

Ηλεκτρονική II

Τμήμα Φυσικής Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Μέρος 1



Περιεχόμενα

- Αναλογικά και Ψηφιακά Μεγέθη
- Αριθμητικά Συστήματα
- Κώδικες
- Απλές Λογικές Πράξεις
- Άλγεβρα Boole
- Ψηφιακές Λογικές Πύλες

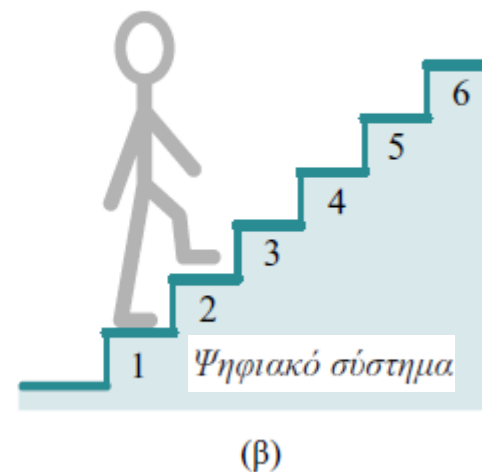
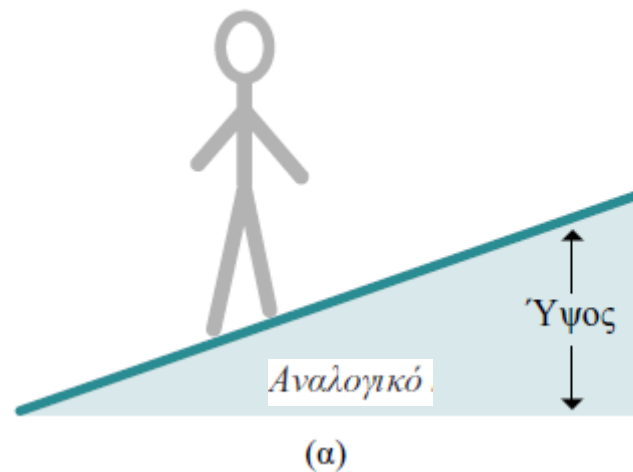
Αναλογικά και Ψηφιακά Μεγέθη

Αναλογικά και Ψηφιακά Μεγέθη

4

Αναλογικά είναι τα μεγέθη που οι καταστάσεις τους μπορούν να πάρουν συνεχείς τιμές και σε κάθε τιμή του μεγέθους αντιστοιχεί μία πληροφορία.

Ψηφιακά είναι τα μεγέθη, και τα αντίστοιχα συστήματα, που οι καταστάσεις τους παίρνουν διακριτές τιμές.



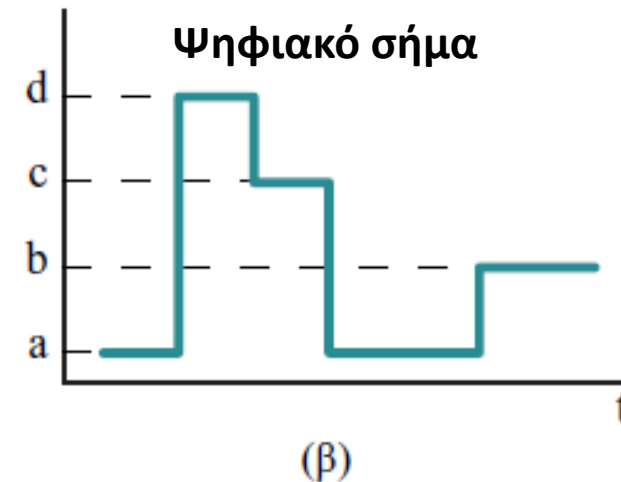
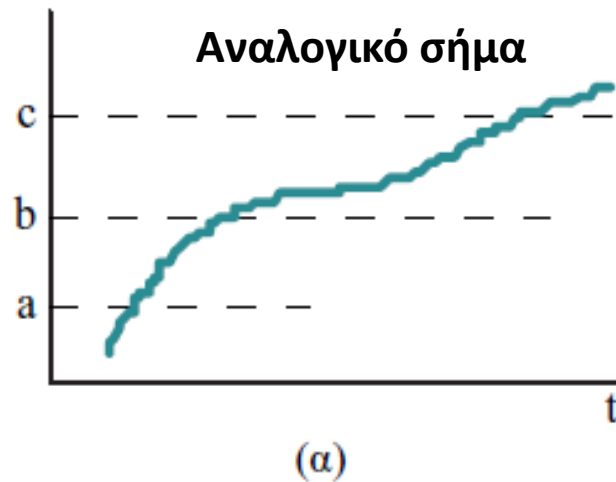
Αναλογικά και Ψηφιακά Μεγέθη

- Το μέγεθος "ύψος" μεταβάλλεται συνεχώς, δηλ. μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, καθώς ο άνθρωπος μετακινείται στο κεκλιμένο επίπεδο.
- Όλα τα μεγέθη της κλασσικής φυσικής, όπως απόσταση, ταχύτητα, θερμοκρασία, πίεση, ένταση ηλεκτρικού ρεύματος κ.λπ. είναι αναλογικά.
- Γενικώς αναλογικό είναι οποιοδήποτε μέγεθος, που η τιμή του —πληροφορία— εκφράζεται με πραγματικούς αριθμούς.
- Η κλίμακα του σχήματος αποτελεί ένα ψηφιακό σύστημα, γιατί οι μόνες θέσεις που μπορεί να πατήσει σταθερά κάποιος είναι τα σκαλοπάτια, δηλ. οι δυνατές καταστάσεις του συστήματος είναι διακριτές, η δε αντίστοιχη πληροφορία θέσεως μπορεί να αποδοθεί με τους ακέραιους αριθμούς 1, 2, 3, ...
- Παραδείγματα ψηφιακών συστημάτων είναι οι φωτεινοί σηματοδότες της τροχαίας, που μεταδίδουν τις πληροφορίες τους χρησιμοποιώντας τρία χρώματα διακριτά μεταξύ τους, οι ηλεκτρικοί διακόπτες, που οι καταστάσεις τους εκφράζονται με πληροφορίες της μορφής ανοικτός–κλειστός, ναι–όχι κλπ.

Αναλογικά και Ψηφιακά Μεγέθη

6

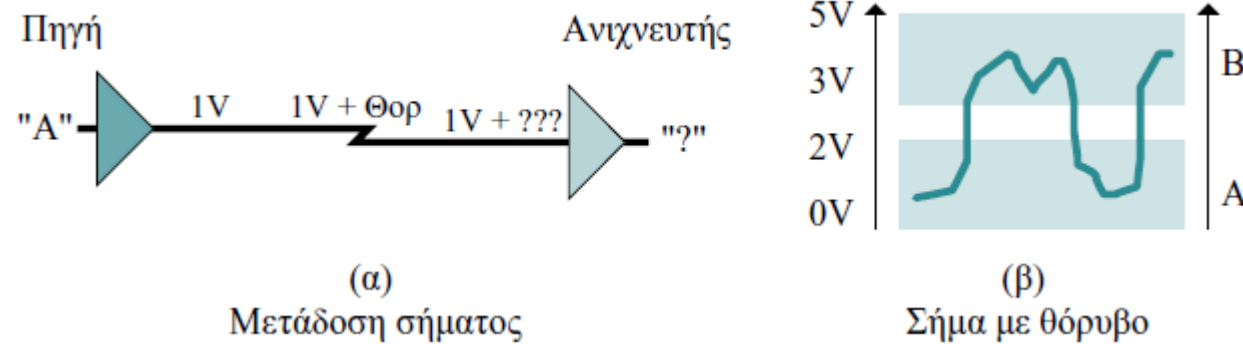
Ψηφιακό ονομάζεται ένα μέγεθος του οποίου οι καταστάσεις και κατ' επέκταση οι πληροφορίες, που τις καταγράφουν, εκφράζονται ή μπορούν να παρασταθούν με τα στοιχεία ενός αριθμήσιμου συνόλου, όπως π.χ. είναι οι ακέραιοι αριθμοί.



Τα ψηφιακά μεγέθη χαρακτηρίζονται από διακριτές τιμές και αυτό κάνει τα σήματά τους πλεονεκτικά έναντι του θορύβου σε σύγκριση με τα αναλογικά.

Αναλογικά και Ψηφιακά Μεγέθη

7



- Τα όρια, από τα οποία αρχίζει και τελειώνει μία στάθμη, καθορίζουν την περιοχή μέσα στην οποία οι διακυμάνσεις του πλάτους είναι ανεκτές και από τα όρια αυτά εξαρτάται το εύρος του ανεκτού θορύβου που μπορεί να υπάρχει στο σύστημα.
- Όσο ευρύτερα είναι τα όρια μιας στάθμης, τόσο περισσότερο ανθεκτική είναι η πληροφορία στο θόρυβο.
- Η ιδιότητα αυτή, που δεν υπάρχει στα αναλογικά σήματα, αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους λόγους για την επικράτηση των ψηφιακών συστημάτων.

Αναλογικά και Ψηφιακά Μεγέθη

- Μεταξύ 0V και 2V μεταφέρει την πληροφορία "Α", μεταξύ 3V και 5V την πληροφορία "Β" και για λόγους ασφαλείας έχει παρεμβληθεί μία κενή ζώνη μεταξύ 2V και 3V.
- Αδύνατο να παραχθεί τάση ακριβώς 1V και να φθάσει στην άλλη άκρη της γραμμής μεταφοράς επίσης 1V.
- Για το λόγο αυτό όχι μόνον επιδιώκεται η απόσταση δ μεταξύ των σταθμών να είναι η μεγαλύτερη δυνατή, αλλά μία στάθμη δεν ορίζεται ακριβώς με μία τιμή πλάτους του σήματος, αλλά ορίζεται σαν μία *περιοχή τιμών πλάτους* μέσα στη οποία μεταφέρεται η ίδια πληροφορία.

Λογικές Τιμές και Περιοχές Τάσης

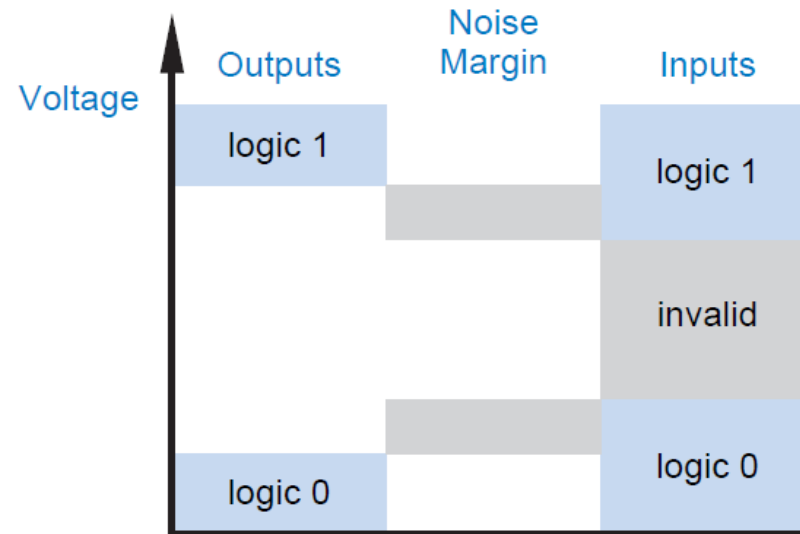
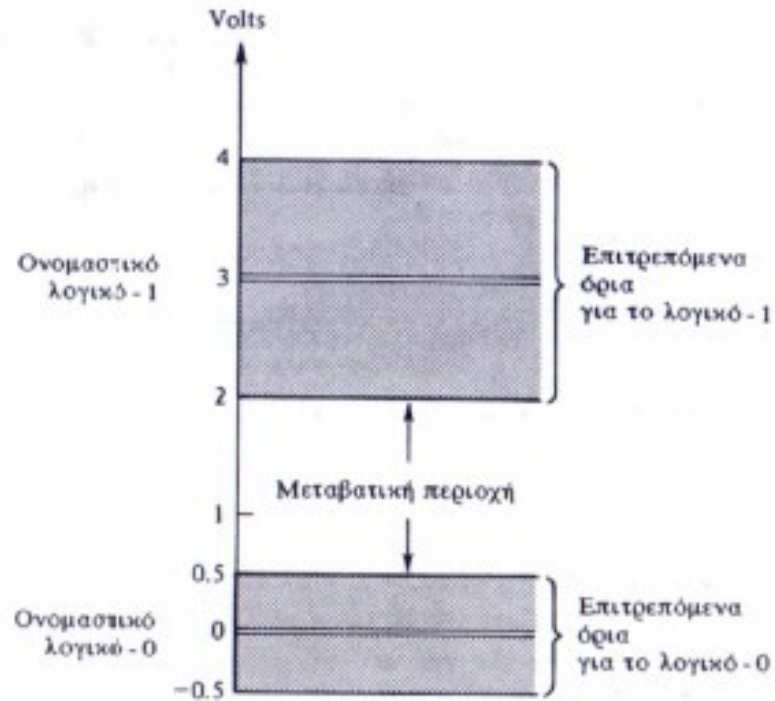
- Τα ολοκληρωμένα κυκλώματα αναγνωρίζουν στις εισόδους τους ηλεκτρικές τάσεις, στις οποίες αντιστοιχούν οι λογικές τιμές '0' ή '1'. Επίσης, στις εξόδους τους δίνουν ηλεκτρικές τάσεις, στις οποίες αντιστοιχούν οι λογικές τιμές '0' ή '1'.
- Στην πράξη όμως, δεν είναι δυνατόν να έχουμε απόλυτα ακριβείς τιμές τάσεων. Αιτίες:
 - Διακυμάνσεις της τάσης τροφοδοσίας
 - Επίδραση της θερμοκρασίας και των θορύβων στη λειτουργία των κυκλωμάτων
 - Επίδραση του φορτίου στην τάση εξόδου.
- Οπότε ορίζονται δύο περιοχές τάσης, μία που αντιστοιχεί στο λογικό '1' και μία άλλη που αντιστοιχεί στο λογικό '0'.
- Μια τιμή τάσης που αντιστοιχεί στην ενδιάμεση περιοχή προκαλεί απρόβλεπτη συμπεριφορά του κυκλώματος.
- Οι περιοχές των τάσεων αναφέρονται στα φύλλα δεδομένων των κατασκευαστών.

Λογικές Τιμές και Περιοχές Τάσης

10



Λογικές Τιμές και Περιοχές Τάσης

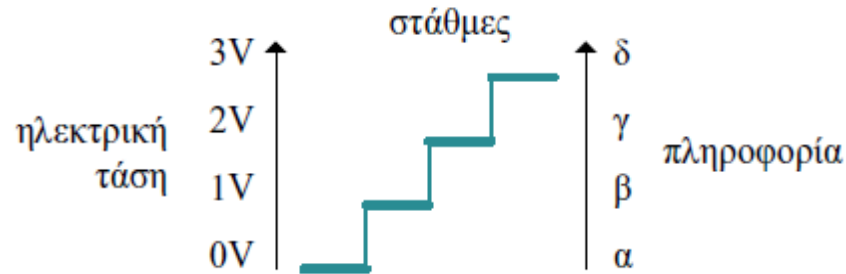


Σήματα

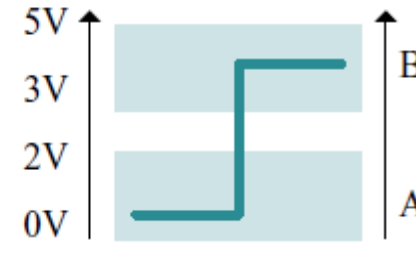
- Η πληροφορία για να μεταδοθεί, πρέπει να πάρει φυσική μορφή
- Γίνεται:
 - κωδικοποίηση της πληροφορίας
 - εγγραφή της σε κάποιο φυσικό μέσο, που αποτελεί το φορέα μετάδοσής της.
- Η φυσική μορφή της πληροφορίας ονομάζεται σήμα.
- Παραδείγματα σημάτων είναι ο ήχος (διαμόρφωση πίεσεως αέρα), η εικόνα της τηλεοράσεως (διαμόρφωση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων), το γραπτό κείμενο (διαμόρφωση της φωτεινότητας του χαρτιού με κωδικοποιημένα σχήματα, που ονομάζονται γράμματα), η φωτεινή σήμανση κ.λπ.

Επίπεδα Σήματος

13



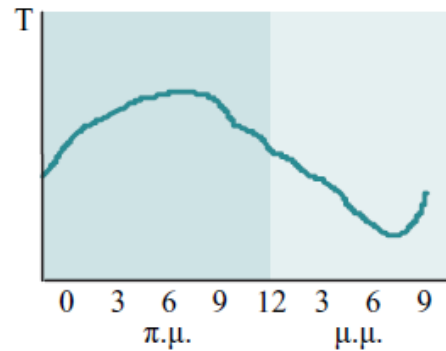
Τετραδικό Σήμα



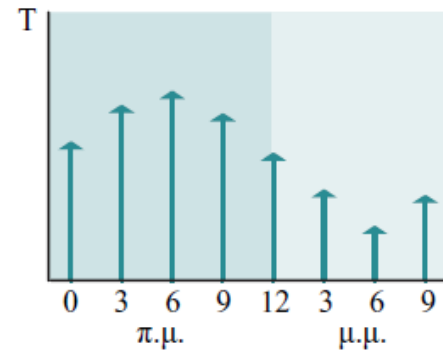
Δυαδικό Σήμα

- Ένα σήμα που αναλύεται σε N επίπεδα–στάθμες, σε κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί μία πληροφορία, ονομάζεται N -αδικό σήμα.
- Ένα ψηφιακό σήμα μπορεί να έχει πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος καταστάσεων.
- Πρακτικοί, όμως, λόγοι επιβάλλουν το χωρισμό του σε μικρό πλήθος σταθμών. Εάν η μέγιστη μεταβολή του πλάτους ενός σήματος είναι E και το σήμα διαμορφωθεί σε N στάθμες, τότε η απόσταση που διαχωρίζει μια στάθμη από στη γειτονική της είναι $\delta = E/N$.
- Μία διαμόρφωση του σήματος σε πολλές στάθμες (μεγάλο N) δυσκολεύει το διαχωρισμό τους (μικρό δ).

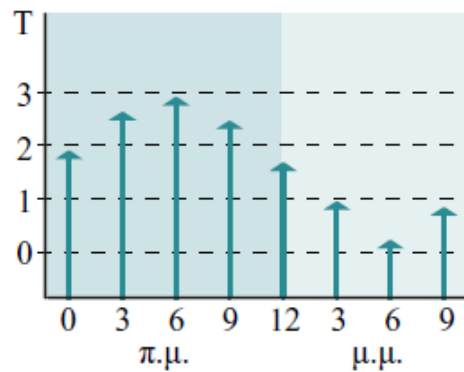
Ψηφιακά Σήματα



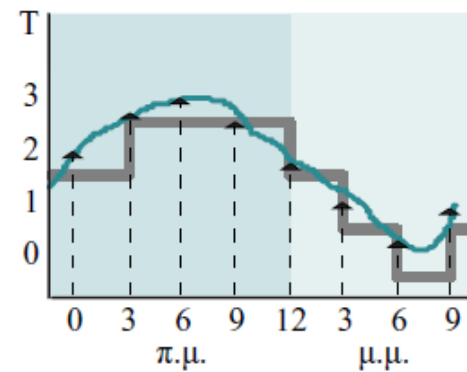
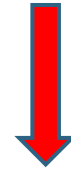
(α)
Συνεχής καταγραφή



(β)
Δειγματοληπτική



(α)
Παράθυρα ψηφιοποίησης



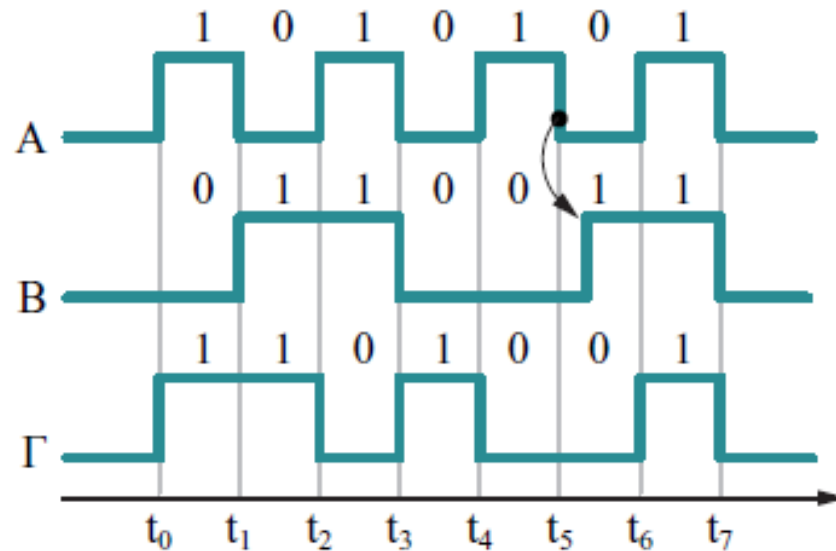
(β)
Ψηφιακό σήμα

Δυαδικά Σήματα

- Τα δυαδικά σήματα, λόγω της ευκολίας παραγωγής τους και του μεγάλου περιθωρίου θορύβου που προσφέρουν, χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά στις σημερινές εφαρμογές.
- Έχει καθιερωθεί διεθνώς οι δύο καταστάσεις ενός δυαδικού σήματος να συμβολίζονται με τα ψηφία "0" και "1" και το κάθε ένα από αυτά τα δυαδικά ψηφία να ονομάζεται bit (binary digit).
- 1 bit πληροφορίας παριστά μία από τις δύο δυνατές καταστάσεις.
- Σύνολο των δυνατών καταστάσεων: 2^m m: Πλήθος δυαδικών σημάτων ($2 = \{0,1\}$, δυαδικό σήμα)

Δυαδικά Σήματα

16

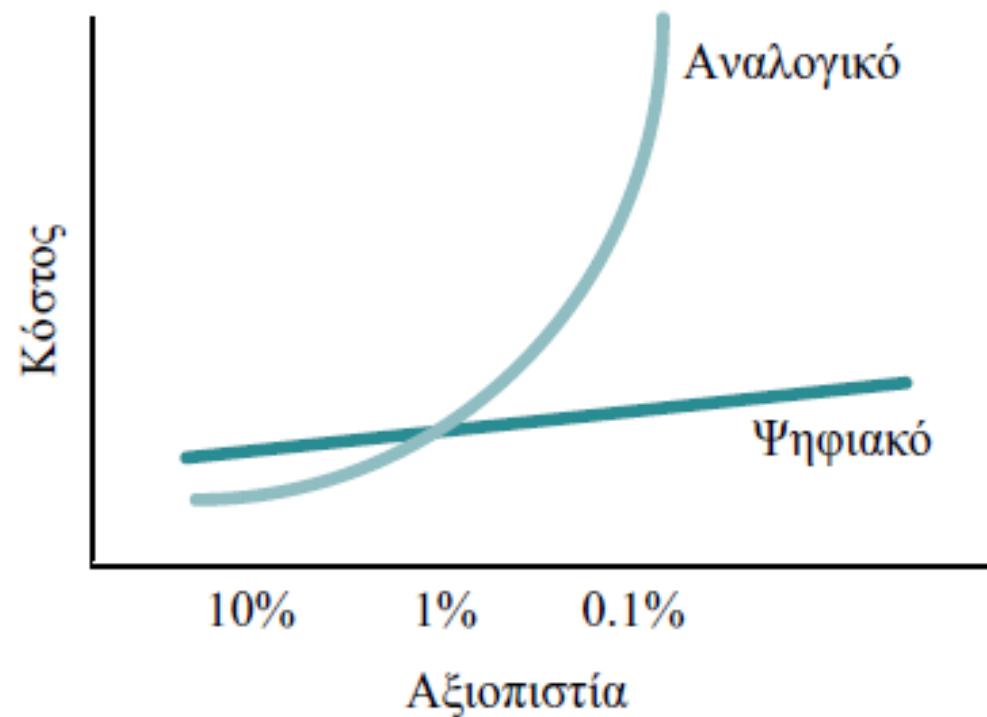


χρονική καθυστέρηση
του B ως προς A
την στιγμή t_5

Κυματομορφές τριών δυαδικών σημάτων A, B και Γ μαζί με την κωδικοποίησή τους σε bits, που μεταβάλλονται χρονικά σε διακριτές χρονικές στιγμές $t_0, t_1, t_2, \dots, t_7$.

