**Είναι το ακόλουθο επιχείρημα έγκυρο ή άκυρο;**

|  |
| --- |
| **Κάποιος θα πληρώσει (για) όλες τις ζημιές.**  |
| **Επομένως κάθε ζημιά θα πληρωθεί (από κάποιον).**  |

**Είναι φανερό ότι για να μεταγράψουμε το επιχείρημα αυτό στη γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής των σχέσεων χρειαζόμαστε τις ακόλουθες σχέσεις**

**Α(x) : x άνθρωπος**

**Ζ(y) : y ζημιά**

**Π(z, w) : z πληρώνει (για) w.**

**Η προκείμενη γίνεται:**

**Υπάρχει τουλάχιστον ένα x που έχει την ιδιότητα Α και (αυτό το x) θα πληρώσει (για) όλα τα y που έχουν την ιδιότητα Ζ. Δηλαδή:**

$∃x($**Α(x)** $∧$$∀y$ **(Ζ(y)**$\rightarrow Π(x, y)$**))**

**Το συμπέρασμα γίνεται:**

**Για κάθε y αν αυτό (που) είναι ζημιά, υπάρχει ένας τουλάχιστον άνθρωπος που θα πληρώσει γι’ αυτό.**

$∀y$**(Ζ(y)**$\rightarrow ∃x(Α(x)∧Π(x, y)$**)).**

**Άρα έχουμε το επιχείρημα:**

|  |
| --- |
| $∃x($**Α(x)** $∧$$∀y$ **(Ζ(y)**$\rightarrow Π(x, y)$**))**  |
| $∀y$**(Ζ(y)**$\rightarrow ∃x(Α(x)∧Π(x, y)$**))**  |

**Σύμφωνα με το παρακάτω δένδρο, του οποίου όλα τα κλαδιά σπάνουν, το ΣΑΕ είναι μη συνεπές και άρα το επιχείρημα είναι έγκυρο.**

|  |
| --- |
| **ΣΑΕ = {**$∃x($**Α(x)** $∧$$∀y$ **(Ζ(y)**$\rightarrow Π(x, y)$**)),** $¬(∀y$**(Ζ(y)**$\rightarrow ∃x(Α(x)∧Π(x, y)$**)))}** |
|  **={**$∃x($**Α(x)** $∧$$∀y$ **(Ζ(y)**$\rightarrow Π(x, y)$**)),** $(∃y¬$**(Ζ(y)**$\rightarrow ∃x(Α(x)∧Π(x, y)$**)))}** |
|  **={**$∃x($**Α(x)** $∧$$∀y$ **(Ζ(y)**$\rightarrow Π(x, y)$**)),** $(∃y($**Ζ(y)**$ ∧¬(∃x(Α\left(x\right)∧Π\left(x, y\right))$**)))}** |
|  **={**$∃x($**Α(x)** $∧$$∀y$ **(Ζ(y)**$\rightarrow Π(x, y)$**)),** $(∃y($**Ζ(y)**$ ∧(∀x¬(Α\left(x\right)∧Π\left(x, y\right))$**)))}** |
|  **={**$∃x($**Α(**$x$**)** $∧$$∀y$ **(Ζ(y)**$\rightarrow Π(x, y)$**)),** $(∃y($**Ζ(y)**$ ∧(∀x(¬Α\left(x\right)∨¬Π\left(x, y\right))$**)))}** |
| **Α(**$a$**)** $∧$$∀y$ **(Ζ(y)**$\rightarrow Π(a, y)$**)** |
| **Α(**$a$**)** |
| $∀y$ **(Ζ(y)**$\rightarrow Π(a, y)$**)** |
| $($**Ζ(**$b$**)**$ ∧(∀x(¬Α\left(x\right)∨¬Π\left(x, b\right))$**))** |
| **Ζ(**$b$**)** |
| $$∀x(¬Α\left(x\right)∨¬Π\left(x, b\right))$$ |
|  **Ζ(**$b$**)**$\rightarrow Π(a, b)$ |
| $¬$**Ζ(**$b$**)** | $$Π(a, b)$$ |
| **#** | $$¬Α\left(a\right)∨¬Π\left(a, b\right)$$ |
|  | $$¬Α\left(a\right)$$ | $$¬Π\left(a, b\right)$$ |
|  | **#** | **#** |

