omega_0^2} = -4717$$

Για $t=0$ ισχύουν οι συνθήκες: $V_o = A_1 + A_2$ και $\frac{dv}{dt}|_{t=0} = s_1 A_1 + s_2 A_2$

Από τη μέθοδο τάσεων κόμβων, προκύπτει η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v dt + C \frac{dv}{dt} = 0$$

Για $t=0$ η παραπάνω διαφορική εξίσωση, αν το αρχικό ρεύμα στο πηνίο είναι μηδέν, γράφεται ως εξής:

$$\frac{V_o}{R} + C \frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{V_o}{RC}$$

Από τις αρχικές συνθήκες υπολογίζονται οι σταθερές A_1 και A_2 :

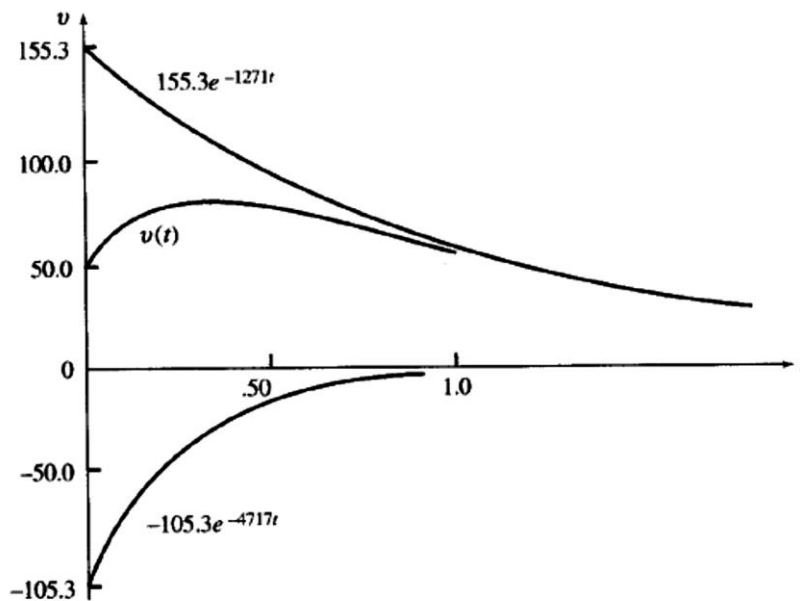
$$A_1 = \frac{V_o (s_2 + \frac{1}{RC})}{s_2 - s_1} = 155.3$$

$$A_2 = V_o - A_1 = 50 - 155.3 = -105.3$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών A_1 και A_2 , η λύση θα είναι:

$$v = 155.3e^{-1271t} - 105.3e^{-4717t}$$

Η γραφική παράσταση της τάσης φαίνεται στο σχήμα 8.8.



Σχήμα 8.8: Γραφική παράσταση τάσης παραδείγματος 8.4

Παράδειγμα 8.5

Ένα κύκλωμα RLC με παράλληλα στοιχεία για το οποίο ισχύουν $R = 200\Omega$, $L = 0.28H$ και $C = 3.57\mu F$, έχει αρχική τάση στον πυκνωτή ίση με $V_o = 50V$. Να υπολογιστεί η τάση $v(t)$ αν ο διακόπτης κλείνει για $t=0$.

Απάντηση:

Ισχύουν:

$$a = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 200 \cdot 3.57 \cdot 10^{-6}} = 700,$$

$$a^2 = 4.9 \cdot 10^5 \text{ και}$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{0.28 \cdot 3.57 \cdot 10^{-6}} = 10^6$$

Εφόσον ισχύει $\omega_o^2 > a^2$ το κύκλωμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση.

Επομένως:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - a^2} = \sqrt{10^6 - (4.9 \cdot 10^5)} = 714$$

Για $t=0$ η τάση στον πυκνωτή είναι ίση με $V_o = 50V$. Στη συνέχεια γίνεται αντικατάσταση της αρχική συνθήκης στην εξίσωση $v = e^{-at} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$ και προκύπτει $A_1 = V_o = 50$.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο τάσεων κόμβων προκύπτει η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v dt + C \frac{dv}{dt} = 0$$

Για $t=0$ η παραπάνω διαφορική εξίσωση αν το αρχικό ρεύμα στο πηνίο είναι μηδέν γράφεται ως εξής:

$$\frac{V_o}{R} + C \frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{V_o}{RC}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω έκφραση για v και θέτοντας $t=0$ προκύπτει:

$$\frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} = \omega_d A_2 - a A_1 \Leftrightarrow \omega_d A_2 - a A_1 = -\frac{V_o}{RC}$$

Εφόσον $A_1 = 50$ τότε:

$$A_2 = \frac{-\frac{V_o}{RC} + V_o a}{\omega_d} = -49$$

Επομένως η λύση είναι:

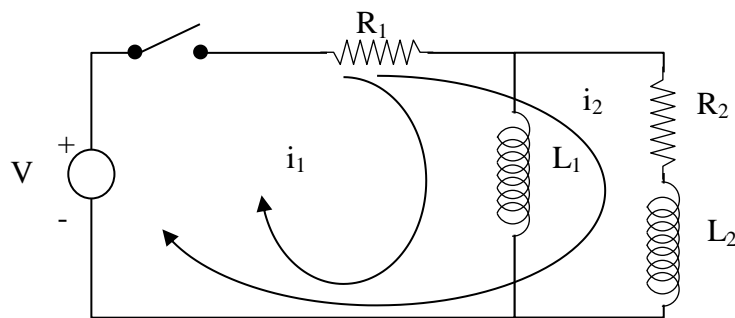
$$v = e^{-700t} (50 \cos 714t - 49 \sin 714t) \quad (V)$$

8.4. Κύκλωμα δύο βρόχων

Για το κύκλωμα δύο βρόχων του σχήματος 8.9 επιλέγονται τα ρεύματα βρόχων i_1 και i_2 . Από την εφαρμογή του νόμου τάσεων του Kirchhoff προκύπτουν δύο διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης οι οποίες πρέπει και να επιλυθούν.

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_2 = V$$

$$R_1 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = V$$



Σχήμα 8.9: Κύκλωμα δύο βρόχων

Αρχικά υπολογίζεται η παράγωγος της εξίσωσης $R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_2 = V$:

$$R_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 \frac{di_2}{dt} = 0$$

Από τις τρεις παραπάνω εξισώσεις απαλείφονται οι όροι i_2 και $\frac{di_2}{dt}$. Το αποτέλεσμα είναι μία εξίσωση δεύτερης τάξης (του ρεύματος i_1), παρόμοια με αυτές που εξετάστηκαν στις ενότητες 8.2 και 8.3, αν εξαιρεθεί ο σταθερός όρος στο δεύτερο μέλος.

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} i_1 = \frac{R_2 V}{L_1 L_2}$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης στη μόνιμη κατάσταση είναι προφανώς $i_1(\infty) = \frac{V}{R_1}$.

Η μεταβατική λύση θα προκύψει από τις ρίζες s_1 και s_2 της εξίσωσης:

$$s^2 + \frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} s + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} = 0$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$i_1(0^+) = 0$$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{0^+} = \frac{V}{L_1}$$

Τα ρεύματα i_1 και i_2 είναι δυνατό να είναι συνεχή για $t=0$. Από την έκφραση για το ρεύμα i_1 μπορεί να προκύψει και η έκφραση για το ρεύμα i_2 με αντικατάσταση στην εξίσωση $R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_2 = V$.

Γενικά η έκφραση για το ρεύμα θα είναι:

$$i_1 = (\text{μεταβατικό ρεύμα}) + \frac{V}{R_1}$$

Το μεταβατικό ρεύμα θα έχει την τιμή $-\frac{V}{R_1}$ για $t=0$ και την τιμή 0 για $t \rightarrow \infty$.

8.5. Λυμένα προβλήματα

1) Ένα κύκλωμα RLC σειράς με $R=3k\Omega$, $L=10H$ και $C=200\mu F$, έχει μία σταθερή πηγή τάσης $V=50V$ η οποία εφαρμόζεται στο κύκλωμα για $t=0$. α) Να υπολογιστεί το μεταβατικό ρεύμα αν ο πυκνωτής δεν έχει αρχικό φορτίο. β) Να σχεδιαστεί η συνάρτηση του ρεύματος και να υπολογιστεί η χρονική στιγμή στην οποία το ρεύμα γίνεται μέγιστο.

Απάντηση:

α) Για το συγκεκριμένο κύκλωμα ισχύουν:

$$a = \frac{R}{2L} = 150s^{-1}$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} = 500s^{-2}$$

$$\beta = \sqrt{a^2 - \omega_o^2} = 148.3s^{-1}$$

Το κύκλωμα εκτελεί απεριοδική αποσβεννυόμενη ταλάντωση (overdamped) αφού $a > \omega_o$. Επομένως:

$$s_1 = -a + \beta = -1.7s^{-1}$$

$$s_2 = -a - \beta = -298.3s^{-1}$$

και

$$i = A_1 e^{-1.7t} + A_2 e^{-298.3t}$$

Οι τιμές των σταθερών A_1 και A_2 προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες. Εφόσον στο κύκλωμα περιέχεται ένα πηνίο πρέπει να ισχύει $i(0^+) = i(0^-) = 0$. Επίσης για το φορτίο ισχύει $Q(0^+) = Q(0^-) = 0$. Επομένως για $t=0^+$ αν εφαρμοστεί ο νόμος τάσεων του Kirchhoff προκύπτει:

$$0 + 0 + L \frac{di}{dt} \Big|_{0^+} = V \Leftrightarrow \frac{di}{dt} \Big|_{0^+} = \frac{V}{L} \Leftrightarrow \frac{di}{dt} \Big|_{0^+} = 5A/s$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες στην έκφραση για το ρεύμα προκύπτει το σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$0 = A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 1$$

$$5 = -1.7 \cdot A_1 \cdot 1 - 298.3 \cdot A_2 \cdot 1$$

Από το παραπάνω σύστημα προκύπτει:

$$A_1 = -A_2 = 16.9mA$$

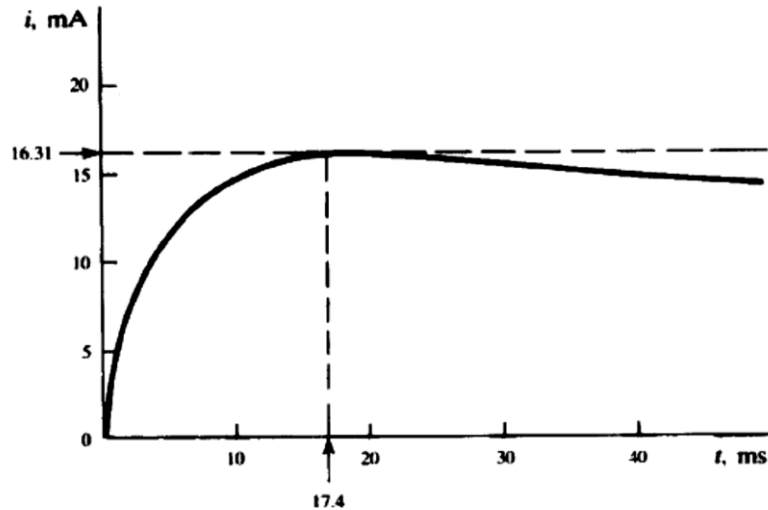
Επομένως:

$$i = 16.9(e^{-1.7t} - e^{-298.3t}) \quad (mA)$$

β) Η χρονική στιγμή στην οποία η τιμή του ρεύματος γίνεται μέγιστη είναι:

$$\frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow -28.73e^{-1.7t} + 5041.3e^{-298.3t} = 0$$

Αν γίνει επίλυση της παραπάνω εξίσωσης με λογάριθμους προκύπτει: $t = 17.4ms$. Η γραφική παράσταση του ρεύματος φαίνεται στο σχήμα 8.10.



Σχήμα 8.10: Γραφική παράσταση ρεύματος άσκησης 1

2) Ένα κύκλωμα RLC σειράς με $R=50\Omega$, $L=0.1H$ και $C=50\mu F$, έχει μία σταθερή πηγή τάσης $V=100V$ η οποία εφαρμόζεται στο κύκλωμα για $t=0$. α) Να υπολογιστεί το μεταβατικό ρεύμα αν θεωρηθεί ότι ο πυκνωτής δεν έχει αρχικό φορτίο.

Απάντηση:

Για το συγκεκριμένο κύκλωμα ισχύουν:

$$a = \frac{R}{2L} = 250s^{-1}$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} = 2 \cdot 10^5 s^{-2}$$

$$\beta = \sqrt{a^2 - \omega_o^2} = j370.8rad/s$$

Το κύκλωμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση (underdamped-oscillatory) αφού $a < \omega_o$. Επομένως η γενική έκφραση για το ρεύμα είναι:

$$i = e^{-250t} (A_1 \cos 370.8t + A_2 \sin 370.8t)$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι (όπως και στην άσκηση 1):

$$i(0^+) = 0$$

$$\frac{di}{dt} \Big|_{0^+} = \frac{V}{L} \Leftrightarrow \frac{di}{dt} \Big|_{0^+} = 1000A/s$$

Οι αρχικές συνθήκες καθορίζουν τις τιμές των σταθερών A_1 και A_2 :

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = 2.7A$$

Επομένως:

$$i = e^{-250t} (2.7 \sin 370.8t) \quad (A)$$

3) Να επιλυθεί εκ νέου η άσκηση 2 αν ο πυκνωτής έχει αρχικό φορτίο ίσο με $Q_o = 2500\mu C$.

Απάντηση:

Το μόνο στοιχείο που αλλάζει στην επίλυση σε σχέση με την άσκηση 2 είναι η δεύτερη αρχική συνθήκη η οποία είναι στην περίπτωση αυτή:

$$0 + L \frac{di}{dt} \Big|_{0^+} + \frac{Q_o}{C} = V \Leftrightarrow \frac{di}{dt} \Big|_{0^+} = \frac{100 - \frac{2500}{50}}{0.1} \Leftrightarrow \frac{di}{dt} \Big|_{0^+} = 500A/s$$

Οι σταθερές A_1 και A_2 θα έχουν τη μισή τιμή σε σχέση με τις τιμές τους στην άσκηση 2 λόγω γραμμικότητας. Επομένως:

$$i = e^{-250t} (1.35 \sin 370.8t) \quad (A)$$

4) Ένα κύκλωμα RLC με παράλληλα στοιχεία για το οποίο ισχύουν $R = 50\Omega$, $L = 55.6mH$ και $C = 200\mu F$, έχει αρχικό φορτίο στον πυκνωτή ίσο με $Q_o = 5mC$. Να βρεθεί η έκφραση για την τάση $v(t)$ κατά μήκος του κυκλώματος.

Απάντηση:

Ισχύουν:

$$a = \frac{1}{2RC} = 50s^{-1} \quad \text{και} \quad \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = 8.99 \cdot 10^4 s^{-2}$$

Εφόσον είναι $\omega_o^2 > a^2$ το κύκλωμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση (oscillatory) και επομένως ισχύει:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - a^2} = 296rad/s$$

Η γενική έκφραση για την τάση γράφεται:

$$v = e^{-50t} (A_1 \cos 296t + A_2 \sin 296t)$$

Για $Q_o = 5 \cdot 10^{-3} C$ είναι $V_o = 25V$. Για $t=0$ η τάση είναι ίση με $v = 25V$. Στη συνέχεια γίνεται αντικατάσταση της αρχική συνθήκης στην εξίσωση και προκύπτει $A_1 = V_o = 25$.

$$\frac{dv}{dt} = -50e^{-50t} (A_1 \cos 296t + A_2 \sin 296t) + 296e^{-50t} (-A_1 \sin 296t + A_2 \cos 296t)$$

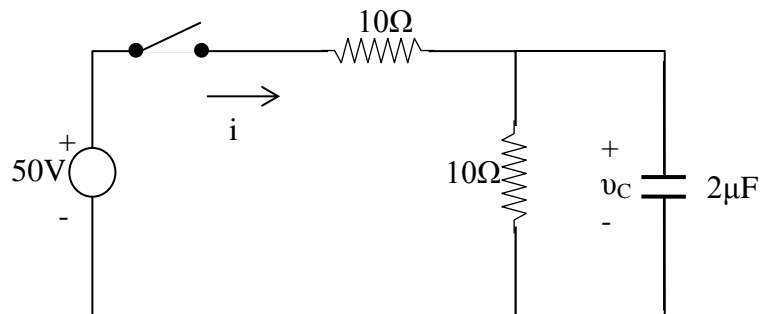
Για $t=0$ είναι $\frac{dv}{dt} = -\frac{V_o}{RC} = \omega_d A_2 - aA_1$.

Από την τελευταία σχέση προκύπτει: $A_2 = -4.22$.

Επομένως:

$$v = e^{-50t} (25 \cos 296t - 4.22 \sin 296t) \quad (V)$$

5) Στο κύκλωμα του σχήματος 8.11 ο διακόπτης κλείνει για $t=0$. Να υπολογιστούν το ρεύμα και η τάση v_C στα άκρα του πυκνωτή για $t>0$.



Σχήμα 8.11: Κύκλωμα άσκησης 5

Απάντηση:

Όσον αφορά στη φυσική απόκριση του κυκλώματος, οι δύο αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες παράλληλα. Επομένως:

$$\tau = R_{\sigma} C = 5\Omega \cdot 2\mu F = 10\mu s$$

Λόγω συνέχειας ισχύει η σχέση: $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$.

Επιπλέον καθώς $t \rightarrow \infty$ ο πυκνωτής γίνεται ανοιχτοκύκλωμα και τότε η αντίσταση των 20Ω θα είναι συνδεδεμένη σε σειρά με την πηγή τάσης των $50V$. Επομένως:

$$i(\infty) = \frac{50}{20} = 2.5A$$

$$v_C(\infty) = 2.5A \cdot 10\Omega = 25V$$

Για την τάση v_C προκύπτει:

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + v_C(\infty) = 25(1 - e^{-\frac{t}{10}}) \quad (V)$$

Όπου ο χρόνος t μετράται σε μs .