Ψηφιακά έναντι Αναλογικών Σημάτων

17



*Σύγκριση ψηφιακών και
αναλογικών συστημάτων*

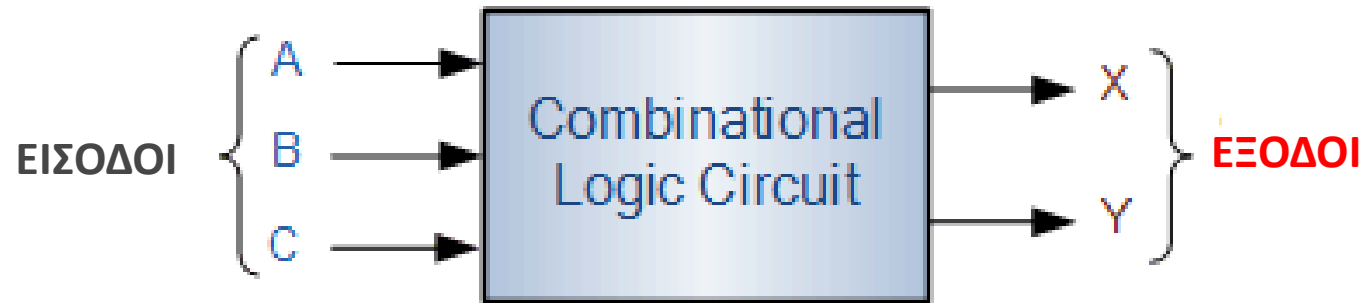
Ψηφιακά Συστήματα Επεξεργασίας Δεδομένων

18

Λογική Σχέση F



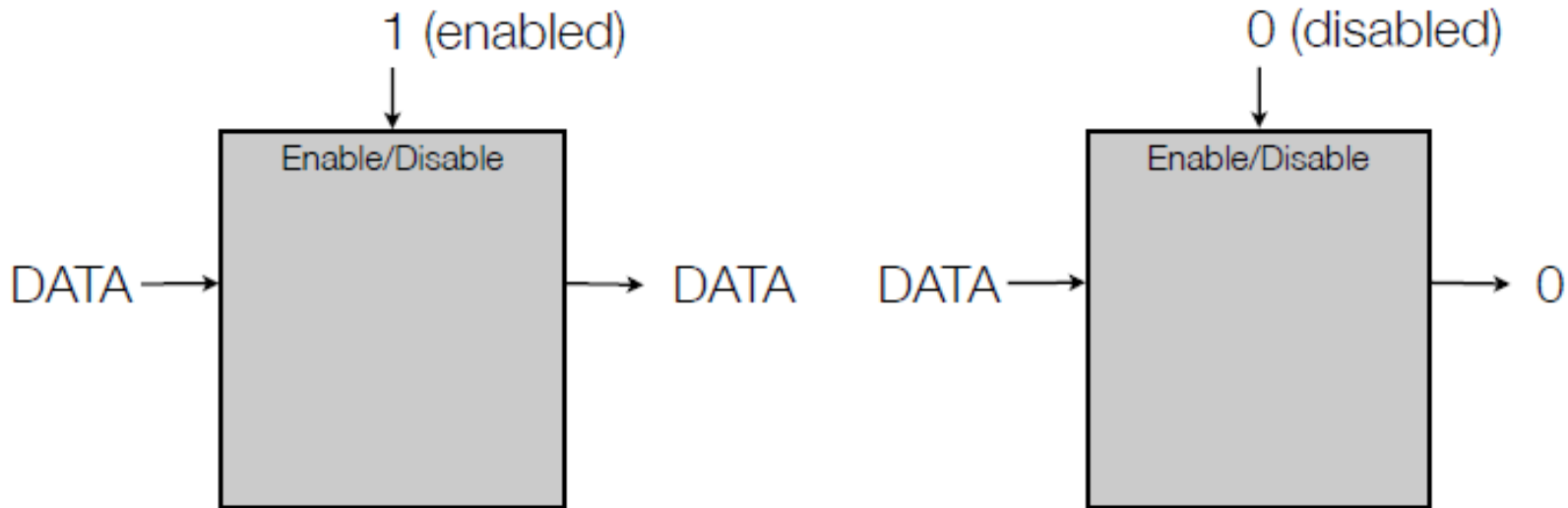
Σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου



$$\mathbf{ΕΞΟΔΟΣ = F(ΕΙΣΟΔΟΣ)}$$

Ψηφιακά Συστήματα Επεξεργασίας Δεδομένων

19



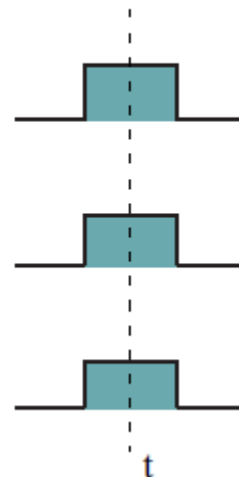
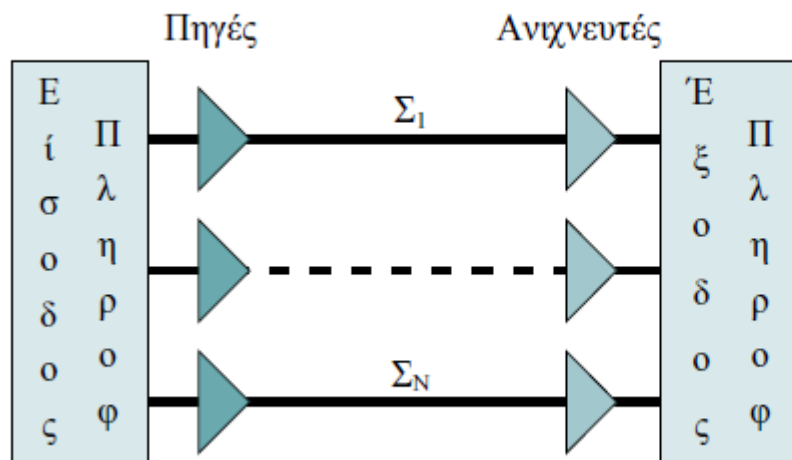
Ψηφιακό Σύστημα: δέχεται ψηφιακά δεδομένα και εξ αυτών παράγει νέα ψηφιακά δεδομένα σύμφωνα με κανόνες που υλοποιούν τις βασικές πράξεις της λογικής, καθώς και κάθε πολύπλοκη σύνθεση αυτών.

Τρόποι Μεταφοράς Ψηφιακών Σημάτων

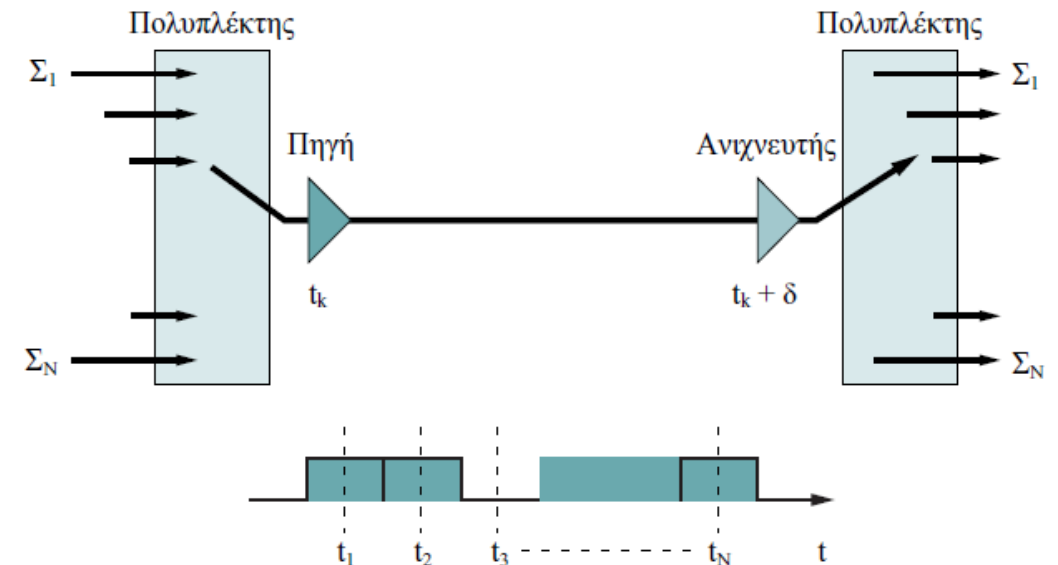
Υπάρχουν δύο τρόποι μεταφοράς/διάδοσης των ψηφιακών σημάτων:

- Παράλληλα
- Σειριακά

Παράλληλη Μετάδοση



Σειριακή Μετάδοση



Παράλληλη έναντι Σειριακής Μετάδοσης

- Παράλληλη
 - Πλεονεκτεί στη ταχύτητα διάδοσης, γιατί όλα τα σήματα στέλνονται ταυτόχρονα σε μία μονάδα χρόνου,
 - Μειονεκτεί απαιτεί N -πλάσιο εξοπλισμό
 - Οι καθυστερήσεις μεταξύ των γραμμών, όσο όμοιες και να είναι οι γραμμές, διαφέρουν με κίνδυνο να χαθεί ο συγχρονισμός μεταξύ των σημάτων.
- Σειριακή
 - Βραδύτερη κατά N μονάδες χρόνου πλεονέκτημα ότι απαιτεί λιγότερο εξοπλισμό.
 - Για τη μεταφορά σημάτων σε μεγάλες αποστάσεις, είναι η μόνη ασφαλής, γιατί οι τυχόν καθυστερήσεις που εισάγει η γραμμή μεταφοράς, είναι ομοιόμορφες για όλα τα σήματα και έτσι διατηρείται ο μεταξύ τους συγχρονισμός.

Αριθμητικά Συστήματα

Βασικά Αριθμητικά Συστήματα

Decimal (base 10)	Binary (base 2)	Octal (base 8)	Hexadecimal (base 16)
00	0000	00	0
01	0001	01	1
02	0010	02	2
03	0011	03	3
04	0100	04	4
05	0101	05	5
06	0110	06	6
07	0111	07	7
08	1000	10	8
09	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Μετατροπή σε Δεκαδικό Σύστημα

- Κάθε αριθμός εκφρασμένος σε αριθμητικό σύστημα με **βάση** (radix) το r παριστάνεται με μία σειρά από $n+m+1$ συντελεστές οι τιμές των οποίων κυμαίνονται από 0 μέχρι $r-1$, δηλαδή:

$$(A)_r = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \cdot a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$$

- Ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός (αριθμητικό σύστημα με βάση το 10) είναι:

$$(A)_{10} = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r^1 + a_0 r^0 + a_{-1} r^{-1} + a_{-2} r^{-2} + \dots + a_{-m} r^{-m}$$

Μετατροπή σε Δεκαδικό Σύστημα

- Μετατροπή δυαδικού σε δεκαδικό

$$(1110.011)_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = (14.375)_{10}$$

- Μετατροπή δεκαεξαδικού σε δεκαδικό

$$(B65F)_{16} = 11 \times 16^3 + 6 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = (46687)_{10}$$

Μετατροπή από Δεκαδικό σε άλλο Σύστημα

26

- Μετατροπή δεκαδικού σε δυαδικό

$$(41.8125)_{10} = (101001.1101)_2$$

$$0.8125 \times 2 = 1 + 0.6250$$

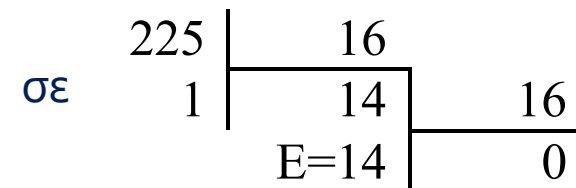
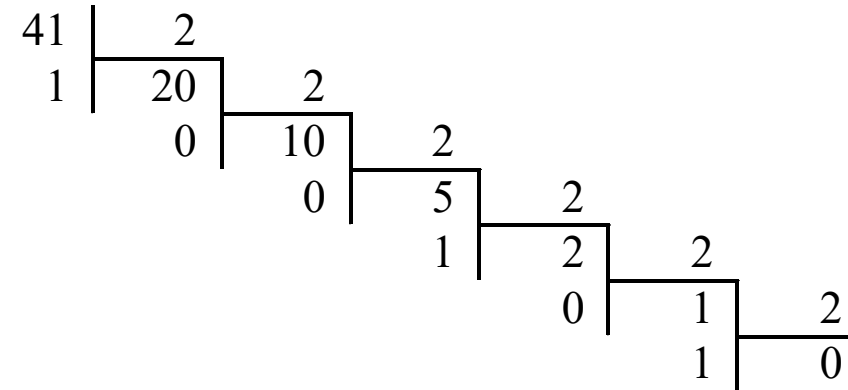
$$0.6250 \times 2 = 1 + 0.2500$$

$$0.2500 \times 2 = 0 + 0.5000$$

$$0.5000 \times 2 = 1 + 0.0000$$

- Μετατροπή δεκαδικού σε δεκαεξαδικό

$$(225)_{10} = (E1)_{16}$$



Πρόσθεση στο Δυαδικό Σύστημα

27

Δυαδική Πράξη	Αποτέλεσμα	Μεταφορά
0+0	0	0
0+1	1	0
1+0	1	0
1+1	0	1 (στην επόμενη βαθμίδα)

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r} 1101 \\ 1011 + \\ \hline 11000 \end{array}$$

Αφαίρεση στο Δυαδικό Σύστημα

28

Δυαδική Πράξη	Αποτέλεσμα	Δανεισμός
0-0	0	0
1-0	1	0
1-1	0	0
0-1	1	1 (από την επόμενη βαθμίδα)

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r} 11010 \\ 10001 - \\ \hline 1001 \end{array}$$

Πολλαπλασιασμός στο Δυαδικό Σύστημα

29

Δυαδική Πράξη	Αποτέλεσμα
0×0	0
1×0	0
0×1	0
1×1	1

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r} 101 \\ 11 \times \\ \hline 101 \\ 101 \ + \\ \hline 1111 \end{array}$$

Διαίρεση στο Δυαδικό Σύστημα

30

- Γίνεται ακριβώς όπως η διαίρεση στο δεκαδικό σύστημα
- Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r|l} 111011 & 1001 \\ -1001 & \hline \hline 01011 & 110 \\ -1001 & \\ \hline 0101 & \end{array}$$

Συμπληρώματα

- Για να απλοποιηθεί η πράξη της αφαίρεσης, όπως επίσης και κάποιες λογικές πράξεις χρησιμοποιούνται τα συμπληρώματα.
- Για κάθε αριθμητικό σύστημα με βάση r , υπάρχουν δύο συμπληρώματα:
 - ▣ Τα συμπληρώματα ως προς r
 - ▣ Τα συμπληρώματα ως προς $r-1$
- Άρα, για το δεκαδικό σύστημα έχουμε τα συμπληρώματα ως προς 10 και ως προς 9.
- Για το δυαδικό σύστημα έχουμε τα συμπληρώματα ως προς 2 και ως προς 1.

Το συμπλήρωμα ως προς r

- Για ένα θετικό αριθμό N σε βάση r με n -ψήφιο ακέραιο μέρος το συμπλήρωμα ως προς r είναι $r^n - N$ για $N \neq 0$ και 0 για $N = 0$.
- Παραδείγματα:
 - Το συμπλήρωμα ως προς 10 του $(52520)_{10}$ είναι $10^5 - 52520 = 47480$
 - Το συμπλήρωμα ως προς 2 του $(101100)_2$ είναι $(2^6)_{10} - (101100)_2 = (1000000 - 101100)_2 = 010100$

Το συμπλήρωμα ως προς $r-1$

- Για ένα θετικό αριθμό N σε βάση r με n -ψήφιο ακέραιο μέρος και ένα κλασματικό μέρος m ψηφίων, το συμπλήρωμα ως προς $r-1$ είναι $r^n - r^{-m} - N$.
- Παραδείγματα:
 - Το συμπλήρωμα ως προς 9 του $(52520)_{10}$ είναι $10^5 - 1 - 52520 = 47479$
 - Το συμπλήρωμα ως προς 1 του $(101100)_2$ είναι $(2^6 - 1)_{10} - (101100)_2 = (111111 - 101100)_2 = 010011$
 - Το συμπλήρωμα ως προς 9 του $(0,3267)_{10}$ είναι $1 - 10^{-4} - 0,3267 = 0,6732$
 - Το συμπλήρωμα ως προς 1 του $(0,0110)_2$ είναι $(1 - 2^{-4})_{10} - (0,0110)_2 = (0,1111 - 0,0110)_2 = 0,1001$

Το συμπλήρωμα ως προς $r-1$

- Άρα, από τα παραδείγματα είναι αμέσως αντιληπτό ότι:
 - ▣ Το συμπλήρωμα ως προς 9 δημιουργείται αφαιρώντας κάθε ψηφίο του αριθμού από το 9.
 - ▣ Το συμπλήρωμα ως προς 1 δημιουργείται κάνοντας τα '1' του αριθμού '0' και τα '0' σε '1'.
- Το συμπλήρωμα ως προς 2 μπορεί να βρεθεί βρίσκοντας το συμπλήρωμα ως προς 1 και προσθέτοντας το 1 σε αυτό.
- Το συμπλήρωμα του συμπληρώματος είναι προφανές ότι μας δίνει τον αρχικό αριθμό.

Αφαίρεση με Συμπληρώματα ως προς r

- Για την αφαίρεση δύο θετικών αριθμών M και N με βάση r , εκτελώ τα παρακάτω βήματα:
 - ▣ Προσθέτουμε το μειωτέο M και το συμπλήρωμα ως προς r του αφαιρετέου N .
 - ▣ Αν υπάρχει τελικό κρατούμενο το αγνοούμε.
 - ▣ Αν δεν υπάρχει τελικό κρατούμενο, παίρνουμε το συμπλήρωμα ως προς r παραπάνω αποτελέσματος και του βάζουμε το '-' μπροστά (το αποτέλεσμα είναι αρνητικό).

Παραδείγματα Αφαίρεσης με Συμπληρώματα ως προς r

36

- Εκτελούμε την αφαίρεση $72532 - 3250$
 - ▣ Το συμπλήρωμα ως προς 10 του 3250 είναι 96750
 - ▣ Προσθέτω $72532 + 96750 = 69282$ (το τελικό κρατούμενο 1 αγνοείται)
- Εκτελούμε την αφαίρεση $3250 - 72532$
 - ▣ Το συμπλήρωμα ως προς 10 του 72532 είναι 27468
 - ▣ Προσθέτω $03250 + 27468 = 30718$ (δεν υπάρχει τελικό κρατούμενο)
 - ▣ Παίρνω το συμπλήρωμα ως προς 10 του 30718, δηλαδή το 69282 και βάζω μπροστά του το '-'
 - ▣ Άρα το αποτέλεσμα είναι -69282

Παραδείγματα Αφαίρεσης με Συμπληρώματα ως προς r

37

- Εκτελούμε την αφαίρεση $1010100 - 1000100$
 - ▣ Το συμπλήρωμα ως προς 2 του 1000100 είναι 0111100
 - ▣ Προσθέτω $1010100 + 0111100 = 0010000$ (το τελικό κρατούμενο 1 αγνοείται)
- Εκτελούμε την αφαίρεση $1000100 - 1010100$
 - ▣ Το συμπλήρωμα ως προς 2 του 1010100 είναι 0101100
 - ▣ Προσθέτω $1000100 + 0101100 = 1110000$ (δεν υπάρχει τελικό κρατούμενο)
 - ▣ Παίρνω το συμπλήρωμα ως προς 2 του 1110000 , δηλαδή το 10000 και βάζω μπροστά του το '-'.
 - ▣ Άρα το αποτέλεσμα είναι -10000

Αφαίρεση με Συμπληρώματα ως προς $r-1$

- Για την αφαίρεση δύο θετικών αριθμών M και N με βάση r , εκτελώ τα παρακάτω βήματα:
 - ▣ Προσθέτουμε το μειωτέο M και το συμπλήρωμα ως προς $r-1$ του αφαιρετέου N .
 - ▣ Αν υπάρχει τελικό κρατούμενο προσθέτουμε 1 στο δεξιότερο ψηφίο.
 - ▣ Αν δεν υπάρχει τελικό κρατούμενο, παίρνουμε το συμπλήρωμα ως προς $r-1$ παραπάνω αποτελέσματος και του βάζουμε το '-' μπροστά (το αποτέλεσμα είναι αρνητικό).

