

ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΚΑΙ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Καθ. Θεόδωρος Καρακασίδης
Δρ Αθανάσιος Φράγκου

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Βιώσιμη Διαχείριση Περιβαλλοντικών Αλλαγών και
Κυκλική Οικονομία»

Γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης χρονοσειρών

- Χρονοσειρά των μεταβολών της σταθμής ενός ποταμού x_t , $t = 1, \dots, N$.

Θεωρούμε ότι δεν περιέχει μη γραμμικές συσχετίσεις (η στοχαστική διαδικασία είναι γραμμική).

Γενικά: Τα μοντέλα παλινδρόμησης ορίζουν μια εξαρτημένη μεταβλητή ως συνάρτηση κάποιων άλλων ανεξάρτητων μεταβλητών

Ειδικότερα: Στα γραμμικά μοντέλα παλινδρόμησης -> **γραμμική συνάρτηση** (η εξαρτημένη μεταβλητή είναι γραμμικός συνδυασμός των ανεξάρτητων μεταβλητών)

Γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης χρονοσειρών

Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα

Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα (AutoRegressive models, AR)

- Μοντέλα γραμμικής παλινδρόμησης

- Θεωρούμε: **εξαρτημένη** μεταβλητή την τυχαία μεταβλητή της χρονοσειράς x_t , σε μια χρονική στιγμή t

ανεξάρτητες μεταβλητές την τυχαία μεταβλητή της χρονοσειράς x_t σε **προηγούμενους χρόνους**, δηλαδή τις $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}$.

Γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης χρονοσειρών

Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα

Συμβολισμός Αυτοπαλινδρομούμενου μοντέλου

Συμβολίζεται με $AR(p)$ και ορίζεται ως το άθροισμα

$$x_t = \varphi_0 + \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2}, \dots, \varphi_p x_{t-p} + z_t$$

- $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ συντελεστές του μοντέλου και z_t λευκός θόρυβος με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ^2 .

Ο αριθμός p των υστερήσεων λέγεται **τάξη (order)** του αυτοπαλινδρομούμενου μοντέλου.

Γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης χρονοσειρών

Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα

Εύρεση Αυτοπαλινδρομούμενου μοντέλου

- Εκτιμούμε τους **συντελεστές** και τη **διασπορά** του λευκού θορύβου από τη χρονοσειρά και οι τιμές τους χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη της χρονοσειράς για τις επόμενες χρονικές στιγμές.

Κατά τη χρονική στιγμή t , η μεταβλητή της χρονοσειράς **μπορεί να «εξηγηθεί»** από τις p τελευταίες τιμές της χρονοσειράς $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}$ (ένα μέρος αυτής)

Το υπόλοιπο μέρος που **δεν «εξηγείται»** είναι στοχαστικό (επιδράσεις εξωτερικών παραγόντων τη χρονική στιγμή t),

Γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης χρονοσειρών

Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα

Αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο $AR(p)$ και αυτοσυσχέτιση.

Μικρή αυτοσυσχέτιση σε μικρούς χρόνους (μικρές υστερήσεις)-> αδυναμία πρόβλεψης με μοντέλο AR.

Παράδειγμα: Αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο πρώτης τάξης $AR(1)$

$$x_t = \varphi_0 + \varphi_1 x_{t-1} + z_t$$

Εάν $|\varphi_1| < 1$ η χρονοσειρά που περιγράφεται από το μοντέλο είναι **στάσιμη**

Γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης χρονοσειρών

Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα

Αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο $AR(p)$ και αυτοσυσχέτιση.

- Εάν η χρονοσειρά έχει μέση τιμή μηδέν τότε $\varphi_0 = 0$
- Εάν η χρονοσειρά έχει μέση τιμή διαφορετική του μηδενός τότε αφαιρώντας τη μέση τιμή από κάθε στοιχείο της χρονοσειράς, δηλαδή

$$x'_t = x_t - \mu$$

Το μοντέλο γίνεται

$$x'_t = \varphi x'_{t-1} + z_t$$

Από τα παραπάνω έχουμε

$$\varphi_1 = \varphi \text{ και } \varphi_0 = \mu - \varphi\mu$$

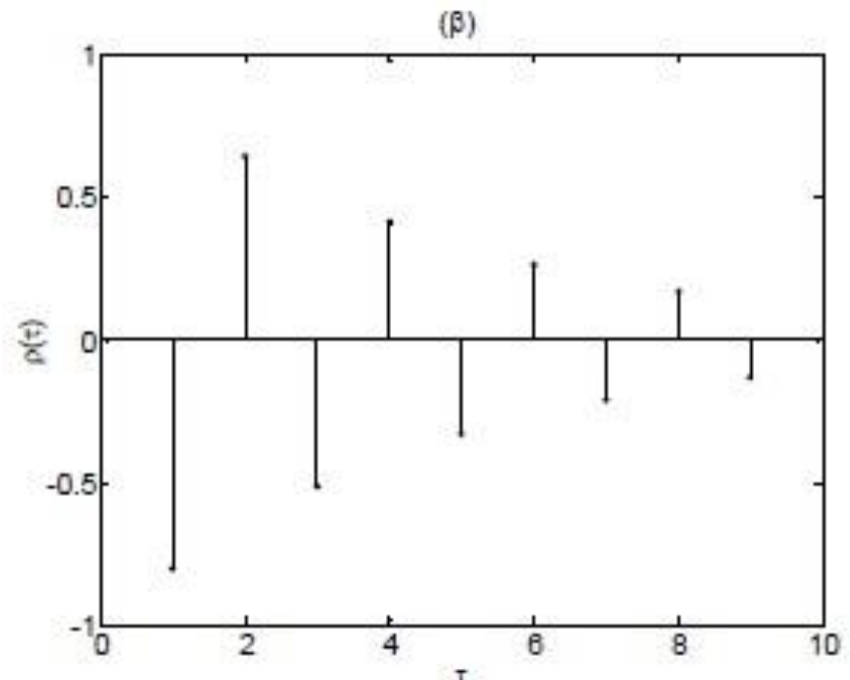
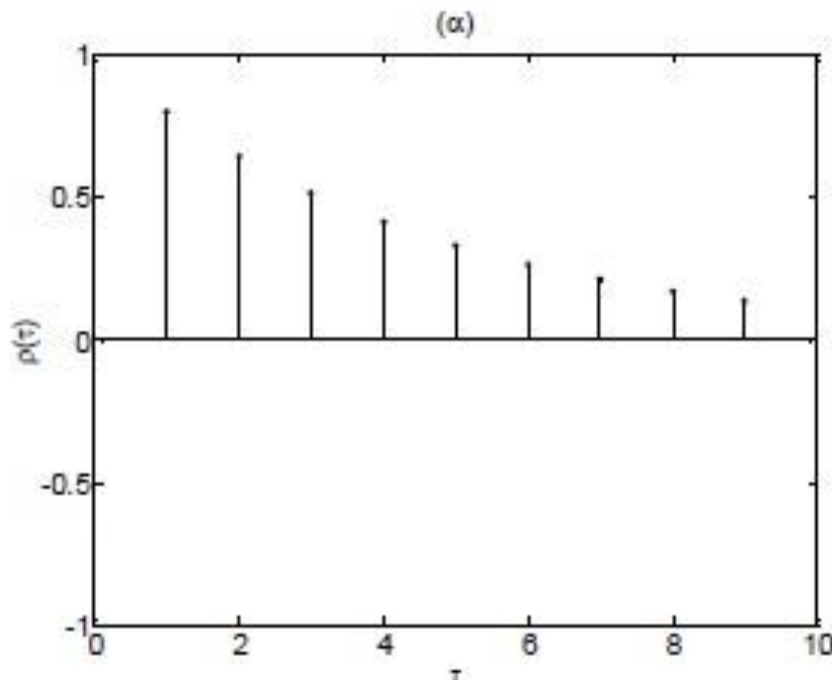
Γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης χρονοσειρών

Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα

Αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο $AR(p)$ και αυτοσυσχέτιση.

Για $\varphi > 0$ η αυτοσυσχέτιση ρ_τ φθίνει μονότονα στο μηδέν (εικ. α, $\varphi = 0.8$)

Για $\varphi < 0$ η αυτοσυσχέτιση ρ_τ φθίνει εναλλασσόμενα γύρω από το μηδέν (εικ. β $\varphi = -0.8$)



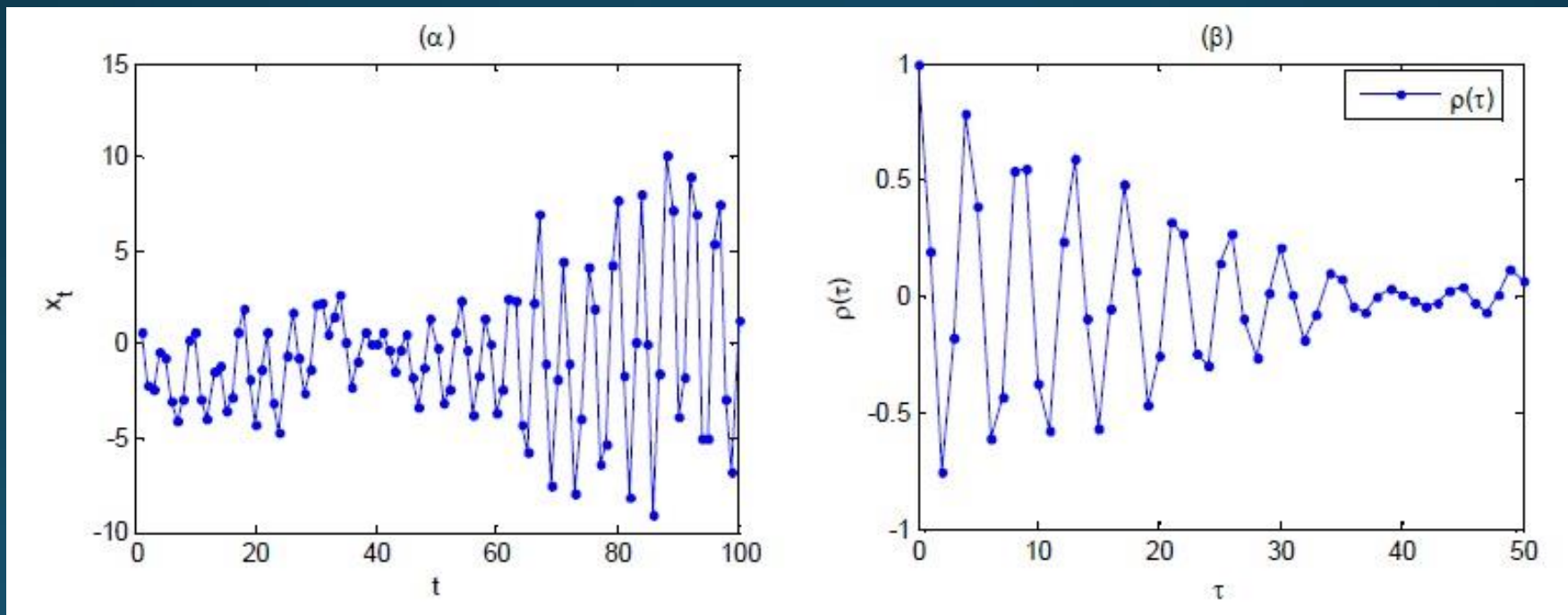
Γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης χρονοσειρών

Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα

Η μορφή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης μπορεί να ποικίλει αυξάνοντας την τάξη του μοντέλου, ωστόσο πάντα θα φθίνει εκθετικά στο 0.

