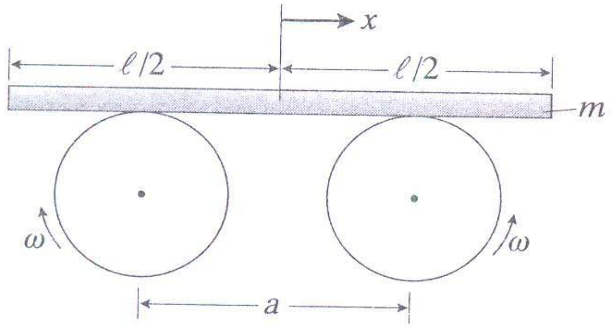
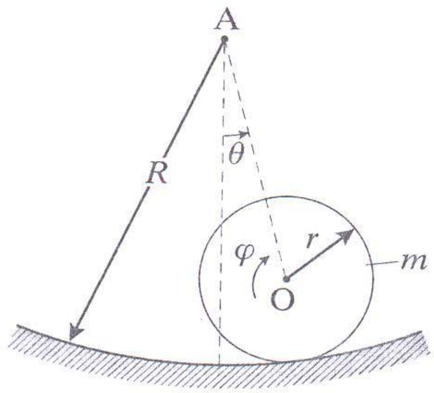
γεωμετρία. Συγκεκριμένα, το σώμα αναρτάται αρχικά από σημείο A και μετράται η περίοδος της ελεύθερης αιώρησής του, έστω $T_A$. Στη συνέχεια το σώμα αναρτάται από σημείο B, το οποίο βρίσκεται στην προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος AC και μετράται η νέα ιδιοπερίοδος ταλάντωσης, έστω $T_B$. Αν είναι γνωστή η μάζα του σώματος $m$ και η απόσταση $\ell$ μεταξύ των σημείων A και B, να υπολογισθεί η θέση του κέντρου μάζας του σώματος και η αντίστοιχη μαζική ροπή αδράνειας.

**1.5** Ράβδος μάζας $m$ και μήκους $\ell$ τοποθετείται πάνω σε δύο κυλίνδρους, που περιστρέφονται με σταθερή και αντίθετη γωνιακή ταχύτητα $\omega$, όπως δείχνει το σχήμα 1.8.5. Η απόσταση μεταξύ των δύο κυλίνδρων είναι $a$, ενώ ο συντελεστής τριβής μεταξύ της ράβδου και των κυλίνδρων είναι $\mu$. Να παραχθεί η εξίσωση κίνησης της ράβδου και να αποδειχθεί ότι πραγματοποιεί ταλάντωση. Ποια είναι η τιμή της συχνότητας της κίνησης;



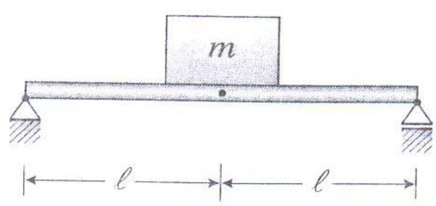

**Σχήμα 1.8.5**




**Σχήμα 1.8.6**

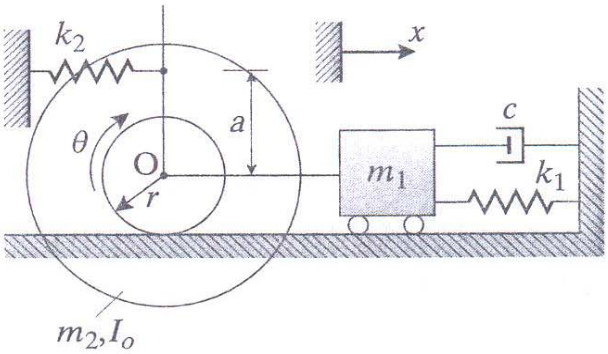
**1.6** Κύλινδρος με μάζα $m$ και ακτίνα $r$ κυλάει χωρίς να ολισθαίνει στο εσωτερικό κυλινδρικής κοιλότητας ακτίνας $R$, όπως δείχνει το σχήμα 1.8.6. Να υπολογιστεί η ιδιοσυχνότητα μικρού εύρους ταλάντωσης του κυλίνδρου ως προς τη θέση στατικής ισορροπίας του, με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