Παραδείγματα Αφαίρεσης με Συμπληρώματα ως προς $r-1$

39

- Εκτελούμε την αφαίρεση $72532 - 3250$
 - ▣ Το συμπλήρωμα ως προς 9 του 3250 είναι 96749
 - ▣ Προσθέτω $72532 + 96749 = 69281$ (το τελικό κρατούμενο 1 επανεισάγεται)
 - ▣ Προσθέτω $69281 + 1 = 69282$
- Εκτελούμε την αφαίρεση $3250 - 72532$
 - ▣ Το συμπλήρωμα ως προς 9 του 72532 είναι 27467
 - ▣ Προσθέτω $03250 + 27467 = 30717$ (δεν υπάρχει τελικό κρατούμενο)
 - ▣ Παίρνω το συμπλήρωμα ως προς 9 του 30717, δηλαδή το 69282 και βάζω μπροστά του το '-'. Άρα το αποτέλεσμα είναι -69282

Παραδείγματα Αφαίρεσης με Συμπληρώματα ως προς $r-1$

- Εκτελούμε την αφαίρεση $1010100 - 1000100$
 - ▣ Το συμπλήρωμα ως προς 1 του 1000100 είναι 0111011
 - ▣ Προσθέτω $1010100 + 0111011 = 0001111$ (το τελικό κρατούμενο 1 επανεισάγεται)
 - ▣ Προσθέτω $0001111 + 1 = 0010000$
- Εκτελούμε την αφαίρεση $1000100 - 1010100$
 - ▣ Το συμπλήρωμα ως προς 1 του 1010100 είναι 0101011
 - ▣ Προσθέτω $1000100 + 0101011 = 1101111$ (δεν υπάρχει τελικό κρατούμενο)
 - ▣ Παίρνω το συμπλήρωμα ως προς 1 του 1101111 , δηλαδή το 0010000 και βάζω μπροστά του το '-'. Άρα το αποτέλεσμα είναι -10000

Κώδικες

Κατηγορίες Κωδίκων

42

- Δυαδικοί κώδικες
- Αλφαριθμητικοί κώδικες
- Κώδικες ανίχνευσης σφαλμάτων
- Κώδικες ανίχνευσης και διόρθωσης σφαλμάτων

Δυαδικοί Κώδικες

- Με n bit ενός δυαδικού κώδικα μπορούμε να αναπαραστήσουμε 2^n διακεκριμένους συνδυασμούς.
- Οι δυαδικοί κώδικες ανήκουν στις δύο ακόλουθες κατηγορίες ανάλογα με τον τρόπο κατασκευής τους:
 - ▣ κώδικες με βάρη στα bits ανάλογα με την θέση τους (όπως είναι ο BCD κώδικας που έχει βάρη 8 4 2 1)
 - ▣ κώδικες χωρίς βάρη (όπως είναι ο ανακλαστικός κώδικας Gray)

Δυαδικοί Κώδικες BCD, Excess-3, 8 4 -2 -1, Gray

44

δεκαδικό ψηφίο	BCD 8 4 2 1	excess-3 (BCD+3)	8 4 -2 -1	Gray
0	0000	0011	0000	0000
1	0001	0100	0111	0001
2	0010	0101	0110	0011
3	0011	0110	0101	0010
4	0100	0111	0100	0110
5	0101	1000	1011	0111
6	0110	1001	1010	0101
7	0111	1010	1001	0100
8	1000	1011	1000	1100
9	1001	1100	1111	1101

Κώδικας Gray τεσσάρων bit

Κώδικας Gray	Ισοδύναμος δεκαδικός
0000	0
0001	1
0011	2
0010	3
0110	4
0111	5
0101	6
0100	7
1100	8
1101	9
1111	10
1110	11
1010	12
1011	13
1001	14
1000	15

Αλφαριθμητικοί Κώδικες

- Ο πλέον γνωστός αλφαριθμητικός κώδικας είναι ο κώδικας ASCII (American Standard Code for Information Interchange) ο οποίος χρησιμοποιεί 7 bit για την κωδικοποίηση 128 χαρακτήρων.
- Ο κώδικας ASCII περιλαμβάνει 94 εκτυπώσιμους γραφικούς χαρακτήρες και 34 μη εκτυπώσιμους χαρακτήρες ελέγχου (control characters), δηλαδή συνολικά 128 χαρακτήρες.
- Οι εκτυπώσιμοι χαρακτήρες είναι:
 - ▣ τα 26 κεφαλαία γράμματα A-Z
 - ▣ τα 26 μικρά γράμματα a-z
 - ▣ οι 10 αριθμοί 0-9
 - ▣ τα 32 ειδικά σύμβολα

Ο Κώδικας ASCII

47

	000	001	010	011	100	101	110	111
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(8	H	X	h	x
1001	HT	EM)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[k	{
1100	FF	FS	'	<	L	\	l	
1101	CR	GS	-	=	M]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	SI	US	/	?	O	-	o	DEL

Κώδικες Ανίχνευσης Σφαλμάτων

- Ένας κώδικας ανίχνευσης σφαλμάτων (error detection code) είναι ένας κώδικας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση σφαλμάτων κατά την μετάδοση δεδομένων, δηλαδή τη μεταβολή των τιμών κάποιων bit από "0" σε "1" ή από "1" σε "0".

Κώδικας Biquinary

Ο κώδικας biquinary είναι ένας δυαδικός κώδικας που χρησιμοποιεί 7 bit με βάρη 5 0 4 3 2 1 0.

Κάθε δεκαδικό ψηφίο κωδικοποιείται με δύο "1" και πέντε "0".

δεκαδικό ψηφίο	biquinary 5043210
0	0100001
1	0100010
2	0100100
3	0101000
4	0110000
5	1000001
6	1000010
7	1000100
8	1001000
9	1010000

Ανίχνευση Σφάλματος με Κώδικα Biquinary

- Ο κώδικας biquinary παρέχει την δυνατότητα ανίχνευσης σφάλματος κατά την μετάδοση μηνυμάτων: όταν σταλεί ένα μήνυμα, στον δέκτη ελέγχεται αν υπάρχουν δύο "1" ή όχι.
- Αν υπάρχουν περισσότεροι ή λιγότεροι από δύο "1", τότε ανιχνεύεται η ύπαρξη σφάλματος κατά την μετάδοση του μηνύματος.
- Αν λάβουμε στο δέκτη το ακόλουθο μήνυμα:

1000001	0100100
5	2

τότε αποφασίζουμε ότι το μήνυμα μεταδόθηκε σωστά, αφού παντού υπάρχουν δύο "1".

Ανίχνευση Σφάλματος με Κώδικα Biquinary

- Αν λάβουμε στο δέκτη το ακόλουθο μήνυμα:

1000001 0100101

5 ?

τότε ανιχνεύουμε σφάλμα στο δεύτερο ψηφίο αφού υπάρχουν τρεις "1".

- Όμως δεν μπορούμε να διορθώσουμε το σφάλμα, αφού το σωστό ψηφίο μπορεί να είναι το 0100100 (δεκαδικό ψηφίο 2) ή το 0100001 (δεκαδικό ψηφίο 0), δηλαδή το πιθανό σωστό μήνυμα είναι το 52 ή το 50.

Bit Ισοτιμίας (Parity Bit)

- Η πλέον συνηθισμένη μέθοδος ανίχνευσης σφαλμάτων κατά την μετάδοση μηνυμάτων είναι η χρήση του bit ισοτιμίας (Parity Bit).
- Σε ένα μήνυμα ($M_2M_1M_0$) προσθέτουμε ένα bit ισοτιμίας (P), έτσι ώστε το τελικό μήνυμα ($M_2M_1M_0P$) να έχει περιττό πλήθος "1" (**περιττή ισοτιμία**) ή άρτιο πλήθος "1" (**άρτια ισοτιμία**).

Άρτια και Περιττή Ισοτιμία

	περιττή ισοτιμία	άρτια ισοτιμία
Μήνυμα	Parity Bit	
000	1	0
001	0	1
010	0	1
011	1	0
100	0	1
101	1	0
110	1	0
111	0	1

Ανίχνευση Σφάλματος με bit Ισοτιμίας

- Στο δέκτη (του μηνύματος) ελέγχεται η ισοτιμία της μεταδιδόμενης πληροφορίας.
- Αν λάβουμε στο δέκτη το ακόλουθο μήνυμα με **περιττή ισοτιμία**:

100 0 001 0 101 1 011 1

4 1 5 3

τότε αποφασίζουμε ότι το μήνυμα μεταδόθηκε σωστά, αφού τα Parity Bits ελέγχονται και ευρίσκονται παντού σωστά.

Ανίχνευση Σφάλματος με bit Ισοτιμίας

- Αν λάβουμε στο δέκτη το ακόλουθο μήνυμα με **περιττή ισοτιμία**:

101 1 010 **1** 110 1 011 1

5 2 6 3

τότε ανιχνεύεται ένα σφάλμα στο δεύτερο Parity Bit.

- Όμως δεν μπορούμε να διορθώσουμε το σφάλμα.
- Η μέθοδος αυτή ανιχνεύει περιττό πλήθος σφαλμάτων.
- Άρτιο πλήθος σφαλμάτων δεν ανιχνεύεται.

Κώδικες Ανίχνευσης Διόρθωσης Σφαλμάτων

- Ένας κώδικας ανίχνευσης και διόρθωσης σφαλμάτων (error detection and error correction code) είναι ένας κώδικας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση σφαλμάτων κατά την μετάδοση δεδομένων και ταυτόχρονα για την διόρθωση των σφαλμάτων, δηλαδή την εύρεση των σωστών δεδομένων.

Μέθοδος Ορθογωνίου

Η μέθοδος ορθογωνίου χρησιμοποιεί δύο bit ισοτιμίας (Parity Bit): το PB_1 στην στήλη ισοτιμίας και το PB_2 στην γραμμή ελέγχου.

Αν λάβουμε στο δέκτη το ακόλουθο μήνυμα με **άρτια ισοτιμία**:

	μήνυμα				PB_1
9	1	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
12	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
PB_2	0	1	1	0	0

τότε αποφασίζουμε ότι το μήνυμα μεταδόθηκε σωστά, αφού τα Parity Bits ελέγχονται και ευρίσκονται παντού σωστά.

Μέθοδος Ορθογωνίου

58

- Παρέχεται η δυνατότητα ανίχνευσης και διόρθωσης απλού σφάλματος (ενός μόνο σφάλματος).
- Αν λάβουμε στο δέκτη το ακόλουθο μήνυμα με άρτια ισοτιμία:

	μήνυμα				PB ₁
9	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1
12	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
PB ₂	0	1	1	0	0

τότε ανιχνεύεται ένα απλό λάθος στην δεύτερη γραμμή και δεύτερη στήλη (από δεξιά), οπότε το σωστό μήνυμα είναι 0010 αντί 0000 (διόρθωση απλού σφάλματος).

Δυαδική Αποθήκευση και Καταχωρητές

- ✓ Ένα δυαδικό κύτταρο είναι μία διάταξη που έχει δύο σταθερές καταστάσεις (0 και 1).
- ✓ Ένας καταχωρητής (register) είναι μία σειρά από n δυαδικά κύτταρα.
- ✓ Υπάρχουν 2^n διαφορετικές καταστάσεις για έναν καταχωρητή μήκους n .
- ✓ Η μνήμη του υπολογιστή αποτελείται από εκατομμύρια καταχωρητές.
- ✓ Επίσης υπάρχουν καταχωρητές της CPU που χρησιμοποιούνται στις αριθμητικές πράξεις ή για την επίβλεψη της σωστής ροής του προγράμματος.
- ✓ Κάθε συσκευή εισόδου/εξόδου πρέπει να περιέχει καταχωρητές για να αποθηκεύει την πληροφορία που μεταφέρεται από και προς αυτήν.

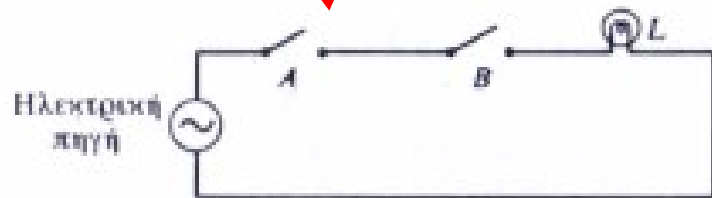
Απλές Λογικές Πράξεις

Πίνακες Αλήθειας

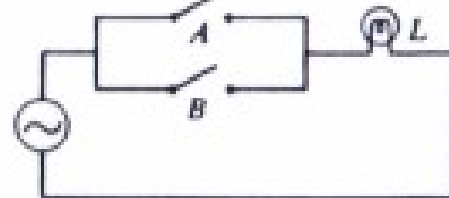
61

Πίνακες αληθείας των λογικών πράξεων

ΚΑΙ		Ή		ΟΧΙ	
x	y	$x \cdot y$	$x + y$	x	x'
0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1



(α) Διακόπτες στη σειρά - λογικό ΚΑΙ (AND)



(β) Διακόπτες εν παραλλήλω - λογικό Ή (OR)

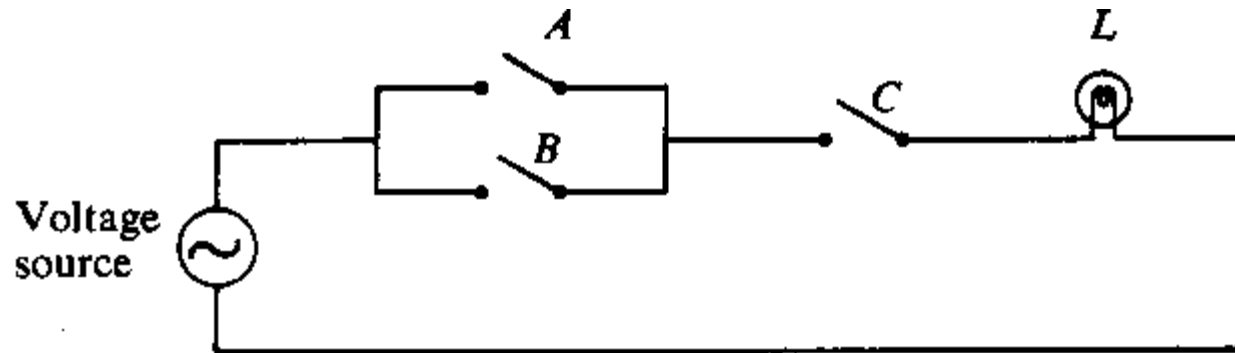


Αντιστροφή
NOT

Ένα Παράδειγμα Περιγραφής Λειτουργίας Κυκλώματος

62

- ➤ Να περιγραφεί η λειτουργία του παρακάτω κυκλώματος με τη χρήση λογικής συνάρτησης.



$$(A + B) \cdot C$$

Ψηφιακές Λογικές Πύλες



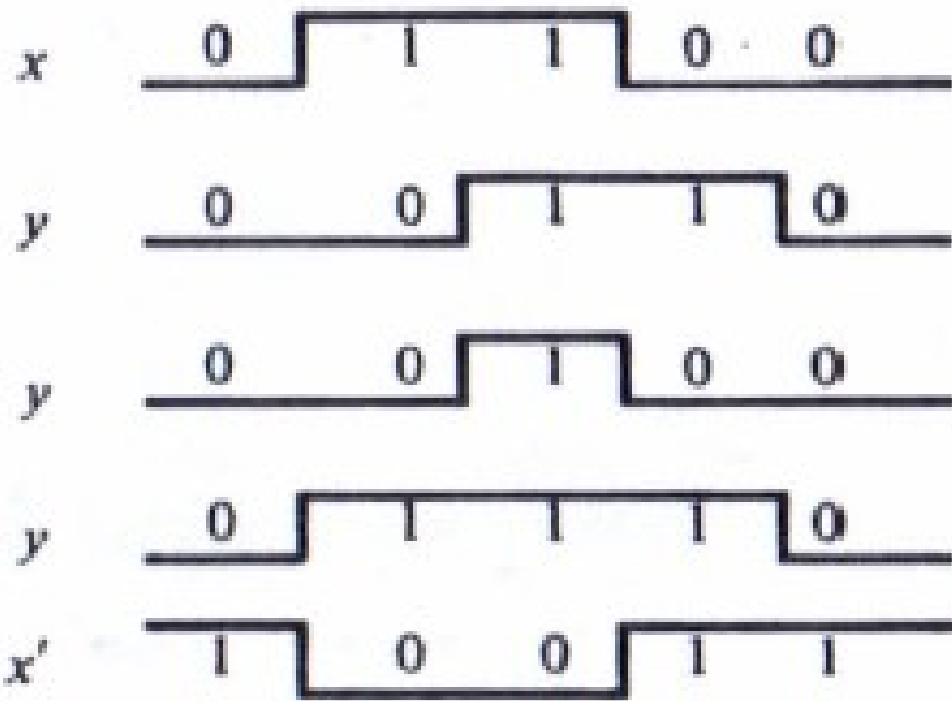
AND: $x \cdot y$



OR: $x + y$

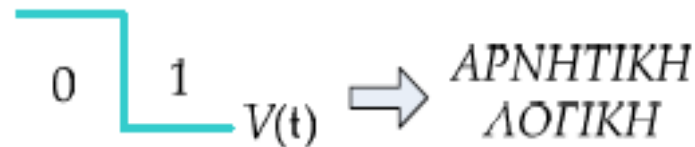
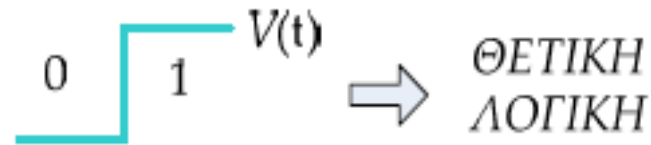


NOT: x'



Θετική και Αρνητική Λογική

- ✓ Ανάλογα με τον τρόπο υλοποίησης μιας λογικής πύλης, το λογικό «1» μπορεί να αντιστοιχείται σε υψηλή τάση (H) ή χαμηλή τάση (L).



- ✓ Στο μάθημα θα ασχοληθούμε με ψηφιακά κυκλώματα στα οποία οι πύλες έχουν υλοποιηθεί με τη θετική λογική: $0 \rightarrow L$ και $1 \rightarrow H$

Φυσικές καταστάσεις που αναπαρίστανται με bit σε διάφορες τεχνολογίες σχετιζόμενες με λογική υπολογιστών και μνήμης.

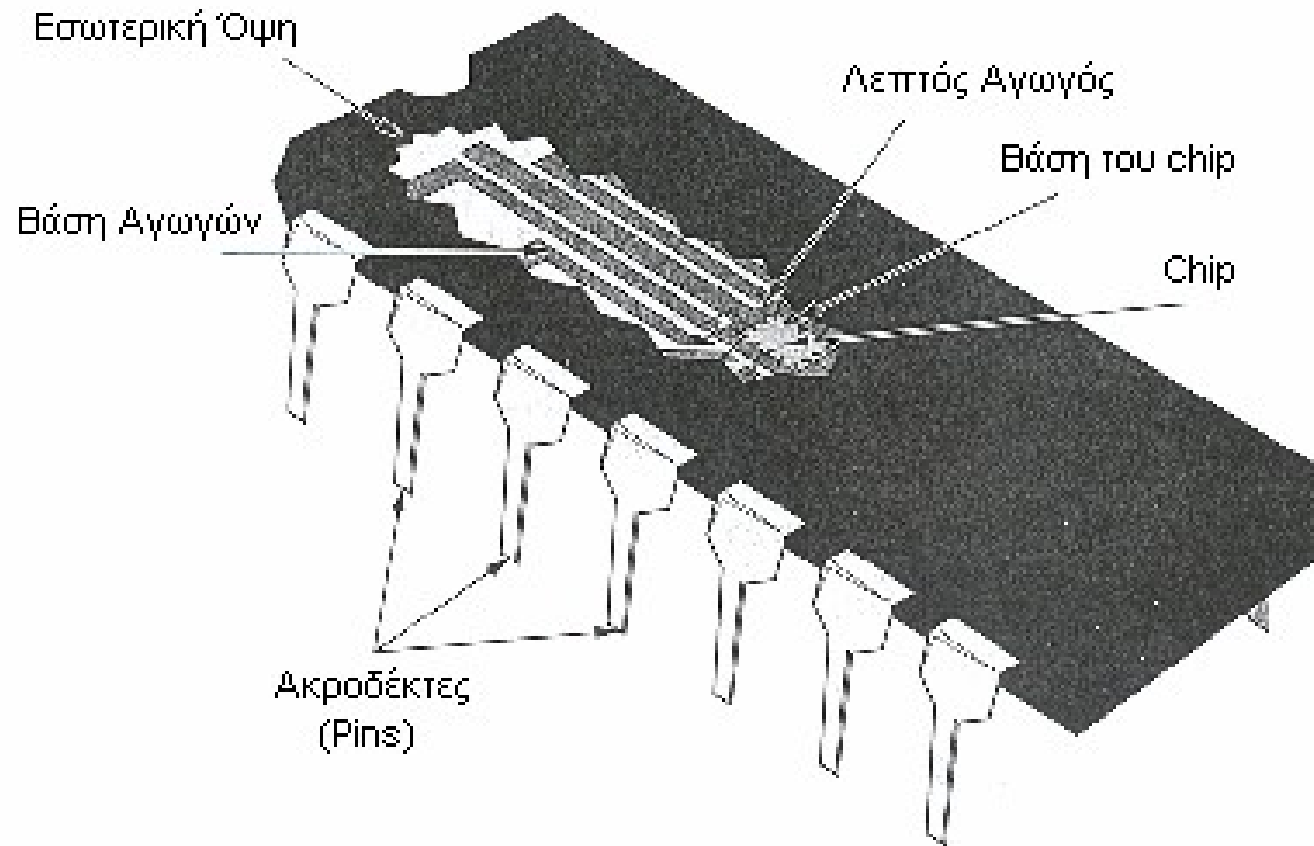
<i>Technology</i>	<i>State Representing Bit</i>	
	<i>0</i>	<i>1</i>
Pneumatic logic	Fluid at low pressure	Fluid at high pressure
Relay logic	Circuit open	Circuit closed
Complementary metal-oxide semiconductor (CMOS) logic	0–1.5 V	3.5–5.0 V
Transistor-transistor logic (TTL)	0–0.8 V	2.0–5.0 V
Fiber optics	Light off	Light on
Dynamic memory	Capacitor discharged	Capacitor charged
Nonvolatile, erasable memory	Electrons trapped	Electrons released
Bipolar read-only memory	Fuse blown	Fuse intact
Bubble memory	No magnetic bubble	Bubble present
Magnetic tape or disk	Flux direction “north”	Flux direction “south”
Polymer memory	Molecule in state A	Molecule in state B
Read-only compact disc	No pit	Pit
Rewritable compact disc	Dye in crystalline state	Dye in non-crystalline state

Ολοκληρωμένο Κύκλωμα - CHIP

- Τα ολοκληρωμένα κυκλώματα (integrated circuits) είναι συστατικά στοιχεία των ψηφιακών κυκλωμάτων.
- Ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα είναι ένας ημιαγωγός κρύσταλλος από σιλικόνη (chip) που περιέχει ηλεκτρονικά στοιχεία για τις ψηφιακές πύλες.
- Οι πύλες συνδέονται μέσα στο chip για να σχηματίσουν το κύκλωμα.
- Το chip τοποθετείται σε ένα πλαστικό περίβλημα και συγκολλούνται επαφές σε εξωτερικούς ακροδέκτες (pin) για να σχηματιστεί το ολοκληρωμένο κύκλωμα.

