

Εισαγωγή στις Θερμικές Επιστήμες

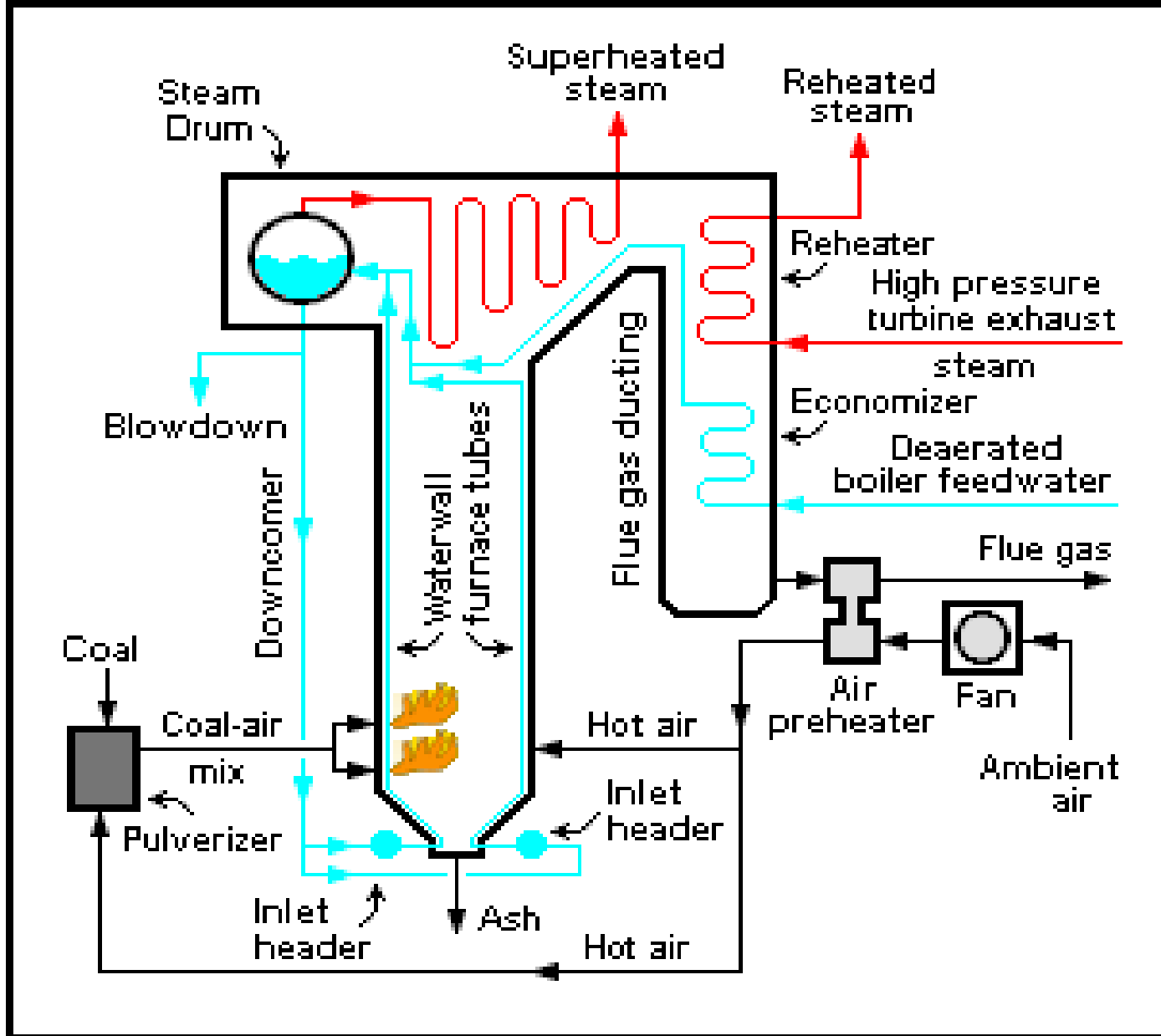
Διδάσκων: Β. Μποντόζογλου

- Y. A. Cengel & R. H. Turner, Fundamentals of Thermal Fluid Sciences, McGraw-Hill 2nd edition, 2005
- J. M. Smith, J. C. VanNess, M. M. Abbot, Introduction to Chemical Engineering Thermodynamics, McGraw-Hill 7th edition, 2005

- F. M. White, Fluid Mechanics, McGraw-Hill, 7th edition, 2011
- F. M. White, Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, 3rd edition, 2006
- D. J. Tritton, Physical Fluid Dynamics, Oxford Press, 2nd edition, 1988
- P. A. Durbin, G. Medic, Fluid Dynamics with a Computational Perspective, Cambridge, 2007

- J. H. Lienhard IV, J. H. Lienhard V, A Heat Transfer Textbook, Published by the authors, 2000
- R. B. Bird, W. E. Stewart & E. N. Lightfoot, Transport Phenomena, John Wiley & Sons Inc, 2nd edition, 2002
- F. M. White, Heat and Mass Transfer, Pearson, 1988.

