Προσπάθησε να βρεις τρεις φυσικούς αριθμούς Α, Β, Γ τέτοιους που ο Α διαιρεί τέλεια το γινόμενο των άλλων δύο (δηλ. το Β∙Γ), αλλά δεν διαιρεί τέλεια ούτε τον Β ούτε τον Γ.

Α = 6, Β = 8, Γ = 9

Πράγματι, γ διαιρεί το 8 επί 9 τέλεια, αλλά το 6 δεν διαιρεί το 8 ούτε το 9.

Α = 12, Β = 18, Γ = 16

Β∙Γ = 18 ∙ 16 = (3∙4) ∙ (6∙4) =12∙24

Προσπάθησε να βρεις τρεις φυσικούς αριθμούς Α, Β, Γ τέτοιους που ο Α διαιρεί τέλεια το γινόμενο των άλλων δύο (δηλ. το Β∙Γ), ο Α είναι πρώτος και δεν διαιρεί τέλεια ούτε τον Β ούτε τον Γ.

ΔΕΝ ΓΙΝΕΤΑΙ.

ΒΑΣΙΚΟ: Αν ένας πρώτος αριθμός διαιρεί το γινόμενο Γ δύο ή περισσότερων άλλων, τότε κατ’ ανάγκην διαιρεί ένα τουλάχιστον από τους δύο. (Γιατί; βασικά επειδή δεν μπορεί να δημιουργηθεί ως γινόμενο μικρότερων αριθμών που είναι διαιρέτες διαφορετικών παραγόντων του γινομένου Γ).

Η ανάλυση του 36 (και κάθε άλλου αριθμού) σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι μοναδική.

Πράγματι, έστω 36 = 22∙32 = pα∙qβ∙rγ (p, q, r = πρώτοι αριθμοί)

Σύμφωνα με αυτά που είπαμε ο 2 δεν μπορεί παρά να διαιρεί τον pα ή τον qβ ή τον rγ.

Έστω ότι το 2 διαιρεί το pα = p∙p∙. . .∙p (α φορές).

Άρα το 2 διαιρεί το p (p πρώτος). Άρα p = 2. Τελικά:

1 = 2α-2∙3β-2∙rγ (r = πρώτος αριθμός)

Άρα 2α-2 =1, 3β-2 =1, rγ =1.

Επομένως α‒2 = β ‒2 = γ = 0, δηλ. α = 2, β = 2 και γ = 0.

Στο παραπάνω παράδειγμα συνοψίζεται η βασική ιδέα για την απόδειξη της πρότασης «Η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι ΜΟΝΑΔΙΚΗ».

Τώρα πια μπορούμε να βρούμε τους ΜΚΔ και ΕΚΠ και αλλιώς.

Παράδειγμα.

36 = 22∙32

1200 = 24∙3∙52

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1200 | 36 | 36 | 12 |
|  120 | 33 | 0 | 3 |
|  12 |  |  |  |

1ος τρόπος (Ευκλείδειος αλγόριθμος)

1200 = 36 ∙ 33 + 12 $\leftarrow $ ΜΚΔ

36 = 12 ∙ 3 + 0

ΕΚΠ = $\frac{36 ∙1200}{12 }$ = $\frac{3 ∙12 ∙12 ∙ 100}{12 }$ = 3600

2ος τρόπος

Έστω δ κοινός διαιρέτης του 36 και του 1200

δ | 36 και δ | 1200 ( | σημαίνει διαιρεί).

Είναι φανερό ότι στην «πρώτη» ανάλυση του δ (ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων), εμφανίζονται μόνον οι κοινοί πρώτοι του 36 και του 1200, δηλ. ο 2 και ο 3. Με τι εκθέτη; Μπορεί ο 2 να έχει εκθέτη μεγαλύτερο του 4; (όχι, αν είχε πως θα διαιρούσε ο δ τον 36;) Μπορεί ο 3 να έχει εκθέτη μεγαλύτερο του 1; (όχι, αν είχε πως θα διαιρούσε ο δ τον 1200;)

Άρα ο ΜΚΔ είναι το γινόμενο των κοινών πρώτων υψωμένων στον μικρότερο από τους εκθέτες με τους οποίους εμφανίζεται στην «πρώτη» ανάλυση των αριθμών.