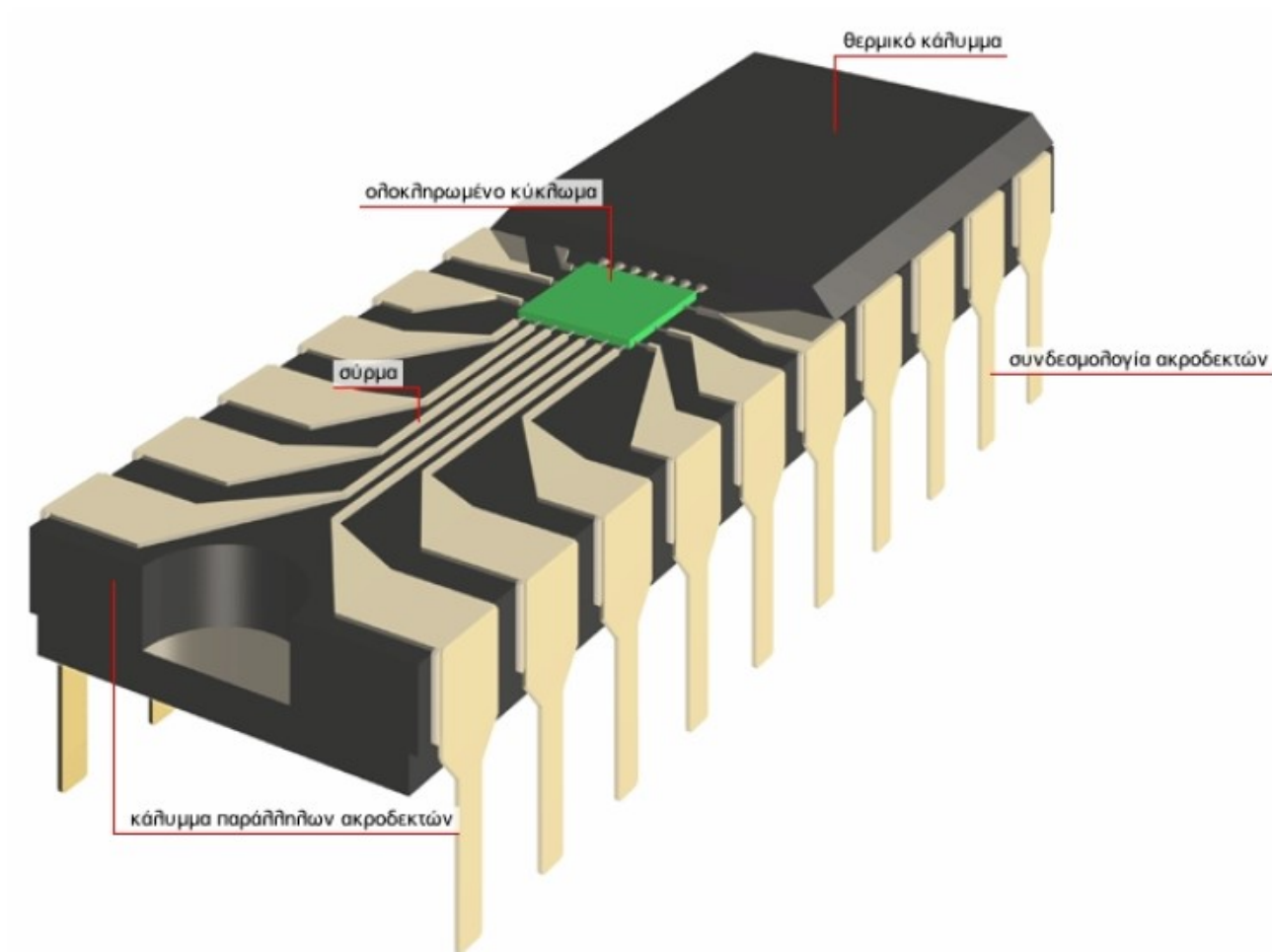
Ολοκληρωμένο Κύκλωμα - CHIP

67



Ολοκληρωμένο Κύκλωμα - CHIP

68



Κλίμακα Ολοκλήρωσης

69

- Τα ολοκληρωμένα κυκλώματα κατηγοριοποιούνται ανάλογα με την Κλίμακα Ολοκλήρωσης (Scale Integration), δηλαδή ανάλογα με το πλήθος των πυλών που περιέχουν.

Κλίμακα Ολοκλήρωσης (Scale Integration)	Πλήθος κυκλωμάτων ισοδύναμων με μια πύλη
SSI (Small Scale Integration)	< 12
MSI (Medium Scale Integration)	12 – 100
LSI (Large Scale Integration)	100 – 1000
VLSI (Very Large Scale Integration)	1000 – 100000
ULSI (Ultra Large Scale Integration)	> 100000

- Στο εργαστήριο SSI
- MSI: αποκωδικοποιητής, απαριθμητής.
- LSI: Μνήμες, μικροεπεξεργαστές.

Χαρακτηριστικά Λογικών Πυλών των

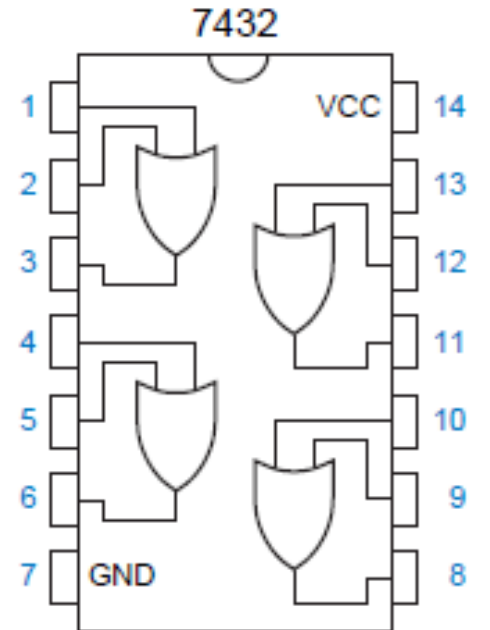
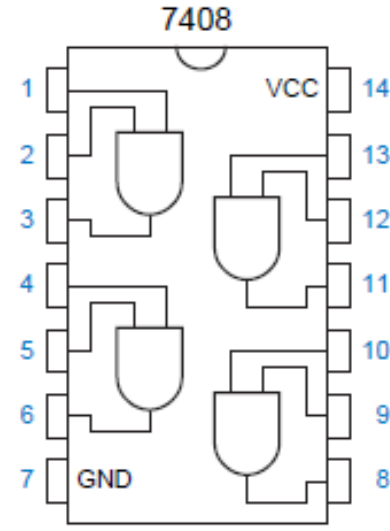
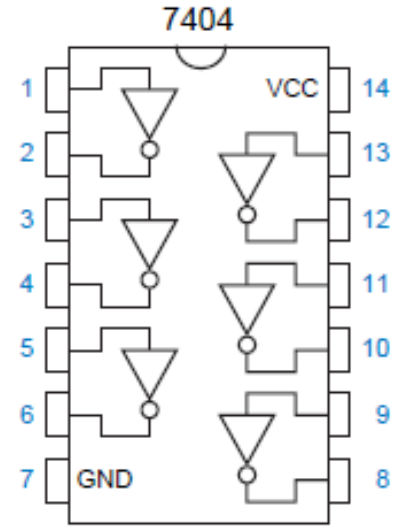
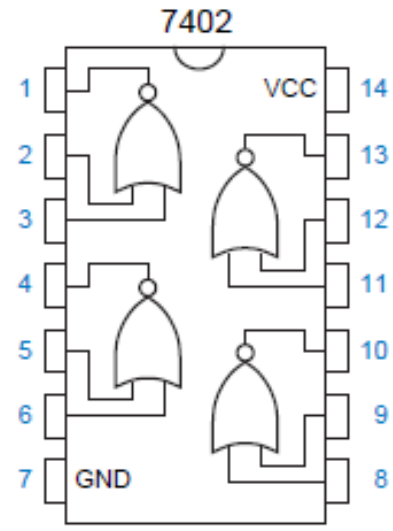
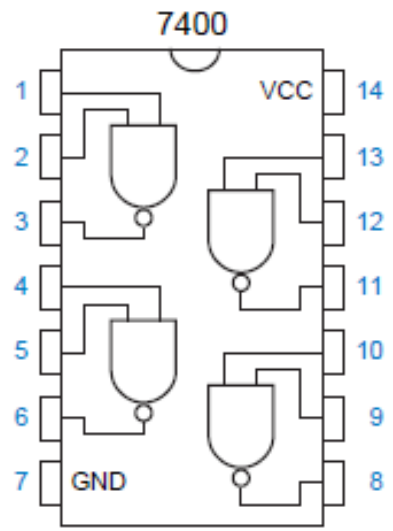
Ολοκληρωμένων Κυκλωμάτων

70

- **Fun Out** Μέγιστος αριθμός εξόδων (απαιτούμενο ρεύμα εισόδου που μπορεί να οδηγήσει η έξοδος χωρίς να κινδυνεύσει η ομαλή λειτουργία, υπέρβαση προδιαγραφών φορτίου.)
- **Power Dissipation** (απαιτούμενη ισχύς τροφοδοσίας για ομαλή λειτουργία)
- **Propagation Delay** (χρόνος για αλλαγή σήματος από την είσοδο στην έξοδο)
- **Noise Margin** (ελάχιστη τάση εξωτερικού θορύβου που προκαλεί ανεπιθύμητη αλλαγή στην έξοδο)

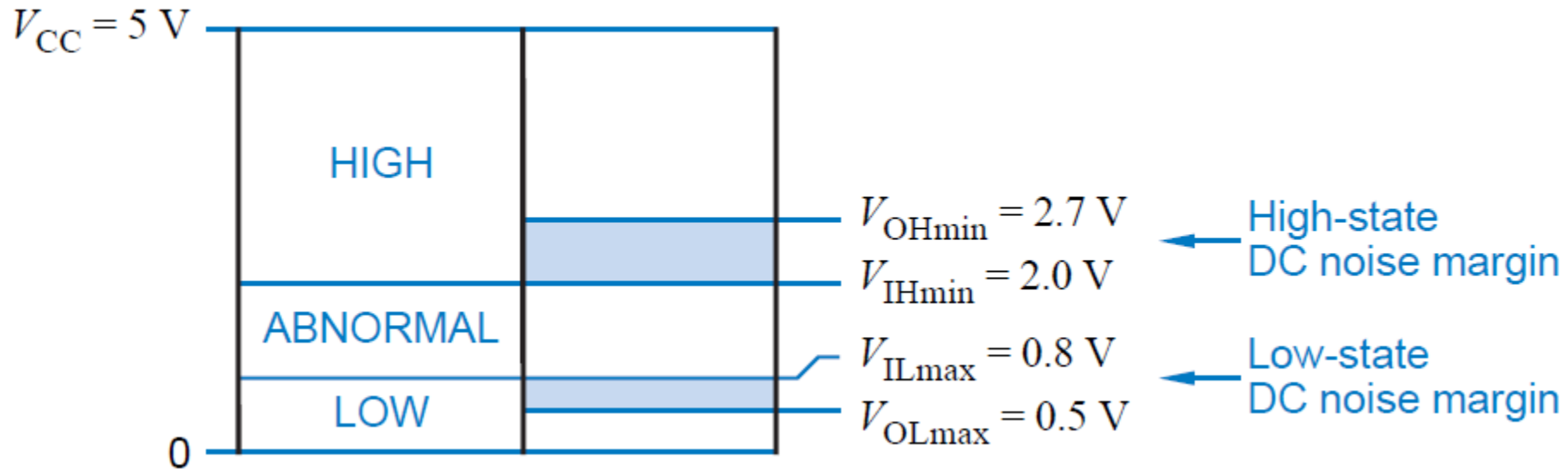
Παράδειγμα: 7400-series SSI ICs

71



Ολοκληρωμένο Κύκλωμα τύπου TTL

72



V_{OHmin} : Ελάχιστη τάση εξόδου για λογικό 1.

V_{IHmin} : Ελάχιστη τάση εισόδου για λογικό 1.

V_{ILmax} : Μέγιστη τάση εισόδου για λογικό 0.

V_{OLmax} : Μέγιστη τάση εξόδου για λογικό 0.

LOW 0–0.8 volts.

HIGH 2.0–5.0 volts.

Άλγεβρα Boole

Άλγεβρα Boole

- Η άλγεβρα του Boole ορίζεται σαν ένα μαθηματικό σύστημα, το οποίο περιέχει τα εξής:
 - ▣ Ένα σύνολο από στοιχεία, που έχουν κοινές ιδιότητες.
 - ▣ Ένα σύνολο από πράξεις (τελεστές): μία πράξη είναι στην ουσία ένας κανόνας που μας λέει ότι, όταν συνδυάσουμε σύμφωνα με αυτή την πράξη τα στοιχεία x και y ενός συνόλου, αντιστοιχίζεται σαν αποτέλεσμα ένα μοναδικό στοιχείο από το σύνολο.
 - ▣ Ένα σύνολο από αξιώματα: αποτελούν τις βασικές παραδοχές του συστήματος, από τις οποίες προκύπτουν όλες οι άλλες ιδιότητες της άλγεβρας, που ονομάζονται θεωρήματα.

Άλγεβρα Boole: Βασικοί Ορισμοί και Ιδιότητες

Δυαδικός Τελεστής (Binary Operator): σε κάθε ζεύγος από το S αντιστοιχίζει ένα στοιχείο του $S = \text{set}$, σύνολο

Συνηθισμένα Αξιώματα $(a, b, c, 0) \in S$, \otimes , \bullet δυαδικοί τελεστές :

1. Κλειστότητα ως προς δυαδικό τελεστή: $a \otimes b \in S$
2. Προσεταιριστικός Νόμος: $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$
3. Αντιμεταθετικός Νόμος: $a \otimes b = b \otimes a$
4. Ουδέτερο Στοιχείο: $a \otimes 0 = 0 \otimes a = a$
5. Αντίστροφο: $a \otimes a' = 0$
6. Επιμεριστικός Νόμος: $a \bullet (b \otimes c) = (a \bullet b) \otimes (a \bullet c)$

Ομάδα

- Ομάδα είναι ένα σύνολο, G , μαζί με μία πράξη \cdot (νόμος της G) οι οποίες συνδυάζει οποιαδήποτε δύο στοιχεία a και b για να σχηματίσει ένα άλλο στοιχείο που συμβολίζεται με $a \cdot b$ ή απλά ab . Για να είναι ομάδα, το σύνολο και η πράξη, (G, \cdot) , πρέπει να ικανοποιούν τέσσερις ιδιότητες γνωστές ως αξιώματα των ομάδων.

Αξιώματα Ομάδας

- Κλειστότητα: Για όλα τα a, b που ανήκουν στο G , το αποτέλεσμα της πράξης, $a \cdot b$, ανήκει επίσης στο G .
- Προσεταιριστική Ιδιότητα: Για όλα τα a, b και c που ανήκουν στο G , ισχύει $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- Ουδέτερο στοιχείο: Υπάρχει ένα στοιχείο e στο G , τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο a στο G , η εξίσωση $e \cdot a = a \cdot e = a$ να επαληθεύεται. Αυτό το στοιχείο είναι μοναδικό, και ως εκ τούτου αναφερόμαστε στο στοιχείο ταυτότητας.
- Αντίστροφο στοιχείο: Για καθένα a στο G , υπάρχει ένα στοιχείο b στο G τέτοιο ώστε $a \cdot b = b \cdot a = e$.
 - Ομάδες στις οποίες η αντιμεταθετική εξίσωση $a \cdot b = b \cdot a$ ισχύει πάντοτε ονομάζονται αβελιανές ομάδες.

Αξιωματικός Ορισμός Άλγεβρας Boole

Άλγεβρα Boole: είναι μία **αλγεβρική δομή** πάνω σε ένα σύνολο στοιχείων B μαζί με τους δυαδικούς τελεστές $+$, \bullet , αρκεί να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα (Huntington) :

1. Κλειστή ως προς τους τελεστές $+$, \bullet : $\alpha + \beta \in B$ $\alpha \bullet \beta \in B$
2. Αντιμεταθετική ως προς $+$, \bullet : $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$
3. Ουδέτερο Στοιχείο $0(+)$, $1(\bullet)$: $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha \bullet 1 = \alpha$
4. Συμπλήρωμα ως προς $+$, \bullet : $\alpha + \alpha' = 1$, $\alpha \bullet \alpha' = 0$
5. Επιμεριστική ως προς $+$, \bullet : $\alpha + (\beta \bullet \gamma) = (\alpha + \beta) \bullet (\alpha + \gamma)$, $\alpha \bullet (\beta + \gamma) = (\alpha \bullet \beta) + (\alpha \bullet \gamma)$
6. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία $\alpha, \beta \in B$ με $\alpha \neq \beta$.

Ορισμός Άλγεβρας Boole κατά Huntington

Η Άλγεβρα Boole ορίζεται, σύμφωνα με τη θεμελίωση του Huntington, σαν μια αλγεβρική δομή \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1 \rangle,$$

όπου

- α) B είναι ένα σύνολο στοιχείων, που περιέχει δύο τουλάχιστον στοιχεία,
- β) Τα σύμβολα “+”, “.”, “ $\bar{}$ ” δηλώνουν πράξεις επάνω στα στοιχεία του B , όπου:
 - η πράξη “+” ονομάζεται λογικό άθροισμα,
 - η πράξη “.” ονομάζεται λογικό γινόμενο, και
 - η πράξη “ $\bar{}$ ” ονομάζεται λογική αντιστροφή.
- γ) Τα “0” και “1” παριστάνουν ειδικά στοιχεία του B ($0, 1 \in B$), που ονομάζονται σταθερές του συστήματος.
- δ) Για κάθε στοιχείο a, b, c του συνόλου B οι ανωτέρω πράξεις ικανοποιούν τα αξιώματα του Πίνακα :

Αξιώματα της Άλγεβρας Boole

80

Huntington (1904)

A0.	$a, b \in B$ και $a \neq b$,	το σύνολο B έχει δύο τουλάχιστον στοιχεία.	
A1.	$a+b \in B$,	$a.b \in B$	Κλειστότης
A2.	$a+b=b+a$,	$a.b=b.a$	Αντιμεταθετικότητας
A3.	$a+(b.c)=(a+b).(a+c)$,	$a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$	Επιμεριστικότητας
A4.	$a+0=a$,	$a.1=a$	Ουδέτερα Στοιχεία
A5.	$a+\bar{a}=1$,	$a.\bar{a}=0$	Υπαρξη Συμπληρώματος

συμπληρωματικό ή αντίστροφο

- ΑΞΙΩΜΑ: Το ελάχιστο σύνολο βασικών ορισμών που θεωρούμε ότι είναι αληθείς, από τους οποίους μπορούν να παραχθούν όλες οι υπόλοιπες πληροφορίες του συστήματος.

Διαφορές με τη συνήθη Άλγεβρα

1. Τα αξιώματα Huntington δεν περιλαμβάνουν τον προσεταιριστικό νόμο που όμως αποδεικνύεται ότι ισχύει.
2. Ο επιμεριστικός νόμος του $+$ ως προς τον \bullet ισχύει για την άλγεβρα Boole αλλά όχι για την συνήθη άλγεβρα.
3. Η άλγεβρα Boole δεν έχει προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά αντίστροφα άρα δεν υπάρχει αφαίρεση - διαίρεση.
4. Το συμπλήρωμα δεν υπάρχει στην συνήθη άλγεβρα.
5. Η συνήθης άλγεβρα ασχολείται με το απειροσύνολο των πραγματικών. Η Boole έχει δύο στοιχεία, τα 0, 1.

Ανάλογα με την επιλογή των στοιχείων του B και των κανόνων λειτουργίας των τελεστών μπορούμε να σχηματίσουμε πολλές άλγεβρες Boole.

- *(3) Δεν υπάρχουν αντίθετα στοιχεία, επομένως π.χ., εάν ένα στοιχείο εμφανίζεται και στα δύο μέλη μιας εξίσωσης δεν μπορούμε να το απαλείψουμε, δηλ. η σχέση $a+c = b+c$ δεν συνεπάγεται τη σχέση $a = b$.