Παράδειγμα :Αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο AR(4) και η χρονοσειρά που παράγει (εικ α) και αυτοσυσχέτιση (εικ β).

$$x_t = 1.4x_{t-1} - 1.53x_{t-2} + 1.22x_{t-3} - 0.3104x_{t-4} + z_t$$



Πρόβλεψη χρονοσειρών με τάση και περιοδικότητα

- Μια χρονοσειρά μπορεί να περιέχει τάσεις, όπως θερμοκρασίες ή άνοδος και πτώση χρηματιστηρίου, αλλά και περιοδικότητα. Αναλύεται σε τρεις συνιστώσες:

$$y_t = \mu_t + s_t + x_t$$

μ_t : τάση (συναρτήσεΙ του χρόνου)

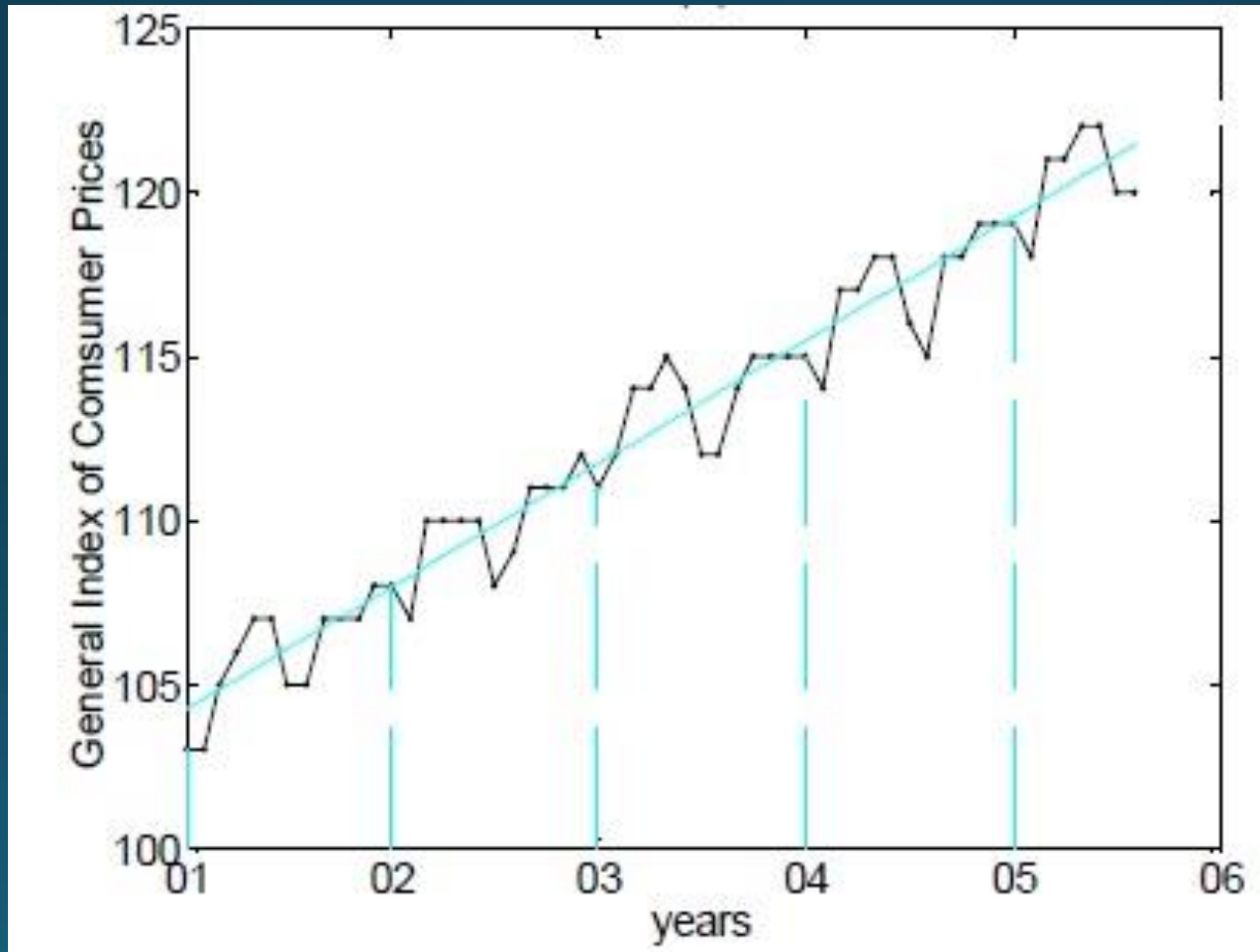
s_t : περιοδικότητα σταθερής περιόδου

x_t : χρονοσειρά υπολοίπων που είναι στάσιμη

Για να εκτιμηθούν τα μοντέλα πρόβλεψης πρέπει να **απαλείψουμε** την τάση κα την περιοδικότητα

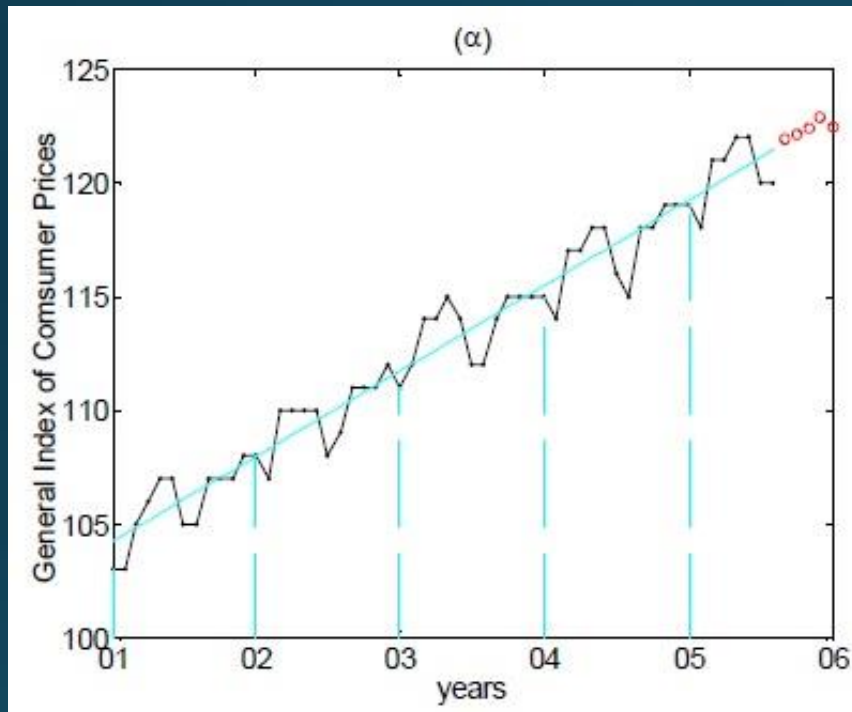
Πρόβλεψη χρονοσειρών με τάση και περιοδικότητα

