Δημήτριος Βασιλείου - Νικόλαος Ηρειώτης

ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ

Θεωρία και Πρακτική

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η ΔΙΑΧΡΟΝΙΚΗ ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΧΡΗΜΑΤΟΣ

Το χρήμα έχει διαχρονική αξία

Αυτό γίνεται αντιληπτό εάν σκεφθείτε ότι ένα ευρώ που δίνετε σήμερα αξίζει περισσότερο από ένα ευρώ το οποίο θα λάβετε σ' έναν χρόνο από σήμερα. Η ιδέα αυτή είναι συνδεδεμένη με την έννοια του τόκου και αυτού που οι οικονομολόγοι ονομάζουν κόστος ευκαιρίας του χρήματος.

Απλός τόκος (1)

- Το ποσό χρημάτων που δανείζεται κάποιος κατά την σύναψη ενός δανείου ονομάζεται **αρχικό κεφάλαιο**.
- Το ποσό που λαμβάνει ο δανειζόμενος ονομάζεται **παρούσα αξία** του δανείου.
- Ο **χρόνος** του δανείου είναι η περίοδος κατά την διάρκεια της οποίας ο δανειζόμενος έχει τη χρήση όλου ή μέρους του δανειζόμενου ποσού.
- Η τιμή ενός δανείου εκφράζεται ως ένα **επιτόκιο** και είναι ένα σταθερό κλάσμα του κεφαλαίου το οποίο πρέπει να πληρωθεί για τη χρήση του δανείου.

Απλός τόκος (2)

Απλός τόκος ή απλή κεφαλαιοποίηση ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία ο τόκος που παράγεται ενσωματώνεται στο κεφάλαιο μόνο μια φορά, στο τέλος του χρονικού διαστήματος κατά το οποίο το κεφάλαιο αυτό είναι παραγωγικό.

Απλός τόκος (3)

Ο απλός τόκος δίνεται από τη σχέση:

$$I = P \times r \times t$$

όπου
I = ο απλός τόκος,
P = το αρχικό κεφάλαιο,
r = το επιτόκιο και
t = ο χρόνος

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 100.000 ευρώ, το οποίο τοκίστηκε με ετήσιο επιτόκιο 12% για 2 έτη:

<u>Απάντηση:</u> Ο τόκος ανέρχεται σε

$$I = (100.000 \times 0{,}12 \times 2 =)\ 24.000 \text{ ευρώ.}$$

Απλός τόκος (4)

Όταν το επιτόκιο εκφράζεται σε ετήσια βάση και ο χρόνος του δανείου σε μήνες, τότε είναι απαραίτητη η μετατροπή των μηνών σε κλάσμα του έτους. Στη περίπτωση αυτή ισχύει:

$$\mathbf{I = P \times r \times (m/12)}$$

όπου το m συμβολίζει τον αριθμό των μηνών κατά τους οποίους είναι εκτοκισμένο το κεφάλαιο.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 100.000 ευρώ, το οποίο τοκίστηκε με ετήσιο επιτόκιο 12% για 8 μήνες:

<u>Απάντηση:</u> Ο τόκος ανέρχεται σε

$$\mathbf{I = (100.000 \times 0,12 \times 8/12 =)\ \ 8.000\ ευρώ.}$$

Απλός τόκος (5)

Όταν το επιτόκιο εκφράζεται σε ετήσια βάση και ο χρόνος του δανείου σε ημέρες, τότε είναι απαραίτητη η μετατροπή των ημερών σε κλάσμα του έτους. Στη περίπτωση αυτή:

$$\mathbf{I = P \times r \times (d/360)} \quad \textbf{ή} \quad \mathbf{I = P \times r \times (d/365)}$$

όπου το d συμβολίζει τον αριθμό των ημερών κατά τις οποίες είναι εκτοκισμένο το κεφάλαιο.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 100.000 ευρώ, το οποίο τοκίστηκε με ετήσιο επιτόκιο 12% για 60 ημέρες.

<u>Απάντηση:</u> Ο τόκος ανέρχεται σε

$$\mathbf{I = (100.000 \times 0,12 \times 60/360=)\ 2.000\ ευρώ.}$$

Ανατοκισμός

Ανατοκισμός ή σύνθετος τόκος ή σύνθετη κεφαλαιοποίηση ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία ο τόκος ο οποίος παράγεται κάθε περίοδο (δηλαδή ο δεδουλευμένος τόκος) προστίθεται στο κεφάλαιο (κεφαλαιοποιείται) και το άθροισμά τους αποτελεί παραγωγικό κεφάλαιο για όλες τις επόμενες περιόδους.

