1. Είναι έγκυρο ή άκυρο το επιχείρημα Ε;

$$\text{E:} \quad \frac{p \to q, \qquad (\neg q) \vee r}{p \to r}$$

Αντ-Ε : $\{ p \to q,\ (\neg q) \vee r,\ \neg(p \to r)\}$

<table>
<tr><td colspan="5">$p \to q$, $(\neg q) \vee r$, $\neg(p \to r)$</td></tr>
<tr><td colspan="5">p</td></tr>
<tr><td colspan="5">$\neg r$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\neg p$</td><td colspan="2">q</td></tr>
<tr><td colspan="3">#</td><td>$\neg q$</td><td>r</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>#</td><td>#</td></tr>
</table>

Παρατήρησε ότι $(\neg q) \vee r$ δεν «είναι παρά» η $q \to r$, οπότε συζητάμε το επιχείρημα

$$\text{E}_1\text{:} \quad \frac{p \to q, \qquad q \to r}{p \to r}$$

που είναι προφανώς έγκυρο.

Με πίνακα αληθείας η εγκυρότητα φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, αφού στις γραμμές που αληθεύουν και οι δύο προκείμενες αληθεύει και το συμπέρασμα.

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$\neg q$	$(\neg q) \vee r$
Α	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Πραγματιστικά, θα μπορούσαμε να επιχειρηματολογήσουμε ως εξής:

Έστω ότι υπάρχει κατάσταση όπου το συμπέρασμα $p \to r$ είναι ψευδές ενώ οι προκείμενες αληθεύουν. Τότε σε αυτήν p: Α, r : Ψ. Οπότε, επειδή $p \to q$: Α, ισχύει q : Α, οπότε $\neg q$: Ψ, αλλά τότε $(\neg q) \vee r$: Ψ, άτοπο αφού υποθέσαμε ότι ως προκείμενη είναι αληθής.

2. Έγκυρο ή άκυρο;

$$\frac{(\neg q) \vee (r \to s),\ \neg s,\ p \vee q,}{\neg r}$$

<table>
<tr><td colspan="4">Αντ-Ε = $\{(\neg q) \vee (r \to s),\ \neg s,\ p \vee q,\ r\}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\neg s$</td></tr>
<tr><td colspan="4">r</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\neg q$</td><td colspan="2">$r \to s$</td></tr>
<tr><td>p</td><td>q</td><td>$\neg r$</td><td>s</td></tr>
<tr><td></td><td>#</td><td>#</td><td>#</td></tr>
</table>

Το επιχείρημα επομένως είναι άκυρο (το πιο αριστερό κλαδί δεν σπάνει) και η κατάσταση που μαρτυρεί την ακυρότητα αυτή είναι η Κ: p : Α, q : Ψ, r : Α, s : Ψ. Προφανώς σε αυτήν $\neg s$: Α, $p \vee q$:Α, $(\neg q) \vee (r \to s)$: Α (δηλ. οι τρεις προκείμενες αληθεύουν) και το συμπέρασμα $\neg r$: Ψ. Άρα το επιχείρημα είναι άκυρο.

<table>
<tr><td colspan="6">Αντ-Ε = $\{(\neg q) \vee (r \to s),\ \neg s,\ p \vee q,\ r\}$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\neg s$</td></tr>
<tr><td colspan="6">r</td></tr>
<tr><td colspan="3">p</td><td colspan="3">q</td></tr>
<tr><td>$\neg q$</td><td colspan="2">$r \to s$</td><td>$\neg q$</td><td colspan="2">$r \to s$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\neg r$</td><td>s</td><td>#</td><td>$\neg r$</td><td>s</td></tr>
<tr><td></td><td>#</td><td>#</td><td></td><td>#</td><td>#</td></tr>
</table>

Πραγματιστική, έστω κατάσταση στην οποία $\neg r$ ψευδής (δηλ. r: Α) και οι προκείμενες αληθείς. Οπότε $\neg s$: Α, δηλ. s: Ψ , οπότε $r \rightarrow s$: Ψ. Τότε όμως $(\neg q)$:Α, δηλ. q: Ψ, οπότε αρκεί p : Α, για να έχω όντως μία τέτοια κατάσταση που δείχνει την ακυρότητα του επιχειρήματος.

3. Δείξε ότι η φ είναι (p→(q→r)) ↔ ((p∧q) →r) είναι ταυτολογία;

Θα εξετάσω αν το $\{\neg\varphi\}$ είναι συνεπές ή μη. Αν είναι μη συνεπές, δηλ. όλα τα κλαδιά του δένδρου που «φυτρώνει» από την $\neg\varphi$ σπάνε, τότε η φ είναι ταυτολογία.

<table>
<tr><td colspan="6">¬ ((p→(q→r)) ↔ ((p∧q) →r))</td></tr>
<tr><td colspan="3">(p→(q→r))</td><td colspan="3">¬ ((p→(q→r))</td></tr>
<tr><td colspan="3">¬ ((p∧q) →r)</td><td colspan="3">(p∧q) →r</td></tr>
<tr><td colspan="3">p∧q</td><td colspan="3">p</td></tr>
<tr><td colspan="3">¬r</td><td colspan="3">¬(q→r)</td></tr>
<tr><td colspan="3">p</td><td colspan="3">q</td></tr>
<tr><td colspan="3">q</td><td colspan="3">¬r</td></tr>
<tr><td>¬ p</td><td colspan="2">q→r</td><td colspan="2">¬ (p∧q)</td><td>r</td></tr>
<tr><td>#</td><td>¬ q</td><td>r</td><td>¬p</td><td>¬q</td><td>#</td></tr>
<tr><td></td><td>#</td><td>#</td><td>#</td><td>#</td><td></td></tr>
</table>

Σημασιακά δείχνω ότι είναι ταυτολογία με τον παρακάτω πίνακα αληθείας.

p	q	r	q→r	p→(q→r)	p∧q	(p∧q)→r	5σ↔7σ
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α

Πραγματιστικά,

έστω μία κατάσταση στην οποία η $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ αληθεύει, αλλά η $(p \wedge q) \rightarrow r$ είναι ψευδής. Τότε όμως $p \wedge q$: Α, δηλ. p: Α, q: Α και r : Ψ. Αλλά τότε $q \rightarrow r$: Α, και επομένως q: Ψ, οπότε άτοπο.

Και αντίστροφα,

έστω μία κατάσταση όπου $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ είναι ψευδής, αλλά η $(p \wedge q) \rightarrow r$ αληθεύει. Το τελευταίο συμβαίνει γιατί $p \wedge q$: Ψ ή r: Α. Αλλά, αν (1) $p \wedge q$: Ψ, τότε p: Ψ, q: Ψ, οπότε $p \rightarrow (q \rightarrow r)$: Α, άτοπο. Και αν (2), r: Α, τότε επειδή p: Α και $q \rightarrow r$: Ψ, έπεται r: Ψ, άτοπο.

4. Είναι συνεπές ή μη συνεπές το σύνολο Σ;

$$\Sigma = \{p \rightarrow \neg q,\ \neg(p \wedge r),\ q \wedge r\}$$

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">$p \rightarrow q, \neg(p \wedge r),\ q \wedge r$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">q</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">r</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$\neg p$</td><td align="center">$\neg r$</td></tr>
<tr><td align="center">$\neg p$</td><td align="center">$\neg q$</td><td align="center">#</td></tr>
<tr><td></td><td align="center">#</td><td></td></tr>
</table>

Στην κατάσταση Κ: p : Ψ, r : Α, q : Α, οι τρείς προτάσεις του Σ συναληθεύουν, άρα το Σ είναι συνεπές.