Αξιώματα και Θεωρήματα της Άλγεβρας Boole

Αξίωμα 2	(a) $x + 0 = x$	(b) $x \cdot 1 = x$
Αξίωμα 5	(a) $x + x' = 1$	(b) $x \cdot x' = 0$
Θεώρημα 1	(a) $x + x = x$	(b) $x \cdot x = x$
Θεώρημα 2	(a) $x + 1 = 1$	(b) $x \cdot 0 = 0$
Θεώρημα 3, (δύο αρνήσεις)	$(x')' = x$	
Αξίωμα 3, αντιμεταθετική	(a) $x + y = y + x$	(b) $xy = yx$
Θεώρημα 4, προσεταιριστική	(a) $x + (y + z) = (x + y) + z$	(b) $x(yz) = (xy)z$
Αξίωμα 4, επιμεριστική	(a) $x(y + z) = xy + xz$	(b) $x + yz = (x + y)(x + z)$
Θεώρημα 5, De Morgan	(a) $(x + y)' = x' y'$	(b) $(xy)' = x' + y'$
Θεώρημα 6, απορρόφηση	(a) $x + xy = x$	(b) $x(x + y) = x$

- **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Προτάσεις που γνωρίζουμε ότι είναι αληθείς και μας επιτρέπουν να χειριζόμαστε αλγεβρικές παραστάσεις οι οποίες οδηγούν στην απλούστερη ανάλυση ή την αποτελεσματικότερη σύνθεση κυκλωμάτων.

Δυσισμός

- Ότι ισχύει από τα αξιώματα Huntington για το $+$ (\cdot) μπορεί να προκύψει από το \cdot ($+$) με εναλλαγή τελεστών και ουδέτερων στοιχείων.
- Μια αληθής αλγεβρική έκφραση παραμένει αληθής αν εναλλαχθούν τελεστές και ουδέτερα στοιχεία (KAI-H, 0-1)
- Κάθε αλγεβρική έκφραση που μπορεί να εξαχθεί από τα αξιώματα της άλγεβρας Boole παραμένει αληθινή, εάν οι τελεστές και τα ουδέτερα στοιχεία εναλλαχθούν.

Θεωρήματα – Αποδείξεις τους

Θεώρημα 1

$$a+a = a,$$

Είναι:

$$\begin{aligned} a &= a+0 && A4 \\ &= a+a.a' && A5 \\ &= (a+a).(a+a') && A3 \\ &= (a+a).1 && A5 \\ &= a+a && A4 \end{aligned}$$

$$a.a = a$$

Είναι:

$$\begin{aligned} a &= a.1 && A4 \\ &= a.(a+a') && A5 \\ &= a.a+a.a' && A3 \\ &= a.a+0 && A5 \\ &= a.a && A4 \end{aligned}$$

Σημείωση: οι κωδικοί των αξιωμάτων που χρησιμοποιούνται είναι αυτοί που εμφανίζονται στον πίνακα αξιωμάτων κατά Huntington σε προηγούμενη διαφάνεια.

Θεώρημα 2

$$a+1 = 1,$$

Είναι:

$$\begin{aligned} 1 &= a+a' && A5 \\ &= a+(1.a') && A4 \\ &= (a+1).(a+a') && A3 \\ &= (a+1).1 && A5 \\ &= a+1 && A4 \end{aligned}$$

$$a.0 = 0$$

Είναι:

$$\begin{aligned} 0 &= a.a' && A5 \\ &= a.(0+a') && A4 \\ &= a.0+a.a' && A3 \\ &= a.0+0 && A5 \\ &= a.0 && A4 \end{aligned}$$

Θεωρήματα – Αποδείξεις τους

Θεώρημα 3

$$a+(a.b) = a,$$

Είναι:

$$\begin{aligned} a &= a.1 \\ &= a.(b+1) \\ &= a.(1+b) \\ &= (a.1)+(a.b) \\ &= a+(a.b) \end{aligned}$$

$$a.(a+b) = a$$

Είναι:

$$\begin{aligned} a &= a+0 \\ &= a+(b.0) \\ &= a+(0.b) \\ &= (a+0).(a+b) \\ &= a.(a+b) \end{aligned}$$

Θεωρήματα – Αποδείξεις τους

Θεώρημα 5

Το στοιχείο a' είναι το μοναδικό αντίστροφο του a :

α) Θα αποδείξουμε πρώτα ότι το a' είναι μοναδικό.

Έστω ότι υπάρχουν δύο αντίστροφα στοιχεία για το a , τα $a_1'=a$ και $a_2'=a$,
θα αποδείξουμε ότι ταυτίζονται.

Πρέπει: $a+a_1'=1$, $a+a_2'=1$ και $a.a_1'=0$, $a.a_2'=0$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } a_2' &= 1.a_2' && \text{A4} \\ &= (a+a_1').a_2' && \text{A5} \\ &= a.a_2'+a_1'.a_2' && \text{A3} \\ &= 0+a_1'.a_2' && \text{A5} \\ &= a.a_1'+a_1'.a_2' && \text{A5} \\ &= a_1'.(a+a_2') && \text{A3} \\ &= a_1' \end{aligned}$$

Θεωρήματα – Αποδείξεις τους

Θεώρημα 6

Θεωρήματα de Morgan:

$$\alpha) (a+b)' = a'.b', \quad \text{και} \quad \beta) (ab)' = a'+b'$$

- δηλαδή το $(a'.b')$ είναι το αντίστροφο του $(a+b)$. Αρκεί επομένως να αποδειχθεί ότι τα στοιχεία $(a+b)$ και $(a'.b')$ πληρούν τα αξιώματα: $a+a' = 1$, $a \cdot a' = 0$

$$(a+b)+a'.b' = 1 \quad \text{και} \quad (a+b).(a'.b') = 0$$

$$\begin{aligned} (a+b)+a'.b' &= [(a+b)+a'].[(a+b)+b'] & \text{και} & (a+b).(a'.b') = a.a'.b'+b.a'.b' \\ &= (1+b).(a+1) & & = a.a'.b'+a'.b.b' \\ &= 1 & & = 0 \end{aligned}$$

Θεώρημα De Morgan

88

$$\alpha. (x+y)' = x' \cdot y'$$

$$\beta. (x \cdot y)' = x' + y'$$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

$$(X_1 + X_2 + \dots + X_n)' = X_1' \cdot X_2' \cdot \dots \cdot X_n'$$

$$(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n)' = X_1' + X_2' + \dots + X_n'$$

Θεωρήματα – Αποδείξεις τους

Θεώρημα 7

Θεώρημα Απορρόφησης.

$$a+a'.b = a+b,$$

Είναι:

$$a+b = 1.(a+b) \quad A4$$

$$= (a+a').(a+b) \quad A5$$

$$= a+a'.b \quad A3$$

$$a.(a'+b) = a.b$$

Είναι:

$$a.b = 0+a.b \quad A4$$

$$= a.a'+a.b \quad A5$$

$$= a(a'+b) \quad A3$$

Προτεραιότητα Τελεστών

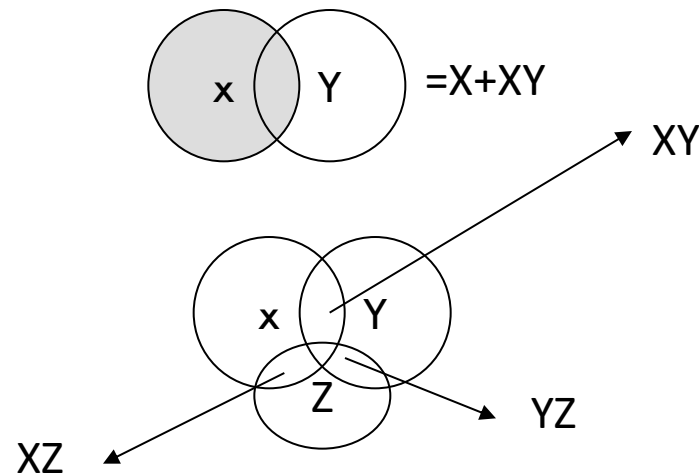
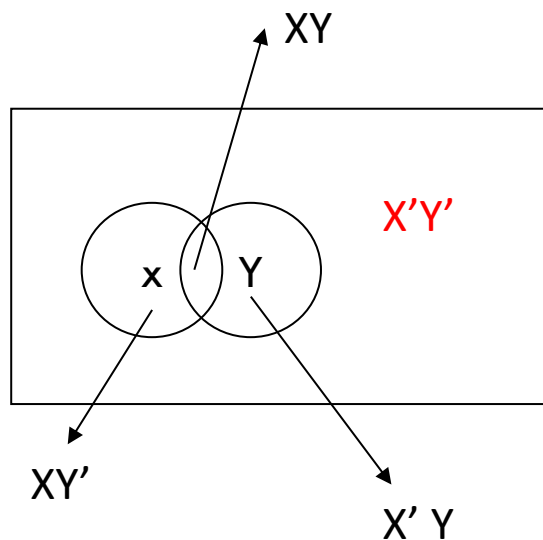
- Προτεραιότητα
Τελεστών
- 1. Παρενθέσεις
 - 2. Όχι
 - 3. Και
 - 4. Ή

Προτεραιότητα Τελεστών

- ✓ Η προτεραιότητα που χρησιμοποιούμε ακολουθεί την εξής σειρά: πρώτες έρχονται οι παρενθέσεις, μετά τα συμπληρώματα (λογικό NOT), μετά το \cdot (λογικό AND) και μετά το $+$ (λογικό OR).
- ✓ Για παράδειγμα αν θέλαμε να υπολογίσουμε το $(x+y)'$ για διάφορους συνδυασμούς x και y θα πρέπει πρώτα να κάνουμε την πράξη OR μέσα στην παρένθεση και μετά να πάρουμε το συμπλήρωμα του αποτελέσματος.
- ✓ Στην $x \cdot y'$ πρώτα παίρνουμε τα συμπληρώματα των x και y και μετά πραγματοποιούμε το λογικό AND.
- ✓ Στην $x+x \cdot y$ πρώτα πρέπει να πραγματοποιήσουμε το λογικό AND $x \cdot y$ και μετά το λογικό OR.
- ✓ Η προτεραιότητα των τελεστών θυμίζει την προτεραιότητα των πράξεων στην κανονική άλγεβρα αν αντιστοιχήσουμε το \cdot στον πολλαπλασιασμό και το $+$ στην πρόσθεση.

Διαγράμματα Venn

- Τα διαγράμματα Venn είναι σχέδια που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το σχηματισμό οπτικής εικόνας των σχέσεων μεταξύ μεταβλητών της άλγεβρας Boole.
- Χρησιμοποιούνται για γραφική απεικόνιση των αξιωμάτων της άλγεβρας Boole.
- Μέσα στον κύκλο $X=1$, έξω από τον κύκλο $X=0$



Ασκήσεις

- I. Να βρεθεί η δυϊκή μορφή των παρακάτω σχέσεων:
 - $F = (a+b').(b+c+0)$
 - $F = a.b'+b.c.1$
- **Απάντηση:**
 - $Fd = (a.b')+(b.c.1)$
 - $Fd = (a+b').(b+c+0)$
- II. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $F = x'+y'+xyz'$
- **Απάντηση:**
 - $F = x'+(y'+xyz') = x'+y'+xz' = x'+y'+z'$

Ασκήσεις

➤ III. Ναδειχθεί ότι: $ab+a'c+bc = ab+a'c$

➤ **Απάντηση:**

$$ab+a'c = (ab+abc)+(a'c+a'bc) \quad [x+xy=x]$$

$$ab+a'c+abc+a'bc = ab+a'c+(a+a')bc = ab+a'c+1.bc = ab+a'c+bc$$

➤ IV. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $x+(y.z)+(x'.y'.z)$

➤ **Απάντηση:**

$$x+(y.z)+(x'.y'.z)$$

$$= x+y.z+x'.y'.z$$

$$= x+y.z+y'.z$$

$$= x+(y+y').z$$

$$= x+z$$

Ασκήσεις

➤ V. Να δειχθεί ότι: $xyz+x'y+xyz'=y$

➤ **Απάντηση:**

$$xyz+x'y+xyz' = xy(z + z') + x'y = xy + x'y = y$$

➤ VI. Να απλοποιηθεί σε ελάχιστο αριθμό παραγόντων η παράσταση:

$$(x'y' + z)' + z + xy + wz$$

➤ **Απάντηση:**

$$(x'y' + z)' + z + xy + wz =$$

$$(x'y')'z' + z + xy + wz =$$

$$[(x + y)z' + z] + xy + wz =$$

$$(z + z')(z + x + y) + xy + wz =$$

$$z + wz + x + xy + y = z(1 + w) + x(1 + y) + y = x + y + z$$

Ασκήσεις

- VII. Να απλοποιηθεί σε ελάχιστο αριθμό παραγόντων η παράσταση:

$$A'B(D' + C'D) + B(A + A'CD)$$

- **Απάντηση:**

$$A'B(D' + C'D) + B(A + A'CD) =$$

$$B(A'D' + A'C'D + A + A'CD) =$$

$$B(A'D' + A + A'D(C + C')) =$$

$$B(A + A'(D' + D)) =$$

$$B(A + A') = B$$

Ασκήσεις

97

- VIII. Να απλοποιηθεί σε ελάχιστο αριθμό παραγόντων η παράσταση:

$$ABCD + A'BD + ABC'D$$

- **Απάντηση:**

$$ABCD + A'BD + ABC'D =$$

$$ABD + A'BD =$$

$$BD$$

Ασκήσεις

98

➤ VIV. Να δείξετε ότι εάν: $a+b=a+c$ και $a'+b=a'+c$, τότε $b=c$

➤ **Απάντηση:**

$$(a+b).(a'+b) = (a+c).(a'+c)$$

$$aa'+ab+a'b+b = aa'+ac+a'c+c$$

$$ab+a'b+b = ac+a'c+c$$

$$b = c$$

Ασκήσεις

- Χ. Να βρεθεί η δυϊκή της ακόλουθης σχέσης και κατόπιν να αποδειχθεί αλγεβρικά ότι ισχύει η ισότητα της δυϊκής:

$$x'y' + x'z + xz' = y'z' + x'z + xz'$$

- **Απάντηση:**

$$(x' + y').(x' + z).(x + z') = (y' + z').(x' + z).(x + z')$$

$$[(x' + y').(x' + z)].(x + z') = (y' + z').[(x' + z).(x + z')]$$

$$[x' + x'z + x'y' + y'z].(x + z') = (y' + z').[x'z' + xz]$$

$$[x' + y'z].(x + z') = (y' + z').[x'z' + xz]$$

$$x'z' + xy'z = x'y'z' + xy'z + x'z' \quad (a + ab = a)$$

$$x'z' + xy'z = xy'z + x'z'$$

Ασκήσεις

- XI. Να εκφράσετε τη συνάρτηση: $F = xy + x'z$, σε γινόμενο αθροισμάτων, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα.
- **Απάντηση:**

$$\begin{aligned} F &= xy + x'z = (xy + x')(xy + z) \\ &= (x + x')(y + x')(x + z)(y + z) \\ &= (x' + y)(x + z)(y + z) \end{aligned}$$

Η Δίτιμη Άλγεβρα Boole

x	y	z	$y + z$	$x \cdot (y + z)$	$x \cdot y$	$x \cdot z$	$(x \cdot y) + (x \cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

1. Η κλειστότητα προφανώς ισχύει.
2. Τα ουδέτερα στοιχεία είναι 0 για το + και 1 για το \cdot : ($0+0=0$, $0+1=1+0=1$) και ($1 \cdot 1=1$, $1 \cdot 0=0 \cdot 1=0$)
3. Οι αντιμεταθετικοί νόμοι είναι προφανείς από την συμμετρία.
4. Ο επιμεριστικός νόμος φαίνεται από τον πίνακα
5. Από τον πίνακα συμπληρώματος έχουμε $x+x'=1$: $0+0'=0+1=1$, $1+1'=1+0=1$ και $x \cdot x'=0$: $0 \cdot 0'=0 \cdot 1=0$, $1 \cdot 1'=1 \cdot 0=0$
6. Η άλγεβρα έχει τουλάχιστον 2 στοιχεία αφού $1 \neq 0$.

$$B = \{0, 1\}$$

x	y	x'	$x \cdot y$	$x+y$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Δυαδική Λογική

- ✓ Η δυαδική λογική ασχολείται με μεταβλητές που μπορούν να πάρουν δύο πιθανές τιμές: το 0 και το 1.
- ✓ Χρησιμοποιείται για να περιγράψει με μαθηματικό τρόπο την επεξεργασία δυαδικών πληροφοριών και ταιριάζει εξαιρετικά με την ανάλυση και σχεδίαση ψηφιακών κυκλωμάτων.
- ✓ Η δυαδική λογική είναι ισοδύναμη με την Αλγεβρα Boole.
- ✓ Μπορούμε να ορίσουμε τρεις βασικές πράξεις στην δυαδική λογική:

Λογικό ΚΑΙ (AND)			Λογικό Η΄ (OR)			Λογικό ΟΧΙ (NOT)	
x	y	$x \cdot y$	x	y	$x + y$	x	x'
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

Συναρτήσεις Boole

Συνάρτηση: Έκφραση από δυαδικές μεταβλητές, τους δύο δυαδικούς τελεστές, παρενθέσεις και ένα ίσον.

$F_1 = xyz'$ είναι 1 μόνο αν $x=y=1, z=0$.

x	y	z	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

$$F_1 = xyz'$$

$$F_2 = x + y'z$$

$$F_3 = x'y'z + x'yz + xy'$$

$$F_4 = xy' + x'z$$

Η F_4 είναι ίδια με την $F_3 \Rightarrow$ Υπάρχουν πολλές εκφράσεις για μια συνάρτηση

- Μια συνάρτηση n μεταβλητών, έχει 2^n πιθανές τιμές εισόδου.
- Διαφορετική συνάρτηση \Leftrightarrow διαφορετική έξοδος έστω και για κάποιον συνδυασμό εισόδου. Αφού η έξοδός μου για κάθε συνδυασμό εισόδου μπορεί να είναι 0 ή 1 θα υπάρχουν 2^{2^n} συναρτήσεις.

Λογική Παράσταση

Λογική Παράσταση ονομάζεται κάθε συνδυασμός πεπερασμένου πλήθους μεταβλητών $a, b, c \dots$ ή/και σταθερών 0, 1 της άλγεβρας, που συνδέονται μεταξύ τους μέσω των πράξεων "+", ".", "-"

Π.χ. η $a + b.c.(a + c)'$ είναι μια λογική παράσταση, όπως και η $a.b + (a' + b').(a' + b.c')$.

Υπάρχουν $(2^2)^n$ διαφορετικές συναρτήσεις n δυαδικών μεταβλητών.

Για $n=2$ έχουμε 16 διαφορετικές συναρτήσεις Boole.

Οι AND και OR είναι απλά 2 από τις 16.

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Η λογική παράσταση είναι ο τρόπος με τον οποίο διατυπώνονται τα θεωρήματα και οι λοιπές σχέσεις της άλγεβρας Boole.

Πίνακας Αληθείας

- Ο πίνακας αληθείας της λογικής συνάρτησης περιγράφει αυτή τη σχέση εισόδων-εξόδου.
- Η απεικόνιση, δηλ. η αντιστοίχιση των συνδυασμών τιμών των μεταβλητών στις τιμές της συνάρτησης δίνεται από έναν πίνακα αντιστοιχίας, που για παραδοσιακούς λόγους ονομάζεται Πίνακας Αληθείας (Truth Table).
- Ο Πίνακας Αληθείας μιας συνάρτησης έχει 2^n σειρές, όσοι είναι οι συνδυασμοί τιμών των n μεταβλητών της συνάρτησης.