Το ρεύμα στον πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = 5e^{-\frac{t}{10}} \quad (A)$$

Το ρεύμα στην αντίσταση των 10Ω είναι:

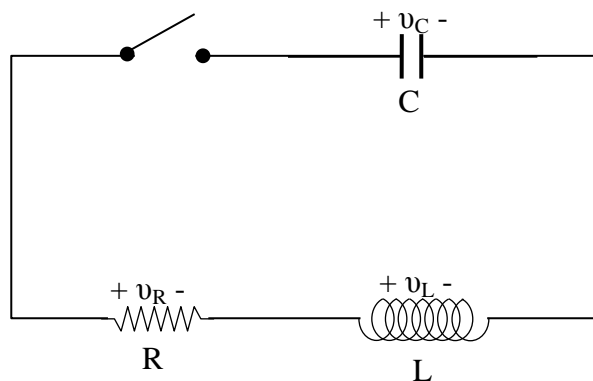
$$i_{10\Omega} = \frac{v_C}{10\Omega} = 2.5(1 - e^{-\frac{t}{10}}) \quad (A)$$

Επομένως:

$$i = i_C + i_{10\Omega} = 2.5(1 + e^{-\frac{t}{10}}) \quad (A)$$

Για εναλλακτικό τρόπο επίλυσης, ορίζονται ρεύματα βρόχων και στη συνέχεια επιλύονται οι διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν.

6) Στο κύκλωμα του σχήματος 8.12 είναι $R=6\Omega$, $L=1H$ και $C=0.2F$. Ο πυκνωτής φορτίζεται αρχικά στα $24V$ και ο διακόπτης κλείνει για $t=0$. Να υπολογιστεί το ρεύμα ένα δευτερόλεπτο αφού κλείσει ο διακόπτης.



Σχήμα 8.12: Κύκλωμα άσκησης 6

Απάντηση:

Εφαρμόζοντας το νόμο τάσεων Kirchhoff στο βρόχο του σχήματος 8.12 και αφού στη συνέχεια γίνει παραγωγή προκύπτει η σχέση:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 6\frac{di}{dt} + \frac{1}{0.2}i = 0$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες της εξίσωσης είναι οι -5 και -1. Επομένως η λύση θα είναι της μορφής:

$$i = A_1e^{-5t} + A_2e^{-t}$$

Από την αρχική συνθήκη $i(0^+) = 0$ προκύπτει: $A_1 + A_2 = 0$ ενώ από την αρχική συνθήκη $\frac{di}{dt} + 0 + 24 = 0$ προκύπτει: $\frac{di}{dt} = -24 \Leftrightarrow -5A_1 - A_2 = -24$.

Επομένως $A_1 = 6$ και $A_2 = -6$.

Η έκφραση για το ρεύμα είναι:

$$i = 6(e^{-5t} - e^{-t})$$

Για $t=1s$ το ρεύμα είναι:

$$i(1) = 6(e^{-5} - e^{-1}) = -2.17A$$

7) Να υπολογιστεί η σταθερά χρόνου του κυκλώματος του σχήματος 8.12 για το οποίο ισχύει: $R = 16\Omega$, $L = 2H$ και $C = 0.0122F$.

Απάντηση:

Θα είναι λάθος να θεωρηθεί η ποσότητα $\frac{L}{R}$ ή η ποσότητα RC ως η σταθερά χρόνου για το συγκεκριμένο κύκλωμα. Η σταθερά χρόνου υπολογίζεται με βάση τον παράγοντα a ως εξής: Εφαρμόζοντας το νόμο τάσεων Kirchhoff στο βρόχο του σχήματος 8.12 και αφού στη συνέχεια γίνει παραγωγή προκύπτει η σχέση:

$$2\frac{d^2i}{dt^2} + 16\frac{di}{dt} + \frac{1}{0.0122} = 0$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες της εξίσωσης είναι οι $s = -4 \pm j5$. Επομένως προκύπτει ότι

$$a = 4 \text{ και } \tau = \frac{1}{4} = 0.25s.$$

8) Να βρεθεί η έκφραση του ρεύματος για το κύκλωμα της άσκησης 7 αν $v_C(0^-) = 480V$.

Απάντηση:

Εφόσον οι χαρακτηριστικές ρίζες της εξίσωσης είναι μιγαδικές $s = -4 \pm j5$, το ρεύμα θα δίνεται από τη σχέση:

$$i = e^{-4t} (A_1 \cos 5t + A_2 \sin 5t)$$

Από την αρχική συνθήκη $i(0^+) = 0$ προκύπτει $A_1 = 0$ και ως εκ τούτου:

$$i = A_2 e^{-4t} \sin 5t$$

Επιπλέον ισχύει:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = -240 \Leftrightarrow A_2 [(1 \cdot 5 \cdot 1) + 0] = -240 \Leftrightarrow A_2 = -48$$

Επομένως:

$$i = -48e^{-4t} \sin 5t \quad (A)$$

9) α) Ποια είναι η τάση κατά μήκος του πηνίου του κυκλώματος της άσκησης 7 για $t=0.5s$; β) Ποια είναι η τάση κατά μήκος του πυκνωτή του κυκλώματος της άσκησης 7 για $t=0.5s$;

Απάντηση:

$$\alpha) v_L = L \frac{di}{dt} = 2 \frac{d}{dt} (-48e^{-4t} \sin 5t) = -96e^{-4t} (-4 \sin 5t + 5 \cos 5t) \quad (V)$$

Επομένως για $t=0.5s$:

$$v_L(0.5) = -96e^{-4 \cdot 0.5} [-4 \sin(5 \cdot 0.5) + 5 \cos(5 \cdot 0.5)] = 84.86V$$

β) Είναι:

$$v_C = -(v_R + v_L)$$

$$\text{Όπου } v_R = 16i = 16(-48e^{-4t} \sin 5t) \quad (V)$$

$$\text{Για } t=0.5s: v_R(0.5) = 16 \cdot (-3.89) = -62.24V$$

Επομένως:

$$v_C(0.5) = -(-62.24 + 84.86) = -22.62V$$

10) Για το κύκλωμα του σχήματος 8.12 ισχύουν: $R = 12\Omega$, $L = 1H$ και $C = 0.01F$. Να υπολογιστούν η σταθερά χρόνου και η έκφραση για το ρεύμα αν ο πυκνωτής έχει φορτιστεί αρχικά με 60V.

Απάντηση:

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η:

$$s^2 + 12s + \frac{1}{0.01} = 0$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες της εξίσωσης είναι οι $s = -6 \pm j8$. Επομένως προκύπτει ότι $a = 6$ και $\tau = \frac{1}{6} = 0.167s$.

Το ρεύμα θα δίνεται (όπως και στην άσκηση 8) από τη σχέση:

$$i = A_2 e^{-6t} \sin 8t$$

Επιπλέον ισχύει:

$$\frac{di}{dt} \Big|_{0^+} = -60 \Leftrightarrow A_2 \cdot 8 = -60 \Leftrightarrow A_2 = -\frac{60}{8} \Leftrightarrow A_2 = -7.5$$

Επομένως:

$$i = -7.5e^{-6t} \sin 8t \quad (A)$$

11) α) Ποια είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή της άσκησης 10 για $t=0.2s$; β) Να επαληθευτεί το αποτέλεσμα του ερωτήματος α με τη βοήθεια της σχέσης $v_C = -(v_R + v_L)$.

Απάντηση:

$$\alpha) v_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{-7.5}{0.01} \int (e^{-6t} \sin 8t) dt = -\frac{750}{100} [e^{-6t} (-6 \sin 8t - 8 \cos 8t)]$$

$$\text{Για } t=0.2s: v_C(0.2) = -\frac{750}{100} [e^{-6t} (-6 \sin 8t - 8 \cos 8t)]_{t=0.2} = 13.02V$$

β) Είναι:

$$v_L = L \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(-7.5e^{-6t} \sin 8t) = -7.5e^{-6t}(-6\sin 8t + 8\cos 8t) \quad (V)$$

Για $t=0.2s$: $v_L(0.2) = 14V$

Επίσης:

$$v_R = Ri = 12(-7.5e^{-6t} \sin 8t) \quad (V)$$

Για $t=0.2s$: $v_R(0.2) = -27.12V$

Επομένως:

$$v_C(0.2) = -[v_R(0.2) + v_L(0.2)] = 13.08V$$

Το αποτέλεσμα του ερωτήματος β συμφωνεί με το αποτέλεσμα του ερωτήματος α.

12) Για το κύκλωμα του σχήματος 8.12 ισχύουν: $R = 1\Omega$, $L = 2H$ και $C = 1F$. Να υπολογιστούν η σταθερά χρόνου και η έκφραση για το ρεύμα ύστερα από την πάροδο μίας σταθεράς χρόνου.

Απάντηση:

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η:

$$2s^2 + s + 1 = 0$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες της εξίσωσης είναι οι $s = -0.25 \pm j0.66$. Επομένως προκύπτει ότι $a = 0.25$ και $\tau = \frac{1}{0.25} = 4s$.

Το ρεύμα θα δίνεται (όπως και στην άσκηση 8) από τη σχέση:

$$i = A_2 e^{-0.25t} \sin 0.66t \quad (A)$$

Επιπλέον ισχύει:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = -50 \Leftrightarrow A_2 \cdot 0.66 = -50 \Leftrightarrow A_2 = -7.75$$

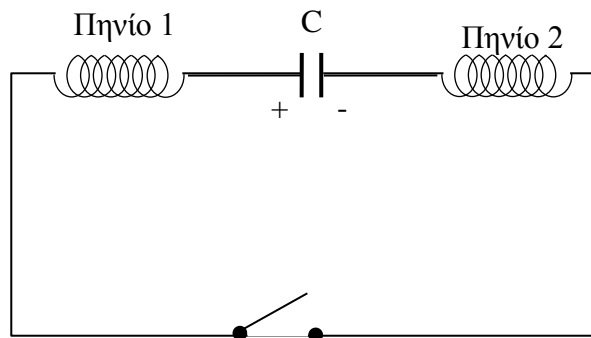
Επομένως:

$$i = -75.7e^{-0.25t} \sin 0.66t \quad (A)$$

Για $t=\tau=4s$:

$$i(4) = -75.7e^{-0.25 \cdot 4} \sin(0.66 \cdot 4) = -13.24A$$

13) Στο κύκλωμα του σχήματος 8.13 τα πηνία είναι μη ιδανικά και ως εκ τούτου θεωρείται ότι έχουν εσωτερική αντίσταση. Είναι $L_1 = 1.5H$, $R_{L_1} = 8\Omega$, $L_2 = 0.5H$, $R_{L_2} = 4\Omega$ και $C = \frac{1}{18}F$. Ο πυκνωτής φορτίζεται στα 100V. Να βρεθεί το ρεύμα 0.2s αφού κλείσει ο διακόπτης.



Σχήμα 8.13: Κύκλωμα άσκησης 13

Απάντηση:

Προφανώς το κύκλωμα του σχήματος 8.13 ανάγεται σε ένα απλό κύκλωμα RLC σειράς. Η χαρακτηριστική εξίσωση προκύπτει: $2s^2 + 12s + 18 = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει δύο ίσες ρίζες $s = -3$. Η λύση ως εκ τούτου θα έχει τη μορφή:

$$i = A_1 e^{-3t} + A_2 t e^{-3t}$$

Από την αρχική συνθήκη $i(0^+) = 0$ προκύπτει: $A_1 = 0$ οπότε $i = A_2 t e^{-3t}$

$$\text{Επίσης: } \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{V}{L} - \frac{100}{2} = -50 = A_2$$

$$\text{Επομένως: } i = -50t e^{-3t} \quad (A)$$

$$\text{Για } t=0.2s: \quad i(0.2) = -50 \cdot 0.2 e^{-3 \cdot 0.2} = -5.49A$$

14) Ποια είναι η τάση κατά μήκος του δεύτερου πηνίου στο κύκλωμα του σχήματος 8.13 για $t=0.2s$;

Απάντηση:

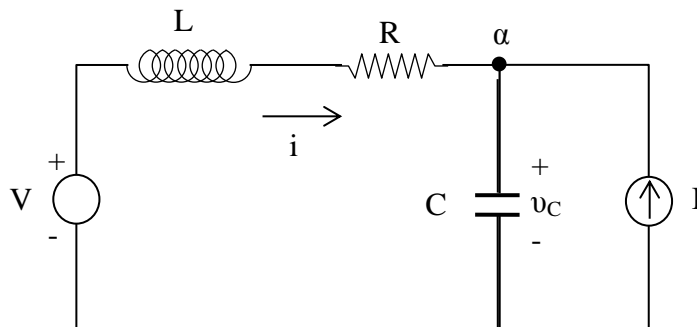
Είναι:

$$\begin{aligned} v_{L_2} &= L_2 \frac{di}{dt} + R_{L_2} i = 0.5 \cdot (-50) \frac{d}{dt}(te^{-3t}) - 4 \cdot 50 \cdot te^{-3t} = -25(1-3t)e^{-3t} - 200te^{-3t} = \\ &= -e^{-3t}(25+125t) \quad (V) \end{aligned}$$

Για $t=0.2s$:

$$v_{L_2}(0.2) = -e^{-3 \cdot 0.2}(25 + 125 \cdot 0.2) = -27.44V$$

15) Να γραφεί η διαφορική εξίσωση και οι αρχικές συνθήκες για το ρεύμα i του κυκλώματος του σχήματος 8.14 αν η πηγή τάσης V και η πηγή ρεύματος I συνδέονται στο κύκλωμα για $t=0$. Δίνεται ότι για $t=0^-$ ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος και το πηνίο είναι απενεργοποιημένο.



Σχήμα 8.14: Κύκλωμα άσκησης 15

Απάντηση:

Για $t>0$, η εφαρμογή του νόμου ρευμάτων του Kirchhoff στον κόμβο α δίνει:

$$i - C \frac{dv_C}{dt} + I = 0$$

Η εφαρμογή του νόμου τάσεων του Kirchhoff στον αριστερό βρόχο δίνει:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v_C - V = 0$$

Από τις δύο παραπάνω εξισώσεις απαλείφεται ο όρος $\frac{dv_C}{dt}$ (ύστερα από την παραγωγή της δεύτερης εξίσωσης). Ως αποτέλεσμα προκύπτει η διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = -\frac{V}{C}$$

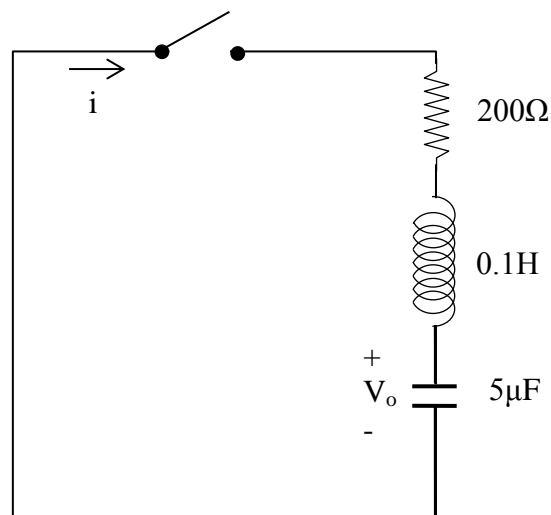
Η τάση του πυκνωτή και το ρεύμα του πηνίου πρέπει να είναι συνεχή για $t=0$. Επομένως οι αρχικές συνθήκες θα είναι:

$$i(0) = 0 \text{ και}$$

$$L \left. \frac{di}{dt} \right|_0 = V$$

8.6. Άλυτες ασκήσεις

8.1) Στο RLC κύκλωμα του σχήματος 8.15, η αρχική τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι $V_0 = 200V$. Να υπολογιστεί το μεταβατικό ρεύμα αφού κλείσει ο διακόπτης για $t=0$.



Σχήμα 8.15: Κύκλωμα RLC άσκησης 8.1

(Απάντηση: $-2e^{-1000t} \sin 1000t$ (A))

8.2) Ένα κύκλωμα RLC σειράς με $R=200\Omega$, $L=0.1H$ και $C=100\mu F$, έχει μία σταθερή πηγή τάσης $V=200V$ η οποία εφαρμόζεται στο κύκλωμα για $t=0$. Να υπολογιστεί το μεταβατικό ρεύμα αν ο πυκνωτής δεν έχει αρχικό φορτίο.

(Απάντηση: $1.055(e^{-52t} - e^{-1948t})$ (A))

8.3) Ποια τιμή πρέπει πάρει η χωρητικότητα του πυκνωτή ($100\mu F$) της άσκησης 8.2, έτσι ώστε το κύκλωμα να εκτελεί κρίσιμα αποσβεννυόμενη ταλάντωση;

(Απάντηση: $10\mu F$)

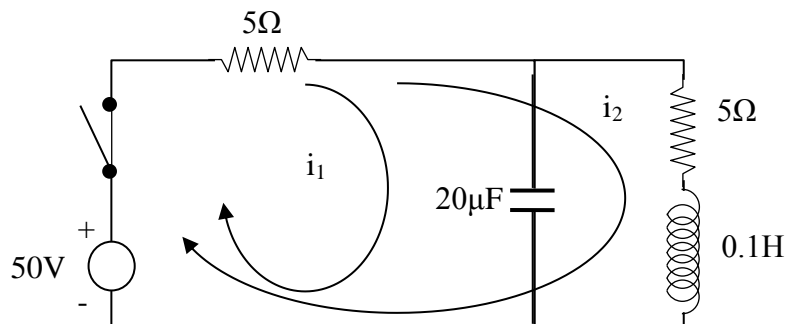
8.4) Να βρεθεί το μέγεθος $\beta = \sqrt{a^2 - \omega_0^2}$ για ένα κύκλωμα RLC σειράς με $R=200\Omega$, $L=0.1H$ και $C=5\mu F$.

(Απάντηση: $1000rad/s$)

8.5) Μία πηγή τάσης $10V$ εφαρμόζεται για $t=0$ σε ένα κύκλωμα RLC σειράς με $R=5\Omega$, $L=0.1H$ και $C=500\mu F$. Να βρεθεί η έκφραση της μεταβατικής τάσης κατά μήκος της αντίστασης.

(Απάντηση: $3.6e^{-25t} \sin 139t$ (V))

8.6) Στο κύκλωμα δύο βρόχων του σχήματος 8.16, ο διακόπτης κλείνει για $t=0$. Να υπολογιστούν τα i_1 και i_2 για $t>0$.