- Παράδειγμα αφαίρεσης τάσης και περιοδικότητας
- Χρονοσειρά γενικός δείκτης τιμών καταναλωτή (μηνιαίες τιμές Ιανουάριος 2001- Αύγουστος 2005, αριθμ. σημείων 56)

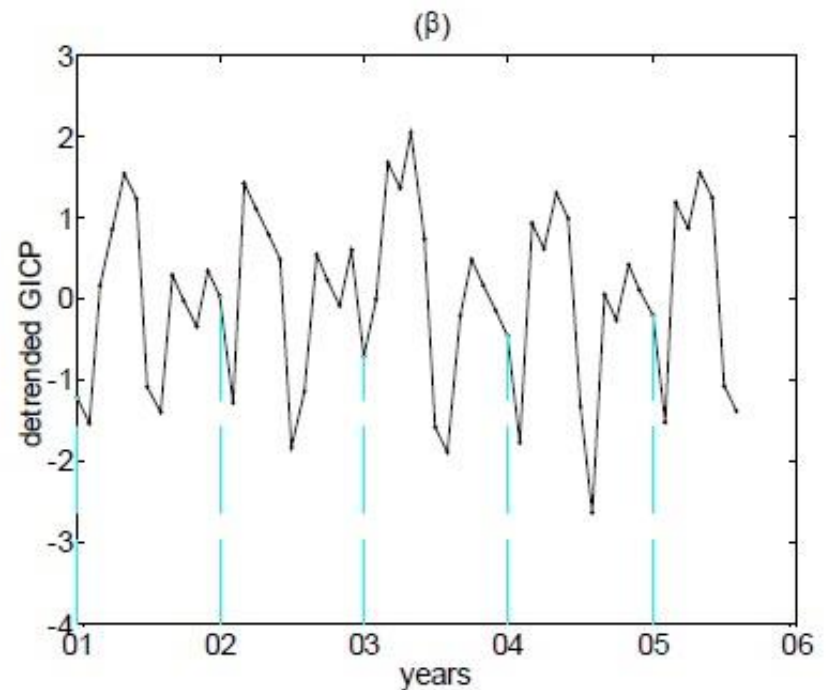


Πρόβλεψη χρονοσειρών με τάση και περιοδικότητα

- Αφαίρεση γραμμικής τάσης



Αρχική χρονοσειρά

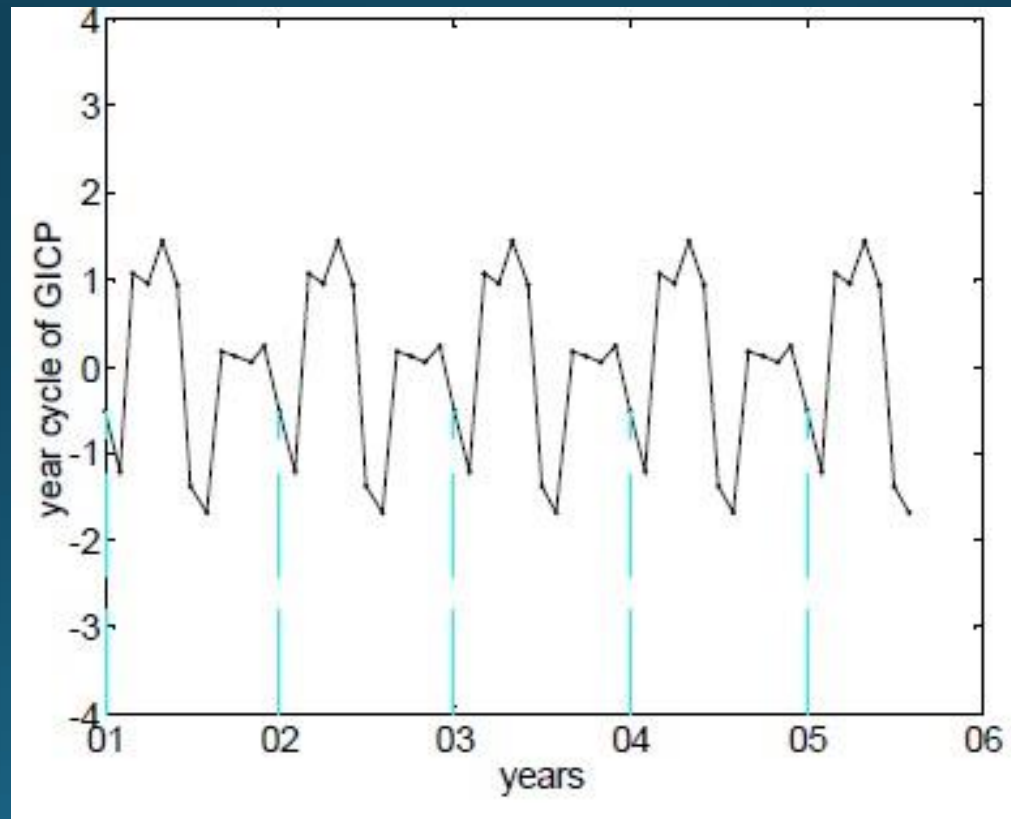


Η Χρονοσειρά μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης

Πρόβλεψη χρονοσειρών με τάση και περιοδικότητα

- Αφαίρεση περιοδικότητας με εκτίμηση των περιόδων

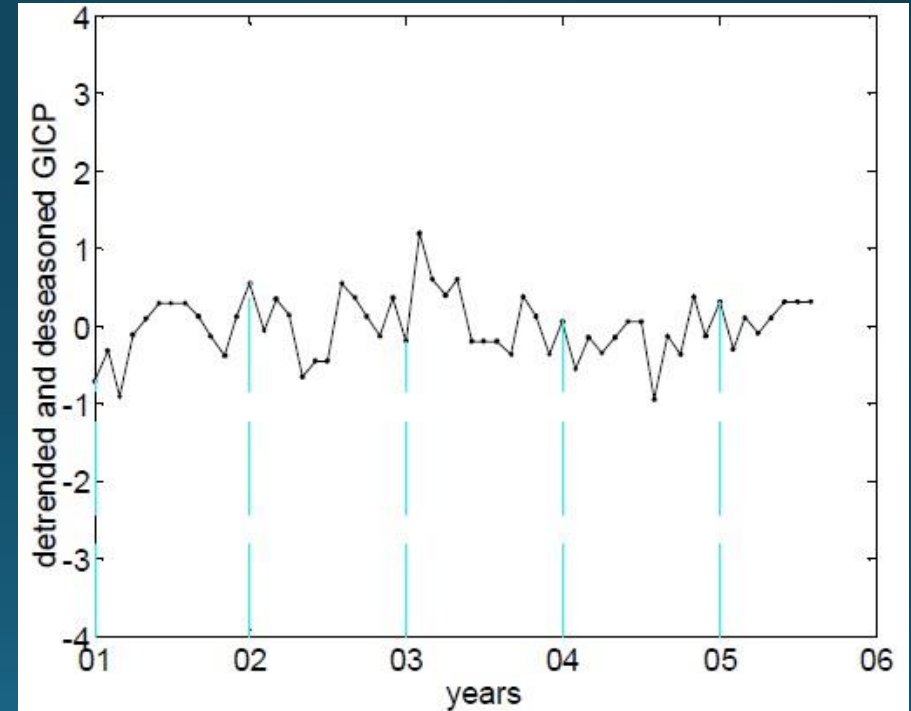
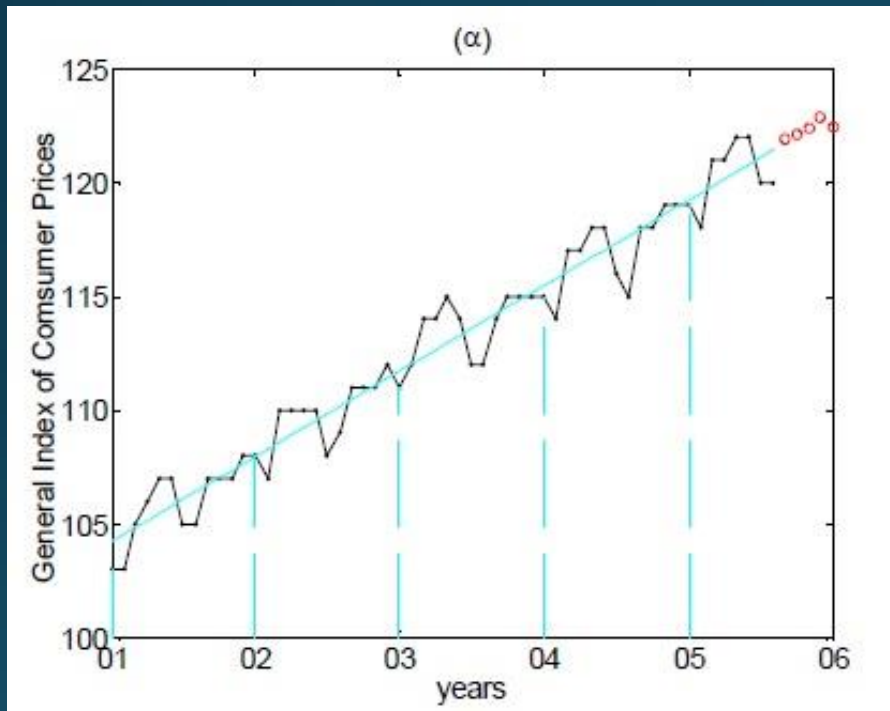
Εκτίμηση του ετήσιου κύκλου του δείκτη -> Υπολογίζουμε για τον Ιανουάριο το μέσο όρο από τις τιμές Ιανουαρίου για τα 5 χρόνια. Την τιμή του μέσου όρου που υπολογίσαμε την αφαιρούμε από τις 5 παρατηρήσεις του Ιανουαρίου (για τα έτη 2001 –2005). Το ίδιο κάνουμε και για τους άλλους μήνες οπότε και **σχηματίζεται ο ετήσιος κύκλος**



Πρόβλεψη χρονοσειρών με τάση και περιοδικότητα

- Αφαίρεση περιοδικότητας με εκτίμηση των περιόδων

Για περαιτέρω ανάλυση ιδιοτήτων της χρονοσειράς, αφαιρούμε από την χρονοσειρά χωρίς τάση αυτή του ετήσιου κύκλου και προκύπτει η νέα προς ανάλυση χρονοσειρά.



Προσαρμογή μοντέλου σε χρονοσειρά