**1.7** Μηχανή μάζας $m$ στηρίζεται στο μέσο αρθρωμένης δοκού με γνωστές και σταθερές ελαστικές και γεωμετρικές ιδιότητες, όπως δείχνει το σχήμα 1.8.7. Αν η μάζα της δοκού, $\hat{m}$, είναι συγκρίσιμη με τη μάζα της μηχανής, να υπολογιστεί η ισοδύναμη μάζα και η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος. Ποια είναι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος όταν η μάζα της δοκού είναι μικρή σε σχέση με τη μάζα της μηχανής;



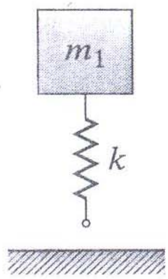

**Σχήμα 1.8.7**

**1.8** Να σχεδιαστεί το ισοδύναμο δυναμικό μοντέλο για το μηχανικό σύστημα του σχήματος 1.8.8 και να υπολογιστούν η ισοδύναμη μάζα και ο ισοδύναμος συντελεστής στιβαρότητας. Κατόπιν, να προσδιοριστούν η ιδιοσυχνότητα και το μέτρο απόσβεσης του συστήματος. Τέλος, να επαναληφθούν οι ίδιοι υπολογισμοί αν επιλεγεί η γωνία $\theta$ ως η συντεταγμένη κίνησης. Αλλάζει η ιδιοσυχνότητα ή το μέτρο απόσβεσης του συστήματος με την επιλογή της νέας συντεταγμένης κίνησης;



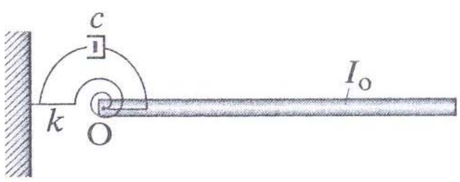

Σχήμα 1.8.8

**1.9** Το σχήμα 1.8.9 παριστάνει το απλοποιημένο μοντέλο ενός μικρού αεροπλάνου κατά τη διάρκεια της προσγείωσής του. Το μοντέλο αποτελείται από σώμα μάζας $m$, το οποίο έρχεται σε επαφή με το έδαφος μέσω ελατηρίου στιβαρότητας $k$ που αντιπροσωπεύει το σύστημα ανάρτησης του αεροπλάνου. Να υπολογιστεί ο χρόνος που παραμένει σε επαφή το ελατήριο με το έδαφος πριν από την πρώτη αναπήδηση του σώματος από το έδαφος.



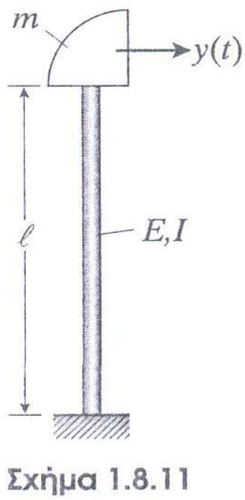

Σχήμα 1.8.9

**1.10** Το σχήμα 1.8.10 δείχνει το μοντέλο του μηχανισμού επαναφοράς μιας θύρας ψυγείου. Να επιλεγεί η τιμή του συντελεστή απόσβεσης του μηχανισμού, ώστε η θύρα να επανέρχεται στη θέση στατικής ισορροπίας της στον ελάχιστο δυνατό χρόνο. Να θεωρηθούν γνωστά η μαζική ροπή αδράνειας $I_o$ της θύρας ως προς το σημείο O και ο συντελεστής στιβαρότητας $k$ του στρεπτικού ελατηρίου. Ποια είναι τότε η απόκριση του συστήματος στις αρχικές συνθήκες $\theta(0)=\theta_0$ και $\dot{\theta}(0)=0$;