ΜΚΔ = 22 ∙ 3 =12

Αντίστοιχα, είναι φανερό ότι στην «πρώτη» ανάλυση του δ, εμφανίζονται τόσο οι κοινοί όσο και οι μη κοινοί πρώτοι του 36 και του 1200, δηλ. ο 2, ο 3 και ο 5. (Αν δεν εμφανιζόταν κάποιος μη κοινός πρώτος, εδώ ο 5, πώς θα «χωρούσε» ο 1200 στον ΕΚΠ;) Με τι εκθέτη; Μπορεί ο 2 να έχει εκθέτη μικρότερο του 4; (όχι, αν είχε πως θα διαιρούσε ο 1200 τον ΕΚΠ;) Μπορεί ο 3 να έχει εκθέτη μικρότερο του 2; (όχι, αν είχε πως θα διαιρούσε ο 36 τον ΕΚΠ;) Ο 5 εμφανίζεται με τον εκθέτη που έχει στον δεύτερο αριθμό (αφού στον άλλον έχει εκθέτη 0).

Άρα ο ΕΚΠ είναι το γινόμενο των κοινών και μη κοινών πρώτων υψωμένων στον μεγαλύτερο από τους εκθέτες με τους οποίους εμφανίζεται στην «πρώτη» ανάλυση των αριθμών.

Άρα

ΕΚΠ = 24 ∙ 32 ∙ 52 = 3600

Στο Δημοτικό οι παραπάνω μέθοδοι εκτελούνται με την παρακάτω τεχνική.

ΜΚΔ(1200, 36) = 22 ∙ 3 =12 επειδή:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1200 | 36 | 2 |
|  600 | 18 | 2 |
|  300 |  9 | 3 |
|  100 |  3 | Δεν έχουμε να κάνουμε τίποτα άλλο αφού ΜΚΔ(100,3) = 1  |

ΕΚΠ (1200, 36) = 24 ∙ 32 ∙ 52, επειδή

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1200 | 36 | 2 | Ή  | 1200 | 36 | 2 |
|  600 | 18 | 2 |  600 | 18 | 2 |
|  300 |  9 | 3 |  300 |  9 | 2 |
|  100 |  3 | 2 |  150 |  9 | 2 |
|  50 |  3 | 2 |  75 |  9 | 3 |
|  25 |  3 | 3 |  25 |  3 | 3 |
|  25 |  1 | 5 |  25 |  1 | 5 |
|  5 |  1 | 5 |  5 |  1 | 5 |
|  1 |  1 |  |  1 |  1 |  |

ΒΑΣΙΚΟ: ΜΚΔ (α, β) ∙ ΕΚΠ (α, β) = α∙β

Παράδειγμα:

α = 25∙34∙7

β =23∙72∙11

α∙β = 25+3∙34∙71+2∙11 = (23∙71)∙(25∙34∙72∙11)

 = ΜΚΔ(α,β)∙ΕΚΠ(α,β)

Πόσους διαιρέτες έχει ο 36; Έχει 9 διαιρέτες, τους 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

|  |  |
| --- | --- |
| 36 | 2 |
| 18 | 2 |
|  9 | 3 |
|  3 | 3 |
|  1 |  |

Πρόσεξε ότι 36 = 22∙32.

Παρατηρώ ότι (2+1)∙(2+1) =3∙3 = 9

Τυχαίο; Δεν νομίζω. Γιατί;

α = 25∙34∙71 Πόσους διαιρέτες δ = 2κ∙3λ∙7μ έχει ο α;

Απάντηση: (5+1)∙(4+1)∙(1+1) = 60

Φαντάσου έναν διαιρέτη δ του 36 = 22∙32. Τότε είναι φανερό ότι δ = 2α∙3β. Είναι φανερό ότι 0$\leq $α$\leq 2$. (Το α παίρνει τρεις τιμές, 3 = 2 + 1). Αντίστοιχα, 0$\leq $β$\leq 2$. (Το β παίρνει τρεις τιμές, 3 = 2 + 1). Άρα για κάθε επιλογή για το α έχω τρεις για το β, οπότε για τις τρεις επιλογές του α έχω συνολικά εννέα επιλογές των (α,β).

(0,0), (0, 1), (0, 2), (1,0), (1, 1), (1, 2), (2,0), (2, 1), (2, 2). Δηλ. οι διαιρέτες είναι οι 1, 3, 9, 2, 6, 18, 4, 12, 36.