Πίνακας Αληθείας

- Η λογική συνάρτηση Y τριών μεταβλητών A , B και C έχει τον ακόλουθο πίνακα αληθείας:
- Ο πίνακας αληθείας έχει 8 ($=2^3$) συνδυασμούς των 3 μεταβλητών εισόδου.
- Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει ότι η συνάρτηση εξόδου είναι $Y=1$ όταν $A=0$ και (AND) $B=0$ και (AND) $C=1$ ή (OR) $A=1$ και (AND) $B=1$ και (AND) $C=0$
- Επομένως, η λογική συνάρτηση Y γράφεται: $Y=A' B' C+ABC'$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Θεωρήματα Ανάπτυξης Συναρτήσεων του Shannon

107

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (Shannon)

Πρόκειται για δύο δυϊκά μεταξύ τους θεωρήματα, τα οποία προτάθηκαν από τον C. Shannon, σύμφωνα με τα οποία κάθε λογική συνάρτηση:

$$y = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$$

που δίνεται υπό οποιαδήποτε μορφή, αλγεβρική ή πίνακα αληθείας, μπορεί να αναπτυχθεί ως προς κάποια μεταβλητή της x_k και η παράστασή της να διατυπωθεί με τις εξής δύο μορφές:

$$\alpha) \underline{f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = x_k \cdot f(x_1, \dots, 1, \dots, x_n) + \bar{x}_k \cdot f(x_1, \dots, 0, \dots, x_n)}$$

και

$$\beta) \underline{f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = [x_k + f(x_1, \dots, 0, \dots, x_n)] \cdot \bar{x}_k + f(x_1, \dots, 1, \dots, x_n)}$$

Θεωρήματα Ανάπτυξης Συναρτήσεων του Shannon

108

- Το (α) δηλώνει ότι κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο γινομένων ως προς κάποια μεταβλητή x_k
- Το (β) δηλώνει ότι κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο αθροισμάτων ως προς κάποια μεταβλητή x_k
- Το (α)/(β) δυϊκό του (β)/(α)

Θεωρήματα Ανάπτυξης Συναρτήσεων του Shannon - Παράδειγμα

109

- Να αναπτυχθεί διαδοχικά ως προς τις μεταβλητές x , y και z η συνάρτηση:
 $f(x,y,z) = x'y'+x'z+xz'$

Ως προς τη μεταβλητή x :

$$f(x,y,z) = x.f(1, y, z) + x'.f(0, y, z),$$

όπου οι συναρτήσεις f_0 και f_1 είναι:

$$f(0, y, z) = 0'y'+0'z+0.z' = 1.y'+1.z+0 = y'+z \text{ και}$$

$$f(1, y, z) = 1'y'+1'z+1.z' = 0.y'+0.z+1.z' = z'$$

Οι συναρτήσεις $f(0, y, z)$ και $f(1, y, z)$ μπορούν να αναλυθούν με τη σειρά τους ως προς τη μεταβλητή y ως εξής:

$$f(0, y, z) = y.f(0, 1, z) + y'.f(0, 0, z) \text{ και } f(1, y, z) = y.f(1, 1, z) + y'.f(1, 0, z), \text{ όπου:}$$

$$f(0, 0, z) = 0'+z = 1 \text{ και } f(0, 1, z) = 1'+z = z$$

$$f(1, 0, z) = z' \text{ και } f(1, 1, z) = z'$$

Θεωρήματα Ανάπτυξης Συναρτήσεων του Shannon - Παράδειγμα

110

Εφαρμόζοντας διαδοχικά το θεώρημα, η συνάρτηση $f(x,y,z)$ μπορεί να αναλυθεί ως προς περισσότερες από μία μεταβλητές:

$$f(x,y,z) = x.f(1, y, z) + x'.f(0, y, z)$$

$$f(x,y,z) = x.[y.f(1, 1, z) + y'.f(1, 0, z)] + x'.[y.f(0, 1, z) + y'.f(0, 0, z)]$$

$$f(x,y,z) = x.[y.z' + y'.z'] + x'.[y.z + y'.1]$$

και τελικά:

$$f(x,y,z) = x.y.z' + x.y'.z' + x'.y.z + x'.y'$$

Ομοίως, $f(x,y,z) = [x+f(0, y, z)].[x' + f(1, y, z)]$,

όπου $f(0, y, z)$ και $f(1, y, z)$, όπως στο Παράδειγμα

Συμπλήρωμα Συνάρτησης

- Το συμπλήρωμα μιας συνάρτησης F (F'), είναι η συνάρτηση εκείνη που ισούται με 0, όταν $F=1$ και με 1, όταν $F=0$.
- Προκύπτει με την εφαρμογή του θεωρήματος De Morgan.
- Απλούστερος τρόπος: Υπολογίζουμε τη δυϊκή μορφή της F και συγχρόνως το συμπλήρωμα κάθε όρου.
- Παράδειγμα με εφαρμογή του θεωρήματος De Morgan : $F=x'yz'+x'y'z$
 $F'=(x'yz'+x'y'z)'=(x'yz')'(x'y'z)'=(x+y'+z)(x+y+z')$
- Παράδειγμα με εφαρμογή του απλούστερου τρόπου:

Βρίσκουμε τη δυϊκή μορφή της F :

$$(x'+y+z')(x'+y'+z)=(x+y'+z)(x+y+z')=F'$$

Ελάχιστοι Όροι και Μέγιστοι Όροι

- Ελάχιστοι όροι μίας λογικής συνάρτησης ονομάζονται όλα τα γινόμενα όλων των όρων της συνάρτησης, όπου ο κάθε όρος (μεταβλητή) εμφανίζεται στην κανονική (αν έχει τιμή "1") ή στην συμπληρωματική του μορφή (αν έχει τιμή "0").
- Μέγιστοι όροι μίας λογικής συνάρτησης ονομάζονται όλα τα αθροίσματα όλων των όρων της συνάρτησης, όπου ο κάθε όρος (μεταβλητή) εμφανίζεται στην κανονική (αν έχει τιμή "0") ή στην συμπληρωματική του μορφή (αν έχει τιμή "1").
- Μία λογική συνάρτηση n μεταβλητών έχει 2^n ελάχιστους όρους και 2^n μέγιστους όρους.

Ελάχιστοι όροι

- Μία συνάρτηση $m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ονομάζεται συνάρτηση ελαχίστου όρου (minterm), όταν ορίζεται από μια λογική παράσταση γινομένου της μορφής:

$$m(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$$

- όπου τα a_i ($i=1, \dots, n$) είναι δυαδικές σταθερές, $a_i = \{0, 1\}$

$$x^0 = \bar{x} \text{ και } x^1 = x.$$

Συνολικά υπάρχουν 2^n διαφορετικές συναρτήσεις ελαχίστου όρου των n μεταβλητών, δηλ. όσοι οι συνδυασμοί τιμών των σταθερών a_i .

Μέγιστοι όροι

Μία συνάρτηση $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ονομάζεται συνάρτηση **μεγίστου όρου** (Maxterm), όταν ορίζεται από μια λογική παράσταση *αθροίσματος* της μορφής:

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\bar{a}_1} + x_2^{\bar{a}_2} + \dots + x_n^{\bar{a}_n}$$

όπου τα a_i ($i=1, \dots, n$) είναι δυαδικές σταθερές, $a_i \in \{0, 1\}$ και η συνάρτηση παριστάνεται με κεφαλαίο “M”.

Συνολικά υπάρχουν 2^n διαφορετικές συναρτήσεις ελαχίστου όρου των n μεταβλητών.

Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι για 3 δυαδικές μεταβλητές

Minterms and Maxterms for Three Binary Variables

<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	Minterms		Maxterms	
			Term	Designation	Term	Designation
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

Θεωρήματα Συναρτήσεων Ελαχιστόρων και Μεγιστόρων

Θεώρημα 1. $m_i \cdot m_j = 0$, $M_i + M_j = 1$

Θεώρημα 2. $\sum_i m_i = 1$, $\prod_i M_i = 0$

Θεώρημα 3. $m_i = \prod_{j \neq i} (M_j)$, $M_i = \sum_{j \neq i} (m_j)$

Θεώρημα 4. $m_i = \overline{M}_i$, $M_i = \overline{m}_i$.

Εφαρμογή των Θεωρημάτων 3 και 4

Οι minterms και maxterms δύο μεταβλητών για $i=1$ είναι:

$$m_1(x,y) = x'y \text{ και } M_1(x,y) = x+y'$$

$$\alpha) M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 = (x+y)(x'+y)(x'+y') = (xy+x'y+y)(x'+y') = x'y = m_1(x,y)$$

$$\beta) m_0 + m_2 + m_3 = (x'y') + (xy') + (xy) = x'y' + x = x + y' = M_1(x,y)$$

$$\gamma) M_1'(x,y) = (x+y')' = x'y = m_1(x,y)$$

$$\delta) m_1'(x,y) = (x'y)' = x+y' = M_1(x,y)$$

Εφαρμογή των Θεωρημάτων 3 και 4

- Κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ελαχιστόρων.
- Κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως γινόμενο μεγιστόρων.

Το *θεώρημα του Κανονικού Αθροίσματος Γινομένων* μιας συνάρτησης μας λέει ότι κάθε λογική συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_n)$ μπορεί να παρασταθεί σαν *άθροισμα γινομένων* της μορφής:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i [f(i) \cdot m_i(x_1, \dots, x_n)],$$

$f(i)$ είναι η τιμή της συνάρτησης

Το *θεώρημα του Κανονικού Γινομένου Αθροισμάτων* μιας συνάρτησης μας λέει ότι κάθε λογική συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_n)$ μπορεί να παρασταθεί σαν *γινόμενο αθροισμάτων* της μορφής:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_i [f(i) + M_i(x_1, \dots, x_n)],$$

Παράδειγμα με Ελαχιστόρους

119

x	y	z	Function f_1	Function f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$f_1 = x'y'z + xy'z' + xyz = m_1 + m_4 + m_7$$

$$f_2 = x'yz + xy'z + xyz' + xyz = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

Παράδειγμα με Μεγιστόρους

120

x	y	z	Function f_1	Function f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z) \\
 &= M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2 &= (x + y + z)(x + y + z')(x + y' + z)(x' + y + z) \\
 &= M_0 M_1 M_2 M_4
 \end{aligned}$$

Κανονικές Μορφές

- Κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να εκφρασθεί ως:
 - άθροισμα ελάχιστων όρων (ΣΠ μορφή) και
 - γινόμενο μέγιστων όρων (ΠΣ μορφή)
- Αυτές οι δύο μορφές έκφρασης των συναρτήσεων ονομάζονται Κανονικές Μορφές.
- Κανονικό Αθροισμα Γινομένων (Canonical Sum of Products) ονομάζεται κάθε λογική παράσταση A με n μεταβλητές που διατυπώνεται σαν άθροισμα κάποιων ελαχιστόρων.
- Κανονικό Γινόμενο Αθροισμάτων (Canonical Product of Sums) ονομάζεται κάθε λογική παράσταση A με n μεταβλητές που διατυπώνεται σαν γινόμενο κάποιων μεγιστόρων.
- Η παράσταση μιας συνάρτησης σαν κανονικό γινόμενο αθροισμάτων είναι μοναδική.

Μετατροπή Κανονικής Μορφής

- Όταν είναι γνωστή η μια από τις δύο μορφές Κανονικής Παράστασης μιας συνάρτησης $f(x_1, \dots, x_n)$, τότε η μετατροπή της στην άλλη κανονική μορφή γίνεται με διπλή εφαρμογή του θεωρήματος του de Morgan, δεδομένου ότι $f = (f')'$, ως εξής:
 1. Αναπτύσσεται στην ίδια κανονική μορφή η αντίστροφη συνάρτηση: $f'(x_1, \dots, x_n)$
 2. Αντιστρέφεται η παράσταση της συνάρτησης (f') .

Ισοδύναμες Συναρτήσεις

- Δύο συναρτήσεις είναι ισοδύναμες (ταυτίζονται), όταν και μόνον όταν έχουν την ίδια Κανονική Παράσταση είτε υπό μορφή αθροίσματος γινομένων είτε γινομένου αθροισμάτων. Οι παραστάσεις ενδέχεται να διαφέρουν ως προς τη διάταξη των όρων τους.

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i [f(i) \cdot m_i(x_1, \dots, x_n)] &\Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = \prod_i [f(i) + M_i(x_1, \dots, x_n)] \\ f(x_1, \dots, x_n) = \prod_i [f(i) + M_i(x_1, \dots, x_n)] &\Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i [f(i) \cdot m_i(x_1, \dots, x_n)] \end{aligned}$$

Εναλλακτικός Τρόπος Παρουσίασης Λογικής Συνάρτησης

124

x	y	z	Y	Ελάχιστοι όροι	Μέγιστοι Όροι
0	0	0	0	$m_0=x'y'z'$	$M_0=x+y+z$
0	0	1	1	$m_1=x'y'z$	$M_1=x+y+z'$
0	1	0	0	$m_2=x'yz'$	$M_2=x+y'+z$
0	1	1	0	$m_3=x'yz$	$M_3=x+y'+z'$
1	0	0	1	$m_4=xy'z'$	$M_4=x'+y+z$
1	0	1	0	$m_5=xy'z$	$M_5=x'+y+z'$
1	1	0	0	$m_6=xyz'$	$M_6=x'+y'+z$
1	1	1	1	$m_7=xyz$	$M_7=x'+y'+z'$

- ΣΠ μορφή: $Y=x'y'z+xy'z'+xyz=\Sigma(1,4,7)$, όπου Σ παριστάνει το Λογικό - Η
- ΠΣ μορφή: $Y=(x+y+z) (x+y'+z) (x+y'+z') (x'+y+z') (x'+y'+z)=\Pi(0,2,3,5,6)$, όπου Π παριστάνει το Λογικό - ΚΑΙ

Εναλλακτικός Τρόπος Παρουσίασης Λογικής Συνάρτησης - Άσκηση

125

- Να υπολογίσετε τους πίνακες αληθείας των: α) $F(x,y,z) = \Sigma(1,4,5,6,7)$
- β) $F(x,y,z,w) = \Pi(0,2,5,7,10,11,15)$.

Μετατροπή Κανονικής Μορφής - Παράδειγμα

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y,z) = z' + y(x'+xz)$. Η παράσταση του αθροίσματος γινομένων της είναι: $f(x,y,z) = x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z' + xyz' + xyz$. Ζητείται να βρεθεί η άλλη Κανονική μορφή της.
- Απάντηση: Κατά το θεώρημα του de Morgan, η παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης είναι:

$$f'(x,y,z) = (x+y+z) (x+y'+z) (x+y'+z') (x'+y+z) (x'+y'+z) (x'+y'+z')$$

$$= (x+xy'+y'z+z) (x+y'+z') (x'+x'y'+y'z+z) (x'+y'+z')$$

$$= (x+xz+y'z) (x'+x'z+y'z) = (x+y'z) (x'+y'z) = xy'z+x'y'z+y'z = y'z.(x+x')$$

$$xy'z+x'y'z$$

Μετατροπή Κανονικής Μορφής - Παράδειγμα

127

- Με αντιστροφή της f' : $f = (f')' = (xy'z+x'y'z)' = (x'+y+z')(x+y+z')$ (να γίνει επαλήθευση μέσω του πίνακα αληθείας)

$$f(x,y,z) = x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z' + xyz' + xyz = \Sigma(0,2,3,4,6,7)$$

$$= [\Sigma(0,2,3,4,6,7)]' = \Sigma(1,5)$$

$$\text{Μέσω De Morgan } [\Sigma(1,5)]' = \Pi(1,5) = (x'+y+z')(x+y+z')$$

Άσκηση

128

- Να αναπτυχθεί σε άθροισμα γινομένων ως προς τη μεταβλητή y η συνάρτηση $f(x,y,z) = x+yz$.

Α. Η συνάρτηση $f(x,y,z) = x+yz$, όταν αναπτυχθεί σε άθροισμα γινομένων ως προς τη μεταβλητή y , θα είναι:

$$f(x,y,z) = y \cdot f(x,1,z) + y' \cdot f(x,0,z)$$

όπου: $f(x,1,z) = x+z$ και $f(x,0,z) = x$

Άσκηση

129

Να αναπτυχθεί σε γινόμενο αθροισμάτων ως προς τη μεταβλητή y η συνάρτηση $f(x,y,z) = xy' + x'y$.

B. Η συνάρτηση $f(x,y,z) = xy' + x'y$, όταν αναπτυχθεί σε γινόμενο αθροισμάτων ως προς τη μεταβλητή y , θα είναι:

$$f(x,y,z) = (y + f(x,0,z)) \cdot (y' + f(x,1,z))$$

όπου: $f(x,0,z) = x$ και $f(x,1,z) = x'$

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του De Morgan, μετατρέψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε ισοδύναμες που να περιέχουν: i) μόνο πράξεις Η και συμπληρώματος και ii) μόνο πράξεις ΚΑΙ και συμπληρώματος. 1) $F = x'y' + x'z + y'z$ και 2) $F = (y+z')(x+y)(y'+z)$

i)

$$F = [(x'y' + x'z + y'z)']' = [(x'y')' (x'z)' (y'z)']' = [(x+y)(x+z')(y+z)']' = (x+y)' + (x+z)'+ (y+z)'$$

$$F = ((y+z')(x+y)(y'+z))' = [(y+z)'+ (x+y)' + (y'+z)']'$$

ii)

$$F = [(x'y' + x'z + y'z)']' = [(x'y')' (x'z)' (y'z)']'$$

$$F = ((y+z')(x+y)(y'+z))' = [(y+z)'+ (x+y)' + (y'+z)']' = \dots (y'z)' (x'y)''(yz)''$$

Εκφράσεις Boole για τις Συναρτήσεις 2 Μεταβλητών

Συναρτήσεις Boole	Σύμβολο τελεστή	Όνομα	Σχόλια
$F_0 = 0$		Ουδέτερη	Δυαδική σταθερά 0
$F_1 = xy$	$x \cdot y$	ΚΑΙ (AND)	x ΚΑΙ y
$F_2 = xy'$	x / y	Αποτροπή	x αλλά όχι y
$F_3 = x$		Μεταφορά	x
$F_4 = x'y$	y / x	Αποτροπή	y αλλά όχι x
$F_5 = y$		Μεταφορά	y
$F_6 = xy' + x'y$	$x \oplus y$	Αποκλειστικό-Ή	x Ή y αλλά όχι και τα δύο
$F_7 = x + y$	$x + y$	Ή (OR)	x Ή y
$F_8 = (x + y)'$	$x \downarrow y$	ΟΥΤΕ (NOR)	ΟΧΙ-Ή
$F_9 = xy + x'y'$	$x \odot y$	Ισοδυναμία*	x ίσον y
$F_{10} = y'$	y'	Συμπλήρωμα	ΟΧΙ y
$F_{11} = x + y'$	$x \subset y$	Συνεπαγωγή	Αν y τότε x
$F_{12} = x'$	x'	Συμπλήρωμα	ΟΧΙ x
$F_{13} = x' + y$	$x \supset y$	Συνεπαγωγή	Αν x τότε y
$F_{14} = (xy)'$	$x \uparrow y$	NAND (ΟΧΙ-ΚΑΙ)	ΟΧΙ-ΚΑΙ
$F_{15} = 1$		Ταυτότητα	Δυαδική σταθερά 1

* Η ισοδυναμία ("equivalence") λέγεται επίσης και "ισότητα" ("equality"), "σύμπτωση" ("coincidence") ή "αποκλειστικό-ΟΥΤΕ" ("exclusive NOR").

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Σύμβολο τελεστή			\cdot	$/$		$/$		\oplus	$+$	\downarrow	\odot	$'$	\subset	$'$	\supset	\uparrow	

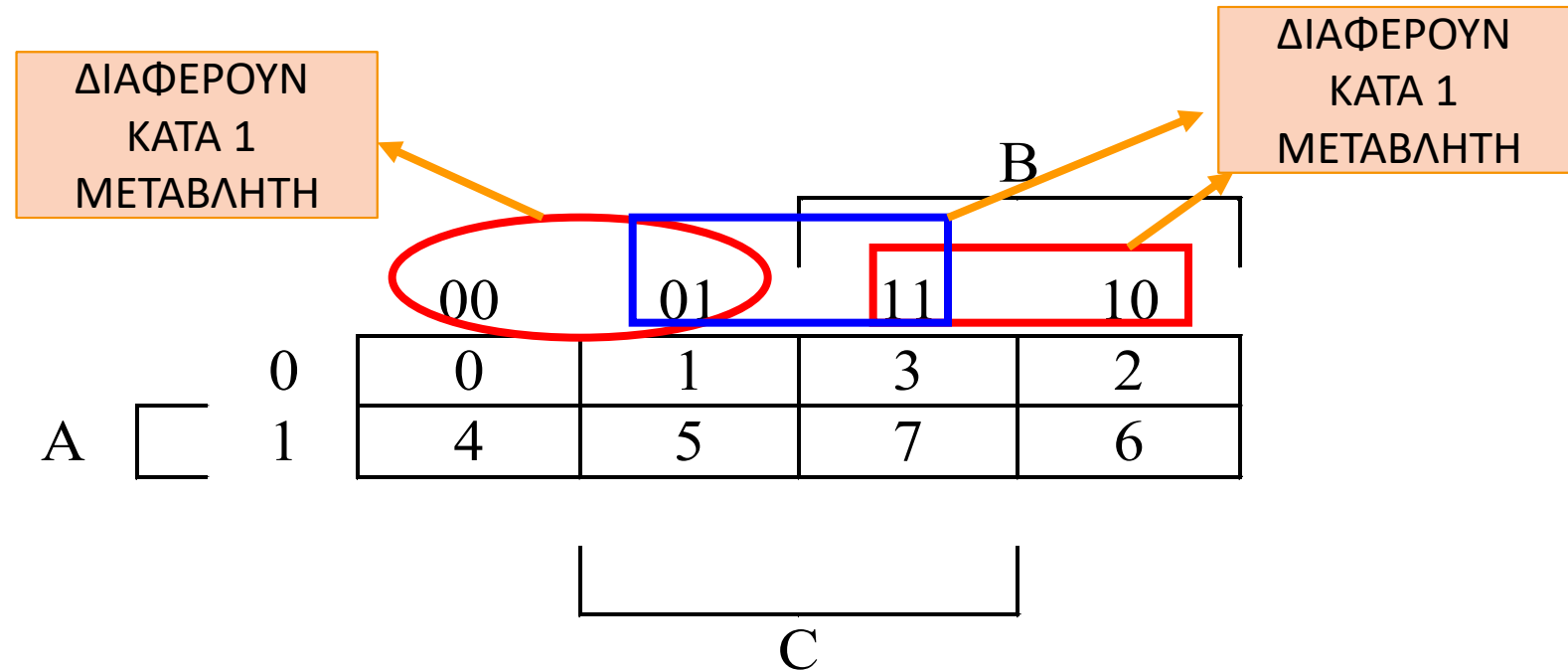
Χάρτες Karnaugh

- Ο χάρτης Karnaugh είναι ένας τρόπος αναπαράστασης των λογικών συναρτήσεων σε μορφή πίνακα.
- Ο χάρτης Karnaugh είναι ένας πίνακας όπου το κάθε τετράγωνο αναπαριστά ένα συνδυασμό των μεταβλητών, δηλαδή κάθε τετράγωνο ενός χάρτη Karnaugh αντιστοιχεί σε έναν ελάχιστο όρο της λογικής συνάρτησης που αναπαριστά.

Χάρτης Karnaugh 2 Μεταβλητών

			B	
			0	1
A	□	0	0	1
		1	2	3

Χάρτης Karnaugh 3 Μεταβλητών



Χάρτης Karnaugh 4 Μεταβλητών

		C			
		00	01	11	10
A	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

Diagram illustrating a 4-variable Karnaugh map (K-map) with variables A, B, C, and D. The map is a 4x4 grid of cells, each containing a decimal number representing a minterm. The rows are labeled A (00, 01, 11, 10) and the columns are labeled B (00, 01, 11, 10). The map is surrounded by four brackets labeled A, B, C, and D, indicating the variables associated with the rows and columns.

Αναπαράσταση Λογικής Συνάρτησης με Χάρτη Karnaugh

- Η αναπαράσταση μίας λογικής συνάρτησης με χάρτη Karnaugh γίνεται θέτοντας "1" σε κάθε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh που αντιστοιχεί σε ελάχιστο όρο όπου η συνάρτηση έχει τιμή "1" και θέτοντας "0" (ή τίποτα) σε κάθε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh που αντιστοιχεί σε ελάχιστο όρο όπου η συνάρτηση έχει τιμή "0".
- Σε πολλές περιπτώσεις, μερικοί συνδυασμοί των μεταβλητών εισόδου δεν έχουν νόημα και δεν πρόκειται να συμβούν. Αυτοί οι συνδυασμοί καλούνται συνθήκες αδιαφορίας γιατί δεν ενδιαφέρει η τιμή της συνάρτησης για τους συνδυασμούς αυτούς. Στον πίνακα αληθείας και στο χάρτη Karnaugh μίας τέτοιας συνάρτησης οι τιμές της συνάρτησης στις συνθήκες αδιαφορίας συμβολίζονται με X.
- Η ίδια αναπαράσταση ισχύει και στην περίπτωση των μεγιστόρων.

