|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Σύνολο Αντεπιχειρήματος : {(p), (p}** | | |
| **p** | | |
| **(** | | |
| **q** | | |
| **r** | | |
| **/\** | | |
|  | |  |
| **/\** | | **#** |
| **p** | **q** |  |
| **#** | **#** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **E:** | **(*p*** |
| ***p*** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Ε1:** | ***p*** |
| **(*p*** |

|  |  |
| --- | --- |
| **E:** | **(*p*** |
| ***p*** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Αντ-Ε1: { *p*, ((*p*}** | | |
| **(*p*** | | |
|  | | |
| **p** | | |
|  | | |
| ***p*** |  | |
| ***#*** | ***q*** | **r** |
|  | ***#*** | **#** |

* **Με τη μέθοδο των δένδρων (συντακτική μέθοδο ή ταμπλό του Beth) αποδείξαμε ότι τόσο το επιχείρημα Ε όσο και το επιχείρημα Ε1 είναι έγκυρα.**
* **Παρατήρηση 1. Ταυτόχρονα αποδείξαμε έτσι ότι** **η πρόταση** **φ**: (**(*p*((*p* είναι ταυτολογία. Και αποδείξαμε ότι είναι ταυτολογία με τη βοήθεια της παρακάτω παρατήρησης.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Tο επιχείρημα Ε:** |  |
|  |

**είναι έγκυρο ανν η πρόταση είναι ταυτολογία.**

**Πράγματι, αν Ε έγκυρο τότε όταν όλες οι προκείμενες είναι αληθείς, οπότε και η σύζευξή τους είναι, είναι αληθές και το συμπέρασμα q, οπότε η πρόταση είναι αληθής. Η είναι εξάλλου αληθής όταν είναι ψευδής. Άρα, όταν Ε έγκυρο, ταυτολογία. Αντίστροφα, αν ταυτολογία, τότε είναι πάντα αληθής, και επομένως όταν αληθής, οπότε και όλες οι προκείμενες του Ε είναι αληθείς, η q είναι αληθής, άρα το επιχείρημα Ε είναι έγκυρο.**

* **Παρατήρηση 2. Θα μπορούσαμε να (πραγματιστικά) αποδείξει ότι η φ είναι ταυτολογία και και ως εξής. Έστω ότι υπάρχει κατάσταση Κ στην οποία η φ είναι Ψ. Αυτό θα συνέβαινε γιατί στην Κ θα ήταν:**

**1. (*p*: Α και (*p*: Ψ ή**

**2. (*p*: Ψ και (*p*: Α.**

**Οπότε στην 1. από (*p*: Ψ προκύπτει p: A, q: Ψ, r: Ψ, οπότε *p:* Ψ, και άρα (*p*: Ψ. Άτοπο.**

**Ενώ στη 2. από (*p*: Ψ προκύπτει p: A, q: Ψ, r: Ψ, οπότε : Ψ και άρα *p*: Ψ. Άτοπο.**

**Άρα η φ είναι πάντα αληθής, δηλαδή ταυτολογία.**

* **Παρατήρηση 3. θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι η φ είναι ταυτολογία και δείχνοντας ότι η {φ} είναι μη συνεπές σύνολο με τη βοήθεια δένδρων. Σε αυτήν την περίπτωση το δένδρο θα διακλαδωνόταν αμέσως σε δύο κλαδιά με το αριστερό να είναι η ανάλυση του πρώτου από τα δύο παραπάνω επιχειρήματα και το δεξί το δεύτερο.**
* **Παρατήρηση 4. Θα μπορούσαμε να είχαμε δείξει ότι η φ είναι ταυτολογία σημασιακά, δηλαδή καταρτίζοντας τον πίνακα αλήθειας της φ και παρατηρώντας ότι είναι σε όλες τις καταστάσεις αληθής.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | **5η** |  | **7η** |  |
| ***p*** | ***q*** | ***r*** | ***p*** | **(*p*** |  | ***p*** | (**(*p*((*p*** |
| **A** | **A** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** |
| **A** | **Ψ** | **Α** | **Ψ** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** |
| **Ψ** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** |
| **Ψ** | **Ψ** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** |
| **A** | **A** | **Ψ** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** |
| **A** | **Ψ** | **Ψ** | **Ψ** | **Ψ** | **Ψ** | **Ψ** | **Α** |
| **Ψ** | **Α** | **Ψ** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** | **Α** |
| **Ψ** | **Ψ** | **Ψ** | **Α** | **Α** | **Ψ** | **Α** | **Α** |