Προσαρμογή μοντέλου σε χρονοσειρά

Διαδικασία προσαρμογής του μοντέλου AR

- Επιλογή της τάξης p του μοντέλου,
- Εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου
-
- Διαγνωστικός έλεγχος καταλληλότητας του μοντέλου.

Προσαρμογή μοντέλου σε χρονοσειρά

Επιλογή της τάξης p του μοντέλου

Προσαρμογή μοντέλου σε χρονοσειρά

Κριτήρια Επιλογής της τάξης p του μοντέλου,

- Κριτήριο βάσει **μερικής αυτοσυσχέτισης** (partial autocorrelation function).
- Κριτήρια με βάση το σφάλμα προσαρμογής (AIC, BIC, FPE)

Προσαρμογή μοντέλου σε χρονοσειρά

Κριτήρια Επιλογής της τάξης p του μοντέλου,

1. Κριτήριο βάσει **μερικής αυτοσυσχέτισης** (partial autocorrelation function).

Γίνεται εκτίμηση των παραμέτρων μοντέλων AR με αυξανόμενη τάξη.

Για τάξη 1, το μοντέλο είναι

$$x_t = \varphi_{1,1} x_{t-1} + z_t$$

Τάξη = 1

Άρα η τιμή της μερικής αυτοσυσχέτισης υστέρησης 1 είναι και ο εκτιμώμενος συντελεστής

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση αυτή η μερική αυτοσυσχέτιση ισούται με την αυτοσυσχέτιση, (μη ύπαρξη ενδιάμεσων μεταβλητών).

Προσαρμογή μοντέλου σε χρονοσειρά

Κριτήρια Επιλογής της τάξης p του μοντέλου,

1. Κριτήριο βάσει **μερικής αυτοσυσχέτισης** (partial autocorrelation function).

Γίνεται εκτίμηση των παραμέτρων μοντέλων AR με αυξανόμενη τάξη.

Για τάξη 2 το μοντέλο είναι

$$x_t = \varphi_{1,2}x_{t-1} + \varphi_{2,2}x_{t-2} + z_t$$

Τάξη = 2

Άρα η τιμή της μερικής αυτοσυσχέτισης υστέρησης 2 είναι και ο εκτιμώμενος συντελεστής

Προσαρμογή μοντέλου σε χρονοσειρά

Κριτήρια Επιλογής της τάξης p του μοντέλου,

1. Κριτήριο βάσει **μερικής αυτοσυσχέτισης** (partial autocorrelation function).

Γίνεται εκτίμηση των παραμέτρων μοντέλων AR με αυξανόμενη τάξη.

Για τάξη 3 το μοντέλο είναι

$$x_t = \varphi_{1,3}x_{t-1} + \varphi_{2,3}x_{t-2} + \varphi_{3,3}x_{t-3} + z_t$$

Τάξη = 3



Άρα η τιμή της μερικής αυτοσυσχέτισης υστέρησης 3 είναι και ο εκτιμώμενος συντελεστής

Προσαρμογή μοντέλου σε χρονοσειρά

Κριτήριο βάσει **μερικής αυτοσυσχέτισης** (partial autocorrelation function).

Προσδιορίζουμε την τάξη του AR μοντέλου από την τιμή της **χρονικής υστέρησης** στην οποία παρατηρείται απότομη πτώση από μη-μηδενική σε μηδενική μερική αυτοσυσχέτιση.

Προσαρμογή μοντέλου σε χρονοσειρά

Κριτήρια Επιλογής της τάξης p του μοντέλου βάσει σφάλματος προσαρμογής.

- κριτήριο πληροφορίας του Akaike
Akaike information criterion (AIC)

$$AIC(p) = \ln(s_z^2) + \frac{2p}{n}$$

- κριτήριο Μπεϋζιανής πληροφορίας (Schwartz)
Bayesian information criterion (BIC)

$$BIC(p) = \ln(s_z^2) + \frac{p \ln(n)}{n}$$

- κριτήριο τελικού σφάλματος πρόβλεψης
Final prediction error (FPE)

$$FPE(p) = s_z^2 \frac{n+p}{n-p}$$

Βασίζονται στην πιθανοφάνεια των δεδομένων με δείκτη s_z^2 της διασποράς των υπολοίπων. Η χρονοσειρά έχει μήκος n .

Προσαρμογή μοντέλου σε χρονοσειρά

Εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου

Προσαρμογή μοντέλου σε χρονοσειρά

Διαδικασία προσαρμογής του μοντέλου AR

- Εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

$$\min_{\phi_1, \dots, \phi_p} \sum_{t=p+1}^n \left(x_t - \phi_1 x_{t-1} - \dots - \phi_p x_{t-p} \right)^2$$

Προσαρμογή μοντέλου σε χρονοσειρά

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Ελαχιστοποιούμε τα σφάλματα

$$e_i = y_i - (a + bx_i)$$

Ή

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$$

Παραγωγίζοντας και λύνοντας σύστημα εξισώσεων εκτιμούμε τα a, b .

Η μέση απόκλιση μεταξύ της πραγματικής και εκτιμώμενης τιμής της μεταβλητής ονομάζεται τυπικό σφάλμα εκτίμησης

Προσαρμογή μοντέλου σε χρονοσειρά

**Διαγνωστικός έλεγχος καταλληλότητας
του μοντέλου.**

Προσαρμογή μοντέλου σε χρονοσειρά

Διαδικασία προσαρμογής του μοντέλου AR

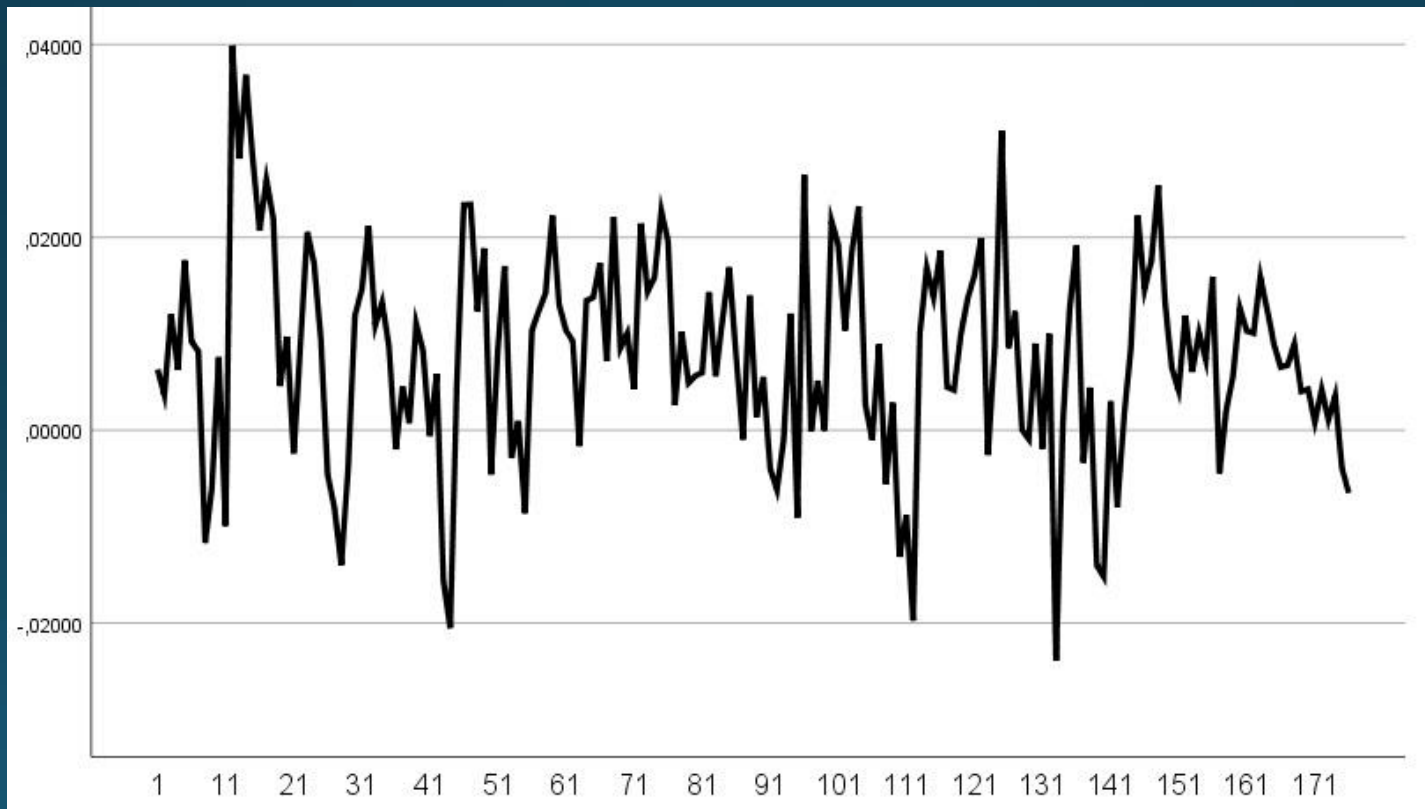
- **Διαγνωστικός έλεγχος καταλληλότητας του μοντέλου.**