Σχήμα 1.8.10

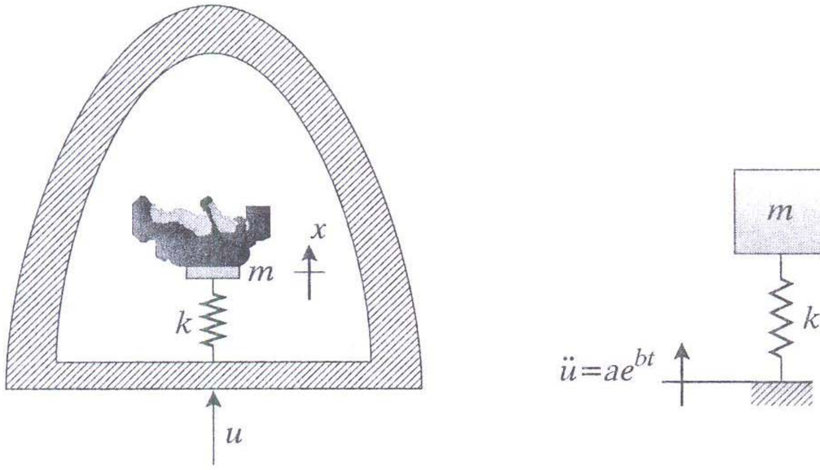
**1.11** Να σχεδιαστεί το ισοδύναμο δυναμικό μοντέλο και να γραφεί η εξίσωση κίνησης για το μηχανικό σύστημα αεροτομής-τουρμπίνας του σχήματος 1.8.11. Επιπλέον, να υπολογιστεί ο συντελεστής απόσβεσης αν είναι γνωστό από




Σχήμα 1.8.11

μετρήσεις το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικές τιμές του μέγιστου εύρους της απόκρισης. Ποια είναι η απόκριση του συστήματος στις αρχικές συνθήκες $y(0)=0$ και $\dot{y}(0)=v_0$;

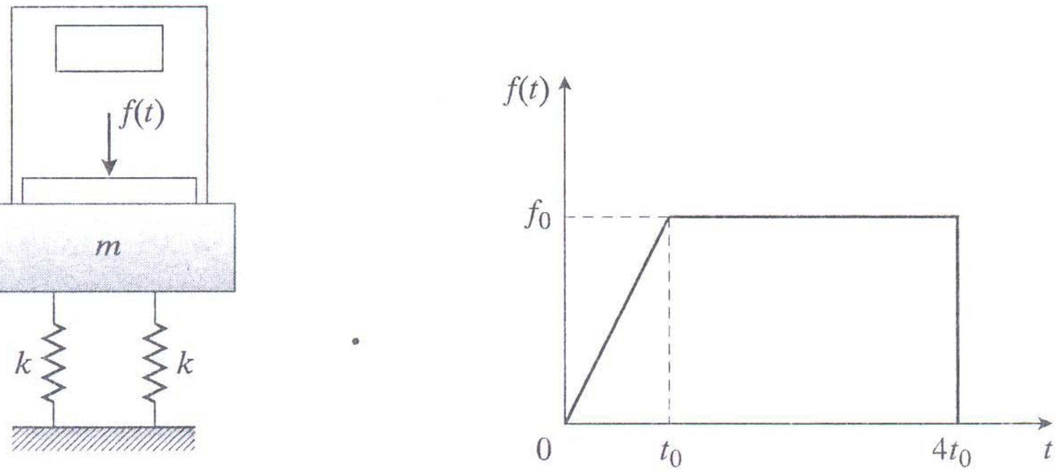
**1.12** Κατά την ανάφλεξη του δεύτερου και του τρίτου ορόφου καυσίμων ενός πυραύλου, η επιτάχυνσή του αυξάνεται εκθετικά, σύμφωνα με τη σχέση $\ddot{u}=ae^{bt}$. Να υπολογιστεί η απόλυτη επιτάχυνση $\ddot{x}$ που αισθάνεται ο αστροναύτης θεωρώντας ως αρχικές συνθήκες τις $z(0)=0$ και $\dot{z}(0)=0$, όπου $z=x-u$.