Παραδείγματα από έναν ατμοπαραγωγό



ΚΥΚΛΩΜΑ ΑΕΡΑ/ΚΑΥΣΙΜΟΥ-ΚΑΥΣΑΕΡΙΩΝ

- Διαθέσιμη θερμότητα καύσης (Θ)
- Θερμοκρασία φλόγας- Ακτινοβολία (ΜΘ)
- Προθερμαντήρας, Υπερθερμαντήρες (ΜΡ, ΜΘ)
- Μηχανική καταπόνηση αυλών (ΜΡ)
- Σωματίδια, διαχυτότητα, επικαθήσεις (ΜΡ, ΜΜ)
- Συμπύκνωση υδρατμών, διάβρωση (Θ , ΜΘ)

ΚΥΚΛΩΜΑ ΝΕΡΟΥ-ΑΤΜΟΥ

- Πίεση λειτουργίας ατμοπαραγωγού (Θ)
- Κυκλοφορία εργαζόμενου μέσου (ΜΡ)
- Βρασμός ροής-Προστασία αυλών από φλόγα (ΜΘ)
- Προθερμαντήρας, Υπερθερμαντήρες (ΜΡ, ΜΘ)
- Τύμπανο-Διαχωριστές (ΜΡ)
- Επεξεργασία νερού-διάβρωση-επικαθήσεις (ΜΜ)

Ανασκόπηση Θερμοδυναμικής

ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Μία φάση σε ισορροπία: Μηχανική, θερμική και χημική ισορροπία (ομοιόμορφη πίεση, θερμοκρασία και σύσταση)

Κλειστό σύστημα: Αλληλεπίδραση με εναλλαγή θερμότητας, Q , και έργου, W

Ανοικτό σύστημα: Εισροή/εκροή ενέργειας με τα ρεύματα εισόδου/εξόδου

Ενέργεια συστήματος: κινητική, E_{kin} , δυναμική, E_{dyn} , εσωτερική, U^t , (+ επιφανειακή, ηλεκτρομαγνητική...)

Περιγραφή συστήματος με εκτατικές και εντατικές μεταβλητές: P, T , $V^t = nV$, $U^t = nU$

1^ο ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟ ΑΞΙΩΜΑ ΓΙΑ ΚΛΕΙΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

$$\Delta(U^t + E_{kin} + E_{dyn}) = Q - W$$

και για αμελητέες μεταβολές μηχανικής ενέργειας $\Delta U^t = Q - W$ $dU^t = \delta Q - \delta W$

ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

Για κλειστό σύστημα: $U^t = f(P, T)$ Παρομοίως, $H^t = U^t + PV^t = g(P, T)$ $\int_1^2 dU = U_2 - U_1$ $\int_1^2 \delta Q = Q$

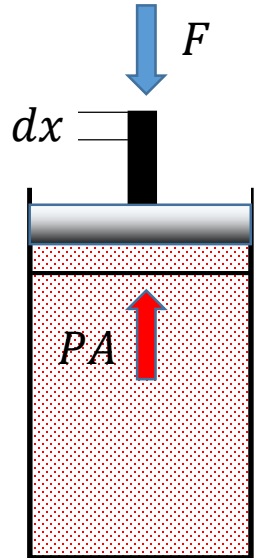
Πόσο έργο παράγεται αν τα βαρίδια μετακινηθούν μονομιάς, και πόσο αν είναι πολύ μικρά και μετακινούνται σταδιακά;

ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΡΕΠΤΟΤΗΤΑΣ

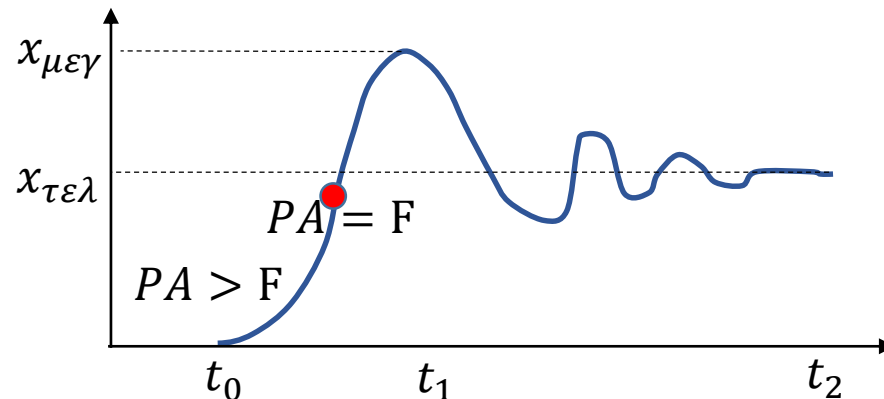
- Έλλειψη τριβών
- Εσωτερική ισορροπία στον κύλινδρο (ομοιόμορφη P)
- Διαφορική απόκλιση από την ισορροπία