**Παρατηρούμε επίσης ότι με τον ίδιο πίνακα αληθείας (χωρίς την τελευταία στήλη), μπορούμε να εξετάσουμε την εγκυρότητα των δύο παραπάνω επιχειρημάτων: με προκείμενη την πρόταση στην 5η στήλη και συμπέρασμα την πρόταση στην 7η βλέπουμε ότι το επιχείρημα είναι έγκυρο και επίσης βλέπουμε ότι είναι έγκυρο το επιχείρημα με προκείμενη την πρόταση στην 7η στήλη και συμπέρασμα την πρόταση στην 5η στήλη.**

* **Θεώρημα Πληρότητας του Προτασιακού Λογισμού (GÖDEL, 1928)**

**Χ ανν Χ**

**Χ : η πρόταση *φ* είναι λογικό επακόλουθο του συνόλου προτάσεων Χ (το Χ μπορεί να είναι και το κενό σύνολο) ανν η *φ* είναι αληθής σε κάθε κατάσταση που όλες οι προτάσεις του Χ είναι αληθείς.**

**Χ : η πρόταση *φ* αποδεικνύεται με τη βοήθεια των προτάσεων του συνόλου Χ (το Χ μπορεί να είναι και το κενό σύνολο) ανν το Χ αναπτύσσεται σε ένα δένδρο που όλα τα κλαδιά του σπάνε.**

**(φ ταυτολογία ανν μη συνεπές ανν αναπτύσσεται σε ένα δένδρο που όλα τα κλαδιά του σπάνε, , δηλ. , φ αληθής σε κάθε κατάσταση).**

**Μέθοδος. Για επιχείρημα (έγκυρο ή άκυρο;).**

1. **Συντακτική, δηλ. σχηματίζω το σύνολο αντεπιχειρήματος (προκείμενες μαζί με την άρνηση του συμπεράσματος) και αναλύω τι συμβαίνει σε μια τέτοια κατάσταση ακολουθώντας κλαδιά δένδρων σύμφωνα με τους κανόνες ανάπτυξής τους. Αν όλα τα κλαδιά σπάνε το επιχείρημα είναι έγκυρο (διότι το σύνολο αντεπιχειρήματος είναι μη συνεπές). Αν ένα τουλάχιστον δεν σπάει, το επιχείρημα είναι άκυρο, και κάθε τέτοιο μη σπασμένο κλαδί μου δίνει και μια κατάσταση στην οποία οι προκείμενες αληθεύουν και το συμπέρασμα είναι ψευδές (δηλ. κατάσταση που μαρτυρεί την ακυρότητα του επιχειρήματος).**
2. **Σημασιακή, για να δείξουμε ότι ένα επιχείρημα είναι έγκυρο με πίνακες αλήθειας:**

**Ι. καταρτίζουμε τον (κοινό) πίνακα αλήθειας για τις προκείμενες και το συμπέρασμα q**

**ΙΙ. εντοπίζουμε τις γραμμές όπου όλες οι προκείμενες είναι αληθείς και**

**ελέγχουμε αν σε αυτές είναι και το συμπέρασμα αληθές. Αν είναι, το επιχείρημα είναι έγκυρο. Εάν δεν είναι έγκυρο, τότε κάθε γραμμή στην οποία το συμπέρασμα είναι ψευδές μας παρέχει ένα αντεπιχείρημα στην εγκυρότητά του.**

**Είναι φανερό ότι η μέθοδος αυτή είναι δύσχρηστη όταν οι προτασιακές μεταβλητές είναι περισσότερες από τρεις ή οι προκείμενες είναι πολλές.**

1. **Πραγματιστική, υποθέτω ότι αληθεύουν οι προκείμενες και είναι ψευδές το συμπέρασμα και παρακολουθώ τις συνέπιες αυτής της παραδοχής. Αν καταλήξω σε άτοπο, το επιχείρημα είναι προφανώς έγκυρο, αλλιώς (αν δηλ. μπορεί να συμβαίνει να είναι οι προκείμενες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές για κάποια απόδοση τιμών αλήθειας στις μεταβλητές που υπεισέρχονται στις προτάσεις) είναι άκυρο.**