Ελέγχουμε εάν τα σφάλματα προσαρμογής, (διαφορές πραγματικών από εκτιμώμενες τιμές είναι ανεξάρτητα (δεν προέρχονται από λευκό θόρυβο ή υπάρχουν συσχετίσεις που δεν έχουν συμπεριληφθεί από το μοντέλο). Τότε το μοντέλο είναι ανεπαρκές.

Εφαρμογή προσαρμογής μοντέλου σε
χρονοσειρά

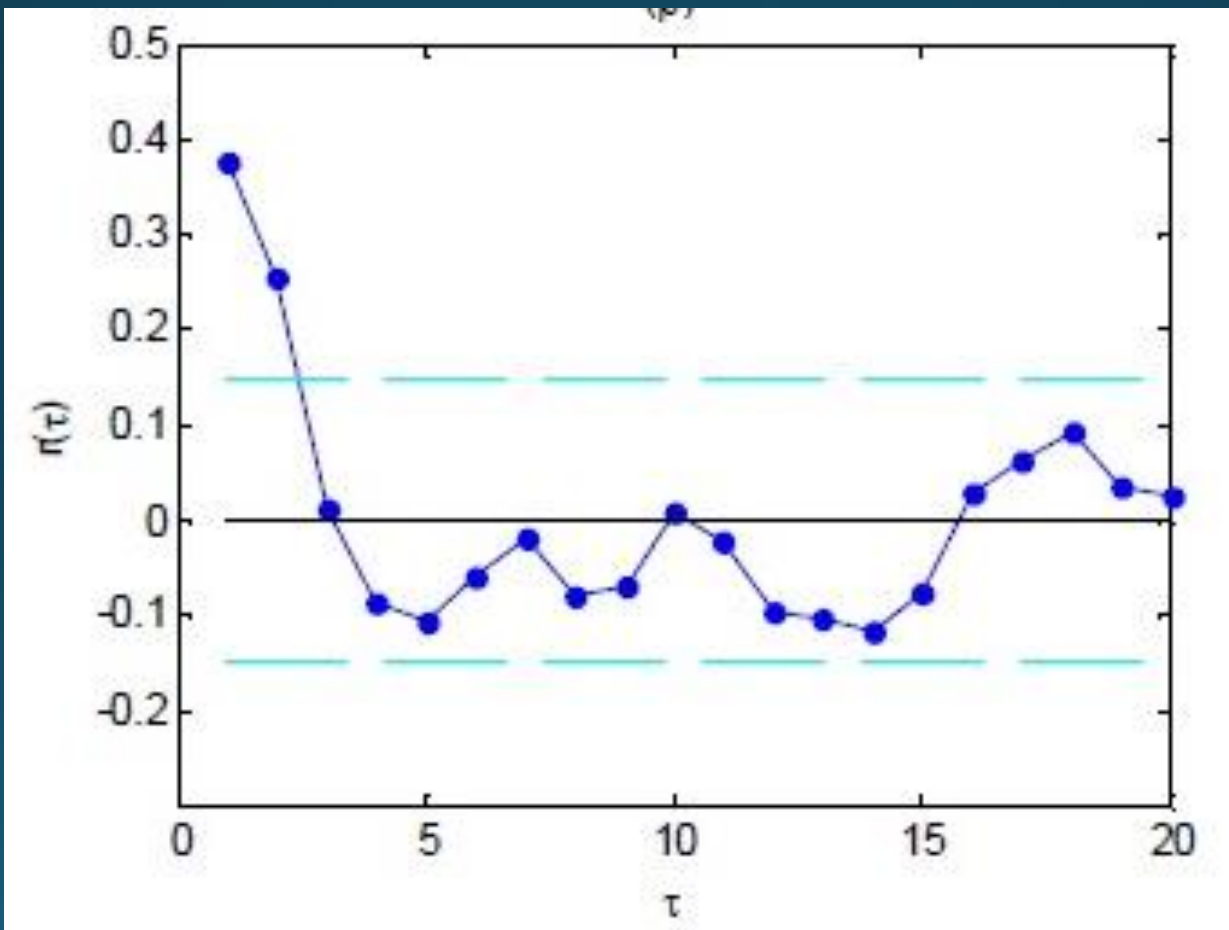
Εφαρμογή προσαρμογής μοντέλου σε χρονοσειρά

Χρονοσειρά ρυθμού μεταβολής του ακαθάριστου εθνικού προϊόντος (ΑΕΠ) των ΗΠΑ . Δεδομένα τετραμηνιαίων τιμών από το 2ο τετράμηνο 1947 ως το 1ο τετράμηνο 1991. (Κουγιουμτζής Δ., «Μοντέλα χρονοσειρών, πρόβλεψη»)