$$F \approx PA = (m_{\beta\alpha\rho} + m_{\epsilon\mu\beta})g$$

$$\delta W = F dx = P A dx = P dV \Rightarrow W_{rev} = \int_1^2 P dV$$



Απότομη απομάκρυνση βαριδίων

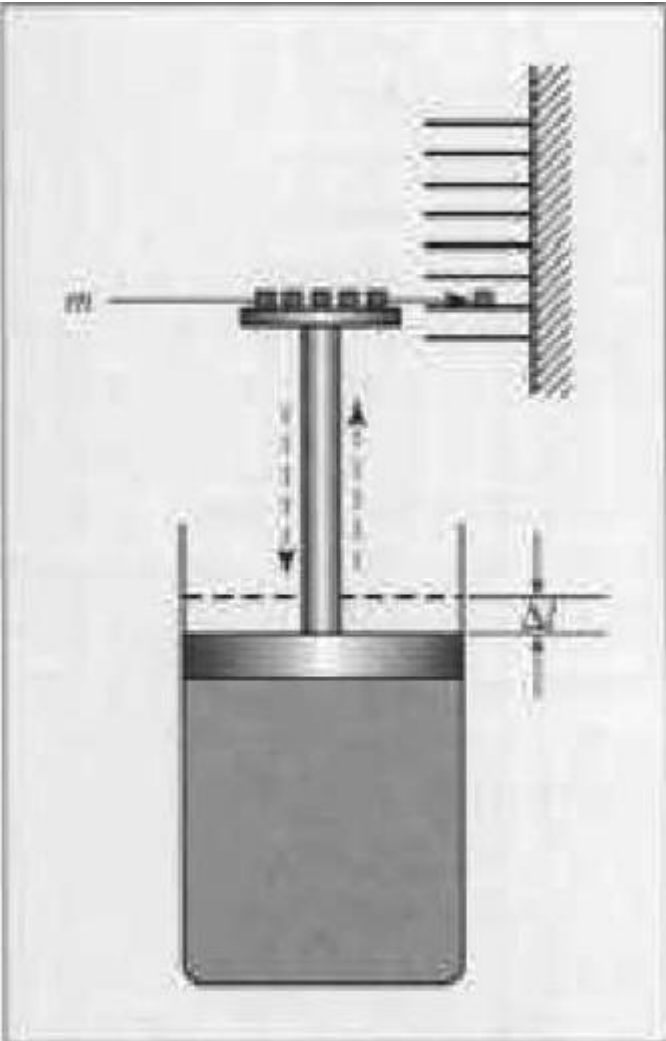


$$dU_{\text{σουστ}} = \cancel{\delta Q} - \delta W = -PdV ?$$

Στη θέση μέγιστης ανύψωσης,
 $U_{\text{σουστ}}(1) - U_{\text{σουστ}}(0) \approx m_{\epsilon\mu\beta} g x_{\text{μεγ}}$

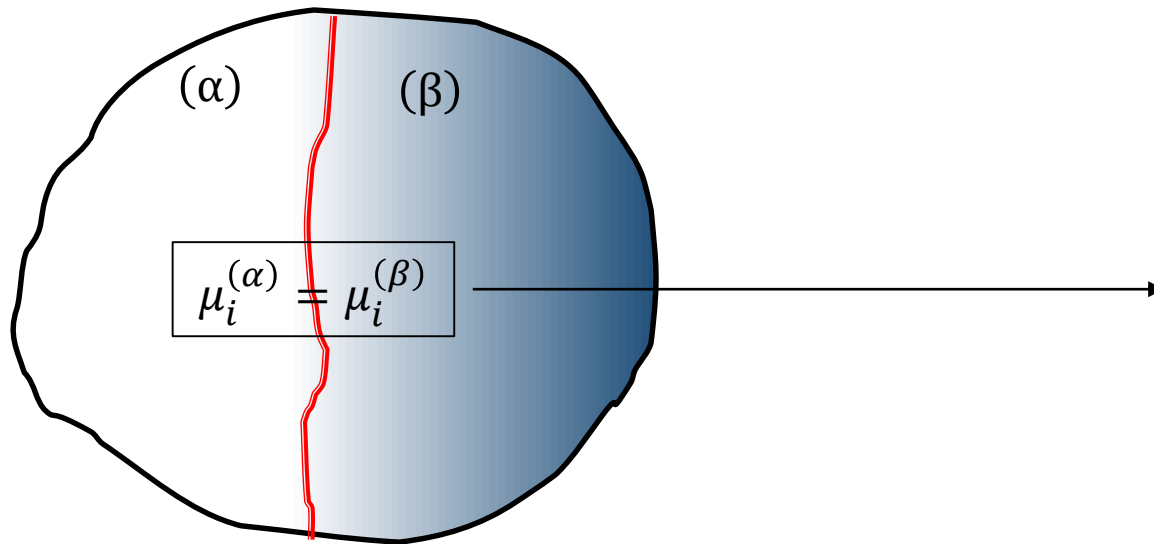
Τελικά,

$$\Delta U_{\text{σουστ}} + \Delta U_{\text{περ}} = m_{\epsilon\mu\beta} g x_{\text{τελ}}$$



ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΤΗΣ ΜΙΑΣ ΦΑΣΕΙΣ

- Για κάθε φάση: Ομοιόμορφη πίεση, P , θερμοκρασία, T και σύσταση (πχ γραμμομοριακό κλάσμα $N-1$ συστατικών, **εντατικές μεταβλητές**)
- Πίεση και θερμοκρασία κοινές σε όλες τις φάσεις
- Κάθε συστατικό έχει το ίδιο χημικό δυναμικό σε όλες τις φάσεις



$$\mu_i^{(\alpha)} = f(P, T, y_1^{(\alpha)}, y_2^{(\alpha)}, \dots)$$

$$\mu_i^{(\beta)} = f(P, T, x_1^{(\beta)}, x_2^{(\beta)}, \dots)$$

ΚΑΝΟΝΑΣ ΦΑΣΕΩΝ GIBBS

$$F = 2 - \Phi + N$$

F : πλήθος ελεύθερων εντατικών μεταβλητών

Φ : πλήθος φάσεων

N : πλήθος χημικών συστατικών

Ιδανικό μίγμα πτητικών υγρών – Νόμος RAOULT

$$y_i P = x_i P_i^{sat}(T)$$

Μίγμα πτητικών υγρών και μόνιμων αερίων – Νόμος HENRY

$$y_i P = H_i(T) x_i$$

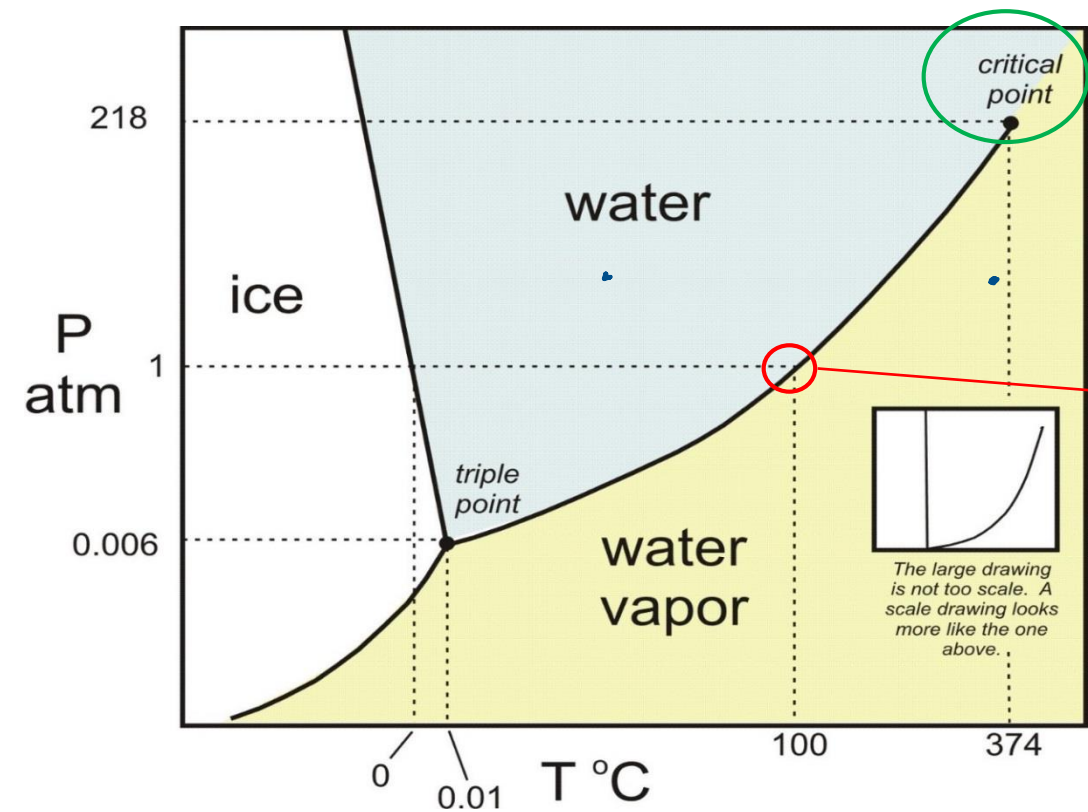
y_i : γραμμομοριακό κλάσμα συστατικού i στη φάση (α)

x_i : γραμμομοριακό κλάσμα συστατικού i στη φάση (β)

P_i^{sat} : τάση ατμών συστατικού i

H_i : σταθερά νόμου Henry συστατικού i

Ισορροπία καθαρού συστατικού (νερό-ατμός)