Σχήμα 8.16: Κύκλωμα άσκησης 8.6

(Απάντηση: $i_1 = 0.101e^{-100t} + 9.899e^{-9950t}$ (A),
 $i_2 = -5.05e^{-100t} + 5 + 0.05e^{-9950t}$ (A))

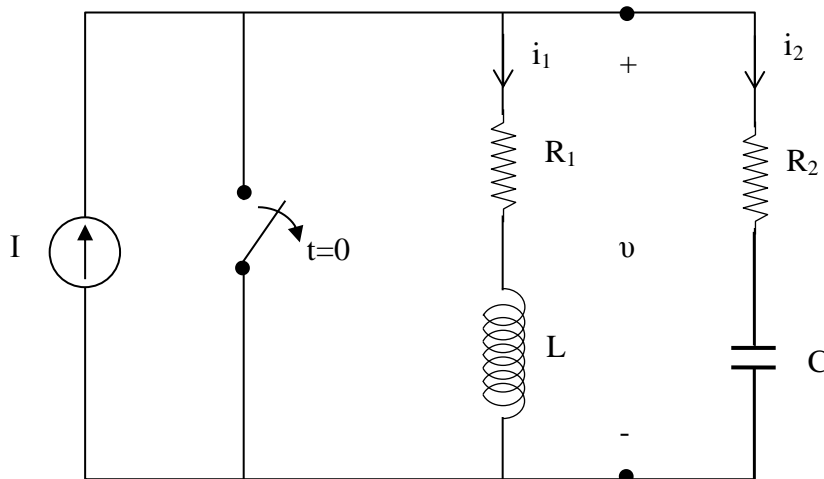
8.7) Ένα κύκλωμα RLC σειράς εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση (underdamped). Αν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν και ο διακόπτης κλείνει για $t=0$, να βρεθεί η έκφραση για την τάση κατά μήκος του πυκνωτή.

(Απάντηση: $v_C(t) = V[1 - \frac{e^{-at}}{\sin\phi} \sin(|\beta|t + \phi)]$, όπου $\cos\phi = \frac{a}{\omega_0}$)

8.8) Για το κύκλωμα της άσκησης 8.7 να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία η τάση του πυκνωτή γίνεται μέγιστη. Ποια είναι η τιμή της μέγιστης τάσης;

(Απάντηση: Για $t = \frac{\pi}{|\beta|}$: $v_{C,max}(\frac{\pi}{|\beta|}) = V(1 + e^{-\pi \cos\phi})$)

8.9) Στο κύκλωμα του σχήματος 8.17 ο διακόπτης ανοίγει για $t=0$. Όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν. Να γραφεί η διαφορική εξίσωση για την τάση v καθώς επίσης και οι αρχικές συνθήκες για τον υπολογισμό των σταθερών της εξίσωσης.



Σχήμα 8.17: Κύκλωμα άσκησης 8.9

(Απάντηση: $L \frac{dv^2}{dt^2} + (R_1 + R_2) \frac{dv}{dt} + \frac{1}{C}v = \frac{R_1 I}{C}$, $v(0^+) = R_2 I$, $\frac{dv}{dt}|_{0^+} = \left(\frac{1}{C} - \frac{R_2^2}{L}\right)I$)

8.10) Σε ένα κύκλωμα RLC σειράς με $R = 1\Omega$, $L = 2H$, $C = 200\mu F$ και $V = 50V$ να υπολογιστεί το ρεύμα i για $t=0.5s$.

(Απάντηση: $i(0.5) = -0.058A$)

8.11) Να υπολογιστούν α) η τάση κατά μήκος του πηνίου για το κύκλωμα της άσκησης 8.10 και για $t=0.5s$ και β) η αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή.

(Απάντηση: α) $v_C(0.5) = 6.47V$, β) $4.186mJ$)

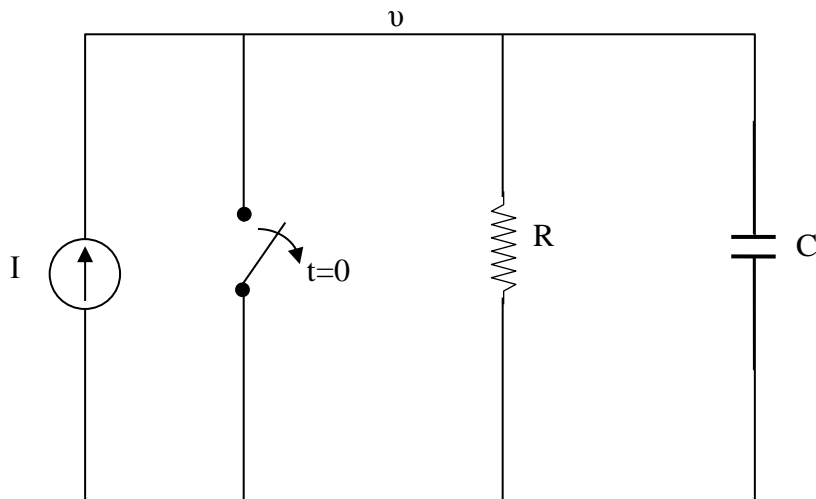
8.12) Σε ένα κύκλωμα RLC σειράς με $R = 100\Omega$, $L = 5H$, $C = 184\mu F$ και $V = 470V$ να βρευπολογιστεί το ρεύμα i για $t=0.01s$.

(Απάντηση: $i(0.01) = 0.836A$)

8.13) Να υπολογιστεί η στιγμιαία ισχύς για καθένα ένα από τα στοιχεία R, L, C του κυκλώματος της άσκησης 8.12.

(Απάντηση: $p_R = 895e^{-20t} \sin^2 31.42t$ (W),
 $p_L = 1405e^{-20t} (\sin 31.42t)(\cos 31.42t) - 447e^{-20t} \sin^2 31.42t$ (W),
 $p_C = -1404.8e^{-20t} (\sin 31.42t)(\cos 31.42t) - 447e^{-20t} \sin^2 31.42t$ (W))

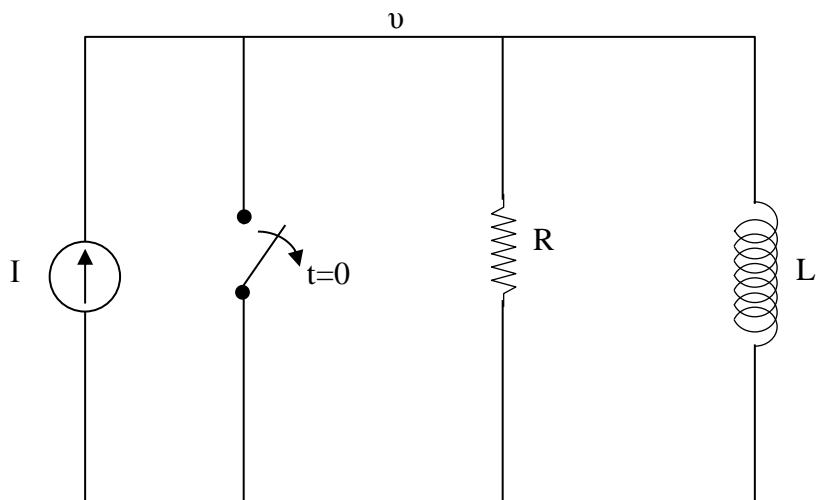
8.14) Για το κύκλωμα του σχήματος 8.18 να υπολογιστεί η συνθήκη $\frac{d^2v}{dt^2}(0^+)$.



Σχήμα 8.18: Κύκλωμα άσκησης 8.14

(Απάντηση: $\frac{d^2v}{dt^2}(0^+) = -\frac{1}{RC^2}$ (V/s²))

8.15) Για το κύκλωμα του σχήματος 8.19 να υπολογιστεί η συνθήκη $\frac{d^2v}{dt^2}(0^+)$.



Σχήμα 8.19: Κύκλωμα άσκησης 8.15

$$(Απάντηση: \frac{d^2v}{dt^2}(0^+) = -\frac{IR^3}{L^2} \text{ (V/s}^2\text{)})$$

Κεφάλαιο 9: Ανάλυση Μεταβατικών Φαινομένων σε ηλεκτρικά κυκλώματα με τη χρήση Μετασχηματισμού Laplace

9.1. Εισαγωγή

Η σχέση μεταξύ της απόκρισης $y(t)$ και της διέγερσης $x(t)$ σε ένα κύκλωμα RLC είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_j y^{(j)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m x^{(m)} + \dots + b_i x^{(i)} + \dots + b_1 x^{(1)} + b_0 x \quad (9.1)$$

Όπου $y^{(j)}$ και $x^{(i)}$ είναι j-οστή και η i-οστή παράγωγος της απόκρισης $y(t)$ και της διέγερσης $x(t)$ αντίστοιχα. Αν οι τιμές των στοιχείων του κυκλώματος είναι σταθερές οι αντίστοιχοι συντελεστές a_j και b_i της διαφορικής εξίσωσης θα είναι επίσης σταθερές. Στα κεφάλαια για τη μεταβατική απόκριση κυκλωμάτων πρώτης και δεύτερης τάξης στο πεδίο του χρόνου, η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης που προέκυπτε για κάθε κύκλωμα, προέκυπτε με την εύρεση της γενικής λύσης (complementary function) και της ειδικής λύσης (particular solution).

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετηθεί η επίλυση κυκλωμάτων πρώτης και δεύτερης τάξης με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace. Μέσω του μετασχηματισμού Laplace εξετάζονται περιπτώσεις διαφόρων διεγέρσεων και όχι μόνο διεγέρσεων εκθετικής μορφής. Στην περίπτωση σύνθετης διέγερσης η απόκριση υπολογίζεται με επαλληλία.

9.2. Η μιγαδική μεταβλητή $\overset{\circ}{s} = \sigma + j\omega$

Στην ενότητα αυτή εισάγεται η έννοια της μιγαδικής μεταβλητής $\overset{\circ}{s}$. Έστω μία διέγερση εκθετικής μορφής $Ae^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$. Τότε σύμφωνα με την ταυτότητα του Euler $e^{j(\omega t + \phi)} = \cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi)$ η εκθετική συνάρτηση γράφεται:

$$Ae^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) = Ae^{j\phi} e^{(\sigma + j\omega)t} = Ae^{j\phi} \overset{\circ}{e}^{\overset{\circ}{s}t} \quad \text{όπου } \overset{\circ}{s} = \sigma + j\omega$$

Η μιγαδική μεταβλητή $\overset{\circ}{s}$ έχει μονάδες s^{-1} ενώ η συχνότητα ω έχει μονάδες rad/s . Επομένως και η ποσότητα σ έχει επίσης μονάδες s^{-1} .

9.3. Μετασχηματισμός Laplace

Έστω $f(t)$ μία συνάρτηση η οποία είναι μηδέν για $t \leq 0$ και είναι ορισμένη αυθαίρετα με βάση κάποιες συνθήκες για $t > 0$. Ο ευθύς μετασχηματισμός Laplace

(direct Laplace transform) της συνάρτησης $f(t)$ συμβολίζεται με $L[f(t)]$ και ορίζεται ως:

$$L[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (9.2)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace $L[\]$ μετασχηματίζει τη συνάρτηση $f(t)$ από το πεδίο του χρόνου, στο πεδίο μιας μιγαδικής μεταβλητής $\overset{\circ}{s}$, όπου $\overset{\circ}{s} = \sigma + j\omega$. Η συνάρτηση τότε γράφεται ως $F(\overset{\circ}{s})$. Παρόλο που ο μετασχηματισμός φαίνεται δύσκολος, ουσιαστικά διευκολύνει την ανάλυση κυκλωμάτων πρώτης και δεύτερης τάξης.

Αν δύο συναρτήσεις $f_1(t)$ και $f_2(t)$ έχουν την ίδια εικόνα στο πεδίο της μιγαδικής μεταβλητής $\overset{\circ}{s}$ (δηλαδή ισχύει $F_1(\overset{\circ}{s}) = F_2(\overset{\circ}{s})$) τότε θα ισχύει και $f_1(t) = f_2(t)$. Η ιδιότητα αυτή (γραμμικότητα) επιτρέπει και τον αντίστροφο μετασχηματισμό, από το πεδίο $\overset{\circ}{s}$ στο πεδίο του χρόνου δηλαδή. Ο μετασχηματισμός αυτός ονομάζεται αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace (inverse Laplace transform) και συμβολίζεται ως: $L^{-1}[F(\overset{\circ}{s})] = f(t)$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace εκφράζεται και ως ολοκλήρωμα ως εξής:

$$L^{-1}[F(\overset{\circ}{s})] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(\overset{\circ}{s})e^{\overset{\circ}{s}t} d\overset{\circ}{s} \quad (9.3)$$

Ο ευθύς μετασχηματισμός Laplace ενός φυσικού μεγέθους εισάγει μία επιπλέον μονάδα χρόνου στο αποτέλεσμα. Για παράδειγμα αν $i(t)$ είναι ένα ρεύμα στο πεδίο του χρόνου, τότε η μονάδα του είναι το A . Αν όμως γίνει μετασχηματισμός Laplace στο ρεύμα τότε θα προκύψει η συνάρτηση $I(\overset{\circ}{s})$ η οποία έχει μονάδες $A \cdot s$.

9.4. Παραδείγματα μετασχηματισμών Laplace

Η μιγαδική μεταβλητή $\overset{\circ}{s} = \sigma + j\omega$ θα συμβολίζεται για συντομία με s . Στη συνέχεια υπολογίζονται οι μετασχηματισμοί Laplace για διάφορες γνωστές συναρτήσεις:

- Ο μετασχηματισμός Laplace μιας μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης είναι:

$$L[u(t)] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Λόγω της γραμμικότητας που παρουσιάζει ο μετασχηματισμός Laplace, προκύπτει ότι αν η συνάρτηση της τάσης είναι $v(t) = Vu(t)$ στο πεδίο του χρόνου, τότε η τάση στο s - πεδίο είναι: $V(s) = \frac{V}{s}$.

- Ο μετασχηματισμός Laplace μιας εκθετικής φθίνουσας συνάρτησης είναι:

$$L[Ae^{-at}] = \int_0^{\infty} Ae^{-at} \cdot e^{-st} dt = -\frac{A}{A+s} [e^{-(a+s)t}]_0^{\infty} = \frac{A}{s+a}$$

Ο αντίστροφος του μετασχηματισμού Laplace της εκθετικής συνάρτησης είναι:

$$L^{-1}\left[\frac{A}{s+a}\right] = Ae^{-at}$$

- Ο μετασχηματισμός Laplace μιας ημιτονοειδούς συνάρτησης είναι:

$$L[\sin \omega t] = \int_0^{\infty} (\sin \omega t) \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{-s(\sin \omega t)e^{-st} - e^{-st}\omega \cos \omega t}{s^2 + \omega^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- Ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου μιας συνάρτησης $f(t)$ είναι:

$$\begin{aligned} L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = [e^{-st} f(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \cdot (-se^{-st}) dt = \\ &= -f(0^+) + s \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = -f(0^+) + sF(s) \end{aligned}$$

Στον πίνακα 9.1 φαίνονται οι μετασχηματισμοί Laplace διαφόρων συναρτήσεων ενώ στον πίνακα 9.2 φαίνονται κάποιες γενικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.

	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$ (μοναδιαία ώθηση)	1
2	1 ή $u(t)$ (μοναδιαία βηματική)	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{(n-1)!}{(s+a)^n}$
8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
9	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
10	$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
12	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
13	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega^2}$
14	$te^{-at} \sin \omega t$	$\frac{2\omega(s+a)}{[(s+a)^2 + \omega^2]^2}$
15	$te^{-at} \cos \omega t$	$\frac{(s+a)^2 - \omega^2}{[(s+a)^2 + \omega^2]^2}$
16	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
17	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$

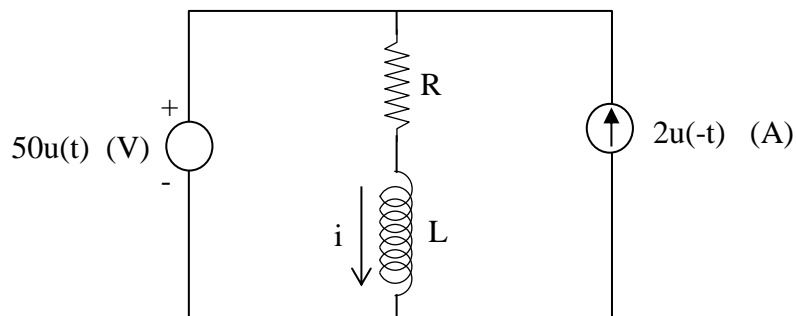
Πίνακας 9.1: Μετασχηματισμοί Laplace διαφόρων συναρτήσεων

	Πεδίο του χρόνου	s - πεδίο
1	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^+)$
2	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
3	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} \frac{df}{dt}(0^+) - s^{n-2} \frac{d^2 f}{dt^2} - \dots - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0^+)$
4	$f(t-t_1)$	$e^{-t_1 s} F(s)$
5	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
6	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$	$F_1(s) F_2(s)$
7	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
8	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
9	$f(t)e^{-at}$	$F(s+a)$

Πίνακας 9.2: Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

Παράδειγμα 9.1

Έστω ένα RL κύκλωμα όπως αυτό του σχήματος 9.1 με $R = 5\Omega$ και $L = 2.5mH$. Για $t=0$, όταν το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι 2A, εφαρμόζεται στο κύκλωμα μία πηγή 50V. Να βρεθεί η συνάρτηση του ρεύματος με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace.



Σχήμα 9.1: Κύκλωμα παραδείγματος 9.1

Απάντηση:

Αρχικά εφαρμόζεται ο νόμος τάσεων του Kirchhoff στο κύκλωμα για $t>0$, οπότε προκύπτει η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = v$$

Η παραπάνω εξίσωση μετασχηματίζεται από όρο σε όρο σε μία εξίσωση του s -πεδίου:

$$RI(s) + L[-i(0^+) + sI(s)] = V(s) \Leftrightarrow 5I(s) + 2.5 \cdot 10^{-3}[-2 + sI(s)] = \frac{50}{s}$$

Με αυτόν τον τρόπο το άγνωστο ρεύμα $i(t)$ μετασχηματίζεται σε $I(s)$, ενώ η γνωστή τάση $v = 50u(t)$ μετασχηματίζεται σε $\frac{50}{s}$. Επίσης η παράγωγος $\frac{di}{dt}$ μετασχηματίζεται σε $-i(0^+) + sI(s)$, όπου $-i(0^+) = 2A$.