Αναπαράσταση Λογικής Συνάρτησης με Χάρτη Karnaugh - Παράδειγμα

- Η λογική συνάρτηση $Y = A'BC + AB'C' + ABC$ μπορεί να αναπαρασταθεί με τον ακόλουθο χάρτη Karnaugh:
 - Εντοπίζω σε ποια τετράγωνα αντιστοιχούν οι ελαχιστόροι.

		B			
		00	01	11	10
A	0			1	
	1	1		1	

C

Απλοποίηση Λογικής Συνάρτησης με Χάρτη Karnaugh

- Για να απλοποιήσουμε μία λογική συνάρτηση χρησιμοποιώντας χάρτη Karnaugh, ακολουθούμε τα εξής βήματα:
 - Γράφουμε τη συνάρτηση με μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων.
 - Τοποθετούμε τους όρους της συνάρτησης στον χάρτη Karnaugh σημειώνοντας με "1" το αντίστοιχο τετράγωνο.
 - Δημιουργούμε ομάδες με "1" των 2, 4, 8, 16 ($=2^N$, $N=1,2,3,4,5,\dots$) μελών από γειτονικά τετράγωνα (οριζόντια ή κάθετα, συνεχόμενα ή αναδιπλούμενα, αλλά όχι διαγώνια). Προσπαθούμε να δημιουργούμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερες ομάδες. Κάθε "1" μπορεί να συμμετέχει σε περισσότερες από μία ομάδες.
 - Ξαναγράφουμε τη συνάρτηση με όρους τους ελεύθερους όρους που πιθανόν να υπάρχουν και τις ομάδες (παραλείποντας τις μεταβλητές που μέσα στην ομάδα αλλάζουν τιμή).


! ΟΜΑΔΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΠΟΥ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΜΟΝΟ ΩΣ ΠΡΟΣ ΜΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ [$A + A' = 1$]

F(A,B,Γ,Δ)

ΓΔ	00	01	11	10
00	✓	✓		✓
01	✓	✓		✓
11	✓			✓
10	✓			✓

ΜΗ ΕΠΙΤΡΕΠΤΗ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ

$\Gamma\Delta$	00	01	11	10
00	✓	✓		
01	✓	✓		
11				
10				



$\Gamma\Delta$	00	01	11	10
AB 00	✓	✓	✓	✓
01	✓	✓	✓	✓
11				
10				

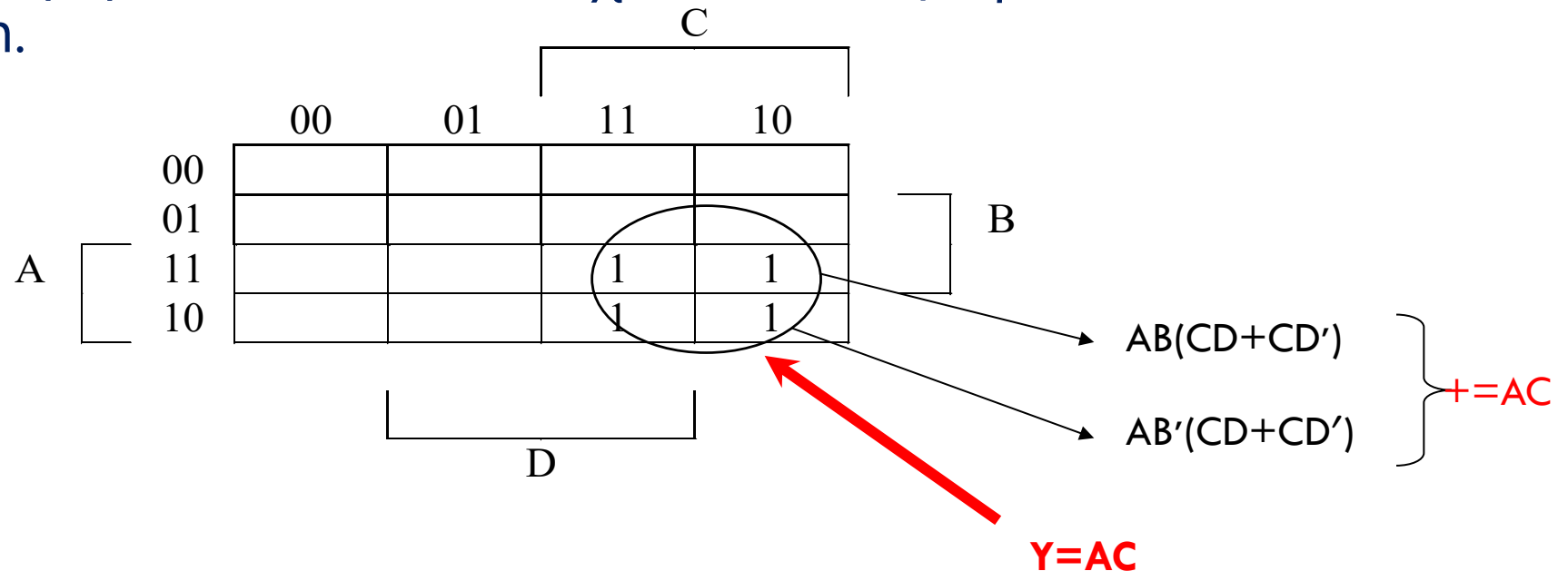
! F=1

$\Gamma\Delta$	00	01	11	10
AB 00	✓	✓	✓	✓
01	✓	✓	✓	✓
11	✓	✓	✓	✓
10	✓	✓	✓	✓

$\Gamma\Delta$	00	01	11	10
AB				
00	✓	✓	✓	
01	✓	✓	✓	
11				
10				

Παράδειγμα Απλοποίησης

- Δίνεται η συνάρτηση $Y=A(B'C+BCD')+ABCD$
- Κάνοντας πράξεις, η συνάρτηση γράφεται:
- $Y=AB'C+ABCD'+ABCD=AB'CD+AB'CD'+ABCD'+ABCD=\Sigma(10,11,14,15)$
- Ο δεύτερος και ο τρίτος όρος αντιστοιχούν στα τετράγωνα 14 και 15 αντίστοιχα του χάρτη Karnaugh. Ο πρώτος όρος είναι ελλιπής (αφού λείπει η μεταβλητή D) και αντιστοιχεί στα τετράγωνα 10 και 11 του χάρτη Karnaugh.



Απλοποίηση Λογικής Συνάρτησης με Χάρτη Karnaugh

Για τη σωστή απλοποίηση με τη βοήθεια του χάρτη, πρέπει να επιδιώκονται τα εξής:

- α) Να σχηματίζονται οι μεγαλύτερες δυνατές ομάδες επί του χάρτη, ώστε οι όροι που προκύπτουν από αυτές να έχουν τις λιγότερες μεταβλητές.
- β) Να επιλέγεται ο ελάχιστος αριθμός ομάδων που καλύπτει το χάρτη, δηλ. να περιλαμβάνονται όλα τα "1" σε όσο το δυνατόν λιγότερες ομάδες, ώστε το πλήθος των όρων που παράγονται να είναι, κατά το δυνατόν, μικρό.

Οι παραπάνω κανόνες οδηγούν στην εξής τακτική που πρέπει να ακολουθείται:

- 1) Κάθε τετραγωνίδιο με "1" πρέπει να μετέχει σε μια τουλάχιστον ομάδα.
- 2) Πρέπει να σχηματίζονται οι μεγαλύτερες δυνατές ομάδες από 2^k γειτονικά τετραγωνίδια με "1".
- 3) Κάθε τετραγωνίδιο με "1" πρέπει να μετέχει στον ελάχιστο αριθμό ομάδων.

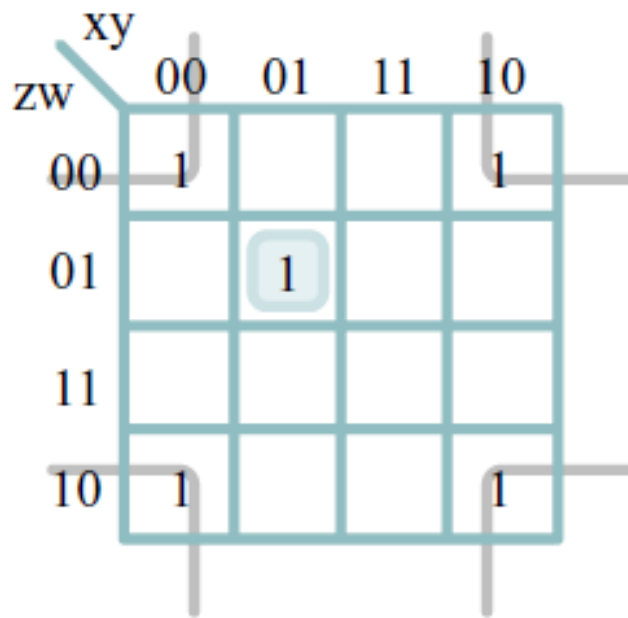
Απλοποίηση Λογικής Συνάρτησης με Χάρτη Karnaugh

Σύμφωνα με την απαίτηση 1) μία ομάδα, μικρή ή μεγάλη, που περιέχει κάποιο "1" που δεν περιέχεται σε άλλη ομάδα, πρέπει αναγκαστικά να επιλεγεί. Μια τέτοια ομάδα (υποκύβος) ονομάζεται *ουσιώδης*. Εάν κάποιο "1" παραμείνει στο τέλος που να μην συμμετέχει σε ομάδα με άλλα "1", τότε σχηματίζει από μόνο του μία ομάδα που είναι ουσιώδης.

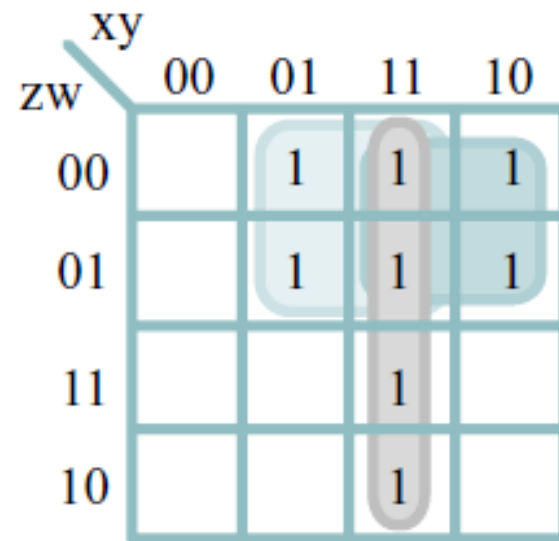
		xy			
		00	01	11	10
zw	00		1	1	1
	01		1	1	
	11			1	
	10			1	

$$f(x,y,z,w) = xy + yz' + xz'w'$$

Απλοποίηση Λογικής Συνάρτησης με Χάρτη Karnaugh



$$f(x,y,z,w) = x'yz'w + y'w'$$



$$f(x,y,z,w) = xy + yz' + xz'$$

Απλοποίηση Λογικής Συνάρτησης με Χάρτη Karnaugh

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	1		1
01		1	1	1
11		1	1	
10				

$$yw+x'yz'+xz'w+y'z'w'$$

(α)

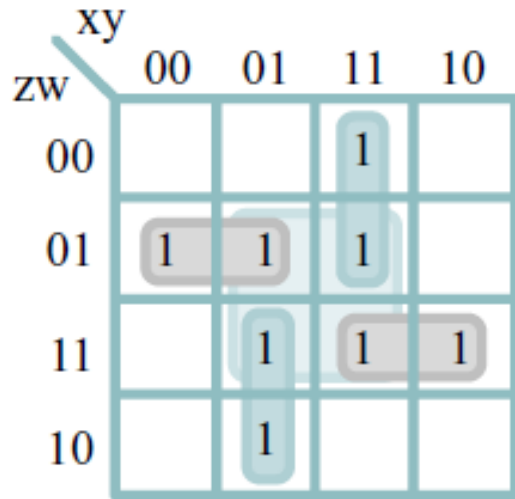
xy \ zw	00	01	11	10
00	1	1		1
01		1	1	1
11		1	1	
10				

$$yw+x'z'w'+xy'z'$$

(β)

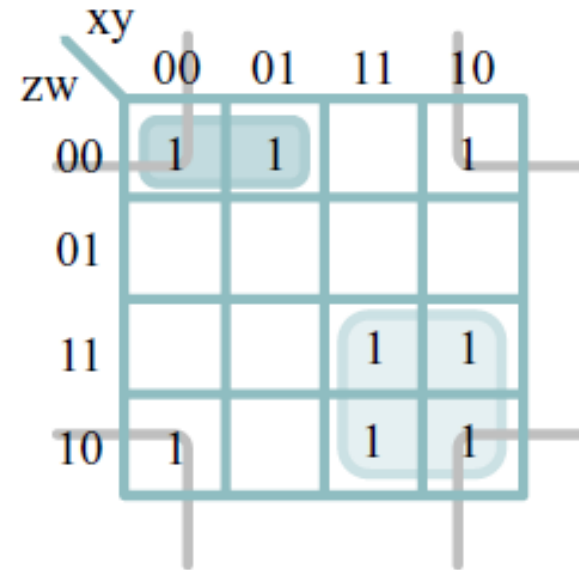
Απλοποίηση: α) πλεονα σμός,
β) ελάχιστη

Απλοποίηση Λογικής Συνάρτησης με Χάρτη Karnaugh



$$f = x'z'w + xzw + x'yz + xyz'$$

(α)

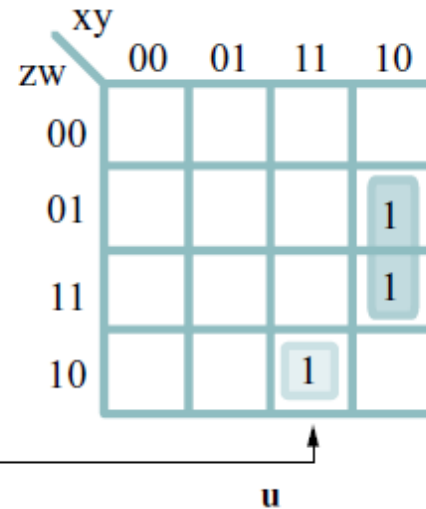
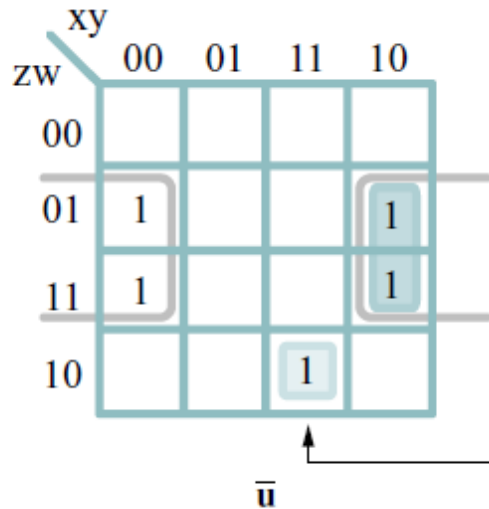


$$f = xz + y'w' + x'z'w'$$

(β)

Απλοποίηση Λογικής Συνάρτησης με Χάρτη Karnaugh

- Ο χάρτης μιας συνάρτησης 5 μεταβλητών $f(u,x,y,z,w)$ γράφεται σαν ένα ζεύγος χαρτών των 4άρων μεταβλητών x,y,z,w .
- Ο πρώτος χάρτης καλύπτει τους συνδυασμούς για τους οποίους $u=0$ και ο δεύτερος τους συνδυασμούς για τους οποίους $u=1$.
- Κάθε τετραγωνίδιο του συνολικού πίνακα είναι γειτονικό με 5 τετραγωνίδια, τα 4 γύρω του και το 5^ο στο συζυγή πίνακα.



Απλοποίηση Λογικής Συνάρτησης με Χάρτη Karnaugh

- Για να αναπαρασταθούν στο επίπεδο συναρτήσεις με 6 μεταβλητές, απαιτούνται 4 χάρτες.
- Για να εντοπιστούν όμως τα γειτονικά '1' είναι σχεδόν αδύνατο.
- Οπότε ο χάρτης Karnaugh χρησιμοποιείται για συναρτήσεις μέχρι 5 μεταβλητών.

Απλοποίηση Λογικής Συνάρτησης με Χάρτη Karnaugh

- Να απλοποιηθεί η συνάρτηση: $f(v,w,x,y,z) = y'z + wyz + w'(y' + v + z')$

		yz			
wx		00	01	11	10
00		1	1		1
01		1	1		1
11			1	1	
10			1	1	

v'

$$v'\{(wz) + (w'y') + (w'z')\}$$

		yz			
wx		00	01	11	10
00		1	1	1	1
01		1	1	1	1
11			1	1	
10			1	1	

v

$$v\{(wz) + (w'y') + (w'z') + (w'z)\}$$

$$wz + w'y' + w'z' + vw'z =$$

$$wz + w'y' + w'(z' + vz) = wz + w'y' + w'(z' + v)$$

Ελαχιστοποίηση γινομένου αθροισμάτων

Ακολουθείται η δυϊκή διαδικασία της ελαχιστοποίησης αθροίσματος γινομένων. Λαμβάνονται υπόψη τα τετραγωνίδια του χάρτη που περιέχουν τα "0". Σε κάθε "0" της συναρτήσεως αντιστοιχεί κάποιος maxterm. Κάθε ομάδα από 2^k , $k=0,1,2,\dots$ γειτονικών "0" παράγει ένα άθροισμα με k μεταβλητές λιγότερες. Οι μεταβλητές του αθροίσματος εμφανίζονται με τον αντίθετο εκθέτη.

Επιδιώκεται και εδώ ο σχηματισμός:

- α) των μεγαλύτερων δυνατών ομάδων από "0" και
- β) η κάλυψη όλων των "0" του πίνακα με τις λιγότερες ομάδες.

Η ελάχιστη παράσταση της συναρτήσεως σχηματίζεται από το γινόμενο των αθροισμάτων που προκύπτουν από τις ομάδες.

Ελαχιστοποίηση γινομένου αθροισμάτων

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		1
11	1	1	1	1
10		1		1

(α)

Υπενθυμίζεται ότι:

στον συνδυασμό τιμών αντιστοιχεί ο όρος

0000 $x+y+z+w$

1111 $x'+y'+z'+w'$

$$f(x,y,z,w) = (z+w)(z'+w')(x+y)(x'+y')$$

(β)

Συναρτήσεις μερικά καθορισμένες

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης δεν είναι καθορισμένες για όλους τους συνδυασμούς των μεταβλητών της, τότε η συνάρτηση ονομάζεται μερικά καθορισμένη.
- Οι συνδυασμοί που δεν καθορίζονται ονομάζονται αδιάφοροι όροι και σημειώνονται στον πίνακα αλήθειας και στο χάρτη Karnaugh με 'X'.
- Ονομάζονται αδιάφοροι όροι γιατί δεν μας ενδιαφέρει η τιμή των συνδυασμών αυτών.

Απλοποίηση με Συνθήκες Αδιαφορίας

- Για την απλοποίηση μίας λογικής συνάρτησης με χάρτη Karnaugh η τιμή "X" μπορεί να θεωρηθεί είτε ως "0" είτε ως "1", ανάλογα με τι συμφέρει, δηλαδή με το ποια από τις δύο τιμές δίνει την απλούστερη έκφραση.
- Τα "X" επιτρέπεται να ομαδοποιηθούν με τα "1" ή να μη ληφθούν καθόλου υπόψη.
- Την ευχέρεια που δίνουν οι αδιάφοροι όροι την εκμεταλλεύεται ο σχεδιαστής έτσι ώστε να κάνει το κύκλωμά του πιο μικρό, επιλέγοντας τέτοιες τιμές για τη συνάρτηση, ώστε να απαλείφονται περισσότεροι κατά το δυνατόν όροι της.
- Το κύκλωμα που θα σχεδιαστεί πρέπει να είναι ορισμένο για όλους τους συνδυασμούς τιμών.

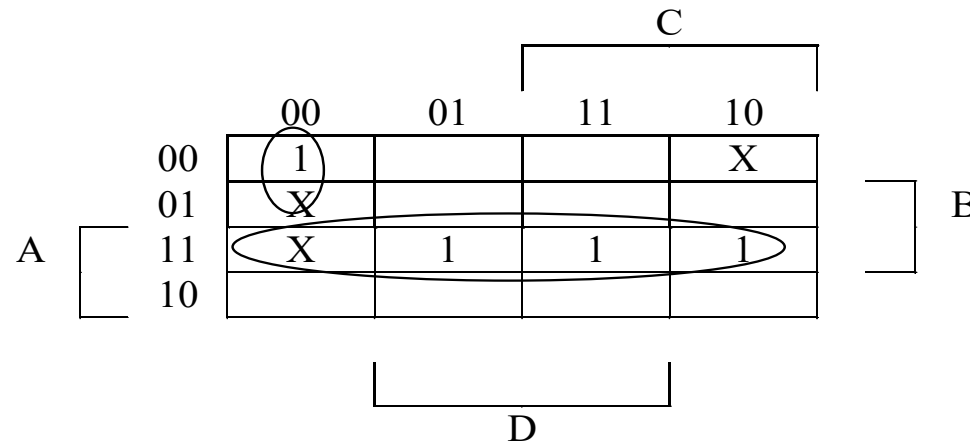
Μεθοδολογία Συμπλήρωσης Χάρτη Karnaugh με Αδιάφορους Όρους

- α. Σχηματίζονται οι μεγαλύτερες δυνατές ομάδες, περιλαμβάνοντας και αδιάφορους όρους, όπου χρειάζεται, για να μεγαλώσει μια ομάδα.
- β. Οι αδιάφοροι όροι συμμετέχουν μόνο σε ομάδες όπου υπάρχουν ήδη "1". Ομάδα με αποκλειστικά αδιάφορους όρους απαγορεύεται, γιατί αυξάνει άσκοπα το πλήθος των όρων.
- γ. Οι αδιάφοροι όροι που περιέχονται σε ομάδες παίρνουν την τιμή "1", ενώ οι αδιάφοροι όροι που δεν περιέχονται σε ομάδες παίρνουν την τιμή "0".