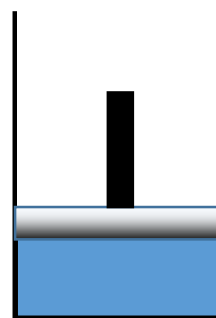


Κανόνας φάσεων Gibbs: $F = 2 - \Phi + N \Rightarrow F = 1$

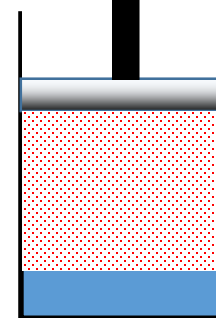
Νόμος Raoult:

$$P = P^{sat}(T)$$

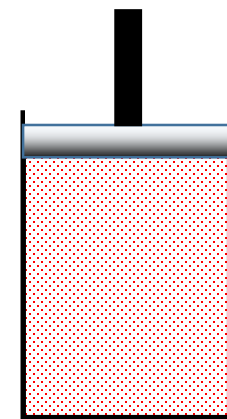
$P = 1 \text{ atm}$



$T = 99,9 \text{ } ^\circ\text{C}$



$T = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$



$T = 100,1 \text{ } ^\circ\text{C}$

Καμπύλη τάσης ατμών $P^{sat} = f(T)$

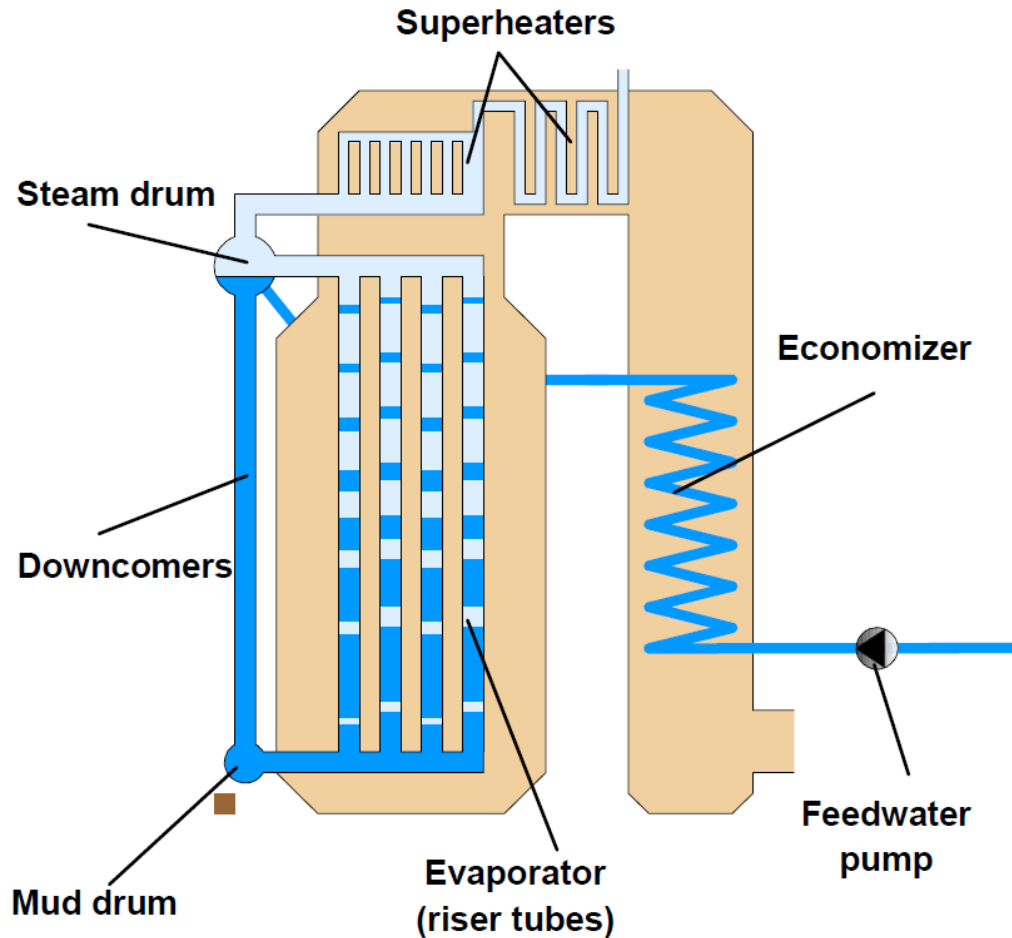
$$\frac{dP^{sat}}{dT} = \frac{\Delta H^{\alpha\beta}}{T\Delta V^{\alpha\beta}} \quad \text{Νόμος Clapeyron}$$

$$\text{Εξίσωση Antoine} \quad \log_{10} P^{sat} [\text{bar}] = A - \frac{B}{T[\text{oC}] + C}$$