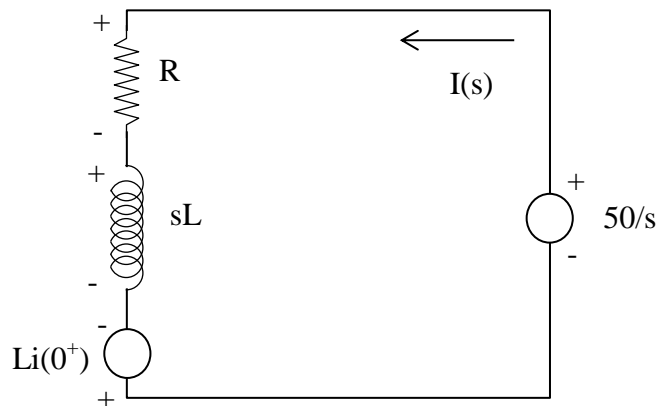
Στη συνέχεια η εξίσωση $5I(s) + 2.5 \cdot 10^{-3}[-2 + sI(s)] = \frac{50}{s}$ επιλύεται ως προς $I(s)$:

$$I(s) = \frac{10}{s} + \frac{-8}{s+2000}$$

Τέλος υπολογίζεται ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του $I(s)$:

$$L^{-1}[I(s)] = 10L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + (-8)10L^{-1}\left[\frac{1}{s+2000}\right] \Leftrightarrow i(t) = 10 - 8e^{-2000t}$$

Το κύκλωμα του σχήματος 9.1 σχεδιάζεται ξανά στο s -πεδίο αυτή τη φορά στο σχήμα 9.2. Το αρχικό ρεύμα εμφανίζεται στο κύκλωμα ως πηγή τάσης $Li(0^+)$.



Σχήμα 9.2: Κύκλωμα παραδείγματος 9.1 στο s -πεδίο

9.5. Σύγκλιση του ολοκληρώματος

Για να ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace, θα πρέπει το ολοκλήρωμα $L[f(t)] = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ να συγκλίνει. Με βάση αυτή τη συνθήκη, οι τιμές που είναι

δυνατό να πάρει η μιγαδική μεταβλητή $s = \sigma + j\omega$ περιορίζονται σε μία περιοχή σύγκλισης (convergence region) όπως ονομάζεται. Για παράδειγμα ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $x(t) = e^{-at}u(t)$ είναι $\frac{1}{s+a}$. Η περιοχή σύγκλισης είναι: $\text{Re}[s] > -a$.

Παράδειγμα 9.2

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $x(t) = 3e^{2t}u(t)$ όπως επίσης και η περιοχή σύγκλισης.

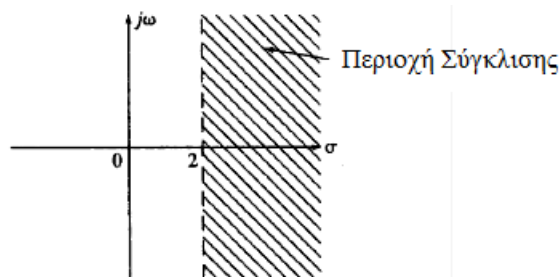
Απάντηση:

Είναι:

$$X(s) = \int_0^{\infty} 3e^{2t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 3e^{-(s-2)t} dt = \frac{3}{s-2} [e^{-(s-2)t}]_0^{\infty} = \frac{3}{s-2}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι $\text{Re}[s] > 2$

Στο σχήμα 9.3 είναι σχεδιασμένη η περιοχή σύγκλισης στο μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα 9.3: Περιοχή σύγκλισης παραδείγματος 9.2 σχεδιασμένη στο μιγαδικό επίπεδο

9.6. Θεώρημα αρχικής τιμής και θεώρημα τελικής τιμής

Αρχικά θεωρείται το όριο $s \rightarrow \infty$ του μετασχηματισμού Laplace της παραγώγου μιας συνάρτησης $f(t)$. Δηλαδή:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^+)]$$

Όμως ο εκθετικός όρος e^{-st} πλησιάζει την τιμή μηδέν καθώς $s \rightarrow \infty$. Επομένως:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^+)] = 0$$

Επιπλέον επειδή ο όρος $f(0^+)$ είναι μία σταθερά, γράφεται η σχέση:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί το θεώρημα αρχικής τιμής.

Παράδειγμα 9.3

Να εφαρμοστεί το θεώρημα αρχικής τιμής στο παράδειγμα 9.2.

Απάντηση:

Είναι:

$$i(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sI(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[10 - \frac{8s}{s + 2000} \right] = 10 - 8 = 2$$

Η τιμή επαληθεύεται γιατί από την εκφώνηση του παραδείγματος 9.2 δίνεται ότι $i(0^+) = 2A$.

Το θεώρημα τελικής τιμής προκύπτει επίσης από το μετασχηματισμό Laplace της παραγώγου, με τη διαφορά ότι τώρα υπολογίζεται το όριο για $s \rightarrow 0$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^+)]$$

Όμως:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} df(t) = f(\infty) - f(0^+)$$

Ο όρος $f(0^+)$ είναι μία σταθερά επομένως:

$$f(\infty) - f(0^+) = -f(0^+) + \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] \Leftrightarrow f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί το θεώρημα τελικής τιμής.

Το θεώρημα τελικής τιμής δεν είναι δυνατό να εφαρμοστεί στις συναρτήσεις e^t και $\cos t$, γιατί οι συναρτήσεις αυτές γίνονται άπειρες καθώς $t \rightarrow \infty$.

9.7. Ανάπτυξη ρητής συνάρτησης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων

Για την ανάλυση κυκλωμάτων με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace χρησιμοποιείται η μέθοδος της ανάλυσης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων. Έστω μία ρητή συνάρτηση $R(s)$ η οποία γράφεται στη μορφή:

$$R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

όπου το πολυώνυμο $Q(s)$ στον παρανομαστή είναι μεγαλύτερου βαθμού από το πολυώνυμο $P(s)$ στον αριθμητή. Επιπλέον η συνάρτηση $R(s)$ είναι πραγματική για πραγματικές τιμές του s .

Στη μέθοδο ανάλυσης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων (partial-fractions expansion), η συνάρτηση $R(s)$ αναλύεται σε ένα άθροισμα πιο απλών ρητών συναρτήσεων με τη βοήθεια των ριζών του παρανομαστή $Q(s)$.

Ανάλογα με το είδος των ριζών του $Q(s)$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Όταν το $Q(s) = 0$ έχει μία ρίζα a , δηλαδή ισχύει $s = a$. Τότε η συνάρτηση $R(s)$ γράφεται:

$$\frac{A}{s-a} \text{ όπου } A = \lim_{s \rightarrow a} [(s-a)R(s)]$$

Αν η ρίζα a είναι πραγματική τότε και το A θα είναι πραγματικός αριθμός.

- Όταν το $Q(s) = 0$ έχει μία διπλή ρίζα b , δηλαδή ισχύει $s = b$. Τότε η συνάρτηση $R(s)$ γράφεται:

$$\frac{B_1}{s-b} + \frac{B_2}{(s-b)^2}$$

Όπου οι σταθερές B_1 και B_2 δίνονται από τις σχέσεις:

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow b} [(s-b)^2 R(s)] \text{ και } B_1 = \lim_{s \rightarrow b} \left\{ (s-b) \left[R(s) - \frac{B_2}{(s-b)^2} \right] \right\}$$

Η σταθερά B_1 είναι δυνατό να είναι μηδέν. Αν η ρίζα b είναι πραγματικός αριθμός τότε και οι σταθερές B_1 και B_2 είναι πραγματικοί αριθμοί.

Η μέθοδος της ανάλυσης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων βοηθάει στην επίλυση κυκλωμάτων καθώς μόλις η συνάρτηση $R(s)$ αναλυθεί σε κλάσματα, κάθε κλάσμα με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μετασχηματίζεται με τη βοήθεια του πίνακα 9.1 και με αυτό τον τρόπο προκύπτει η ζητούμενη συνάρτηση $r(t)$ στο πεδίο του χρόνου.

Παράδειγμα 9.4

Να βρεθεί η συνάρτηση του ρεύματος $i(t)$ στο πεδίο του χρόνου αν ο μετασχηματισμός Laplace της είναι: $I(s) = \frac{s-10}{s^4+s^2}$.

Απάντηση:

Αρχικά παραγωγίζεται ο παρανομαστής:

$$I(s) = \frac{s-10}{s^4+s^2} = \frac{s-10}{s^2(s-j)(s+j)}$$

Οι ρίζες του παρανομαστή είναι οι: $s = 0$ (διπλή ρίζα) και οι $s = \pm j$ (απλές ρίζες).

- Επομένως για $s = 0$ είναι:

$$\frac{B_1}{s-0} + \frac{B_2}{(s-0)^2} = \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{10}{s^2}$$

αφού:

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{(s-10)}{(s-j)(s+j)} \right] = -10 \text{ και}$$

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \left[\frac{s-10}{s^2(s^2+1)} + \frac{10}{s^2} \right] \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{10s+1}{s^2+1} \right) = 1$$

- Για $s = +j$ είναι:

$$\frac{A}{s-j} = -\frac{0.5+j5}{s-j}$$

Αφού

$$A = \lim_{s \rightarrow j} \left[\frac{(s-10)}{s^2(s+j)} \right] = -(0.5+j5)$$

- Για $s = -j$ είναι:

$$\frac{A}{s+j} = -\frac{0.5-j5}{s+j}$$

Αφού

$$A = \lim_{s \rightarrow -j} \left[\frac{(s-10)}{s^2(s-j)} \right] = -(0.5-j5)$$

Επομένως η συνάρτηση $I(s)$ γράφεται συνολικά ως άθροισμα κλασμάτων ως εξής:

$$I(s) = \frac{1}{s} - 10 \frac{1}{s^2} - (0.5+j5) \frac{1}{s-j} - (0.5-j5) \frac{1}{s+j}$$

Με τη βοήθεια του πίνακα 9.1 υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace για κάθε όρο της παραπάνω συνάρτησης:

$$i(t) = 1 - 10t - (0.5+j5)e^{jt} - (0.5-j5)e^{-jt} = 1 - 10t - (\cos t - 10\sin t)$$

9.8. Θεώρημα Heaviside

Αν όλες οι ρίζες της συνάρτησης $R(s)$ είναι απλές, τότε ο υπολογισμός των επιμέρους κλασμάτων και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace, είναι εύκολο να γραφούν σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$L^{-1} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t} \quad (9.4)$$

Όπου a_1, a_2, \dots, a_n είναι οι ρίζες και $Q'(a_k) = \left. \frac{dQ(s)}{ds} \right|_{s=a_k}$

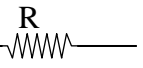
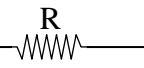
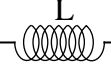

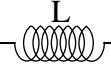

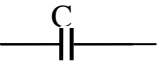
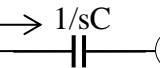
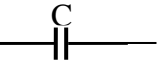
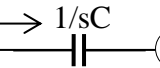
9.9. Κυκλώματα στο s - πεδίο

Στην ενότητα αυτή εξετάζεται η μετατροπή ενός κυκλώματος από το πεδίο του χρόνου στο s - πεδίο. Στον πίνακα 9.3 παρατίθενται οι μετατροπές στοιχείων από το πεδίο του χρόνου στο s - πεδίο. Οι τρεις πρώτες γραμμές του πίνακα προκύπτουν από την ανάλυση που έγινε στο παράδειγμα 9.1. Αντίστοιχα για ένα πυκνωτή ισχύει για $t > 0$:

$$v_c(t) = V_o + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Επομένως με τη βοήθεια του πίνακα 9.1 προκύπτει:

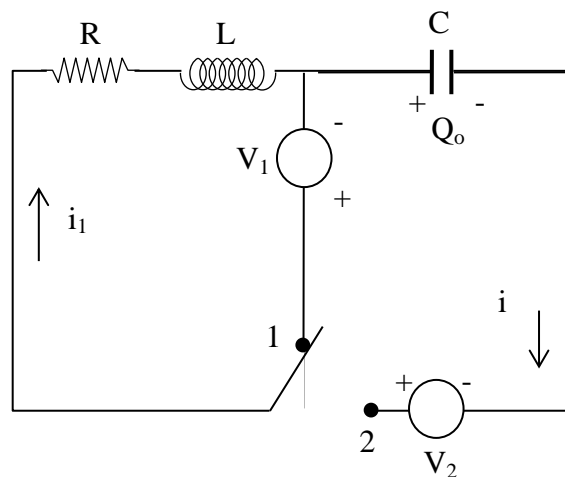
$$V_C(s) = \frac{V_o}{s} + \frac{I(s)}{Cs}$$

Πεδίο του χρόνου	s - πεδίο	Όρος της τάσης στο s - πεδίο
$i \rightarrow$ 	$I(s) \rightarrow$ 	$RI(s)$
$i \rightarrow$  $\rightarrow i(0^+)$	$I(s) \rightarrow$  $\text{Li}(0^+)$	$sLI(s) + Li(0^+)$
$i \rightarrow$  $\leftarrow i(0^+)$	$I(s) \rightarrow$  $\text{Li}(0^+)$	$sLI(s) + Li(0^+)$
$i \rightarrow$  $+ V_o -$	$I(s) \rightarrow$  V_o/s	$I(s)/sC + V_o/s$
$i \rightarrow$  $- V_o +$	$I(s) \rightarrow$  V_o/s	$I(s)/sC - V_o/s$

Πίνακας 9.3: Μετατροπές στοιχείων από το πεδίο του χρόνου στο s - πεδίο.

Παράδειγμα 9.5

Το κύκλωμα του σχήματος 9.4 διαρρέει ένα αρχικό ρεύμα $i_1(t)$ όταν ο διακόπτης είναι στη θέση 1. Για $t=0$ ο διακόπτης μετακινείται στη θέση 2 και ως εκ τούτου συνδέονται στο κύκλωμα ένας πυκνωτής με αρχικό φορτίο Q_o και μία πηγή τάσης V_2 . Να σχεδιαστεί το κύκλωμα στο s - πεδίο.



Σχήμα 9.4: Κύκλωμα παραδείγματος 9.5

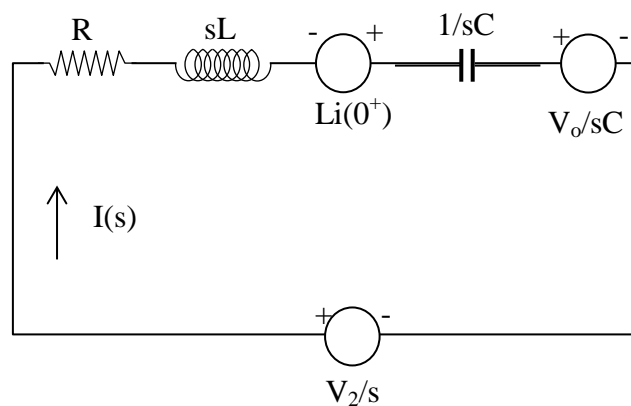
Απάντηση:

Στο s - πεδίο η εξίσωση του κυκλώματος είναι η εξής:

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) + \frac{I(s)}{sC} + \frac{V_o}{sC} = \frac{V_2}{s}$$

Όπου $V_o = \frac{Q_o}{C}$ και $i(0^+) = i_1 = \frac{V_1}{R}$.

Το κύκλωμα στο s - πεδίο φαίνεται στο σχήμα 9.5.



Σχήμα 9.5: Κύκλωμα παραδείγματος 9.5 στο s - πεδίο

Παράδειγμα 9.6

Να υπολογιστεί το ρεύμα που αναπτύσσεται σε ένα κύκλωμα RLC σειράς αν για $t=0$ συνδέεται στο κύκλωμα α) μία μοναδιαία βηματική συνάρτηση, β) μία μοναδιαία ώθηση.

Απάντηση:

Το πηνίο και ο πυκνωτής περιέχουν μηδενική ενέργεια για $t=0^-$. Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace για το ρεύμα είναι: $I(s) = V(s)Y(s)$.

α) Ισχύει: $V(s) = \frac{1}{s}$ λόγω της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης και επιπλέον:

$$I(s) = \frac{1}{s} \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1}{L} \frac{1}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

$$i(t) = \frac{1}{L\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) u(t)$$

$$\text{Όπου } \sigma = \frac{R}{2L} \text{ και } \omega_d = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

β) Ισχύει: $V(s) = 1$ λόγω της μοναδιαίας ώθησης και επιπλέον:

$$I(s) = \frac{1}{L} \frac{1}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

$$i(t) = \frac{1}{L\omega_d} e^{-\sigma t} [\omega_d \cos(\omega_d t) - \sigma \sin(\omega_d t)] u(t)$$

Η απόκριση στη μοναδιαία ώθηση εναλλακτικά μπορεί να υπολογιστεί από την παράγωγο της απόκρισης στη μοναδιαία βηματική συνάρτηση.

Παράδειγμα 9.7

Να υπολογιστεί σε ένα κύκλωμα RLC με παράλληλα στοιχεία η τάση κατά μήκος των στοιχείων αν για $t=0$ συνδέεται στο κύκλωμα α) μία μοναδιαία βηματική συνάρτηση, β) μία μοναδιαία ώθηση.

Απάντηση:

Το πηνίο και ο πυκνωτής περιέχουν μηδενική ενέργεια για $t=0^-$. Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace για το ρεύμα είναι: $V(s) = I(s)Z(s)$.

α) Ισχύει: $I(s) = \frac{1}{s}$ λόγω της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης και επιπλέον:

$$V(s) = \frac{1}{s} \frac{RLs}{RLCs^2 + Ls + 1} = \frac{1}{C} \frac{1}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

$$v(t) = \frac{1}{C\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) u(t)$$

$$\text{Όπου } \sigma = \frac{1}{RC} \text{ και } \omega_d = \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

β) Ισχύει: $I(s) = 1$ λόγω της μοναδιαίας ώθησης και επιπλέον:

$$V(s) = \frac{1}{C} \frac{1}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

$$v(t) = \frac{1}{C\omega_d} e^{-\sigma t} [\omega_d \cos(\omega_d t) - \sigma \sin(\omega_d t)] u(t)$$

9.10. Λυμένα προβλήματα

1) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $e^{-at} \cos \omega t$, όπου a είναι μία σταθερά.