Σχήμα 1.8.12

**1.13** Στο σχήμα 1.8.15α παρίσταται το μοντέλο μιας μηχανής σφυρηλάτησης. Η μηχανή έχει συνολική μάζα $m$ και εδράζεται σε θεμελίωση στιβαρότητας $k$. Στη διάρκεια της σύγκρουσης της σφύρας με το προς διαμόρφωση τεμάχιο εξασκείται στη μηχανή μία δύναμη, της οποίας η μορφή φαίνεται στο σχήμα 1.8.13β. Να προσδιορισθεί η απόκριση της μηχανής:

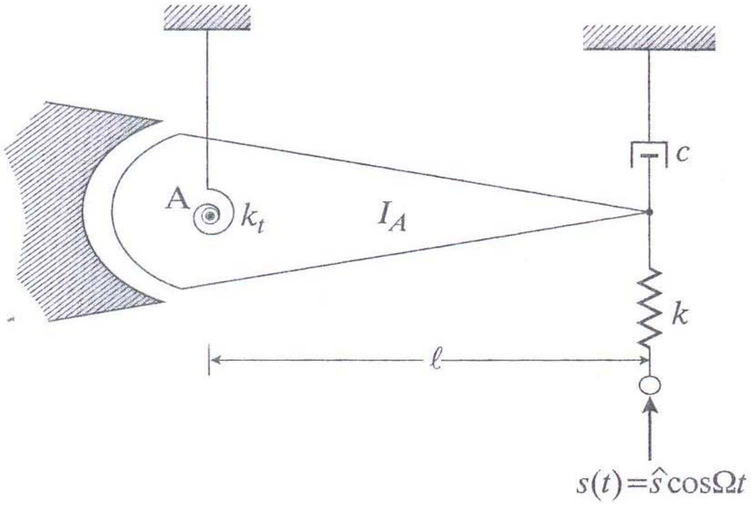
α. με τη βοήθεια του ολοκληρώματος αναδίπλωσης,
β. με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας,
γ. με εφαρμογή κατάλληλων συνθηκών συνέχειας.




(α) (β)

Σχήμα 1.8.13

**1.14** Το μηχανικό μοντέλο του σχήματος 1.8.14 αποτελεί προσομοίωση της έδρασης του πτερυγίου ενός αεροσκάφους, το οποίο έχει μαζική ροπή αδράνειας $I_A$ ως προς το σημείο Α και μήκος $\ell$. Μέσω ειδικής μηχανικής διάταξης, το πτερύγιο δέχεται αρμονική διέγερση μετατόπισης με μορφή $s(t) = \hat{s}\cos\Omega t$. Να καθοριστούν η ιδιοσυχνότητα $\omega_0$, το μέτρο απόσβεσης $\zeta$ και η απόκριση του πτερυγίου στη μόνιμη κατάσταση.

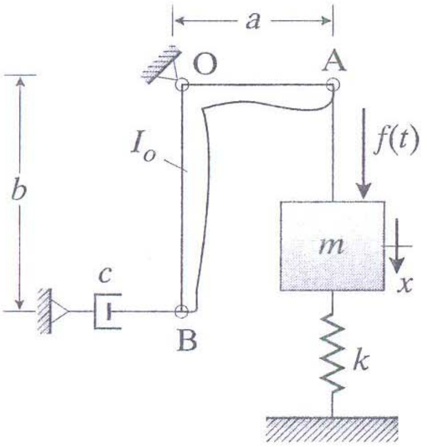



**Σχήμα 1.8.14**

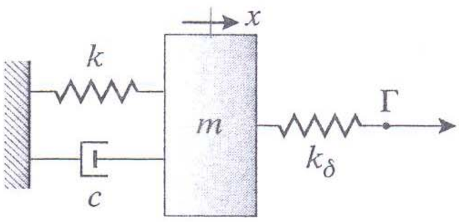
**1.15** Στη μηχανική διάταξη του σχήματος 1.8.15 ο βραχίονας ΑΟΒ είναι στερεός και έχει μαζική ροπή αδράνειας $I_o$ ως προς την άρθρωση Ο. Για ταλαντώσεις μικρού εύρους γύρω από τη θέση ισορροπίας, να προσδιοριστούν:

α. η ιδιοσυχνότητα και το μέτρο απόσβεσης της διάταξης και

β. η απόκριση της διάταξης στη μόνιμη κατάσταση, αν στη μάζα $m$ εφαρμόζεται η αρμονική δύναμη $f(t) = \hat{f}\cos\Omega t$.