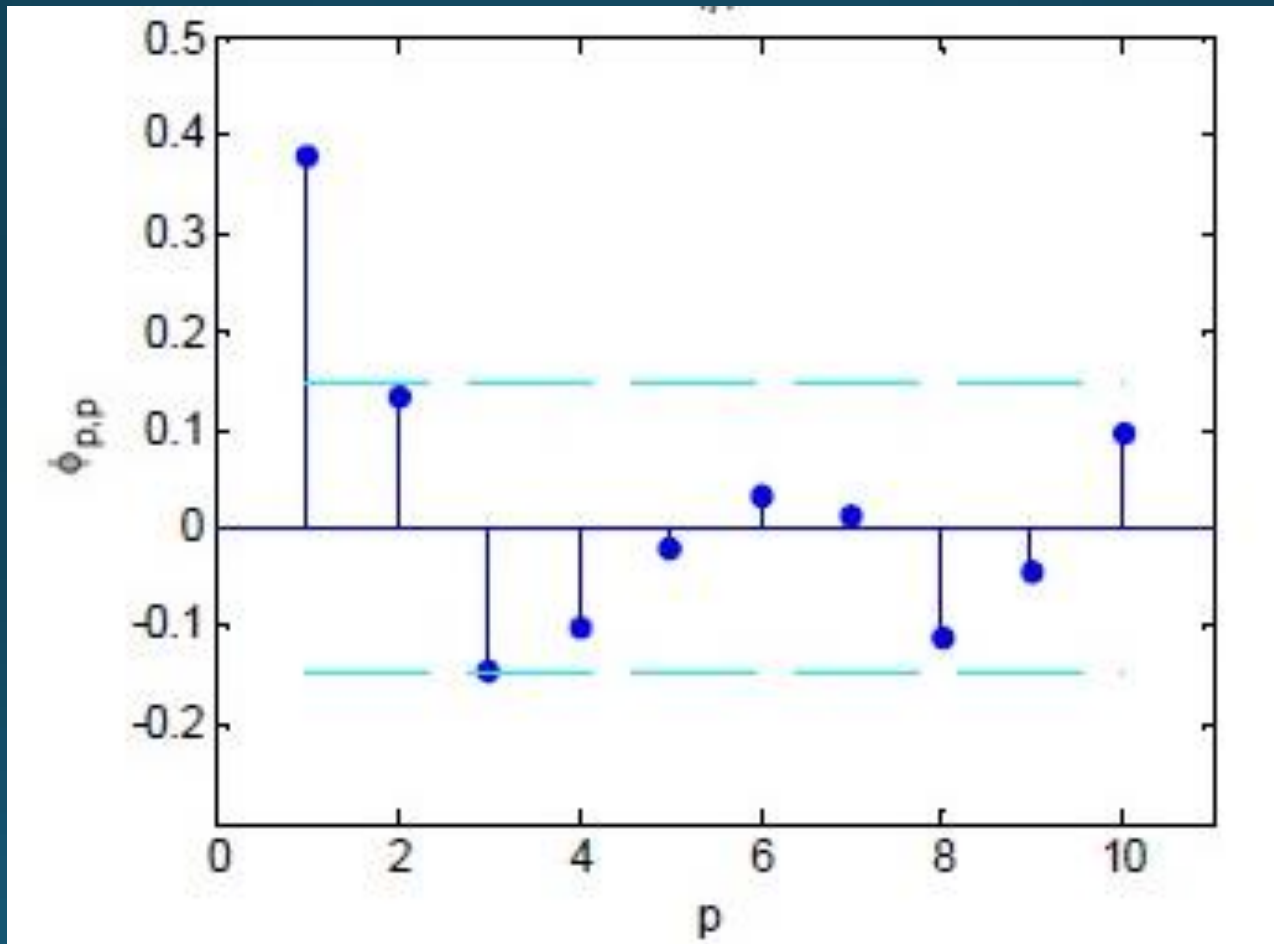
Εφαρμογή προσαρμογής μοντέλου σε χρονοσειρά

Αφού έχουμε απαλείψει την τάση και την εποχικότητα πρέπει να βρούμε την τάξη του μοντέλου. Η **συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** πέφτει γρήγορα στο 2



Εφαρμογή προσαρμογής μοντέλου σε χρονοσειρά

Η συνάρτηση **μερικής αυτοσυσχέτισης** πέφτει γρήγορα οριακά στο 3



Προσδιορισμός τάξης $\rho=3$ (δυσκολία, διότι είναι οριακά σημαντικές).

Εφαρμογή προσαρμογής μοντέλου σε χρονοσειρά

Προσαρμογή του μοντέλου στη χρονοσειρά (υπολογισμοί)

- Αφαιρούμε τη μέση τιμή ($\mu=0.0077$) από κάθε παρατήρηση.
- Εκτιμούμε τους συντελεστές με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
- Υπολογίζουμε το $\varphi_0 = \hat{\mu}(1 - \hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_3)$

- Γράφουμε την εξίσωση του μοντέλου

$$\hat{x}_t = 0.35x_{t-1} + 0.18x_{t-2} - 0.14x_{t-3}$$

- Υπολογίζουμε τα σφάλματα εκτίμησης $\hat{z}_t = x_t - \hat{x}_t$ και την διασπορά των σφαλμάτων $\sigma_z^2 = 0.0000989$

Εφαρμογή προσαρμογής μοντέλου σε χρονοσειρά

Προσαρμογή του μοντέλου στη χρονοσειρά με το TISEAN

ar-model USgnp.dat -p3 -o artest.dat

```
artest - Σημειωματάριο
Αρχείο  Επεξεργασία  Μορφή  Προβολή  Βοήθεια
#average forcast error= 9.779314e-003
#individual forecast errors: 9.779314e-003
# 3.509094e-001
# 1.809072e-001
# -1.443459e-001
-2.439528e-003
9.021857e-003
-1.140508e-003
-2.043818e-003
-1.843800e-002
-6.664446e-003
8.188348e-003
-1.794505e-002
3.641250e-002
1.231778e-002
1.354484e-002
1.108957e-002
3.536431e-003
1.414704e-002
8.483645e-003
-9.587402e-003
2.100404e-003
```

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

$$\hat{x}_t = 0.35x_{t-1} + 0.18x_{t-2} - 0.14x_{t-3}$$