Απάντηση:

Εφαρμόζουμε τη σχέση ορισμού του μετασχηματισμού Laplace $L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

στη συνάρτηση $e^{-at} \cos \omega t$ και προκύπτει:

$$\begin{aligned} L[e^{-at} \cos \omega t] &= \int_0^{\infty} e^{-at} \cos \omega t \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} \cos \omega t dt = \\ &= \left[\frac{-(s+a) \cos \omega t \cdot e^{-(s+a)t} + e^{-(s+a)t} \omega \sin \omega t}{(s+a)^2 + \omega^2} \right]_0^{\infty} = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

2) Αν $L[f(t)] = F(s)$, να δειχθεί ότι $L[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$. Στη συνέχεια να εφαρμοστεί το αποτέλεσμα στην άσκηση 1.

Απάντηση:

Εξ ορισμού ισχύει:

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

Επομένως:

$$L[e^{-at} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t} dt = F(s+a)$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα για τη συνάρτηση της άσκησης 1: $e^{-at} \cos \omega t$ προκύπτει:

$$L[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και από το μετασχηματισμό που παρουσιάζεται στον πίνακα 9.1.

3) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = 1 - e^{-at}$, όπου a είναι μία σταθερά.

Απάντηση:

$$\begin{aligned} L[1 - e^{-at}] &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-at}) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt - \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} + \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)} \end{aligned}$$

Εναλλακτικός τρόπος επίλυσης:

$$L\left[a \int_0^t e^{-a\tau} d\tau \right] = a \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}$$

4) Να υπολογιστεί ο ακόλουθος αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)} \right]$$

Απάντηση:

Σύμφωνα με τη μέθοδο της ανάλυσης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων:

$$\frac{1}{s(s^2 - a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} + \frac{C}{s-a}$$

Όπου οι σταθερές υπολογίζονται ως εξής:

$$A = \frac{1}{(s^2 - a^2)} \Big|_{s=0} = -\frac{1}{a^2}$$

$$B = \frac{1}{s(s-a)} \Big|_{s=-a} = \frac{1}{2a^2}$$

$$C = \frac{1}{s(s+a)} \Big|_{s=a} = \frac{1}{2a^2}$$

Επομένως:

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)} \right] = L^{-1} \left[\frac{-\frac{1}{a^2}}{s} \right] + L^{-1} \left[\frac{\frac{1}{2a^2}}{s+a} \right] + L^{-1} \left[\frac{\frac{1}{2a^2}}{s-a} \right]$$

Οι αντίστοιχοι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace φαίνονται στον Πίνακα 9.1.
Άρα:

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)} \right] = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} e^{-at} + \frac{1}{2a^2} e^{at} = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \right) = \frac{1}{a^2} (\cosh at - 1)$$

Εναλλακτικός τρόπος επίλυσης:

Με τη βοήθεια των μετασχηματισμών του Πίνακα 9.1 προκύπτει:

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)} \right] = L^{-1} \left[\frac{\frac{1}{(s^2 - a^2)}}{s} \right] = \int_0^t \frac{\sinh a\tau}{a} d\tau = \left[\frac{\cosh a\tau}{a^2} \right]_0^t = \frac{1}{a^2} (\cosh at - 1)$$

5) Να υπολογιστεί ο ακόλουθος αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace:

$$L^{-1} \left[\frac{s+1}{s(s^2 + 4s + 4)} \right].$$

Απάντηση:

Σύμφωνα με τη μέθοδο της ανάλυσης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων:

$$\frac{s+1}{s(s^2 + 4s + 4)} = \frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2}$$

Όπου οι σταθερές υπολογίζονται ως εξής:

$$A = \frac{s+1}{(s+2)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

$$B_2 = \frac{s+1}{s} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

$$B_1 = (s+2) \frac{s+1}{2s(s+2)^2} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

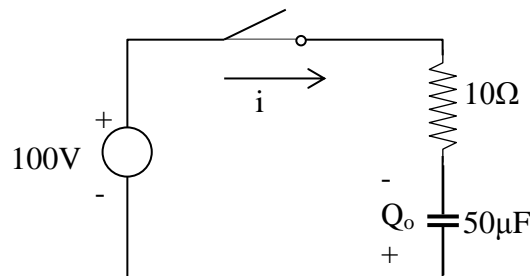
Επομένως:

$$L^{-1} \left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)} \right] = L^{-1} \left[\frac{\frac{1}{4}}{s} \right] + L^{-1} \left[\frac{-\frac{1}{4}}{s+2} \right] + L^{-1} \left[\frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2} \right]$$

Οι αντίστοιχοι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace φαίνονται στον Πίνακα 9.1. Άρα:

$$L^{-1} \left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{1}{2} t e^{-2t}$$

6) Στο RC κύκλωμα του σχήματος 9.6, ο πυκνωτής έχει αρχικό φορτίο ίσο με 2.5mC. Για t=0 ο διακόπτης κλείνει και εφαρμόζεται στο κύκλωμα μία πηγή τάσης V=100V. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace να υπολογιστεί το ρεύμα.



Σχήμα 9.6: Κύκλωμα άσκησης 6

Απάντηση:

Η συνάρτηση του κυκλώματος στο πεδίο του χρόνου αφού κλείσει ο διακόπτης είναι:

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \left[Q_o + \int_0^t i(\tau) d\tau \right] = V$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των στοιχείων προκύπτει:

$$100i(t) + \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} \left[(-2.5 \cdot 10^{-3}) + \int_0^t i(\tau) d\tau \right] = V$$

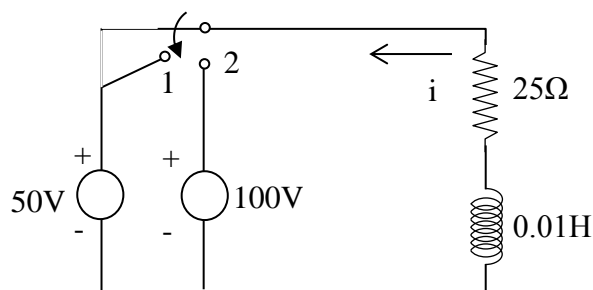
Το φορτίο Q_o εμφανίζεται με αρνητικό πρόσημο γιατί έχει αντίθετη πολικότητα σε σχέση με την πηγή. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$10I(s) - \frac{2.5 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-6} s} + \frac{I(s)}{50 \cdot 10^{-6} s} = \frac{100}{s} \Leftrightarrow I(s) = \frac{15}{s + (2 \cdot 10^3)}$$

Η συνάρτηση του ρεύματος στο πεδίο του χρόνου προκύπτει με την εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace στην παραπάνω εξίσωση:

$$i(t) = L^{-1} \left[\frac{15}{s + (2 \cdot 10^3)} \right] = 15e^{-2 \cdot 10^3 t} \quad (A)$$

7) Στο RL κύκλωμα του σχήματος 9.7, ο διακόπτης παραμένει για αρκετό χρονικό διάστημα στη θέση 1 έτσι ώστε το κύκλωμα να βρίσκεται στη μόνιμη κατάσταση. Τότε για $t=0$ ο διακόπτης μετακινείται στη θέση 2. Να υπολογιστεί το ρεύμα που προκύπτει.



Σχήμα 9.7: Κύκλωμα άσκησης 7

Απάντηση:

Έστω ότι το ρεύμα έχει την κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα 9.7. Το αρχικό ρεύμα είναι: $i_o = -\frac{50}{25} = -2A$

Η εξίσωση του κυκλώματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$25i + 0.01 \frac{di}{dt} = 100$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$25I(s) + 0.01sI(s) - 0.01i(0^+) = \frac{100}{s}$$

Αντικαθιστώντας το $i(0^+) = -2A$ προκύπτει:

$$25I(s) + 0.01sI(s) - 0.01 \cdot 2 = \frac{100}{s}$$

Τελικά:

$$I(s) = \frac{100}{s(0.01s + 25)} - \frac{0.02}{0.01s + 25} = \frac{10^4}{s(s + 2500)} - \frac{2}{s + 2500}$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ανάλυσης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων:

$$\frac{10^4}{s(s + 2500)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2500}$$

$$\text{Όπου } A = \left. \frac{10^4}{s + 2500} \right|_{s=0} = 4 \text{ και}$$

$$B = \left. \frac{10^4}{s} \right|_{s=-2500} = -4$$

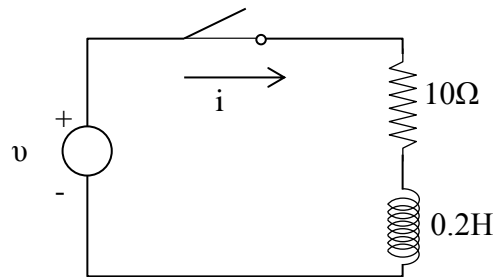
Επομένως:

$$I(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s + 2500} - \frac{2}{s + 2500} = \frac{4}{s} - \frac{6}{s + 2500}$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$i = 4 - 6e^{-2500t} \quad (A)$$

8) Στο RL κύκλωμα του σχήματος 9.8 εφαρμόζεται μία τάση $v = 50e^{-100t}$ (V) με το κλείσιμο του διακόπτη για $t=0$. Να υπολογιστεί το ρεύμα που προκύπτει.



Σχήμα 9.8: Κύκλωμα άσκησης 8

Απάντηση:

Η εξίσωση του κυκλώματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = v$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) = V(s)$$

Στη συνέχεια γίνεται αντικατάσταση των τιμών των στοιχείων στην εξίσωση καθώς επίσης και του μετασχηματισμού της πηγής $V(s) = \frac{50}{s+100}$ στο s πεδίο. Επομένως:

$$10I(s) + 0.2sI(s) = \frac{5}{s+100} \Leftrightarrow I(s) = \frac{250}{(s+100)(s+50)}$$

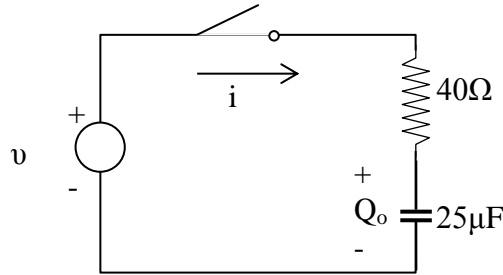
Με τη βοήθεια του θεωρήματος Heaviside είναι:

$$L^{-1}[I(s)] = L^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}$$

Στη συγκεκριμένη άσκηση είναι $P(s) = 250$, $Q(s) = s^2 + 150s + 5000$, $Q'(s) = 2s + 150$, $a_1 = -100$ και $a_2 = -50$. Επομένως:

$$i = L^{-1}[I(s)] = \frac{250}{-50} e^{-100t} + \frac{250}{50} e^{-50t} = -5e^{-100t} + 5e^{-50t} \quad (A)$$

9) Το RC κύκλωμα του σχήματος 9.9 έχει μία ημιτονοειδή πηγή τάσης $v = 180\sin(2000t + \phi)$ (V). Το αρχικό φορτίο στον πυκνωτή είναι $Q_o = 1.25mC$ με πολικότητα όπως φαίνεται στο σχήμα 9.9. Να προσδιοριστεί το ρεύμα αν ο διακόπτης κλείνει τη στιγμή που ισχύει $\phi = 90^\circ$.



Σχήμα 9.9: Κύκλωμα άσκησης 9

Απάντηση:

Η εξίσωση του κυκλώματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$40i(t) + \frac{1}{25 \cdot 10^{-6}} \left[(1.25 \cdot 10^{-3}) + \int_0^t i(\tau) d\tau \right] = 180 \cos 2000t$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$40I(s) + \frac{1.25 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-6} s} + \frac{4 \cdot 10^4}{s} I(s) = \frac{180s}{s^2 + 4 \cdot 10^6} \Leftrightarrow I(s) = \frac{4.5s^2}{(s^2 + 4 \cdot 10^6)(s + 10^3)} - \frac{1.25}{s + 10^3}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται το θεώρημα Heaviside στον αριστερό όρο του $I(s)$:

$$L^{-1}[I(s)] = L^{-1} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}$$

Στη συγκεκριμένη άσκηση είναι $P(s) = 4.5s^2$, $Q(s) = s^3 + 10^3 s^2 + 4 \cdot 10^6 s + 4 \cdot 10^9$, $Q'(s) = 3s^2 + 2 \cdot 10^3 s + 4 \cdot 10^6$, $a_1 = -j2 \cdot 10^3$, $a_2 = j2 \cdot 10^3$ και $a_3 = -10^3$. Επομένως:

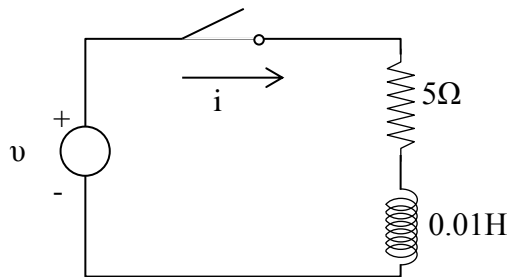
$$\begin{aligned} i &= \frac{P(-j2 \cdot 10^3)}{Q'(-j \cdot 10^3)} e^{-j2 \cdot 10^3 t} + \frac{P(j2 \cdot 10^3)}{Q'(j2 \cdot 10^3)} e^{j2 \cdot 10^3 t} + \frac{P(-10^3)}{Q'(-10^3)} e^{-10^3 t} - 1.25 e^{-10^3 t} = \\ &= (1.8 - j0.9) e^{-j2 \cdot 10^3 t} + (1.8 + j0.9) e^{j2 \cdot 10^3 t} - 0.35 e^{-10^3 t} = \\ &= -1.8 \sin 2000t + 3.6 \cos 2000t - 0.35 e^{-10^3 t} = \\ &= 4.02 \sin(2000t + 116.6^\circ) - 0.35 e^{-10^3 t} \quad (A) \end{aligned}$$

Για $t=0$ το ρεύμα υπολογίζεται ως το πηλίκο του αθροίσματος της πηγής τάσης και της τάσης του φορτισμένου πυκνωτή προς την αντίσταση. Επομένως:

$$i_o = \frac{\left(180\sin 90^\circ - \frac{1.25 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-6}}\right)}{40} = 3.25 A$$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και αν τεθεί $t=0$ στην εξίσωση του ρεύματος $i = 4.02\sin(2000t + 116.6^\circ) - 0.35e^{-10^3 t}$ (A)

10) Στο RL κύκλωμα του σχήματος 9.10 η πηγή είναι $v = 100\sin(500t + \phi)$ (V). Να προσδιοριστεί το ρεύμα που προκύπτει αν ο διακόπτης κλείνει τη χρονική στιγμή που ισχύει $\phi = 0$.



Σχήμα 9.10: Κύκλωμα άσκησης 10

Απάντηση:

Η εξίσωση του κυκλώματος στο s πεδίο γράφεται:

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) = V(s)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της πηγής για $\phi = 0$ είναι:

$$V(s) = \frac{100 \cdot 500}{s^2 + 500^2}$$

Επειδή δεν υπάρχει αρχικό ρεύμα στο πηνίο ισχύει $Li(0^+) = 0$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των στοιχείων στην εξίσωση του κυκλώματος προκύπτει:

$$5I(s) + 0.01sI(s) = \frac{5 \cdot 10^4}{s^2 + 25 \cdot 10^4} \Leftrightarrow I(s) = \frac{5 \cdot 10^6}{(s^2 + 25 \cdot 10^4)(s + 500)}$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ανάλυσης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων προκύπτει:

$$I(s) = 5 \left(\frac{-1 + j}{s + j500} \right) + 5 \left(\frac{-1 - j}{s - j500} \right) + \frac{10}{s + 500}$$

Με την εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace προκύπτει η εξίσωση του κυκλώματος στο πεδίο του χρόνου:

$$i = 10\sin 500t - 10\cos 500t + 10e^{-500t} = 10e^{-500t} + 14.14\sin(500t - 45^\circ) \quad (A)$$

11) Να επιλυθεί εκ νέου η άσκηση 10 αν η πηγή τάσης είναι $v = 100e^{j500t}$ (V).

Απάντηση:

Ο μετασχηματισμός Laplace της πηγής για $\phi = 0$ είναι:

$$V(s) = \frac{100}{s - j500}$$

Η εξίσωση του κυκλώματος στο s πεδίο γράφεται:

$$5I(s) + 0.01sI(s) = \frac{100}{s - j500} \Leftrightarrow I(s) = \frac{10^4}{(s - j500)(s + 500)}$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ανάλυσης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων προκύπτει:

$$I(s) = \frac{10 - j10}{s - j500} + \frac{-10 + j10}{s + 500}$$

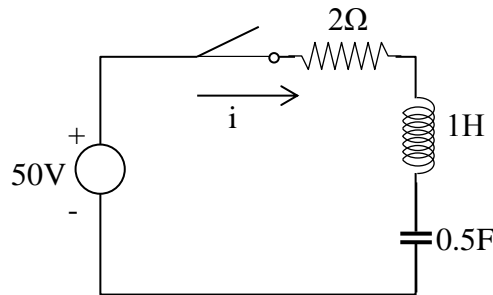
Με την εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace προκύπτει η εξίσωση του κυκλώματος στο πεδίο του χρόνου:

$$i = (10 - j10)e^{j500t} + (-10 + j10)e^{-500t} = 14.14e^{j(500t - \frac{\pi}{4})} + (-10 + j10)e^{-500t} \quad (A)$$

Το πραγματικό ρεύμα είναι το φανταστικό μέρος της παραπάνω σχέσης, δηλαδή:

$$i = 14.14\sin(500t - \frac{\pi}{4}) + 10e^{-500t} \quad (A)$$

12) Στο RLC κύκλωμα του σχήματος 9.11 δεν υπάρχει αρχικό ρεύμα στον πυκνωτή. Αν ο διακόπτης κλείνει για $t=0$, να βρεθεί το ρεύμα που προκύπτει.



