* **Τύποι του De Morgan**: (Α$ ∪Β)$C = AC $∩ $BC , (Α$ ∩Β)$C = AC$ ∪$ $ $BC .

Mε την p, q μέθοδο δείχνω την πρώτη ισότητα.

Παίρνω τυχόν στοιχείο p του (Α$ ∪Β)$C. Επομένως p$ \notin $ (Α$ ∪Β)$. Άρα p$ \notin $ Α και p$ \notin $ $Β$. Επομένως p $\in $AC και p $\in $BC. Άρα p $\in $ AC $∩ $BC. Άρα (Α$ ∪Β)$C $⊆$ AC $∩ $BC .

Παίρνω τυχόν στοιχείο q του AC $∩ $BC. Επομένως q $\in $AC και q $\in $BC. Άρα q$ \notin $ Α και q $\notin $ $Β$. Επομένως q$ \notin $ (Α$ ∪Β)$. Άρα q $\in $ (Α$ ∪Β)$C. Επομένως AC $∩ $BC $⊆$ (Α$ ∪Β)$C.

Άρα (Α$ ∪Β)$C = AC $∩ $BC .

Δείξτε παρόμοια ότι (Α$ ∩Β)$C = AC$ ∪$ $ $BC  (άσκηση).

* Παρατήρησε ότι αν υπάρχει καθολικό σύνολο τότε: **A─B = Α** $∩$ **Β C** .
* **P(A) = δυναμοσύνολο του Α = {Β: Β**$ ⊆$ **Α}**.

Π.χ. Α = {α}, P(A) = {$∅$,{α}}. |Α| = πληθικός αριθμός του Α = 1 και |P(A)| = 2.

Β = {α, β}, P(Β) = {$∅$, {α}, {β}, {α. β}}. |B| = 2 και |P(B)| = 4.

Γ = {1, 2, 3}, P(Γ) = {$∅, \left\{1\right\}, \left\{2\right\},${3},{1,2},{2,3},{1,3},{1,2,3}}.

|Γ| = 3 και |P(Γ)| = 8

P($∅)=$ {$∅\}$. |$∅$| = 0 και |P($∅$)| = 1.

Δ = {1, 2, 3, 4} . P(Δ) = {$∅, ${1}, {2}, {3}, {4}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {1,2,3}, {1,2,4}, {2,3,4}, {1, 3, 4}, {1,2,3,4}}.

(1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16)

|Δ| = 4 και |P(Δ)| = 16

* **Πληθικός αριθμός** ενός συνόλου Α λέγεται ο φυσικός αριθμός |α| που δηλώνει το πλήθος των στοιχείων του Α.

**Αν |Α| = ν, τότε |P(A)| = 2ν** (αφού προφανώς όταν τα στοιχεία του Α αυξάνονται κατά ένα, τα υποσύνολα του συνόλου που προκύπτει είναι διπλάσια σε πλήθος).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Α | |A| | |P(A)| |
| $$∅$$ | 0 | 1 |
| {α} | 1 | 2 |
| {α, β} | 2 | 4 |
| {α, β, γ} | 3 | 8 |
| {α, β, γ, δ} | 4 | 16 |

{α, β} $∅$ {α} {β} {α, β}

{α, β, γ} $∅$ {α} {β} {α, β}{γ} {α, γ} {β, γ} {α, β, γ}

Α$ ∪Β$ = (A─B) $∪$ (A$∩$B) $∪$ (B─A).

|A$∪$B| = |A─B| + |A$∩$B| $+$ |B─A|, δηλαδή

**|Α**$∪$**B| = |A| + |B| ─ |A**$∩$**B|**

Αν A$∩$B = $∅$, τότε |Α$∪$B| = |A| + |B|.

**|Α─Β| = |Α| ─ |A**$∩$**B| (είναι προφανώς ΛΑΘΟΣ ότι |Α─Β| = |Α| ─ |B|)**

**|ΑC| = |Ω─Α| = |Ω| ─ |A**$∩$**Ω| = |Ω| ─ |A|.**

**|A─B| = |Α** $∩$ **ΒC| = |(ΑC**$∪$ Β)C**|.**

* **Τύποι επιμερισμού της τομής ως προς την ένωση και της ένωσης ως προς την τομή**.

(Α$∪$B)$ ∩$ Γ = (Α$ ∩$ Γ)$ ∪ $(Β$ ∩$ Γ)

(Α$∩$B)$ ∪$ Γ = (Α$ ∪$ Γ)$ ∩ $(Β$ ∪ $Γ)

Με την p, q μέθοδο δείχνω την πρώτη ισότητα.

Παίρνω p $\in $ (Α$∪$B)$ ∩$ Γ. Άρα p $\in $ (Α$∪$B) και p $\in $ Γ. Άρα p $\in $ Α ή p $\in $ Β, δηλαδή p είναι στοιχείο τουλάχιστον ενός από τα Α, Β, επομένως στοιχείο τουλάχιστον ενός από τα Α$ ∩$ Γ, Β$ ∩$ Γ, επομένως p $\in $(Α$ ∩$ Γ)$ ∪ $(Β$ ∩$ Γ). Άρα (Α$∪$B)$ ∩$ Γ $⊆$ (Α$ ∩$ Γ)$ ∪ $(Β$ ∩$ Γ). Αντίστροφα, παίρνω p $\in $(Α$ ∩$ Γ)$ ∪ $(Β$ ∩$ Γ). Άρα p είναι στοιχείο τουλάχιστον ενός από τα Α$ ∩$ Γ, Β$ ∩$ Γ, επομένως p $\in $ Γ και p είναι στοιχείο τουλάχιστον ενός από τα Α, Β, οπότε p $\in $ (Α$∪$B), άρα p $\in $ (Α$∪$B)$ ∩$ Γ, οπότε (Α$ ∩$ Γ)$ ∪ $(Β$ ∩$ Γ) $⊆$ (Α$∪$B)$ ∩$ Γ.

|Α$∪$B$∪$Γ| = |(Α$∪$B$)∪$Γ| = |Α$∪$B| + |Γ| ─ |(A$∪$B)$ ∩$ Γ| =

= |A| + |B| ─ |A$∩$B| + |Γ| ─ |(Α$ ∩$ Γ)$ ∪ $(Β$ ∩$ Γ)|

= |A| + |B| + |Γ| ─ |A$∩$B| ─ (|Α$ ∩$ Γ$|+|$Β$ ∩$ Γ|─|Α$ ∩$ Β$ ∩$ Γ|). Δηλαδή,

**|Α**$∪$**B**$∪$**Γ| = |A| + |B| + |Γ| ─ |A**$∩$**B| ─ |Α**$ ∩$ **Γ**$|─|$**Β**$ ∩$ **Γ| + |Α**$ ∩$ **Β**$ ∩$ **Γ|**

|Α$∪$B$∪$Γ$∪$Δ| = …. με τον « ίδιο» τρόπο

**Προσοχή!** Α ─ (Β$ ∪Γ) $= Α$∩(Β ∪Γ)$C = A $∩ $BC $∩Γ$C = A ─ B ─ Γ $\ne $ (Α ─ Β$) ∪Γ $

Η παρακάτω εικόνα είναι πολύ βασική.