Τελική αξία

Στην περίπτωση του ανατοκισμού **η τελική αξία ή μελλοντική αξία** είναι η αξία που θα έχει στο μέλλον ένα χρηματικό ποσό το οποίο επενδύεται σήμερα.

Ετήσιος ανατοκισμός

Στο τέλος n ετών η τελική αξία (TV) μιας αρχικής κατάθεσης (X_0) η οποία ανατοκίζεται μια φορά το χρόνο με επιτόκιο r ισούται με:

$$TV_n = X_0\left(1+r\right)^n$$

Παράδειγμα

Έστω ότι καταθέτει κάποιος ένα κεφάλαιο 100.000 ευρώ σ' έναν τραπεζικό λογαριασμό. Το κεφάλαιο αυτό ανατοκίζεται κάθε χρόνο με ετήσιο επιτόκιο 8%. Τι ποσό θα έχει συγκεντρωθεί στον λογαριασμό στο τέλος του 3ου έτους;

<u>Απάντηση:</u> Στο τέλος του τρίτου έτους θα έχει συγκεντρωθεί κεφάλαιο κατά προσέγγιση ίσο με

$$\mathbf{TV_3 = 100.000 \times (1+0{,}08)^3 = 100.000 \times 1{,}2597 = 125.971{,}20 \approx 125.970}$$

Ανατοκισμός με μεγαλύτερη από την ετήσια συχνότητα

Εάν ο τόκος υπολογίζεται και κεφαλαιοποιείται m περιόδους τον χρόνο, τότε η τελική αξία μιας αρχικής κατάθεσης βρίσκεται από τον τύπο:

$$TV_n = X_0\left[1+\left(\frac{r}{m}\right)\right]^{n\,m}$$

όπου m = οι περίοδοι κατά τις οποίες το κεφάλαιο ανατοκίζεται εντός ενός έτους.

Παράδειγμα

Έστω ότι καταθέτει κάποιος ένα κεφάλαιο 100.000 ευρώ σ' έναν τραπεζικό λογαριασμό. Το κεφάλαιο αυτό ανατοκίζεται δύο φορές το έτος (δηλαδή κάθε 6 μήνες) με ετήσιο επιτόκιο 10%. Τι ποσό θα έχει συγκεντρωθεί στον λογαριασμό στο τέλος του πέμπτου έτους;

<u>Απάντηση:</u>

Ο συντελεστής ανατοκισμού ο οποίος αντιστοιχεί σε επιτόκιο (0,10/2=) 0,05 και χρονική περίοδο (5×2=) 10 είναι 1,6289. Άρα η τελική αξία είναι:

$$\mathbf{TV_3 = (100.000 \times 1{,}6289 =)\ 162.890\ ευρώ.}$$

Παρούσα αξία

Παρούσα αξία ή προεξοφλημένη αξία ή ανηγμένη αξία είναι η αξία που έχει σήμερα ένα συγκεκριμένο ποσό που θα δοθεί σε μια ορισμένη ημερομηνία στο μέλλον.

Ετήσιος ανατοκισμός

Η παρούσα αξία (PV) κεφαλαίου X_n το οποίο θα πάρουμε μετά από n χρόνια προεξοφλημένο με επιτόκιο k ισούται:

$$PV = X_n \left[\frac{1}{\left(1+k\right)^n} \right] \quad ή \quad PV = X_n \left[\left(1+k\right)^{-n} \right]$$

Ανατοκισμός με περισσότερες περιόδους τον χρόνο

Εάν ο τόκος υπολογίζεται και κεφαλαιοποιείται m περιόδους τον χρόνο, τότε η παρούσα αξία (PV) κεφαλαίου X_n το οποίο θα πάρουμε μετά από n έτη προεξοφλούμενο με επιτόκιο k ισούται με:

$$PV = X_n \left[\frac{1}{\left(1+\frac{k}{m}\right)^{n\,m}} \right]$$

Παράδειγμα

Ποιο είναι το ποσό που θα πρέπει να επενδύσει κανείς σήμερα σ' έναν τραπεζικό λογαριασμό ο οποίος παρέχει τόκο με ετήσιο επιτόκιο 10% ανατοκιζόμενο 2 φορές τον χρόνο, έτσι ώστε να συγκεντρωθεί σε 5 χρόνια 100.000 ευρώ;

<u>Απάντηση:</u>

Ο συντελεστής προεξόφλησης ο οποίος αντιστοιχεί σε επιτόκιο (0,10/2=) 0,05 και χρονική περίοδο (5×2=) 10 είναι 0,6139. Άρα, η ζητούμενη παρούσα αξία είναι:

PV = (100.000×0,6139=) 61.390 ευρώ.