Σχήμα 9.11: Κύκλωμα άσκησης 11

Απάντηση:

Η εξίσωση του κυκλώματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = V$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace και επειδή ισχύει $i(0^+) = 0$, η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$RI(s) + sLI(s) + \frac{1}{sC} = I(s) \frac{V}{s} \Leftrightarrow 2I(s) + 1 \cdot sI(s) + \frac{1}{0.5s} I(s) = \frac{50}{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I(s) = \frac{50}{s^2 + 2s + 2} = \frac{50}{(s+1+j)(s+1-j)}$$

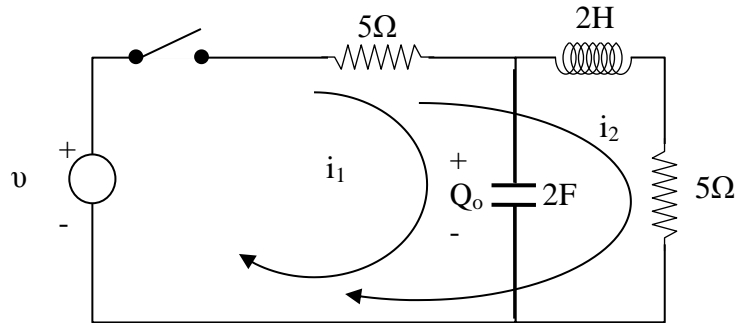
Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ανάλυσης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων προκύπτει:

$$I(s) = \frac{j25}{s+1+j} - \frac{j25}{s+1-j}$$

Με την εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace προκύπτει η εξίσωση του κυκλώματος στο πεδίο του χρόνου:

$$i = j25[e^{(-1-j)t} - e^{(-1+j)t}] = 50e^{-t} \sin t \quad (A)$$

13) Στο κύκλωμα δύο βρόχων του σχήματος 9.12, τα ρεύματα βρόχων επιλέγονται όπως φαίνονται στο σχήμα. Να γραφούν οι εξισώσεις σε μορφή πίνακα στο s πεδίο και να κατασκευαστεί το αντίστοιχο κύκλωμα στο s πεδίο.



Σχήμα 9.12: Κύκλωμα άσκησης 13

Απάντηση:

Οι εξισώσεις του κυκλώματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$5i_1 + \frac{1}{2} \left[Q_0 + \int_0^t i_1(\tau) d\tau \right] + 5i_2 = v$$

$$10i_2 + 2 \frac{di_2}{dt} + 5i_1 = v$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace προκύπτουν οι εξισώσεις για το s -πεδίο:

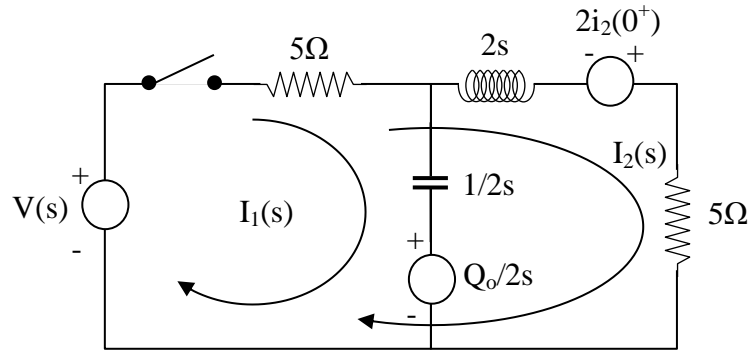
$$5I_1(s) + \frac{Q_0}{2s} + \frac{1}{2s} I_1(s) + 5I_2(s) = V(s)$$

$$10I_2(s) + 2sI_2(s) - 2i_2(0^+) + 5I_1(s) = V(s)$$

Στη συνέχεια γράφονται οι εξισώσεις σε μορφή πίνακα:

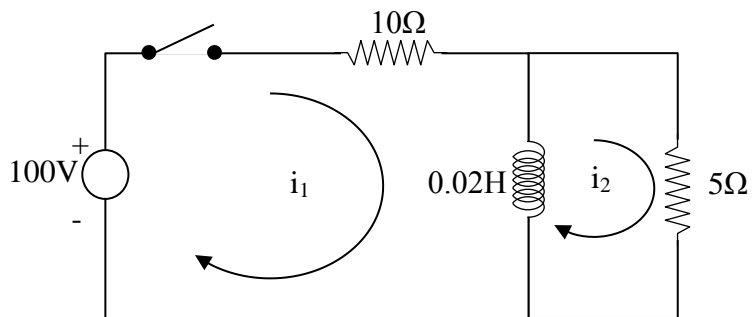
$$\begin{bmatrix} 5 + \frac{1}{2s} & 5 \\ 5 & 10 + 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(s) - \frac{Q_0}{2s} \\ V(s) + 2i_2(0^+) \end{bmatrix}$$

Το κύκλωμα σχεδιασμένο στο s -πεδίο φαίνεται στο σχήμα 9.13.



Σχήμα 9.13: Κύκλωμα άσκησης 13 στο s - πεδίο

14) Στο κύκλωμα του σχήματος 9.14 να προσδιοριστούν τα ρεύματα που προκύπτουν αφού κλείσει ο διακόπτης.



Σχήμα 9.14: Κύκλωμα άσκησης 14

Απάντηση:

Οι εξισώσεις του κυκλώματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$10i_1 + 0.02 \frac{di_1}{dt} - 0.02 \frac{di_2}{dt} = 100$$

$$0.02 \frac{di_2}{dt} + 5i_2 - 0.02 \frac{di_1}{dt} = 0$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace προκύπτουν οι εξισώσεις για το s - πεδίο:

$$(10 + 0.02s)I_1(s) - 0.02sI_2(s) = \frac{100}{s}$$

$$(5 + 0.02s)I_2(s) - 0.02sI_1(s) = 0$$

Λύνοντας της τελευταία εξίσωση ως προς $I_2(s)$ προκύπτει:

$$I_2(s) = I_1(s) \left(\frac{s}{s + 250} \right)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση $(10 + 0.02s)I_1(s) - 0.02sI_2(s) = \frac{100}{s}$ προκύπτει:

$$I_1(s) = 6.67 \left[\frac{s + 250}{s(s + 166.7)} \right] = \frac{10}{s} - \frac{3.33}{s + 166.7} \text{ και}$$

$$I_2(s) = 6.67 \left(\frac{1}{s + 166.7} \right)$$

Με την εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace προκύπτουν οι εξισώσεις για τα ρεύματα στο πεδίο του χρόνου:

$$i_1(t) = 10 - 3.33e^{-166.7t} \quad (A)$$

$$i_2(t) = 6.67e^{-166.7t} \quad (A)$$

15) Να εφαρμοστούν τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής για το κύκλωμα της άσκησης 14.

Απάντηση:

Η αρχική τιμή του ρεύματος i_1 δίνεται από τη σχέση:

$$i_1(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sI_1(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ 6.67 \left[\frac{s + 250}{(s + 166.7)} \right] \right\} = 6.67A$$

Ενώ η τελική τιμή είναι:

$$i_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sI_1(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ 6.67 \left[\frac{s + 250}{(s + 166.7)} \right] \right\} = 10A$$

Η αρχική τιμή του ρεύματος i_2 δίνεται από τη σχέση:

$$i_2(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sI_2(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[6.67 \left(\frac{s}{s + 166.7} \right) \right] = 6.67A$$

Ενώ η τελική τιμή είναι:

$$i_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sI_2(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ 6.67 \left[\frac{s}{(s+166.7)} \right] \right\} = 0$$

Οι αρχικές και τελικές τιμές που βρέθηκαν για τα ρεύματα είναι λογικές. Πράγματι τη στιγμή που κλείνει ο διακόπτης, το πηνίο εμφανίζει άπειρη αντίσταση και τα ρεύματα είναι $i_1 = i_2 = \frac{100}{10+5} = 6.67A$. Στη μόνιμη κατάσταση αντίστοιχα, το πηνίο εμφανίζεται ως βραχυκύκλωμα και επομένως: $i_1 = 10A$ και $i_2 = 0$.

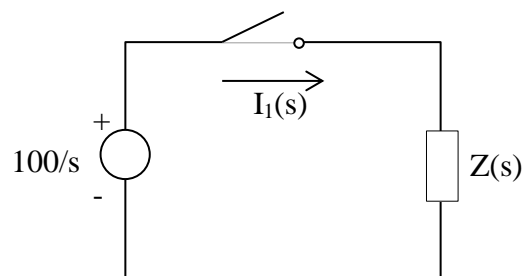
16) Να υπολογιστεί το ρεύμα i_1 της άσκησης 14 με τη βοήθεια του ισοδύναμου κυκλώματος στο s -πεδίο.

Απάντηση:

Στο s -πεδίο το πηνίο (0.02H) έχει σύνθετη αντίσταση ίση με $Z(s) = 0.02s$. Επομένως η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση του δικτύου όπως φαίνεται από την πηγή είναι:

$$Z(s) = 10 + \frac{0.02s \cdot 5}{0.02s + 5} = 15 \left(\frac{s+166.7}{s+250} \right)$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα στο s -πεδίο φαίνεται στο σχήμα 9.15.



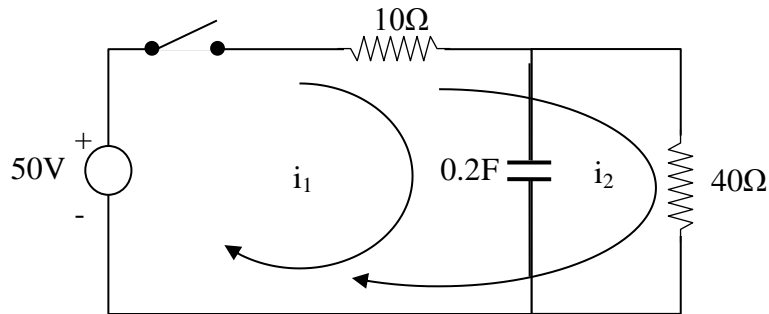
Σχήμα 9.15: Ισοδύναμο κύκλωμα άσκησης 14 στο s -πεδίο

Το ρεύμα θα είναι τότε:

$$I_1(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{100}{s} \left[\frac{s+250}{15(s+166.7)} \right] = 6.67 \left[\frac{s+250}{s(s+166.7)} \right]$$

Η έκφραση στο s -πεδίο είναι ίδια με την έκφραση που βρέθηκε στην άσκηση 14 και επομένως προκύπτει η ίδια τιμή για το ρεύμα i_1 στο πεδίο του χρόνου.

17) Στο κύκλωμα δύο βρόχων του σχήματος 9.16 δεν υπάρχει αρχικό φορτίο στον πυκνωτή. Να υπολογιστούν τα ρεύματα βρόχων i_1 και i_2 που προκύπτουν αν ο διακόπτης κλείνει για $t=0$.



Σχήμα 9.16: Κύκλωμα άσκησης 17

Απάντηση:

Οι εξισώσεις του κυκλώματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$10i_1 + \frac{1}{0.2} \int_0^t i_1(\tau) d\tau + 10i_2 = 50$$

$$50i_2 + 10i_1 = 50$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace προκύπτουν οι εξισώσεις για το s -πεδίο:

$$10I_1(s) + \frac{1}{0.2s} I_1(s) + 10I_2(s) = \frac{50}{s}$$

$$50I_2(s) + 10I_1(s) = \frac{50}{s}$$

Επιλύνοντας το παραπάνω σύστημα προκύπτουν:

$$I_1(s) = \frac{5}{s + 0.625} \text{ και}$$

$$I_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.625}$$

Με την εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace προκύπτουν οι εξισώσεις για τα ρεύματα στο πεδίο του χρόνου:

$$i_1(t) = 5e^{-0.625t} \quad (A)$$

$$i_2(t) = 1 - e^{-0.625t} \quad (A)$$

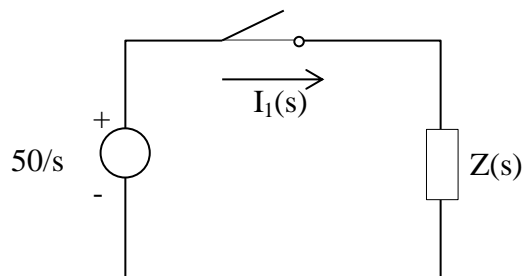
18) Να επιλυθεί εκ νέου η άσκηση 17 αφού υπολογιστεί η σύνθετη αντίσταση στο ισοδύναμο κύκλωμα του s - πεδίου και στη συνέχεια βρεθούν τα ρεύματα βρόχων με τη μέθοδο της διαίρεσης ρευμάτων.

Απάντηση:

Η σύνθετη αντίσταση στο s - πεδίο όπως φαίνεται από την πηγή τάσης είναι:

$$Z(s) = 10 + \frac{40 \cdot \frac{1}{0.2s}}{40 + \frac{1}{0.2s}} = \frac{80s + 50}{8s + 1} = 10 \left(\frac{s + \frac{5}{8}}{s + \frac{1}{8}} \right)$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα στο s - πεδίο φαίνεται στο σχήμα 9.17.



Σχήμα 9.17: Ισοδύναμο κύκλωμα άσκησης 18 στο s - πεδίο

Το ρεύμα που προκύπτει είναι:

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = 5 \left[\frac{s + \frac{1}{8}}{s(s + \frac{5}{8})} \right]$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται η μέθοδος ανάλυσης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων και προκύπτει:

$$I(s) = \frac{1}{s} + \frac{4}{s + \frac{5}{8}}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace:

$$i(t) = 1 + 4e^{-\frac{5t}{8}} \quad (A)$$

Τα ρεύματα βρόχων $I_1(s)$ και $I_2(s)$ είναι δυνατό να υπολογιστούν με τη μέθοδο της διαίρεσης ρευμάτων. Με τη βοήθεια του σχήματος 9.18 είναι:

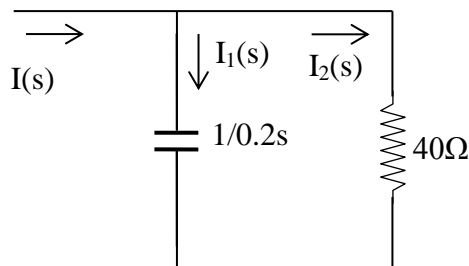
$$I_1(s) = I(s) \left(\frac{40}{40 + \frac{1}{0.2s}} \right) = \frac{5}{s + \frac{5}{8}}$$

$$I_2(s) = I(s) \left(\frac{\frac{1}{0.2s}}{40 + \frac{1}{0.2s}} \right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{5}{8}}$$

Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace:

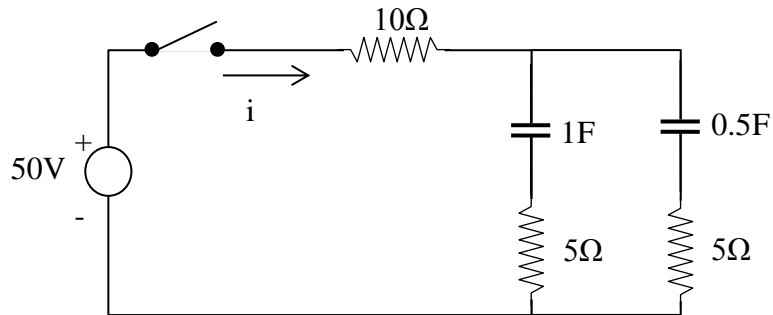
$$i_1(t) = 5e^{-0.625t} \quad (A)$$

$$i_2(t) = 1 - e^{-0.625t} \quad (A)$$



Σχήμα 9.18: Κύκλωμα άσκησης 18

19) Στο κύκλωμα του σχήματος 9.19 ο διακόπτης κλείνει για $t=0$ και δεν υπάρχει αρχικό φορτίο σε κανένα από τους πυκνωτές. Να βρεθεί το ρεύμα i που προκύπτει.



Σχήμα 9.19: Κύκλωμα άσκησης 19

Απάντηση:

Το κύκλωμα έχει ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση στο s - πεδίο:

$$Z(s) = 10 + \frac{\left(5 + \frac{1}{s}\right)\left(5 + \frac{1}{0.5s}\right)}{10 + \frac{1}{s} + \frac{1}{0.5s}} = \frac{125s^2 + 45s + 2}{s(10s + 3)}$$

Επομένως το ρεύμα είναι:

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{50}{s} \frac{s(10s + 3)}{(125s^2 + 45s + 2)} = \frac{4(s + 0.3)}{(s + 0.308)(s + 0.052)}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται η μέθοδος ανάλυσης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων και προκύπτει:

$$I(s) = \frac{\frac{1}{8}}{s + 0.308} + \frac{\frac{31}{8}}{s + 0.052}$$

Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace:

$$i(t) = \frac{1}{8}e^{-0.308t} + \frac{31}{8}e^{-0.052t} \quad (A)$$

20) Να εφαρμοστούν τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής στο s - πεδίο για την άσκηση 19.

Απάντηση:

Η αρχική τιμή του ρεύματος i_1 δίνεται από τη σχέση:

$$i(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sI(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{8} \left(\frac{s}{s+0.308} \right) + \frac{31}{8} \left(\frac{s}{s+0.052} \right) \right\} = 4A$$

Ενώ η τελική τιμή είναι:

$$i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sI(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{8} \left(\frac{s}{s+0.308} \right) + \frac{31}{8} \left(\frac{s}{s+0.052} \right) \right\} = 0$$

Πράγματι σύμφωνα με το σχήμα 9.19, αρχικά η ολική σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι $R = 10 + \frac{5 \cdot 5}{10} = 12.5\Omega$ και επομένως $i(0^+) = \frac{50}{12.5} = 4A$. Στη μόνιμη κατάσταση και οι δύο πυκνωτές είναι φορτισμένοι με 50V και το ρεύμα είναι μηδέν.

21) Η τάση κατά μήκος ενός κυκλώματος δίνεται από τη σχέση $\frac{d^2v}{dt^2} + v = t$. Οι αρχικές συνθήκες είναι $v(0^+) = 1$ και $\frac{d^2v}{dt^2}(0^+) = -2$. Να βρεθεί η συνάρτηση της τάσης $v(t)$.

Απάντηση:

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace είναι:

$$s^2V(s) - sv(0^+) - v(0^+) + V(s) = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow V(s)(s^2 + 1) - s + 2 = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} + \frac{s}{s^2 - 1} - \frac{2}{s^2 + 1} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{3}{s^2 + 1}$$

Επομένως:

$$v(t) = L^{-1}[V(s)] = t + \cos t - 3\sin t$$

22) Το ρεύμα σε ένα κύκλωμα δίνεται από τη σχέση: $\frac{d^2i}{dt^2} - 3\frac{di}{dt} + 2i = 4e^{2t}$. Να βρεθεί η συνάρτηση του ρεύματος αν οι αρχικές συνθήκες είναι $i(0^+) = -3A$ και $\frac{d^2i}{dt^2}(0^+) = 5A/s$.