Νερό-ατμός: <http://checalc.com>

Άλλα συστατικά: A, B, C από <http://vle-calc.com>

Ατμοπαραγωγός φυσικής ανακυκλοφορίας



Εντατικές μεταβλητές: $P, T, \rho_v, \rho_l, H_v, H_l,$

$$P = P^{sat}(T) \quad \text{ή} \quad T = T^{sat}(P)$$

Εκτατικές μεταβλητές: x κλάσμα ατμού στην έξοδο
 CR λόγος ανακυκλοφορίας

$$CR = 1/x [=] kg \text{ μιγμ.} / kg \text{ ατμού}$$

$$P < 70 \text{ bar} \rightarrow CR = 50 - 10$$

$$P > 70 \text{ bar} \rightarrow CR = 10 - 5$$

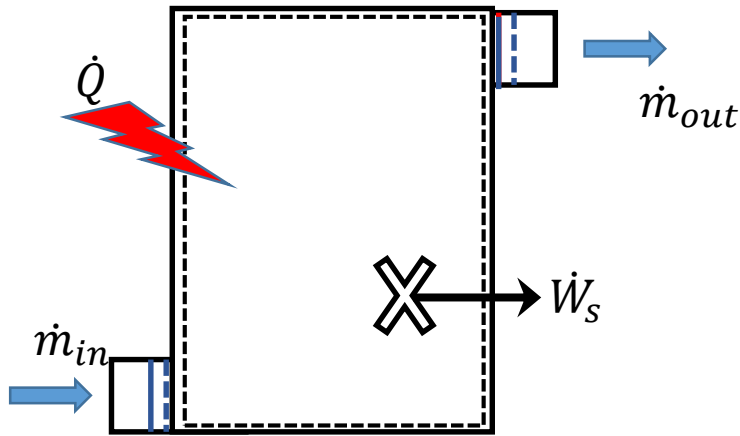


- Θερμική προστασία αυλών
- Σημασία διαφοράς πυκνότητας στη φυσική ανακυκλοφορία

Συσκευές διεργασιών και δίκτυα ατμού

Το 1^ο Θερμοδυναμικό Αξίωμα για ανοικτό σύστημα

ΑΝΟΙΚΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ - ΟΓΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ



$$\frac{d(mE)_{sys}}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}, \quad E = U + \frac{u^2}{2} + gz \quad : \text{ενέργεια ανά μονάδα μάζας}$$

$$\frac{d(mE)_{cv}}{dt} = \frac{d(mE)_{sys}}{dt} + (\dot{m}E)_{in} - (\dot{m}E)_{out}$$

$$\dot{W}_{\text{pressure}} = Fu = PAu = \frac{P}{\rho} \dot{m} \Rightarrow \dot{W} = \dot{W}_s + \left(\frac{P}{\rho} \dot{m} \right)_{out} - \left(\frac{P}{\rho} \dot{m} \right)_{in}$$

$$\frac{d(mU)_{cv}}{dt} = \left[\dot{m} \left(H + \frac{u^2}{2} + gz \right) \right]_{in} - \left[\dot{m} \left(H + \frac{u^2}{2} + gz \right) \right]_{out} + \dot{Q} - \dot{W}_s$$

Ενθαλπία ανά μονάδα μάζας:

$$H = U + \frac{P}{\rho}$$

Θερμικές διεργασίες: $H + \frac{u^2}{2} + gz \approx H$

Συμπιεστές ροές: $H + \frac{u^2}{2} + gz \approx H + \frac{u^2}{2}$

Θερμικές διεργασίες - Μόνιμες συνθήκες

$$\sum_j \dot{m}_{out,j} H_{out,j} = \sum_i \dot{m}_{in,i} H_{in,i} + \dot{Q}$$

Υπολογισμός μεταβολών ενθαλπίας

Καθαρά συστατικά (εξάρτηση από T, P)

$$dH = C_p dT + \left[V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right] dP$$

Ιδανικά αέρια

$$dH = C_p dT \Rightarrow H(T) = \int_{T_0}^T C_p dT \approx C_p (T - T_0)$$

Υγρά σε χαμηλές έως μέτριες πιέσεις

$$C_V \approx C_P = C \Rightarrow H(T) \approx U(T) \approx C(T - T_0)$$

Μεταβολή από υπόψυκτο υγρό (1) σε υπέρθερμο ατμό (2)

$$\Delta H = H_2 - H_1 \approx C_P^l (T_{sat} - T_1) + \Delta H^{lv} (T_{sat}) + C_P^v (T_2 - T_{sat})$$

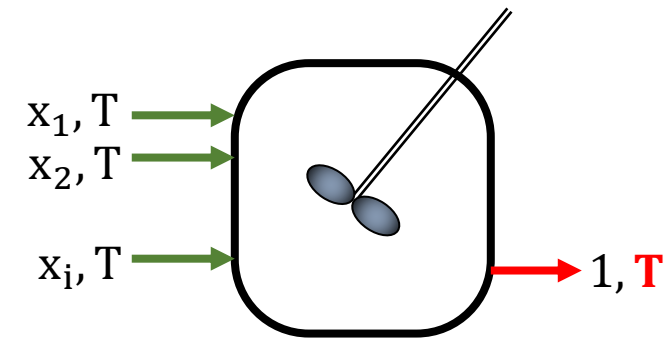
Πίνακες ειδικής ενθαλπίας

<http://checalc.com/calc/steam.html>

<https://webbook.nist.gov/chemistry/fluid/>

Μίγματα (παραδοχή ιδανικής ανάμιξης)

$$H_m(T) = \sum_{i=1}^N x_i H_i = \left(\sum_{i=1}^N x_i C_{p,i} \right) (T - T_0)$$



Αντίστοιχα,

$$\Delta H_m^{lv} = \sum_{i=1}^N x_i \Delta H_i^{lv}$$

Εξατμιστήρας με θερμαντήρα ατμού

Παράδειγμα: Εξατμιστήρας που λειτουργεί σε ατμοσφαιρική πίεση τροφοδοτείται με υδατικό διάλυμα NaCl, παροχής 7000 kg/h, θερμοκρασίας 70°C και σύστασης 3% κατά βάρος ($C_p=4,05$ kJ/kg°C), και παράγει προϊόν σύστασης 25% κατά βάρος ($C_p=3,24$ kJ/kg°C). Θερμότητα παρέχεται στον εξατμιστήρα από την συμπύκνωση κορεσμένου ατμού θέρμανσης 150°C που κυκλοφορεί εσωτερικά των αυλών. Υπολογίστε την απαιτούμενη παροχή ατμού και σχολιάστε τη σημασία της ατμοπαγίδας.