**Παράδειγμα.**

|  |
| --- |
| $∃x(φ\left(x\right)∧ψ(x)$**)** |
| $$∃xφ\left(x\right)∧∃xψ(x)$$ |

|  |
| --- |
| **ΣΑΕ = {**$∃x(φ\left(x\right)∧ψ(x)$**),**$ ¬($$∃xφ\left(x\right)∧∃xψ(x))\}$ |
| **|** |
| $φ\left(α\right)∧ψ(α)$**,** |
| **|** |
| $$φ\left(α\right)$$ |
| **|** |
| $$ψ(α)$$ |
| $$\swarrow \searrow $$ |
| $¬($$∃xφ\left(x\right))$ | $$¬(∃xψ(x))$$ |
| **|** | **|** |
| $$∀x¬ φ\left(x\right)$$ | $$∀x¬ ψ\left(x\right)$$ |
| **|** | **|** |
| $$¬ φ\left(α\right)$$ | $$¬ ψ\left(α\right)$$ |
| **#** | **#** |

Παράδειγμα:

|  |
| --- |
| $$∀x∃yL(x, y)$$ |
| $$∃y∀xL(x, y)$$ |

|  |
| --- |
| **ΣΑΕ ={**$∀x∃yL(x, y)$***,***$ ¬($$∃y∀xL(x, y)$**)}** |
| **={**$∀x∃yL(x, y)$***,***$ ∀y ∃x¬L(x, y)$**}** |
| **|** |
| $$∃yL(α, y)$$ |
| **|** |
| $$L(α, β)$$ |
| **|** |
| $$∃x¬L(x, α)$$ |
| **|** |
| $$∃x¬L(x, β)$$ |
| **|** |
| $$¬L(γ, α)$$ |
| **|** |
| $$¬L(δ, β)$$ |
| **|** |
|  **. . .** |

Εμείς γνωρίζουμε ότι το επιχείρημα είναι άκυρο, αλλά όπως βλέπουμε η μέθοδος αυτή δεν θα μας απαντήσει ποτέ!

**Παράδειγμα:**

**Δεύτερο σχήμα, ΕΑΟ**

|  |
| --- |
| **ΚΕΜ** |
| **ΥΑΜ** |
| **ΥΟΚ** |

|  |
| --- |
| $∀x(K\left(x\right)\rightarrow ¬M\left(x\right))$**,** $∀x(Y\left(x\right)\rightarrow M\left(x\right))$ |
| $∃x($**Y(**$x$**)**$ ∧¬K$**(**$x$**))** |

|  |
| --- |
| $ΣΑΕ=\{∀x(K\left(x\right)\rightarrow ¬M\left(x\right))$**,** $∀x(Y\left(x\right)\rightarrow M\left(x\right))$**,** $¬(∃x($**Y(**$x$**)**$∧¬K$**(**$x$**)))}** |
| **= {**$∀x(K\left(x\right)\rightarrow ¬M\left(x\right))$**,** $∀x(Y\left(x\right)\rightarrow M\left(x\right))$**,** $∀x($**Y(**$x$**)**$ \rightarrow K$**(**$x$**))}** |
| $$K\left(α\right)\rightarrow ¬M\left(α\right)$$ |
| $$Y\left(α\right)\rightarrow M\left(α\right)$$ |
| **Y(**$α$**)**$ \rightarrow K$**(**$α$**)** |
| $$\swarrow \searrow $$ |
| $$¬K\left(α\right)$$ | $$¬M\left(α\right)$$ |
| $$\swarrow \searrow $$ | $$\swarrow \searrow $$ |
| $$¬Y\left(α\right)$$ | $$Μ\left(α\right)$$ | $$¬Y\left(α\right)$$ | $$M(a)$$ |
| $$\swarrow \searrow $$ | $$\swarrow \searrow $$ | $$\swarrow \searrow $$ | **#** |
| $$¬Y\left(α\right)$$ | $$K\left(α\right)$$ | $$¬Y\left(α\right)$$ | $$K\left(α\right)$$ | $$¬Y\left(α\right)$$ | $$K\left(α\right)$$ |  |  |
|  | **#** |  | **#** |  |  |  |  |
|  |
| **Το επιχείρημα είναι άκυρο αφού στο σύμπαν ({α}:** $¬Y\left(α\right), ¬Κ\left(α\right)$**} οι δύο προκείμενες είναι αληθείς, ενώ το συμπέρασμα ολοφάνερα δεν είναι.**  |