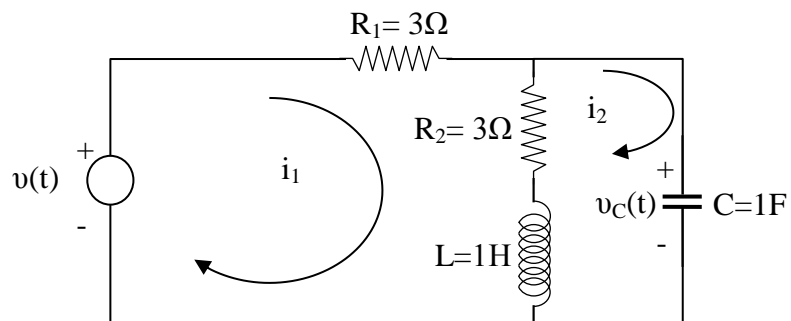
Απάντηση:

$$I(s)(s^2 - 3s + 2) + 3s - 14 = \frac{4}{s-2} \Leftrightarrow I(s) = \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

Επομένως:

$$i(t) = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$$

23) Στο κύκλωμα του σχήματος 9.20 να υπολογιστεί το ρεύμα $i_1(t)$.



Σχήμα 9.20: Κύκλωμα άσκησης 23

Απάντηση:

Οι εξισώσεις βρόχων στο πεδίο του χρόνου γράφονται:

$$v(t) = (R_1 + R_2)i_1(t) + L\frac{di_1(t)}{dt} - R_2i_2(t) - L\frac{di_2(t)}{dt}$$

$$0 = -R_2i_1(t) - L\frac{di_1(t)}{dt} + R_2i_2(t) + L\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau + v_C(0^+)$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται:

$$\begin{aligned} V(s) &= (R_1 + R_2)I_1(s) + LsI_1(s) - Li_1(0^+) - R_2I_2(s) - LsI_2(s) + Li_2(0^+) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow V(s) + L[i_1(0^+) - i_2(0^+)] = (R_1 + R_2 + Ls)I_1(s) - (R_2 + Ls)I_2(s) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow V(s) + i_L(0^+) = (s + 6)I_1(s) - (s + 3)I_2(s) \end{aligned}$$

Ο όρος $i_1(0^+) - i_2(0^+)$ αντικαταστάθηκε από τον όρο $i_L(0^+)$, ο οποίος αντιστοιχεί στο αρχικό ρεύμα στο πηνίο L .

$$\begin{aligned} 0 &= -R_2I_1(s) - LsI_1(s) + Li_1(0^+) + R_2I_2(s) + LsI_2(s) - Li_2(0^+) + \frac{1}{sC}I_2(s) + \frac{v_C(0^+)}{s} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -L[i_1(0^+) - i_2(0^+)] - \frac{v_C(0^+)}{s} = -(R_2 + Ls)I_1(s) + (R_2 + Ls + \frac{1}{sC})I_2(s) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -i_L(0^+) - \frac{v_C(0^+)}{s} = -(s + 3)I_1(s) + (s + 3 + \frac{1}{s})I_2(s) \end{aligned}$$

Επιλύοντας τις παραπάνω εξισώσεις ως προς $I_1(s)$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{[V(s) + i_L(0^+)](s + 3 + \frac{1}{s}) + (s + 3)[-i_L(0^+) - \frac{v_C(0^+)}{s}]}{(s + 6)(s + 3 + \frac{1}{s}) - (s + 3)^2} = \\ &= \frac{[V(s) + i_L(0^+)](s^2 + 3s + 1) + (s + 3)[-i_L(0^+) - v_C(0^+)]}{3s^2 + 10s + 6} \end{aligned}$$

Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{V}{6}u(t) + [0.178V + 0.19i_L(0^+) - 0.42v_C(0^+)]e^{-0.788t}u(t) + \\ &+ [-0.012V - 0.19i_L(0^+) + 0.087v_C(0^+)]e^{-2.54t}u(t) \end{aligned}$$

24) Να υπολογιστεί η τάση κατά μήκος του πυκνωτή του κυκλώματος του σχήματος 9.21.

Απάντηση:

Σύμφωνα με την άσκηση 23 οι εξισώσεις του κυκλώματος στο s - πεδίο είναι οι:

$$V(s) + i_L(0^+) = (s + 6)I_1(s) - (s + 3)I_2(s)$$

$$V(s) + i_L(0^+) = (s + 6)I_1(s) - (s + 3)I_2(s)$$

Επιλύοντας τις παραπάνω εξισώσεις ως προς $I_2(s)$ προκύπτει:

$$I_2(s) = \frac{[-i_L(0^+)s - v_C(0^+)](s+6) + s(s+3)[V(s) + i_L(0^+)]}{3s^2 - 10s + 6}$$

Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace:

$$i_2(t) = [0.42V + 0.45i_L(0^+) - 0.99v_C(0^+)]e^{-0.788t}u(t) + [-0.087V - 1.45i_L(0^+) + 0.657v_C(0^+)]e^{-2.54t}u(t)$$

Η τάση κατά μήκος του πυκνωτή για $t > 0$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau + v_C(0^+)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση το $i_2(t)$ προκύπτει:

$$v_C(t) = 0.5Vu(t) + [-0.534V - 0.57i_L(0^+) + 1.25v_C(0^+)]e^{-0.788t}u(t) + [0.034V + 0.57i_L(0^+) - 0.25v_C(0^+)]e^{-2.54t}u(t)$$

25) Αν η τάση κατά μήκος ενός κυκλώματος δίνεται από τη σχέση $V(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$ να υπολογιστεί η τάση για $t=0.1s$. Επίσης να βρεθούν οι αρχικές και τελικές τιμές για την τάση κατά μήκος του κυκλώματος.

Απάντηση:

$$V(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)} = \frac{3}{8s} + \frac{1}{4(s+2)} + \frac{3}{8(s+4)}$$

Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace:

$$v(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{-4t}$$

$$\text{Για } t=0.1s: v(0.1) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}e^{-0.2} + \frac{3}{8}e^{-0.4} = 0.831V$$

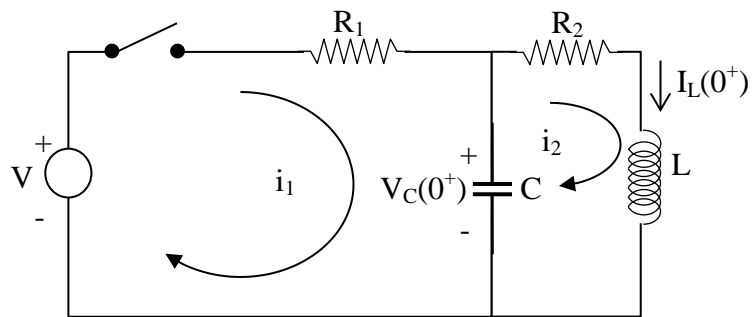
Σύμφωνα με το θεώρημα αρχικής τιμής:

$$v(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sV(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)} = 1V$$

Σύμφωνα με το θεώρημα τελικής τιμής:

$$v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sV(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)} = \frac{3}{8}V$$

26) Στο κύκλωμα του σχήματος 9.21 ο διακόπτης κλείνει για $t=0$. Να υπολογιστεί το ρεύμα $I_2(s)$ με τη βοήθεια του κανόνα του Kramer αφού γραφούν οι εξισώσεις ρευμάτων βρόχων στο s - πεδίο.



Σχήμα 9.21: Κύκλωμα άσκησης 26

Απάντηση:

Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$-\frac{V}{s} + R_1 I_1(s) + \frac{V_C(0^+)}{s} + \frac{1}{sC} [I_1(s) - I_2(s)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R_1 + \frac{1}{sC}) I_1(s) - \frac{1}{sC} I_2(s) = \frac{1}{s} [V - V_C(0^+)]$$

$$-\frac{V_C(0^+)}{s} + \frac{1}{sC} [I_2(s) - I_1(s)] + R_2 I_2(s) + sL I_2(s) - L I_L(0^+) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{sC} I_1(s) + (\frac{1}{sC} + R_2 + Ls) I_2(s) = L I_L(0^+) + \frac{V_C(0^+)}{s}$$

Με τη βοήθεια του κανόνα του Kramer είναι:

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + \frac{1}{sC} & \frac{V - V_C(0^+)}{s} \\ -\frac{1}{sC} & LI_L(0^+) + \frac{V_C(0^+)}{s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + \frac{1}{sC} & -\frac{1}{sC} \\ -\frac{1}{sC} & R_2 + Ls + \frac{1}{sC} \end{vmatrix}}$$

9.11. Άλυτες ασκήσεις

9.1) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace σε κάθεμία από τις ακόλουθες συναρτήσεις:

α) $f(t) = At$

β) $f(t) = te^{-at}$

γ) $f(t) = e^{-at} \sin \omega t$

δ) $f(t) = \sinh \omega t$

ε) $f(t) = \cosh \omega t$

στ) $f(t) = e^{-at} \sinh \omega t$

(Απάντηση: α-ε) Πίνακας 1, στ) $\frac{\omega}{(s+a)^2 - \omega^2}$)

9.2) Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace για κάθεμία από τις ακόλουθες συναρτήσεις:

α) $F(s) = \frac{s}{(s+2)(s+1)}$

β) $F(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 12}$

γ) $F(s) = \frac{5s}{s^2 + 3s + 2}$

δ) $F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 6s + 9)}$

ε) $F(s) = \frac{s+5}{s^2 + 2s + 5}$

$$\sigma\tau) F(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+13}$$

$$\zeta) F(s) = \frac{2s}{(s^2+4)(s+5)}$$

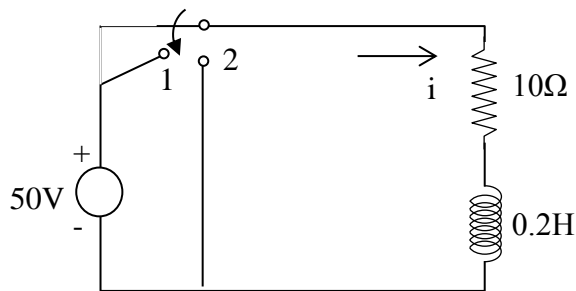
(Απάντηση: α) $2e^{-2t} - e^{-t}$, β) $e^{-3t} - e^{-4t}$, γ) $10e^{-2t} - 5e^{-t}$, δ) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t} - te^{-3t}$,

ε) $e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t)$, στ) $2e^{-2t} \cos 3t$, ζ) $\frac{10}{29} \cos 2t + \frac{4}{29} \sin 2t - \frac{10}{29} e^{-5t}$)

9.3) Ένα κύκλωμα RL σειράς με $R = 10\Omega$ και $L = 0.2H$ έχει συνεχή τάση $V = 50V$ η οποία εφαρμόζεται για $t=0$. Να υπολογιστεί το ρεύμα που προκύπτει με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace.

(Απάντηση: $i = 5 - 5e^{-50t}$ (A))

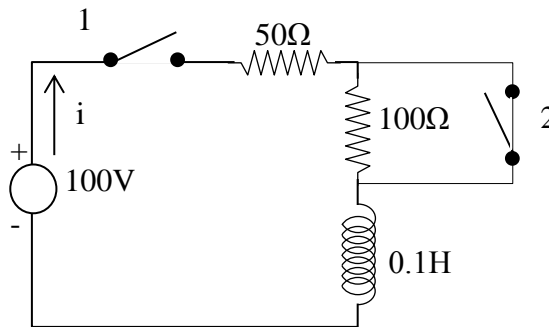
9.4) Στο κύκλωμα RL σειράς του σχήματος 9.22, ο διακόπτης μένει στη θέση 1 για αρκετό χρονικό διάστημα έτσι ώστε το κύκλωμα να είναι στη μόνιμη κατάσταση. Ο διακόπτης μετακινείται στη θέση 2 για $t=0$. Να υπολογιστεί το ρεύμα που προκύπτει.



Σχήμα 9.22: Κύκλωμα άσκησης 9.4

(Απάντηση: $i = 5e^{-50t}$ (A))

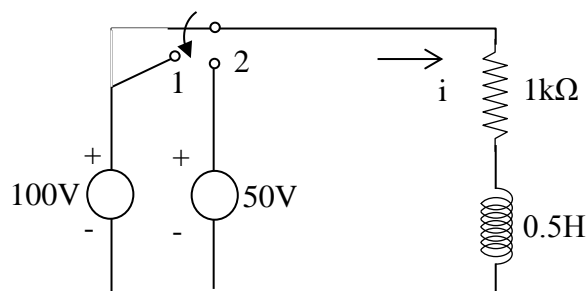
9.5) Στο κύκλωμα του σχήματος 9.23, ο διακόπτης 1 κλείνει για $t=0$ και στη συνέχεια για $t=t'=4\text{ms}$ ανοίγει ο διακόπτης 2. Να υπολογιστεί το ρεύμα για $0 < t < t'$ και για $t > t'$.



Σχήμα 9.23: Κύκλωμα άσκησης 9.5

(Απάντηση: $i = 2(1 - e^{-500t})$ (A), $i = 1.06e^{-1500(t-t')} + 0.667$ (A))

9.6) Στο κύκλωμα RL σειράς του σχήματος 9.24, ο διακόπτης είναι στη θέση 1 για $t=0$ και στη συνέχεια μετακινείται στη θέση 2 για $t=t'=50\mu\text{s}$. Να βρεθεί το ρεύμα για $0 < t < t'$ και για $t > t'$.



Σχήμα 9.24: Κύκλωμα άσκησης 9.6

(Απάντηση: $i = 0.1(1 - e^{-2000t})$ (A), $i = 0.06e^{-2000(t-t')} - 0.05$ (A))

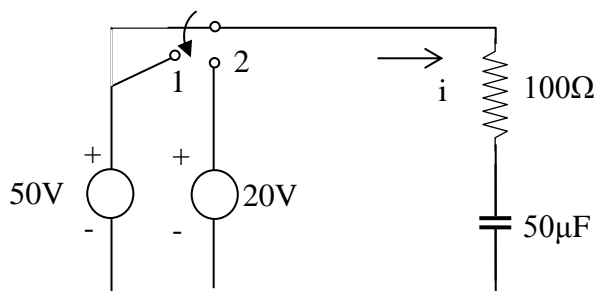
9.7) Ένα κύκλωμα RC σειράς με $R=10\Omega$ και $C=4\mu\text{F}$, έχει αρχικό φορτίο $Q_o = 800\mu\text{C}$ στον πυκνωτή τη στιγμή που κλείνει ο διακόπτης. Εφαρμόζεται επίσης συνεχής τάση $V=100\text{V}$. Να βρεθεί το μεταβατικό ρεύμα που προκύπτει αν το φορτίο έχει α) την ίδια πολικότητα όπως και η πηγή και β) αντίθετη πολικότητα από την πηγή.

(Απάντηση: α) $i = -10e^{-2510^3 t}$ (A), β) $i = 30e^{-2510^3 t}$ (A))

9.8) Ένα κύκλωμα RC σειράς με $R=1k\Omega$ και $C=20\mu F$, έχει αρχικό φορτίο Q_0 στον πυκνωτή τη στιγμή που κλείνει ο διακόπτης. Εφαρμόζεται επίσης συνεχής τάση $V=50V$. Αν το ρεύμα που προκύπτει είναι $i=0.075e^{-50t}$ (A), να υπολογιστεί το φορτίο Q_0 και η πολικότητά του.

(Απάντηση: $500\mu C$, πολικότητα αντίθετη της πηγής)

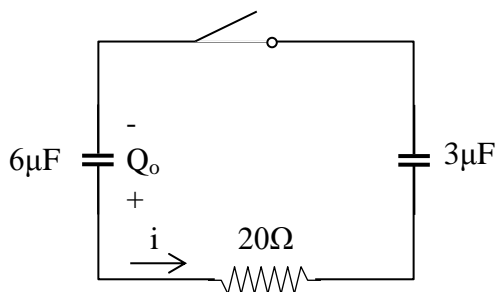
9.9) Στο RC κύκλωμα του σχήματος 9.25, ο διακόπτης είναι στη θέση 1 για $t=0$ και στη συνέχεια για $t=t'=\tau$ (όπου τ είναι η σταθερά χρόνου) μετακινείται στη θέση 2. Να υπολογιστεί το μεταβατικό ρεύμα για $0 < t < t'$ και για $t > t'$.



Σχήμα 9.25: Κύκλωμα άσκησης 9.9

(Απάντηση: $i = 0.5e^{-200t}$ (A), $i = -0.0516e^{-200(t-t')}$ (A))

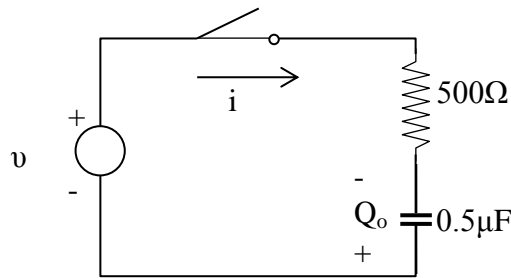
9.10) Στο κύκλωμα του σχήματος 9.26 το αρχικό φορτίο είναι $Q_0=300\mu C$ τη στιγμή που κλείνει ο διακόπτης. Να υπολογιστεί το μεταβατικό ρεύμα που προκύπτει.



Σχήμα 9.26: Κύκλωμα άσκησης 9.10

(Απάντηση: $i = 2.5e^{-2.5 \cdot 10^4 t}$ (A))

9.11) Στο κύκλωμα του σχήματος 9.27 ο πυκνωτής έχει αρχικό φορτίο $Q_o = 25\mu C$ και η πηγή τάσης είναι $v = 100\sin(1000t + \phi)$ (V). Να υπολογιστεί το μεταβατικό ρεύμα που προκύπτει αν ο διακόπτης κλείνει τη χρονική στιγμή που ισχύει $\phi = 30^\circ$.