Δοχείο πλήρους ανάμιξης: $P_b=1$ atm, $T_b=T_p=107^\circ\text{C}$ (σημείο βρασμού δ/τος 25%)

$$F x_F = P x_P \rightarrow P = 7000 \cdot 0,03 / 0,25 = 840 \text{ kg/h}$$

$$S = F - P = 7000 - 840 = 6160 \text{ kg/h}$$

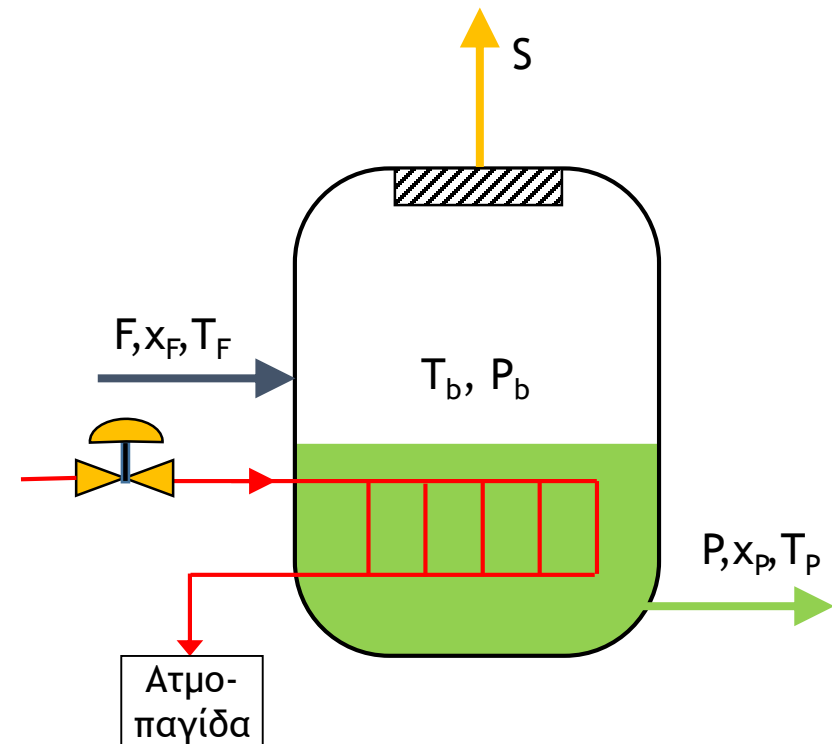
$$F H_F + \dot{m}_{st} H_v = P H_P + S H_S + \dot{m}_{st} H_l \rightarrow F H_F + \dot{m}_{st} (H_v - H_l) = P H_P + S H_S$$

$$H_F = C_{p,F} (T_F - 0) = 283,50 \text{ kJ/kg}, \quad H_P = C_{p,P} (T_P - 0) = 346,68 \text{ kJ/kg}$$

$$H_S = 2690 \text{ kJ/kg} \text{ (υπέρθερμος ατμός)}, \quad (H_v - H_l) = \Delta H_{vl} = 2113,7 \text{ kJ/kg}$$