Έστω Ν αριθμός, Ν = $p\_{1}^{a\_{1}}$∙$p\_{2}^{a\_{2}}$∙. . . ∙ $p\_{n}^{a\_{n}}$.

Τότε το πλήθος των διαιρετών =

 $(a\_{1}+1)$ ∙$(a\_{2}+1)∙$ . . . ∙ $(a\_{n}+1)$

H γενική μορφή ενός διαιρέτη δ του Ν είναι

δ = $p\_{1}^{β\_{1}}$∙$p\_{2}^{β\_{2}}$∙. . . ∙ $p\_{n}^{β\_{n}}$, όπου 0$\leq β\_{i}\leq a\_{i}$ (δηλ. παίρνει $(a\_{i}+1)$ τιμές).

Πόσους διαιρέτες έχει ο 48;

48 = 24∙3

Πλήθος διαιρετών = (4+1) ∙ (1+1) = 5 ∙ 2 =10

Τυπικός διαιρέτης δ = 2α∙3β 0$\leq $α$\leq 4$, 0$\leq $β$\leq 1$

|  |  |
| --- | --- |
| 48 | 2 |
| 24 | 2 |
| 12 | 2 |
| 6 | 2 |
| 3 | 3 |
| 1 |  |

Πόσους διαιρέτες έχει ο αριθμός 424242 = 21∙32∙72∙131∙371.

Πλήθος διαιρετών =

= (1+1)∙(2+1)∙(2+1)∙(1+1)∙(1+1) = 2∙3∙3∙2∙2 = 72

|  |  |
| --- | --- |
| 424242 | 2 |
| 212121 | 3 |
|  70707 | 3 |
|  23569 | 7 |
|  3367 | 7 |
|  481 | 13 |
|  37 | 37 |
|  1 |  |

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ

Ένας αριθμός διαιρείται δια του 2 (τέλεια) ανν είναι άρτιος, δηλ. λήγει σε 0, 2, 4, 6 ή 8.

Ένας αριθμός διαιρείται δια του 3 (τέλεια) ανν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 3 (δηλ. ανν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται τέλεια δια του 3)

Ένας αριθμός διαιρείται δια του 9 (τέλεια) ανν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9 (δηλ. ανν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται τέλεια δια του 9)

Ένας αριθμός διαιρείται δια του 5 (τέλεια) ανν λήγει σε 0 ή 5.

Ένας αριθμός διαιρείται δια του 4 (τέλεια) ανν λήγει σε διψήφιο που διαιρείται τέλεια δια του 4.

Ένας αριθμός διαιρείται δια του 25 (τέλεια) ανν λήγει σε διψήφιο που διαιρείται τέλεια δια του 25.

Ένας αριθμός Ν = $(a\_{1}a\_{2}. . . a\_{ν-1}a\_{ν}) $διαιρείται δια του 11 (τέλεια) ανν $a\_{ν}‒a\_{ν-1}+ a\_{ν-2}‒a\_{ν-3}+$…+(-1)ν είναι πολλ.11.

121 = πολλ11 αφού 1$‒$2+1= 0 = πολλ.11

759 = πολλ11 (αφού 9$‒5+7=11)$

Ένας αριθμός Ν = $(a\_{1}a\_{2}. . . a\_{ν-1}a\_{ν}) $διαιρείται δια του 7 (τέλεια) ανν $(a\_{1}a\_{2}. . . a\_{ν-1})‒$2$ ∙a\_{ν}$ είναι πολλ7.

Π.χ. 364 διαιρείται τέλεια δια του 7, αφού 32 $‒2∙4$ = 36 $‒$ 8 = 28 = πολλ7.

Ένας αριθμός Μ διαιρείται τέλεια δια του Ν = Κ$∙$Λ (με **ΜΚΔ(Κ, Λ) = 1**) ανν ο Μ διαιρείται τέλεια τόσο δια του Κ όσο και δια του Λ.

Π.χ. ένας αριθμός διαιρείται τέλεια δια του 6 ανν είναι άρτιος και διαιρείται τέλεια δια του 3.

Π.χ. ένας αριθμός διαιρείται τέλεια δια του 36 ανν διαιρείται τέλεια δια του 4 και διαιρείται τέλεια δια του 9.