**Αντίστοιχα εργάζομαι αν το ερώτημα είναι αν κάποιο σύνολο προτάσεων είναι συνεπές ή μη συνεπές. Τότε συντακτικά δείχνω είτε ότι όλα τα κλαδιά του δένδρου που «φυτρώνει» από αυτό το σύνολο σπάνε (οπότε το σύνολο είναι μη συνεπές) είτε ότι τουλάχιστον ένα από τα κλαδιά δεν σπάει, οπότε το σύνολο είναι συνεπές.**

**Ή πραγματιστικά υποθέτω ότι υπάρχει κατάσταση όπου όλες οι προτάσεις του συνόλου συναληθεύουν και παρακολουθώ τις συνέπειες αυτής της παραδοχής. Αν καταλήξω σε άτοπο, το σύνολο είναι μη συνεπές, αν καταλήξω ότι υπάρχει απόδοση τιμών αληθείας στις μεταβλητές που υπεισέρχονται στις προτάσεις που επιτρέπει τη συναλήθευση όλων των προτάσεων, τότε το σύνολο είναι συνεπές.**

**΄Η σημασιακά, καταρτίζω τον πίνακα αληθείας των προτάσεων του συνόλου και βλέπω αν υπάρχουν γραμμές όπου όλες συναληθεύουν.**

**Τέλος, μελετώ αν η πρόταση φ είναι ταυτολογία είτε καταρτίζοντας τον πίνακα αληθείας της και διαπιστώνοντας ότι είναι σε όλες τις δυνατές καταστάσεις αληθείς είτε δείχνοντας με όποιον από τους παραπάνω τρόπους θέλουμε ότι το σύνολο {} είναι μη συνεπές.**

**Πληρότητα λογικών συνδέσμων**

**Παράδειγμα: Θέλω να εξετάσω αν η παρακάτω φ είναι ταυτολογία ή όχι. Παίρνω την άρνησή της και εξετάζω αν το σύνολο {} είναι συνεπές ή όχι. Αν δεν είναι συνεπές, τότε η είναι πάντα ψευδής, δηλ. η φ απάντα αληθής, δηλ. η φ ταυτολογία.**

φ : (**(*p*((*p***

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | ((**(*p*((*p*** |  | | |
|  | | | | **/\** |  | | |
| **(*p*** | | | |  | **((*p*)** | | |
| (**(*p*** | | | |  | ***p*** | | |
| **p** | | | |  | **(*p*** | | |
|  | | | |  |  | | |
|  | | | |  | ***p*** | | |
|  | | | |  |  | | |
| ***p*** | | | **r** |  |  |  | |
| ***p*** | | **q** | **#** |  | **#** | **q** | **r** |
| ***#*** | ***#*** | |  |  |  | **#** | **#** |
|  | | |  |  |  | | |
|  | | |  |  |  | | |

**Πληρότητα Λογικών συνδέσμων**

**Παρατηρούμε ότι σε κάθε πίνακα αλήθειας αντιστοιχεί μία μοναδική διαζευκτική πρόταση. Στον παρακάτω πίνακα αντιστοιχεί η ακόλουθη πρόταση @:**

**(αφού ο πίνακας αλήθειας της @ είναι προφανώς αυτός που μας δόθηκε).**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***p*** | ***q*** | ***r*** | **@** |
| **A** | **Α** | **Α** | **Α** |
| **A** | **Ψ** | **Α** | **Α** |
| **Ψ** | **Α** | **Α** | **Α** |
| **Ψ** | **Ψ** | **Α** | **Ψ** |
| **A** | **Α** | **Ψ** | **Α** |
| **A** | **Ψ** | **Ψ** | **Ψ** |
| **Ψ** | **Α** | **Ψ** | **Ψ** |
| **Ψ** | **Ψ** | **Ψ** | **Ψ** |

**Είναι φανερό επομένως σε κάθε πρόταση έχει μία κανονική διαζευκτική πρόταση ισοδύναμη με αυτήν. Π.χ.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***p*** | ***q*** |  |
| **Α** | **Α** | **A** |
| **Α** | **Ψ** | **Ψ** |
| **Ψ** | **Α** | **A** |
| **Ψ** | **Ψ** | **A** |

**Άρα η παρακάτω πρόταση σ πρέπει να είναι ταυτολογία (αφού ο πίνακας αληθείας είναι ακριβώς εκείνος της συνεπαγωγής ) και φυσικά είναι!**

**σ:**

**είναι** **λογικά ισοδύναμη****με την** , **επομένως με την**

[**αφού η**  **είναι ταυτολογία], άρα με την**

**επομένως με την**

**που είναι λογικά ισοδύναμη με την .**