Απλοποίηση με Αδιάφορους Όρους - Παράδειγμα

158

Δίνεται η συνάρτηση $Y = A'B'C'D' + ABD + ABCD'$ με αδιάφορους όρους $A'B'CD'$ και $BC'D'$



$$Y = AB + A'C'D'$$

Απλοποίηση με Αδιάφορους Όρους

BCD				GRAY				
Δεκ.	a	b	c	d	g ₃	g ₂	g ₁	g ₀
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0
5	0	1	0	1	0	1	1	1
6	0	1	1	0	0	1	0	1
7	0	1	1	1	0	1	0	0
8	1	0	0	0	1	1	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	1
10	1	0	1	0	X	X	X	X
11	1	0	1	1	X	X	X	X
12	1	1	0	0	X	X	X	X
13	1	1	0	1	X	X	X	X
14	1	1	1	0	X	X	X	X
15	1	1	1	1	X	X	X	X

cd \ ad	00	01	11	10
00			X	
01	1	1	X	1
11			X	X
10	1	1	X	X

$$g_0 = c'd + cd'$$

cd \ ad	00	01	11	10
00		1	X	
01		1	X	
11	1		X	X
10	1		X	X

$$g_1 = bc' + b'c$$

cd \ ad	00	01	11	10
00		1	X	1
01		1	X	1
11		1	X	X
10		1	X	X

$$g_2 = b + a$$

cd \ ad	00	01	11	10
00			X	1
01			X	1
11			X	X
10			X	X

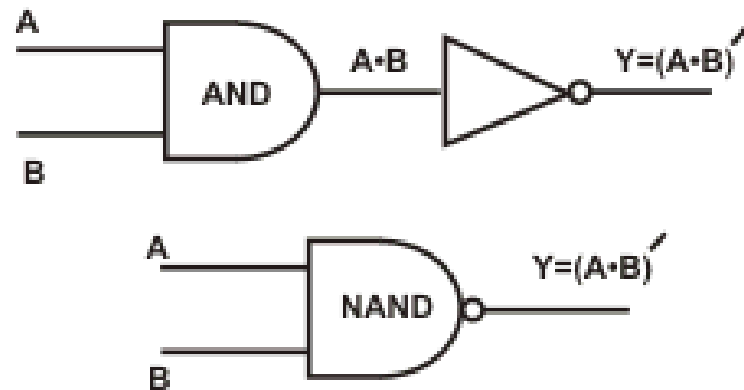
$$g_3 = a$$

ο κώδικας BCD αξιοποιεί μόνο δέκα από αυτούς

Ψηφιακές Λογικές Πύλες

Η Πύλη NAND

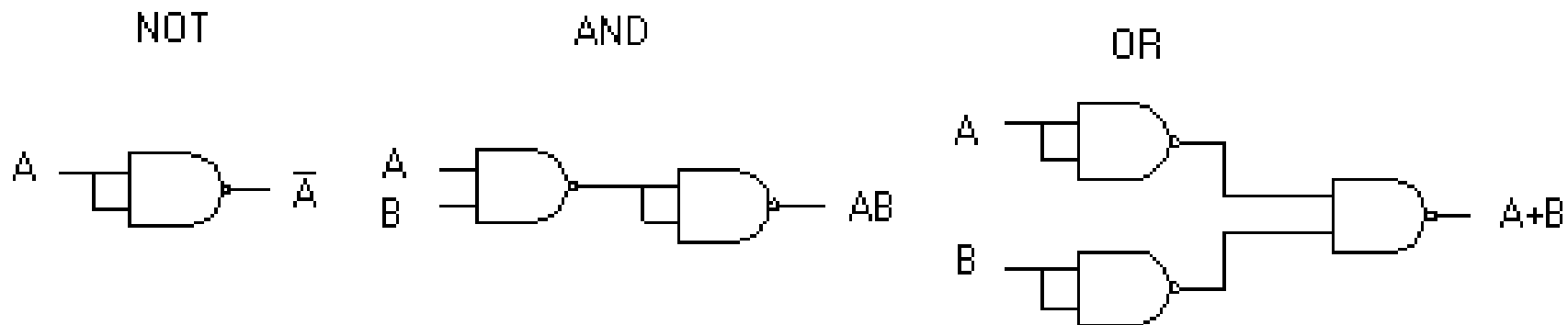
A	B	NAND
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



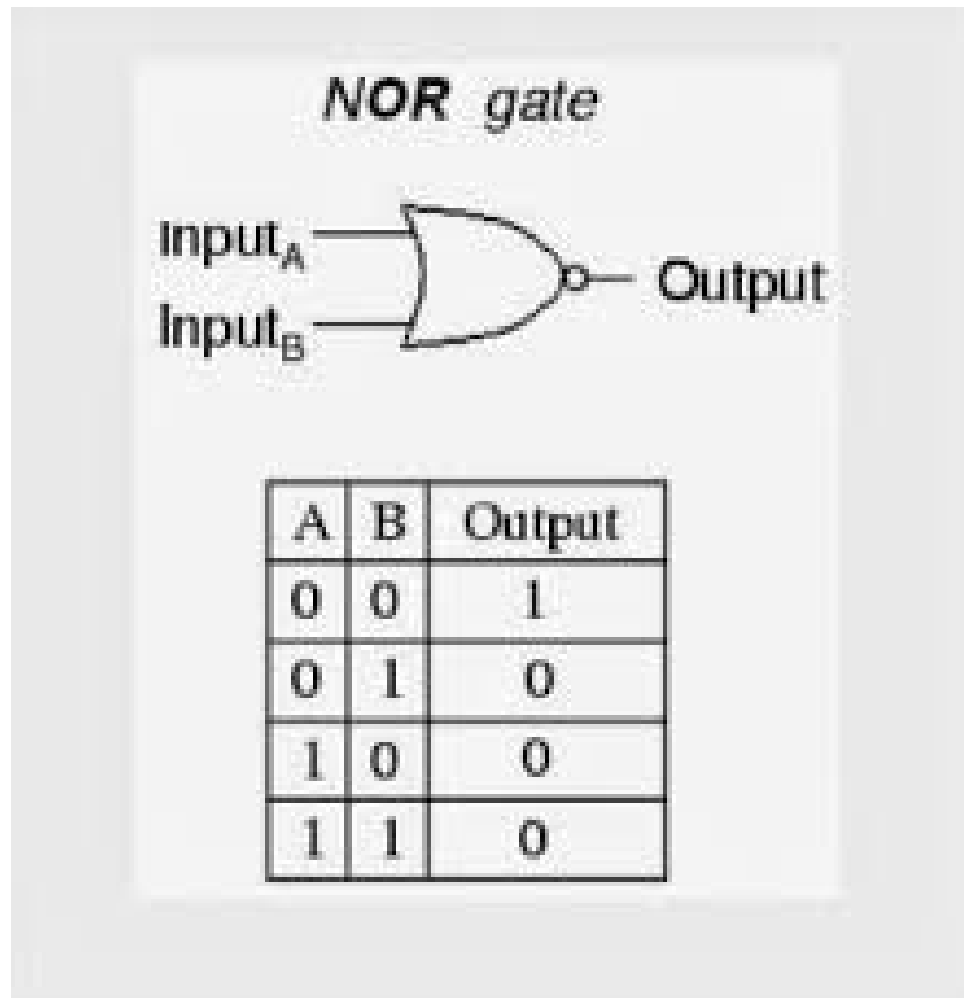
ο κώδικας BCD αξιοποιεί μόνο δέκα από αυτούς

Η Πύλη NAND

- Κάθε πύλη NOT, AND και OR δυο εισόδων μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ισοδύναμο κύκλωμα με αποκλειστική χρησιμοποίηση πυλών NAND δύο εισόδων.
- Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τα κυκλώματα που είναι ισοδύναμα με τις βασικές πύλες NOT, AND και OR, χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NAND δύο εισόδων.



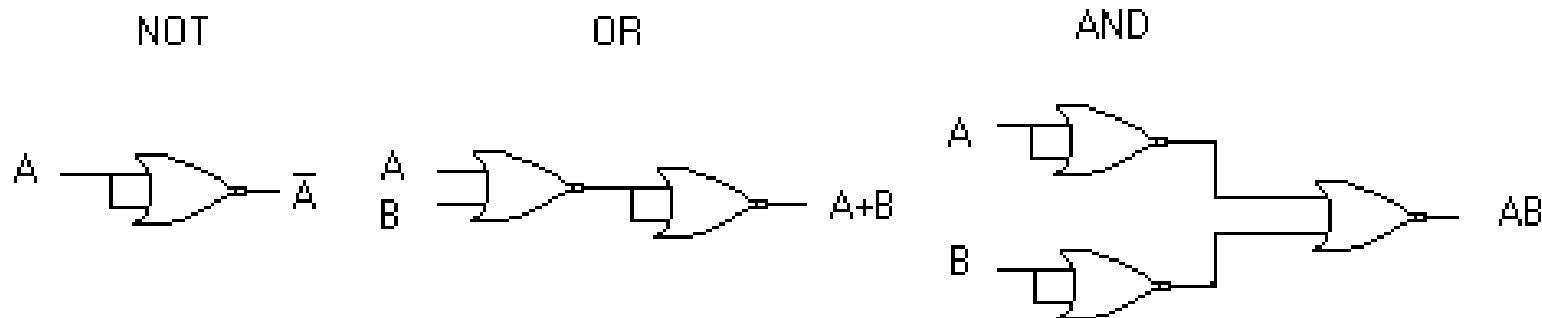
Η Πύλη NOR



ο κώδικας BCD αξιοποιεί μόνο δέκα από αυτούς

Η Πύλη NOR

- Κάθε πύλη NOT και AND και OR δυο εισόδων μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ισοδύναμο κύκλωμα με αποκλειστική χρησιμοποίηση πυλών NOR δυο εισόδων.
- Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τα κυκλώματα που είναι ισοδύναμα με τις βασικές πύλες NOT, AND και OR, χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NOR δυο εισόδων.



Οι Οικουμενικές Πύλες NAND & NOR

- Οι πύλες NAND και NOR δυο εισόδων ονομάζονται οικουμενικές πύλες (universal gates) γιατί κάθε συνδυαστικό κύκλωμα μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με πύλες NAND δυο εισόδων ή μόνο με πύλες NOR δυο εισόδων.

$$Z = (A'B + C) = ((A'B + C)')'$$

Σύμφωνα με το θεώρημα De Morgan η συνάρτηση γίνεται:

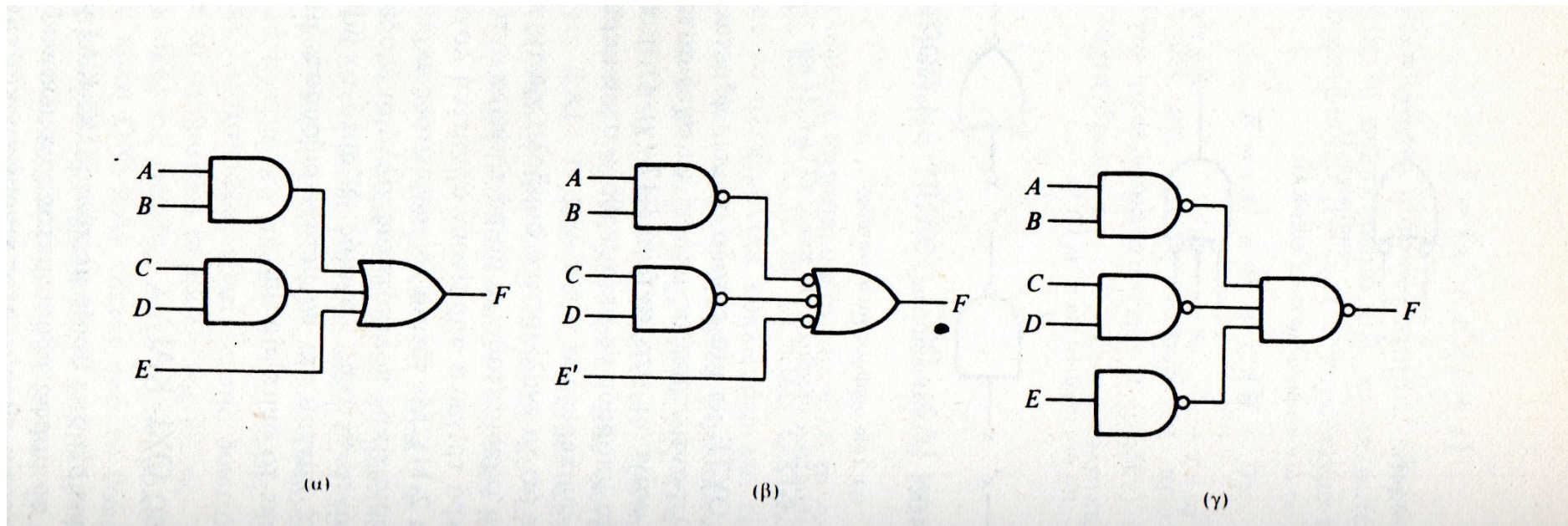
$$Z = ((A'B)' C)'$$

$$Z = (A'B + C) = [[(A + B)'] + C]'$$

Υλοποίηση με Πύλες NAND

166

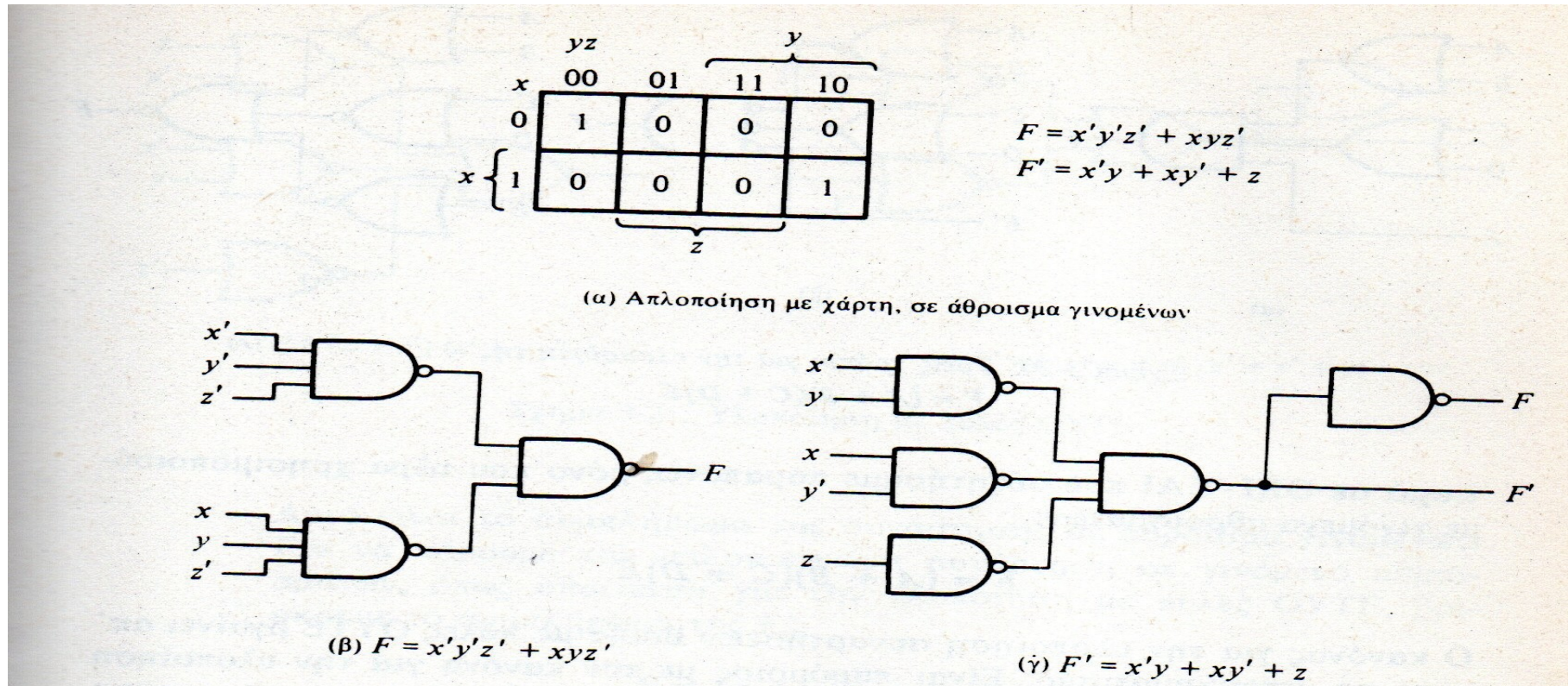
Υλοποίηση της συνάρτησης $F=AB+CD+E$ ή $F=[(AB)' \cdot (CD)' \cdot E']'$ με τρεις διαφορετικούς τρόπους



Υλοποίηση με Πύλες NAND

167

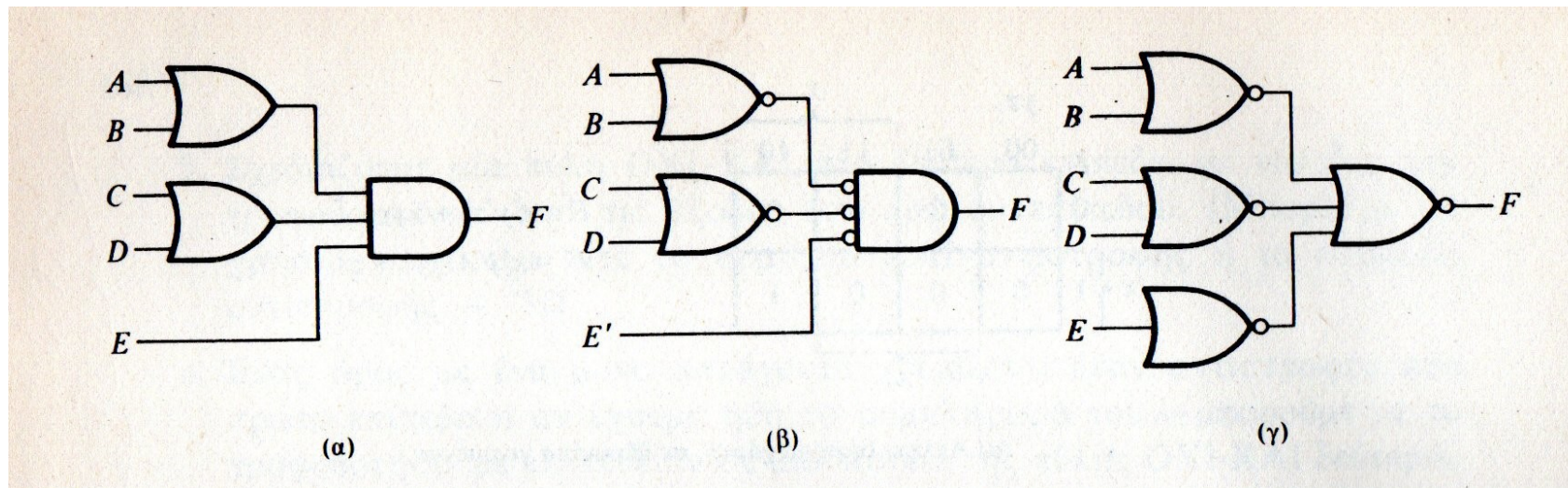
Υλοποίηση της συνάρτησης $F(x,y,z)=\Sigma(0,6)$



Υλοποίηση με Πύλες NOR

168

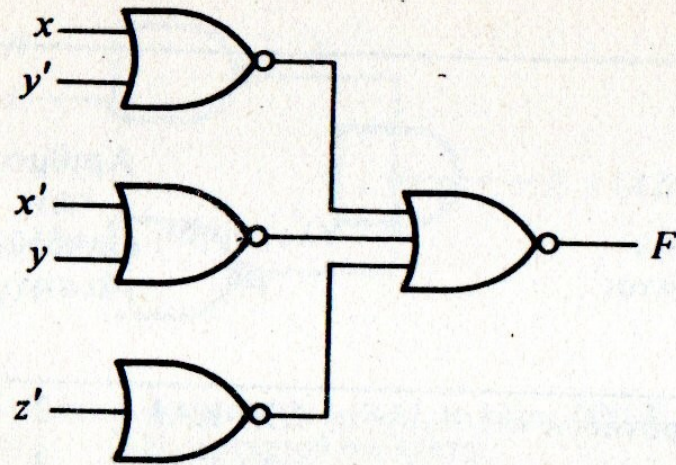
Υλοποίηση της συνάρτησης $F=(A+B)(C+D)E$ με τρεις διαφορετικούς τρόπους



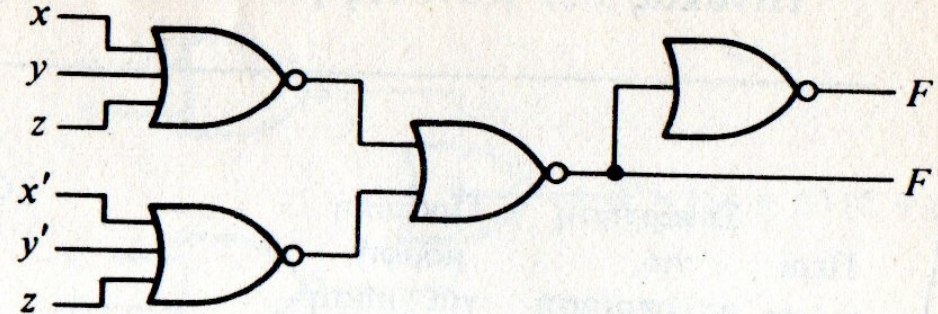
Υλοποίηση με Πύλες NOR

169

Υλοποίηση της συνάρτησης $F(x,y,z)=\Sigma(0,6)$: α) συνδυάζοντας στο χάρτη τα μηδενικά, βρίσκουμε ότι $F' = x'y + xy' + z$. Έπειτα υπολογίζουμε την $(F)'$. β) βρίσκουμε το συμπλήρωμα της συνάρτησης ως γινόμενο αθροισμάτων.



$$(α) F = (x + y')(x' + y)z'$$



$$(β) F' = (x + y + z)(x' + y' + z)$$

Βιβλιογραφία

«Ψηφιακή Σχεδίαση», Morris Mano, 6^η Έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου