Παράδειγμα:

Είναι το ακόλουθο επιχείρημα έγκυρο ή άκυρο;

Κάποιος θα πληρώσει (για) όλες τις ζημιές.

Επομένως κάθε ζημιά θα πληρωθεί (από κάποιον).

Είναι φανερό ότι για να μεταγράψουμε το επιχείρημα αυτό στη γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής των σχέσεων χρειαζόμαστε τις ακόλουθες σχέσεις

A(x) : x άνθρωπος

Z(y) : y ζημιά

Π(z, w) : z πληρώνει (για) w.

Η προκείμενη γίνεται:

Υπάρχει τουλάχιστον ένα x που έχει την ιδιότητα A και (αυτό το x) θα πληρώσει (για) όλα τα y που έχουν την ιδιότητα Z. Δηλαδή:

$\exists x(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \wedge \forall y\,(\mathrm{Z}(\mathrm{y}) \rightarrow \Pi(x, y)))$

Το συμπέρασμα γίνεται:

Για κάθε y αν αυτό (που) είναι ζημιά, υπάρχει ένας τουλάχιστον άνθρωπος που θα πληρώσει γι' αυτό.

$\forall y(\mathrm{Z}(\mathrm{y}) \rightarrow \exists x(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \wedge \Pi(x, y)))$.

Άρα έχουμε το επιχείρημα:

$$\frac{\exists x(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \wedge \forall y\,(\mathrm{Z}(\mathrm{y}) \rightarrow \Pi(x, y)))}{\forall y(\mathrm{Z}(\mathrm{y}) \rightarrow \exists x(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \wedge \Pi(x, y)))}$$

Σύμφωνα με το παρακάτω δένδρο, του οποίου όλα τα κλαδιά σπάνουν, το ΣΑΕ είναι μη συνεπές και άρα το επιχείρημα είναι έγκυρο.

$\Sigma AE = \{\exists x(A(x) \land \forall y\,(Z(y) \rightarrow \Pi(x,y))),\ \neg(\forall y(Z(y) \rightarrow \exists x(A(x) \land \Pi(x,y))))\}$		
$=\{\exists x(A(x) \land \forall y\,(Z(y) \rightarrow \Pi(x,y))),\ (\exists y \neg(Z(y) \rightarrow \exists x(A(x) \land \Pi(x,y))))\}$		
$=\{\exists x(A(x) \land \forall y\,(Z(y) \rightarrow \Pi(x,y))),\ (\exists y(Z(y) \land \neg(\exists x(A(x) \land \Pi(x,y)))))\}$		
$=\{\exists x(A(x) \land \forall y\,(Z(y) \rightarrow \Pi(x,y))),\ (\exists y(Z(y) \land (\forall x \neg(A(x) \land \Pi(x,y)))))\}$		
$=\{\exists x(A(x) \land \forall y\,(Z(y) \rightarrow \Pi(x,y))),\ (\exists y(Z(y) \land (\forall x(\neg A(x) \lor \neg\Pi(x,y)))))\}$		
$A(a) \land \forall y\,(Z(y) \rightarrow \Pi(a,y))$		
$A(a)$		
$\forall y\,(Z(y) \rightarrow \Pi(a,y))$		
$(Z(b) \land (\forall x(\neg A(x) \lor \neg\Pi(x,b))))$		
$Z(b)$		
$\forall x(\neg A(x) \lor \neg\Pi(x,b))$		
$Z(b) \rightarrow \Pi(a,b)$		
$\neg Z(b)$	$\Pi(a,b)$	
#	$\neg A(a) \lor \neg\Pi(a,b)$	
	$\neg A(a)$	$\neg\Pi(a,b)$
	#	#

Παράδειγμα.

$$\frac{\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))}{\exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x)}$$

<table>
<tr><td colspan="2">ΣΑΕ = {$\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$, $\neg(\exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x))$}</td></tr>
<tr><td colspan="2">|</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi(\alpha) \wedge \psi(\alpha)$,</td></tr>
<tr><td colspan="2">|</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi(\alpha)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">|</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\psi(\alpha)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">↙↘</td></tr>
<tr><td>$\neg(\exists x\varphi(x))$</td><td>$\neg(\exists x\psi(x))$</td></tr>
<tr><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>$\forall x\neg\varphi(x)$</td><td>$\forall x\neg\psi(x)$</td></tr>
<tr><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>$\neg\varphi(\alpha)$</td><td>$\neg\psi(\alpha)$</td></tr>
<tr><td>#</td><td>#</td></tr>
</table>

Παράδειγμα:

$$\frac{\forall x \exists y L(x,y)}{\exists y \forall x L(x,y)}$$

$\Sigma AE = \{\forall x \exists y L(x,y),\ \neg(\exists y \forall x L(x,y))\}$
$= \{\forall x \exists y L(x,y),\ \forall y \exists x \neg L(x,y)\}$
$\vert$
$\exists y L(\alpha,y)$
$\vert$
$L(\alpha,\beta)$
$\vert$
$\exists x \neg L(x,\alpha)$
$\vert$
$\exists x \neg L(x,\beta)$
$\vert$
$\neg L(\gamma,\alpha)$
$\vert$
$\neg L(\delta,\beta)$
$\vert$
$\ldots$

Εμείς γνωρίζουμε ότι το επιχείρημα είναι άκυρο, αλλά όπως βλέπουμε η μέθοδος αυτή δεν θα μας απαντήσει ποτέ!

Παράδειγμα:

Δεύτερο σχήμα, ΕΑΟ

ΚΕΜ **ΥΑΜ**	$\forall x(K(x) \rightarrow \neg M(x)), \forall x(Y(x) \rightarrow M(x))$
ΥΟΚ	$\exists x(\mathrm{Y}(x) \wedge \neg K(x))$

$$\Sigma\mathrm{AE} = \{\forall x(K(x) \rightarrow \neg M(x)), \forall x(Y(x) \rightarrow M(x)), \neg(\exists x(\mathrm{Y}(x) \wedge \neg K(x)))\}$$

$$= \{\forall x(K(x) \rightarrow \neg M(x)), \forall x(Y(x) \rightarrow M(x)), \forall x(\mathrm{Y}(x) \rightarrow K(x))\}$$

$$K(\alpha) \rightarrow \neg M(\alpha)$$

$$Y(\alpha) \rightarrow M(\alpha)$$

$$\mathrm{Y}(\alpha) \rightarrow K(\alpha)$$

$$\swarrow\searrow$$

$\neg K(\alpha)$				$\neg M(\alpha)$		
$\swarrow\searrow$				$\swarrow\searrow$		
$\neg Y(\alpha)$		$M(\alpha)$		$\neg Y(\alpha)$		$M(\alpha)$
$\swarrow\searrow$		$\swarrow\searrow$		$\swarrow\searrow$		#
$\neg Y(\alpha)$	$K(\alpha)$	$\neg Y(\alpha)$	$K(\alpha)$	$\neg Y(\alpha)$	$K(\alpha)$	
	#		#			

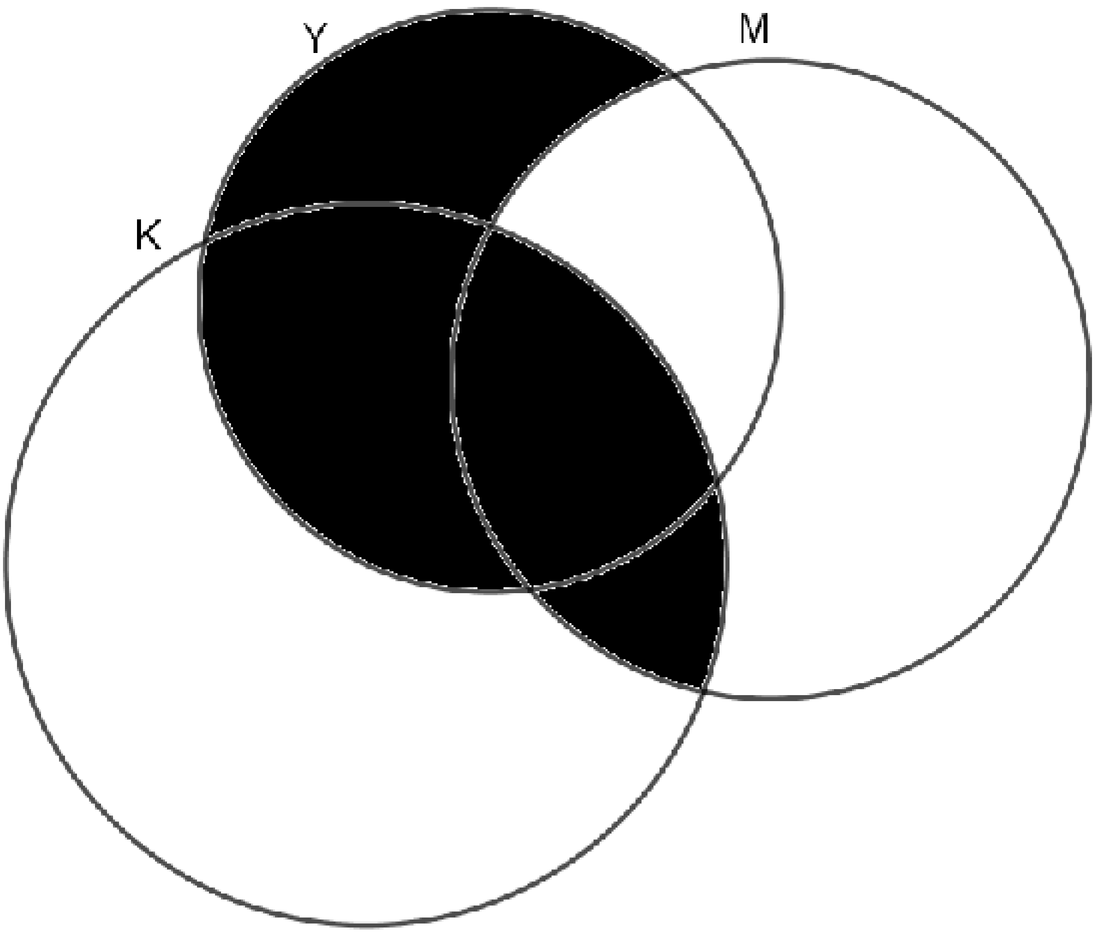
Το επιχείρημα είναι άκυρο αφού στο σύμπαν ({α}: $\neg Y(\alpha), \neg K(\alpha)$} οι δύο προκείμενες είναι αληθείς, ενώ το συμπέρασμα ολοφάνερα δεν είναι.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Συμπλήρωμα στον κανόνα για τον καθολικό ποσοδείκτη

Παρατηρήστε ότι στα δύο τελευταία παραδείγματα στον κανόνα για τον καθολικό ποσοδείκτη προσθέσαμε ακόμη μία περίπτωση. Την περίπτωση να μη γνωρίζουμε το όνομα κανενός αντικειμένου από το πεδίο ερμηνείας. Σε αυτήν και μόνον σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε την ύπαρξη ενός ονοματισμένου αντικειμένου και να αναπτύξουμε το δένδρο μας.

Ωστόσο, αν εργαστεί κανείς **αριστοτελικά**, ο συλλογισμός αυτός λέει: «Όποιο α κι αν πάρεις που έχει την ιδιότητα Υ έχει και την ιδιότητα Μ. Όποιο α κι αν πάρεις που έχει την ιδιότητα Κ δεν έχει την ιδιότητα Μ. **Υπάρχουν α που έχουν την ιδιότητα Υ.** (**Υπαρκτική παραδοχή**). Πάρε ένα τέτοιο α. Αυτό δεν μπορεί να έχει την ιδιότητα Κ, διότι τότε δεν θα είχε την ιδιότητα Μ, που όμως την έχει. Άρα ο συλλογισμός είναι έγκυρος».

Η αριστοτελική λύση με τη μέθοδο των διαγραμμάτων Venn: Το Υ δεν είναι κενό. Στη «μοντέρνα» λύση, το αντιπαράδειγμα είναι ένας κόσμος μη κενός, αλλά μονομελής, του οποίου το μοναδικό μέλος δεν έχει την ιδιότητα Υ.



Παράδειγμα:
Δεν έχω αδελφό, δεν έχω αδελφή
Αλλά 'κείνου του άντρα ο πατέρας
Του πατέρα μου είναι ο γιος.
Επομένως; Ο πατέρας εκείνου του άντρα είμαι εγώ.

Γλώσσα περιέχει τα F, b, =, λογικούς συνδέσμους, ποσοδείκτες
F(x,y) : x πατέρας του/της y
b: εγώ
c: ο πατέρας εκείνου του άντρα.

Να μια μεταγραφή:

$\forall y((\exists x\ ((F(x,y) \wedge F(x,b)) \rightarrow y = b)$	$\exists x(F(x,c) \wedge F(x,b))$
$b = c$	

Οπότε:

ΣΑΕ: $\forall y(\exists x\ ((F(x,y) \wedge F(x,b))) \rightarrow y = b),\ \exists x(F(x,c) \wedge F(x,b)),\ \neg(b = c)$		
$\neg(b = c)$		
$F(\alpha,c) \wedge F(\alpha,b)$		
$F(\alpha,c)$		
$F(\alpha,b)$		
$\exists x\ (F(x,c) \wedge F(x,b)) \rightarrow c = b,$		
$\neg(\exists x\ (F(x,c) \wedge F(x,b)))$		$c = b$
$\forall x \neg\ (F(x,c) \wedge F(x,b))$		#
$\neg\ F(a,c)$	$\neg\ F(a,b)$	
#	#	

$\forall y((\exists x\ ((F(x,y) \wedge F(x,b)) \rightarrow y = b)$: αυτή είναι η μεταγραφή του «εγώ είμαι μοναχοπαίδι». Λέει: για κάθε άνθρωπο y, αν υπάρχει άνθρωπος x που είναι πατέρας τόσο του y όσο και δικός μου, τότε ο άνθρωπος y ταυτίζεται με μένα, (αλλιώς διατυπωμένο για κάθε άνθρωπο y και για κάθε άνθρωπο x, ο x δεν είναι πατέρας του y ή ο x δεν είναι πατέρας μου ή y = b).

Πώς μπορεί να μεταγραφεί η πρόταση «Αλλά 'κείνου του άντρα ο πατέρας του πατέρα μου είναι ο γιος»; Από το παρακάτω πινακάκι

	Ο πατέρας μου	
	↙	↘
(Γιός του πατέρα μου)	Ο πατέρας εκείνου του άντρα (c)	Εγώ (b)
	↓	
	Εκείνος ο άντρας	

μπορούμε να πούμε $\exists x(F(x,c) \wedge F(x,b))$ (αφού γιος του πατέρα μου είμαι εγώ και ταυτόχρονα ο πατέρας εκείνου του άντρα).