**Σχήμα 1.8.15**



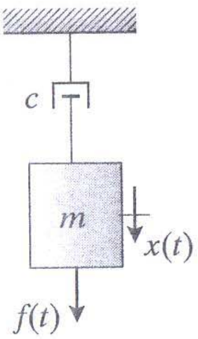

**Σχήμα 1.8.16**

**1.16** Σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας υπόκειται σε αρμονική διέγερση που εφαρμόζεται στο σημείο Γ, όπως δείχνει το σχήμα 1.8.16. Να καταστρωθεί η εξίσωση κίνησης του συστήματος και να υπολογιστούν:

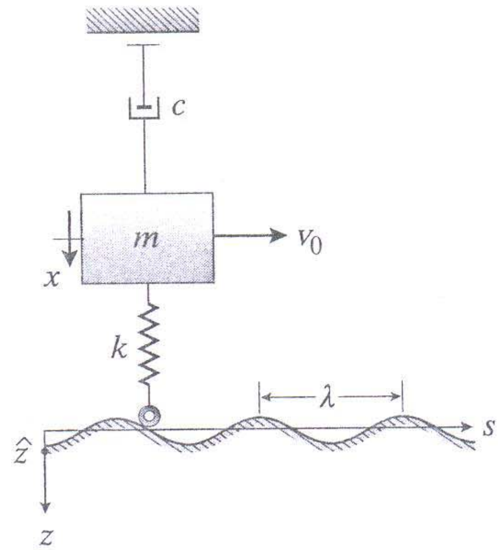
α. η ιδιοσυχνότητα και το μέτρο απόσβεσης του συστήματος,

β. η δύναμη που εξασκείται στην έδραση του συστήματος (στη μόνιμη κατάσταση) όταν η διέγερση είναι αρμονική δύναμη $f(t) = \hat{f}\cos\Omega t$ και όταν είναι αρμονική μετατόπιση $s(t) = \hat{s}\cos\Omega t$.

**1.17** Το σχήμα 1.8.17 παριστάνει το μοντέλο μιας μηχανικής διάταξης, που διεγείρεται με αρμονική δύναμη $f(t) = \hat{f}\cos\Omega t$. Να προσδιορισθεί η απόκριση της μάζας $m$ στη μόνιμη κατάσταση και να σχεδιασθεί το εύρος της μετατόπισής της συναρτήσει της συχνότητας διέγερσης $\Omega$. Πού εμφανίζεται συντονισμός και γιατί;




**Σχήμα 1.8.17**




**Σχήμα 1.8.18**

**1.18** Σύμφωνα με μία μέθοδο ελέγχου της κίνησης οχημάτων, η βέλτιστη επιλογή των ιδιοτήτων απόσβεσης γίνεται με τρόπο, ώστε το όχημα να είναι "αναρτημένο από τον ουρανό" μέσω του αποσβεστήρα του, όπως δείχνει το σχήμα 1.8.18. Για το εξεταζόμενο μοντέλο να θεωρηθεί ότι η μάζα του οχήματος κινείται με σταθερή οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας $v_0$ και διεγείρεται από οδό με αρμονικό προφίλ της μορφής

$$z(s) = \hat{z}\cos(2\pi s/\lambda) .$$

Να προσδιοριστεί η δύναμη που εξασκείται στη μάζα του οχήματος στη διάρκεια της μόνιμης κατάστασης ταλάντωσης και να εξηγηθεί το πλεονέκτημα που προκύπτει με την ανάρτηση του αποσβεστήρα από τον ουρανό.

**1.19** Επάνω σε στερεή επίπεδη εξέδρα κινείται σωματίδιο μάζας $m$ με σταθερή ταχύτητα $v_0$, όπως δείχνει το σχήμα 1.8.19. Η μαζική ροπή αδράνειας της εξέδρας ως προς την άρθρωση Ο είναι $I_o$, ενώ η μαζική ροπή αδράνειας ως προς Ο της κινούμενης μάζας $m$ είναι αμελητέα.