Σειρές πληρωμών (ράντες) (1)

- Σειρά πληρωμών ή ράντα ή χρηματική ροή είναι ένας αριθμός περιοδικών πληρωμών (ή εισπράξεων) που καταβάλλονται μέσα σ' ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.
- Το ποσό που καταβάλλεται με κάθε πληρωμή λέγεται **όρος** της σειράς πληρωμών.
- Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών πληρωμών λέγεται **περίοδος** της σειράς πληρωμών.

Σειρές πληρωμών (ράντες) (2)

- Εάν όλοι οι όροι μιας σειράς πληρωμών είναι ίσοι μεταξύ τους, τότε η σειρά πληρωμών λέγεται **σταθερή ή ομοιόμορφη**, εάν όχι τότε λέγεται **μεταβλητή**.
- Η σειρά πληρωμών της οποίας ο όρος καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου λέγεται **ληξιπρόθεσμη σειρά πληρωμών**.
- Η σειρά πληρωμών της οποίας ο όρος καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου λέγεται **προκαταβλητέα σειρά πληρωμών**.

Τελική αξία μιας σειράς πληρωμών

Τελική αξία μιας σειράς πληρωμών είναι το άθροισμα των αξιών όλων των περιοδικών πληρωμών και ο ανατοκιζόμενος τόκος των πληρωμών αυτών που έχει συγκεντρωθεί στο τέλος της σειράς και δίνεται από τη σχέση:

$$TV_n = A\left[\sum_{t=0}^{n-1}(1+r)^t\right] = A\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right]$$

Παράδειγμα

Ένας επενδυτής καταθέτει 100.000 ευρώ στο τέλος κάθε εξαμήνου σ' έναν τραπεζικό λογαριασμό ο οποίος παρέχει τόκο με ετήσιο επιτόκιο 6% και ο οποίος ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο. Να βρεθεί το ποσό το οποίο θα έχει συγκεντρωθεί στον λογαριασμό στο τέλος του πέμπτου έτους.

<u>Απάντηση:</u>

Αφού λάβουμε υπόψη μας ότι το εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι (6/2=) 3% και ότι έχουμε 10 περιόδους. Άρα,

$$\mathbf{TV_5 = 100.000 \times \{[(1+0,03)10-1]/0,03\} \approx 1.146.300}$$

Παρούσα αξία μιας σειράς πληρωμών

Παρούσα αξία μιας σειράς πληρωμών είναι το άθροισμα των παρουσών αξιών όλων των πληρωμών της σειράς και δίνεται από τη σχέση:

$$PV = A\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+k)^{t}}\right] = A\left[\frac{1-\frac{1}{(1+k)^{n}}}{k}\right]$$

Διηνεκής σειρά πληρωμών

Διηνεκής σειρά πληρωμών (perpetuity) είναι μια σειρά πληρωμών της οποίας οι πληρωμές θα καταβάλλονται επ' άπειρον. Ενώ είναι αδύνατο να βρεθεί η τελική αξία μιας διηνεκούς σειράς πληρωμών, η παρούσα αξίας της δίνεται από τη σχέση:

$$PV = \frac{A}{k}$$

Παράδειγμα

Ένα φιλανθρωπικό ίδρυμα θέλει να χορηγεί επ' άπειρον μια υποτροφία 1.000.000 ευρώ στο τέλος κάθε έτους. Εάν τα χρήματα μπορούν να επενδυθούν με ετήσιο επιτόκιο 5%, ποιο ποσό πρέπει να καταθέσει σήμερα το ίδρυμα για να χορηγείται στο διηνεκές η υποτροφία;

<u>Απάντηση:</u>

Η παρούσα αξία της διηνεκούς σειράς πληρωμών είναι 20.000.000 ευρώ.

PV = 1.000.000/0,05 = 20.000.000.

Προκαταβλητέα σειρά πληρωμών

Προκαταβλητέα σειρά πληρωμών λέγεται η σειρά πληρωμών της οποίας ο όρος καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου.

Τελική αξία:

$$TV_n = A\left[\sum_{t=0}^{n}(1+r)^t - 1\right] = A\left[\frac{(1+r)^{n+1}-1}{r} - 1\right]$$

Παρούσα αξία:

$$PV = A\left[1+\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{(1+k)^{t}}\right] = A\left[1+\frac{1-\dfrac{1}{(1+k)^{n-1}}}{k}\right]$$

Μέλλουσα σειρά πληρωμών

Μέλλουσα ή αναβλητική σειρά πληρωμών λέγεται η σειρά πληρωμών της οποίας η πρώτη πληρωμή δεν γίνεται στην αρχή ή στο τέλος της πρώτης περιόδου, αλλά αργότερα, μετά από έναν ορισμένο αριθμό περιόδων.