**Παρατηρήστε ότι στα δύο τελευταία παραδείγματα στον κανόνα για τον καθολικό ποσοδείκτη προσθέσαμε ακόμη μία περίπτωση. Την περίπτωση να μη γνωρίζουμε το όνομα κανενός αντικειμένου από το πεδίο ερμηνείας. Σε αυτήν και μόνον σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε την ύπαρξη ενός ονοματισμένου αντικειμένου και να αναπτύξουμε το δένδρο μας.**

Ωστόσο, αν εργαστεί κανείς αριστοτελικά, ο συλλογισμός αυτός λέει: «Όποιο α κι αν πάρεις που έχει την ιδιότητα Υ έχει και την ιδιότητα Μ. Όποιο α κι αν πάρεις που έχει την ιδιότητα Κ δεν έχει την ιδιότητα Μ. **Υπάρχουν α που έχουν την ιδιότητα Υ**. (Υπαρκτική παραδοχή). Πάρε ένα τέτοιο α. Αυτό δεν μπορεί να έχει την ιδιότητα Κ, διότι τότε δεν θα είχε την ιδιότητα Μ, που όμως την έχει. Άρα ο συλλογισμός είναι έγκυρος».



**Δεν έχω αδελφό, δεν έχω αδελφή**

**Αλλά ’κείνου του άντρα ο πατέρας**

**Του πατέρα μου είναι ο γιος.**

**Επομένως; O πατέρας εκείνου του άντρα είμαι εγώ.**

**Γλώσσα περιέχει τα F, b, =, λογικούς συνδέσμους, ποσοδείκτες**

**F(x,y) : x πατέρας του/της y**

**b: εγώ**

**c: ο πατέρας εκείνου του άντρα**

|  |
| --- |
| $∀y((∃x$ ***((F(x,y)*** $∧$ ***F(x,b)*** $)\rightarrow $ ***y = b)*** $ ∃x(F\left(x,c\right)∧F\left(x,b\right))$ |
| ***b = c*** |

|  |
| --- |
| $∀y(∃x$ ***((F(x,y)*** $∧$ ***F(x,b)*** $))\rightarrow $ ***y = b),*** $∃x(F\left(x,c\right)∧F\left(x,b\right)), ¬$**(*b = c*)** |
| $¬$**(*b = c*)** |
| $$F\left(α,c\right)∧F\left(α,b\right)$$ |
| $$F\left(α,c\right)$$ |
| $$F\left(α,b\right)$$ |
| $∃x$ ***(F(x,c)*** $∧$ ***F(x,b)*** $)\rightarrow $ ***c = b,*** |
| $¬(∃x$ ***(F(x,c)*** $∧$ ***F(x,b)*** $)$ | ***c = b*** |
| $∀x¬$ ***(F(x,c)*** $∧$ ***F(x,b))*** | ***#*** |
| $¬$ ***F(a,c)*** | $¬$ ***F(a, b)*** |  |
| ***#*** | ***#*** |  |
|  |

$∀y((∃x$**((*F*(*x,y)*** $∧$ ***F(x,b*)**$)\rightarrow $ ***y = b*) : αυτή είναι η ορθή μεταγραφή του «εγώ είμαι μοναχοπαίδι». Λέει: για κάθε άνθρωπο y, αν υπάρχει άνθρωπος x που είναι πατέρας τόσο του y όσο και δικός μου, τότε ο άνθρωπος y ταυτίζεται με μένα, (αλλιώς διατυπωμένο για κάθε άνθρωπο y και για κάθε άνθρωπο x, ο x δεν είναι πατέρας του y ή ο x δεν είναι πατέρας μου ή y = b).**

Η πρόταση$ ∀y(∃x$***((F(x,y)*** $∧$ ***F(x,b)*** $\rightarrow $ ***y = b*)) που χρησιμοποιήσαμε λανθασμένα στην αρχή λέει: Για κάθε άνθρωπο y υπάρχει άνθρωπος x που αν είναι πατέρας τόσο του y όσο και δικός μου, τότε ο άνθρωπος y ταυτίζεται με μένα, (αλλιώς διατυπωμένο: για κάθε άνθρωπο y υπάρχει άνθρωπος x που δεν είναι πατέρας του ή (αυτός ο) x δεν είναι πατέρας μου ή ο y ταυτίζεται με μένα (άσχετο!))**