Πίνακες αληθείας και ταυτολογίες.

p	q	¬p	¬q	p ∨ q	¬(p ∨ q)	(¬p) ∧ (¬q)	[¬(p ∨ q)] ↔ [(¬p) ∧ (¬q)]
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α

Δείξε με τον ίδιο τρόπο ότι [¬(p ∧ q)] ↔ [(¬p) ∨ (¬q)].

p	q	r	p ∧ (q ∨ r)	q ∨ r	p ∧ q	p ∧ r	(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)	[p ∧ (q ∨ r)] ↔ [(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)]
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α

Δείξε με τον ίδιο τρόπο ότι [p ∨ (q ∧ r)] ↔ [(p ∨ q) ∧ (p ∨ r)].

Κατάρτισε τον πίνακα αληθείας των προτάσεων

I. **p → (q → p)** **Verum sequitur ad quolibet**

II. **¬p → (p → q)** **Ex falso sequitur quolibet**

p	q	q → p	**p → (q → p)**
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α

Δείξε με τον ίδιο τρόπο ότι το II είναι επίσης ταυτολογία.

Πληρότητα συνδέσμων

Λογικοί σύνδεσμοι: ∧, ∨, ⟶, ⟷, ¬

Μήπως είναι δυνατόν να εκφράσουμε όλους τους λογικούς συνδέσμους με τη βοήθεια μόνον των συνδέσμων ∨, ¬;

Ναι, γι αυτό λέμε ότι το σύνολο {∨, ¬} είναι λογικά πλήρες.

Επίσης το σύνολο $\{\wedge, \neg\}$ είναι λογικά πλήρες.

Γνωρίζουμε ότι $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow [(\neg p) \vee q]$ είναι ταυτολογία.

Γνωρίζουμε ότι είναι ταυτολογία και ο παρακάτω τύπος:

$[\neg(p \vee q)] \leftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)]$. Οπότε και ο παρακάτω τύπος που προκύπτει αντικαθιστώντας τα p, q αντίστοιχα με $\neg p$ και $\neg q$.

$\neg[(\neg p) \vee (\neg q)] \leftrightarrow [\neg(\neg p) \wedge \neg(\neg q)]$. Επομένως και ο τύπος $\neg[(\neg p) \vee (\neg q)] \leftrightarrow (p \wedge q)$ είναι ταυτολογία.

$\neg[(p) \vee (\neg q)] \leftrightarrow [\neg(p) \wedge \neg(\neg q)]$.

Δείξε ότι ο παρακάτω τύπος είναι επίσης ταυτολογία

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p))$. Οπότε

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(\neg p) \vee q] \wedge [(\neg q) \vee p]$

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(\neg[(\neg p) \vee q] \vee \neg[(\neg q) \vee p])$.

p	q	p|q (Shaefer's Stroke)	¬p	(p|q)|(p|q)	p ∧ q	(p|q)|(p|q) ⟷ (p ∧ q)
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α

Δείξε ότι το σύνολο $\{|\}$ είναι λογικά πλήρες.

p|p στην πρώτη γραμμή Ψ (όταν δηλαδή p : Α).

p|p στην τελευταία γραμμή Α (όταν δηλαδή p : Ψ).

Άρα $(p|p) \longleftrightarrow (\neg p)$ ταυτολογία.

Αφού μπορούμε να εκφράσουμε όλους τους λογικούς συνδέσμους με τα $\wedge, \neg$ και αφού αυτά δύο μπορεί να εκφραστούν μόνον με το |, άρα μόνον με το | μπορούμε να εκφράσουμε όλους τους λογικούς συνδέσμους.