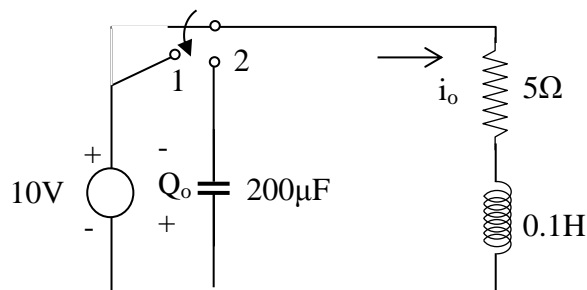
Σχήμα 9.27: Κύκλωμα άσκησης 9.11

(Απάντηση: $i = 0.1535e^{-4000t} + 0.0484\sin(1000t + 106^\circ)$ (A))

9.12) Σε ένα RLC κύκλωμα σειράς με $R = 5\Omega$, $L = 0.1H$ και $C = 500\mu F$ εφαρμόζεται σταθερή τάση $V = 10V$ για $t=0$. Να βρεθεί το ρεύμα που προκύπτει.

(Απάντηση: $i = 0.72e^{-25t} \sin 139t$ (A))

9.13) Στο RLC κύκλωμα σειράς του σχήματος 9.28 ο διακόπτης είναι στη θέση 1 αρκετό χρονικό διάστημα έτσι ώστε το κύκλωμα να βρίσκεται στη μόνιμη κατάσταση και ο πυκνωτής έχει αρχικό φορτίο $Q_o = 1mC$. Να βρεθεί το μεταβατικό ρεύμα που προκύπτει όταν ο διακόπτης μετακινηθεί από τη θέση 1 στη θέση 2 για $t=0$.



Σχήμα 9.28: Κύκλωμα άσκησης 9.13

(Απάντηση: $i = e^{-25t} (2\cos 222t - 0.45\sin 222t)$ (A))

9.14) Σε ένα RLC κύκλωμα σειράς με $R = 5\Omega$, $L = 0.2H$ και $C = 1F$ εφαρμόζεται τάση $v = 10e^{-100t}$ (V) για $t=0$. Να βρεθεί το ρεύμα που προκύπτει.

$$(Απάντηση: i = -0.666e^{-100t} + 0.67e^{-24.8t} - 0.004e^{-0.2t} \quad (A))$$

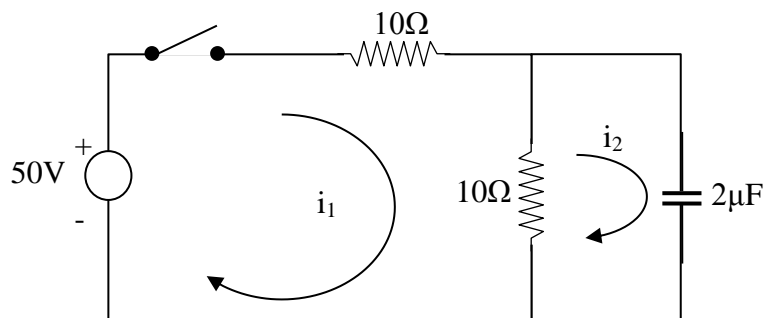
9.15) Σε ένα RLC κύκλωμα σειράς με $R = 200\Omega$, $L = 0.5H$ και $C = 100\mu F$ εφαρμόζεται ημιτονοειδής τάση $v = 300\sin(500t + \phi)$ (V) για $t=0$. Να βρεθεί το ρεύμα που προκύπτει αν ο διακόπτης κλείνει τη χρονική στιγμή που ισχύει $\phi = 30^\circ$.

$$(Απάντηση: i = 0.517e^{-341.4t} - 0.197e^{-58.6t} + 0.983\sin(500t - 19^\circ) \quad (A))$$

9.16) Σε ένα RLC κύκλωμα σειράς με $R = 5\Omega$, $L = 0.1H$ και $C = 500\mu F$ εφαρμόζεται ημιτονοειδής τάση $v = 100\sin(250t)$ (V). Να βρεθεί το ρεύμα που προκύπτει αν ο διακόπτης κλείνει για $t=0$.

$$(Απάντηση: i = e^{-25t}(5.42\cos 139t + 1.89\sin 139t) + 5.65\sin(250t - 73.6^\circ) \quad (A))$$

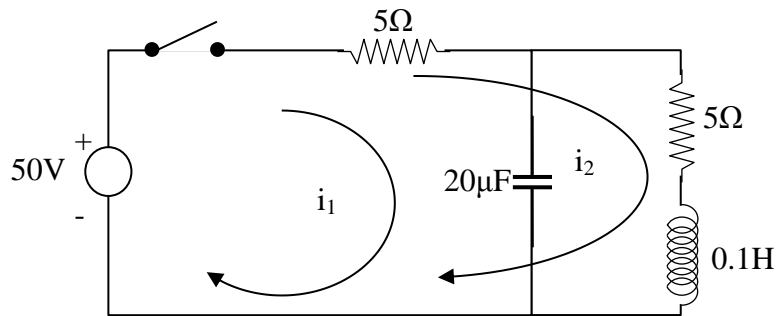
9.17) Στο κύκλωμα δύο βρόχων του σχήματος 9.29, τα ρεύματα επιλέγονται όπως φαίνονται στο σχήμα. Να γραφούν οι εξισώσεις των ρευμάτων βρόχων στο πεδίο του χρόνου, να μετασχηματιστούν στο s - πεδίο και στη συνέχεια να υπολογιστούν τα ρεύματα i_1, i_2 .



Σχήμα 9.29: Κύκλωμα άσκησης 9.17

$$(Απάντηση: i_1 = 2.5(1 + e^{-10^5 t}) \quad (A), i_2 = 5e^{-10^5 t} \quad (A))$$

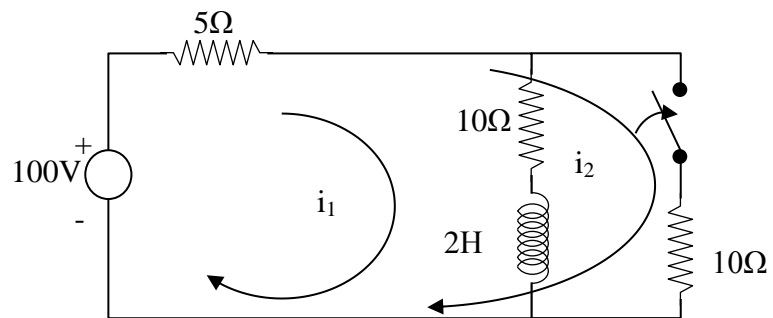
9.18) Στο κύκλωμα δύο βρόχων του σχήματος 9.30, να υπολογιστούν τα ρεύματα i_1, i_2 τα οποία προκύπτουν όταν ο διακόπτης κλείνει για $t=0$.



Σχήμα 9.30: Κύκλωμα άσκησης 9.18

$$\begin{aligned} \text{(Απάντηση: } i_1 &= 0.101e^{-100t} + 9.899e^{-9950t} \text{ (A),} \\ i_2 &= -5.05e^{-100t} + 5 + 0.05e^{-9950t} \text{ (A))} \end{aligned}$$

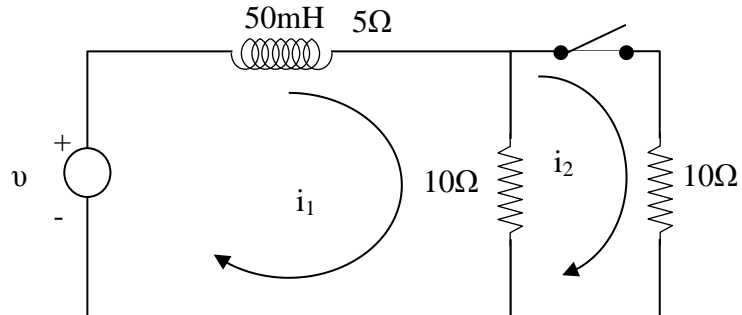
9.19) Στο κύκλωμα του σχήματος 9.31 η πηγή των 100V προκαλεί την εμφάνιση ενός ρεύματος στον αριστερό βρόχο όσο ο διακόπτης είναι ανοιχτός. Να υπολογιστούν τα ρεύματα αφού κλείσει ο διακόπτης.



Σχήμα 9.31: Κύκλωμα άσκησης 9.19

$$\text{(Απάντηση: } i_1 = 1.67e^{-6.67t} + 5 \text{ (A), } i_2 = 0.555e^{-6.67t} + 5 \text{ (A))}$$

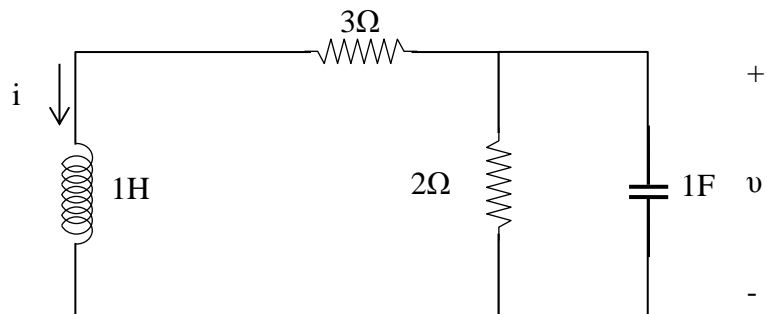
9.20) Στο κύκλωμα δύο βρόχων του σχήματος 9.32, η πηγή τάσης είναι ημιτονοειδής $v = 100\sin(200t + \phi)$ (V). Ο διακόπτης κλείνει τη χρονική στιγμή που η τάση έχει πάρει τη μέγιστη τιμή της. Να υπολογιστούν τα ρεύματα i_1, i_2 τα οποία προκύπτουν με κατευθύνσεις όπως έχουν σχεδιαστεί στο κύκλωμα.



Σχήμα 9.32: Κύκλωμα άσκησης 9.20

(Απάντηση: $i_1 = 3.01e^{-100t} + 8.96\sin(200t - 63.4^\circ)$ (A),
 $i_2 = 1.505e^{-100t} + 4.48\sin(200t - 63.4^\circ)$ (A))

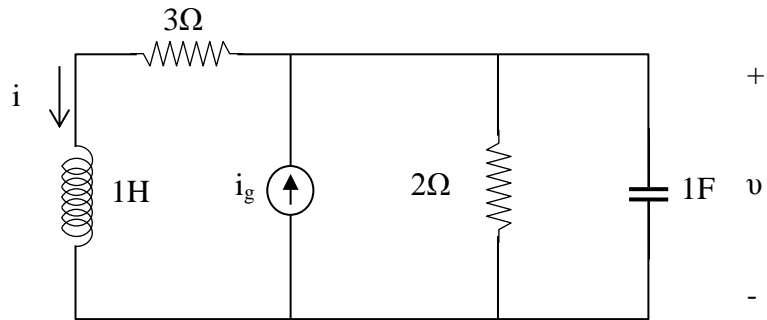
9.21) Στο κύκλωμα του σχήματος 9.33 ισχύουν: $v(0) = 1.2V$ και $i(0) = 0.4A$. Να υπολογιστεί η τάση και το ρεύμα για $t > 0$ με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace.



Σχήμα 9.33: Κύκλωμα άσκησης 9.21

(Απάντηση: $v = 1.3334e^{-t} - 0.1334e^{-2.5t}$ $t > 0$, $i = 0.66667e^{-t} - 0.2667e^{-2.5t}$ $t > 0$)

9.22) Στο κύκλωμα του σχήματος 9.34 είναι $i_g(t) = \cos t u(t)$. Να υπολογιστεί η τάση και το ρεύμα για $t > 0$ με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace.



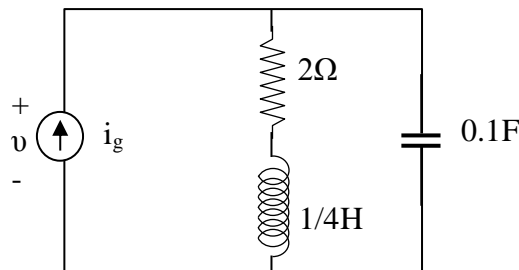
Σχήμα 9.34: Κύκλωμα άσκησης 9.22

(Απάντηση: $v = 0.8305 \cos(t - 48.4^\circ) \quad t > 0, i = 0.2626 \cos(t - 66.8^\circ) \quad t > 0$)

9.23) Στο κύκλωμα του σχήματος 9.34 είναι $i_g(t) = \begin{cases} 1A, & t < 0 \\ \cos t, & t > 0 \end{cases}$. Να υπολογιστεί η τάση και το ρεύμα για $t > 0$ με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace.

(Απάντηση: $v = 0.6667e^{-t} - 0.0185e^{-2.5t} + 0.8305 \cos(t - 48.4^\circ) \quad t > 0,$
 $i = 0.3332e^{-t} - 0.0368e^{-2.5t} + 0.2626 \cos(t - 66.8^\circ) \quad t > 0$)

9.24) Για το κύκλωμα του σχήματος 9.35 να υπολογιστεί η τάση $v(t)$ αν $i_g(t) = \begin{cases} 5A, & t < 0 \\ 10A, & t > 0 \end{cases}$.



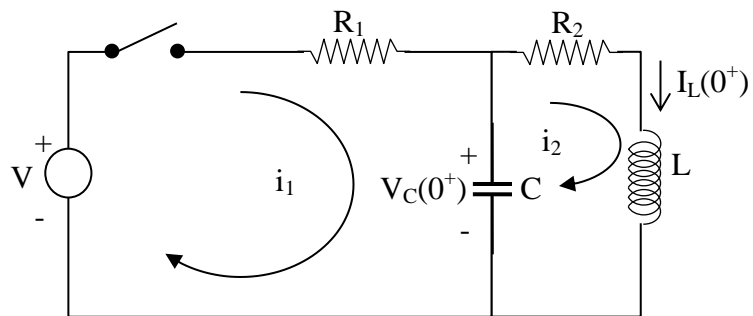
Σχήμα 9.35: Κύκλωμα άσκησης 9.24

(Απάντηση: $v = 20 - 10.21e^{-4t} \cos(4.9t + 11.53^\circ) \quad t > 0$)

9.25) Να υπολογιστεί το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο στο κύκλωμα του σχήματος 9.35.

$$(Απάντηση: i = 10 - 6.45e^{-4t} \cos(4.9t - 39.2^\circ) \quad t > 0)$$

9.26) Να σχεδιαστεί το κύκλωμα του σχήματος 9.36 στο s - πεδίο.



Σχήμα 9.36: Κύκλωμα άσκησης 9.26

9.27) Οι εξισώσεις κόμβου ενός κυκλώματος είναι:

$$0.002v_1 + 5 \int v_1 dt - 0.002v_2 = 0$$

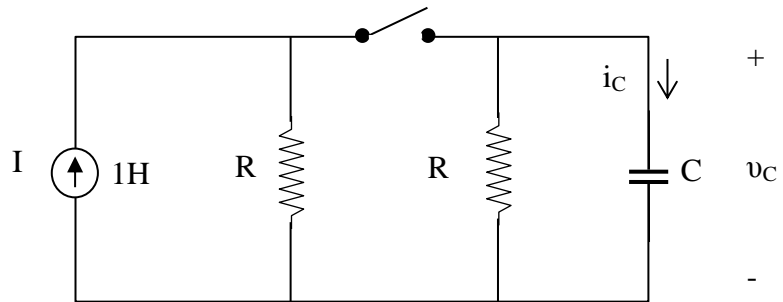
$$-0.002v_1 + 0.003v_2 + 10^4 \frac{dv_2}{dt} = 0.01$$

Επίσης ισχύει $v_2(0^+) = 100V$ και όλες οι άλλες αρχικές συνθήκες είναι μηδέν. Να προσδιοριστεί η $V_1(s)$.

$$(Απάντηση: V_1(s) = \frac{100(s+1)}{s^2 + 2510s + 75000})$$

9.28) Να υλοποιηθεί το κυκλώμα το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες και τις εξισώσεις της άσκησης 9.27.

9.29) Στο κύκλωμα του σχήματος 9.37 ο διακόπτης κλείνει για $t=0$. Να υπολογιστεί η τάση και το ρεύμα στον πυκνωτή αν όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν.



Σχήμα 9.37: Κύκλωμα άσκησης 9.29

$$(Απάντηση: v_C(t) = \frac{1}{2} RI(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}), i_C(t) = C \frac{d}{dt}[v_C(t)] = Ie^{-\frac{2t}{RC}})$$

9.30) Έστω ότι ο διακόπτης στο κύκλωμα του σχήματος 9.37 είναι κλειστός για αρκετό χρονικό διάστημα έτσι ώστε να έχει παρέλθει η μεταβατική περίοδος. Τότε ο διακόπτης ανοίγει. Να υπολογιστούν τότε η τάση και το ρεύμα στον πυκνωτή.

$$(Απάντηση: v_C(t) = \frac{1}{2} RI(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), i_C(t) = -\frac{I}{2} e^{-\frac{t}{RC}})$$

Βιβλιογραφία

- [1] M. Nahvi, J. A. Edminister, *Theory and Problems of Electric Circuits*, McGraw - Hill Co., New York, 2003.
- [2] J. O' Maley, *Theory and Problems of Basic Circuit Analysis*, McGraw - Hill Co., New York, 1992.
- [3] S. A. Nasar, *Electric Circuits*, McGraw - Hill Co., New York, 1988.
- [4] S. Madhn, *Linear Circuit Analysis*, Prentice - Hall Inc., New Jersey, 1988.
- [5] J.W. Nilsson, *Electric Circuits*, Addison - Wesley, 1993.
- [6] D. E. Johnson, J. R. Johnson, J. L. Hilburn, *Electric Circuit Analysis*, Prentice - Hall Inc., New Jersey, 1992.
- [7] S. A. Boctor, *Electric Circuit Analysis*, Prentice - Hall Inc., New Jersey, 1992.
- [8] K. F. Sander, *Electric Circuit Analysis: Principals and Applications*, Prentice - Hall Inc., New Jersey, 1992.
- [9] J. Bird, *Electrical Circuit Theory and Technology*, Routledge, New York, 2014.
- [10] J. K. Fidler, L. Ibbotson, *Introductory Circuit Theory*, McGraw-Hill Publishing Co., New York, 1989.
- [11] J. D. Irwin, R. M. Nelms, *Engineering Circuit Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 2002.
- [12] H. M. Thomas, *Basic Circuit Analysis*, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2012.