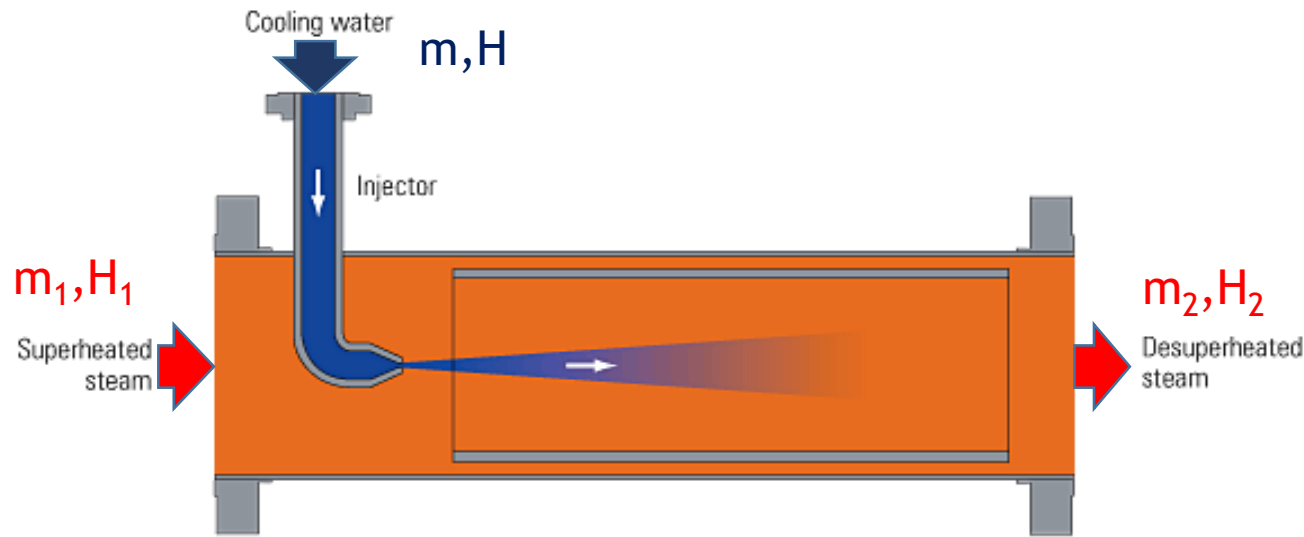
$$\dot{m}_{st} = 7038 \text{ kg/h}$$

- Κακή λειτουργία ατμοπαγίδας: απώλεια ατμού, συσσώρευση υγρού
- Διαχείριση δικτύου ατμού και δικτύου συμπυκνωμάτων



Από-υπερθέρμανση ατμού (desuperheating)

Παράδειγμα: Υπέρθερμος ατμός πίεσης 50 atm και θερμοκρασίας 427°C θα μετατραπεί σε κορεσμένο με ψεκασμό με νερό 150°C. Υπολογίστε την παροχή νερού που απαιτείται.



ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΥΠΕΡΘΕΡΜΟΥ ΑΤΜΟΥ

- Αποφυγή συμπυκνωμάτων στους αγωγούς μεταφοράς – υψηλές ταχύτητες
- Ατμοπαγίδα λειτουργεί μόνον στο ξεκίνημα
- Χαμηλός συντελεστής συναγωγής
- Αβεβαιότητα στο σχεδιασμό συσκευών θερμικών διεργασιών
- Θερμική καταπόνηση υλικών και αισθητήρων
- Δυσκολία αυτόματου ελέγχου για $T_2 \approx T_{sat}$

Αδιαβατική ανάμιξη

$$m_1 + m = m_2$$

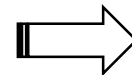
$$m_1 H_1 + m H = m_2 H_2$$

Από πίνακες ατμού

$$H_1 = 3262,2 \text{ kJ/kg}$$

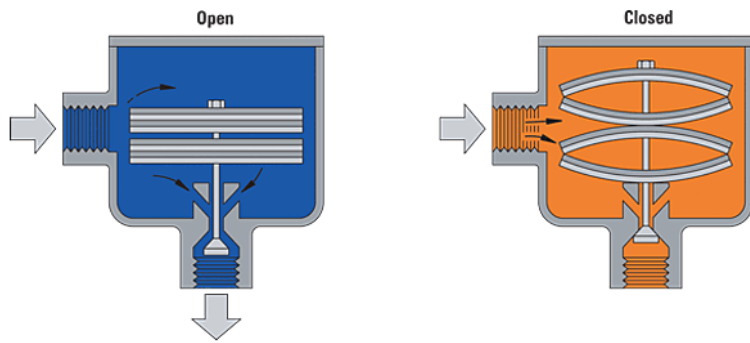
$$H_2 = 2794,2 \text{ kJ/kg}$$

$$H = 635,1 \text{ kJ/kg}$$

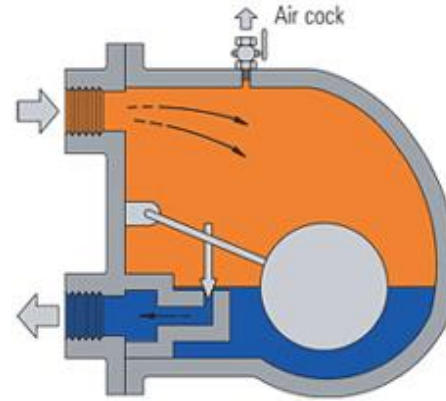


$$\frac{m}{m_1} = \frac{H_1 - H_2}{H_2 - H} = 0,217 \Rightarrow m = 21,7\% m_1$$

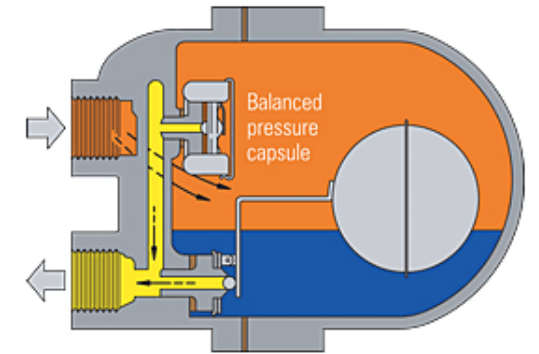
Θερμοστατική ατμοπαγίδα



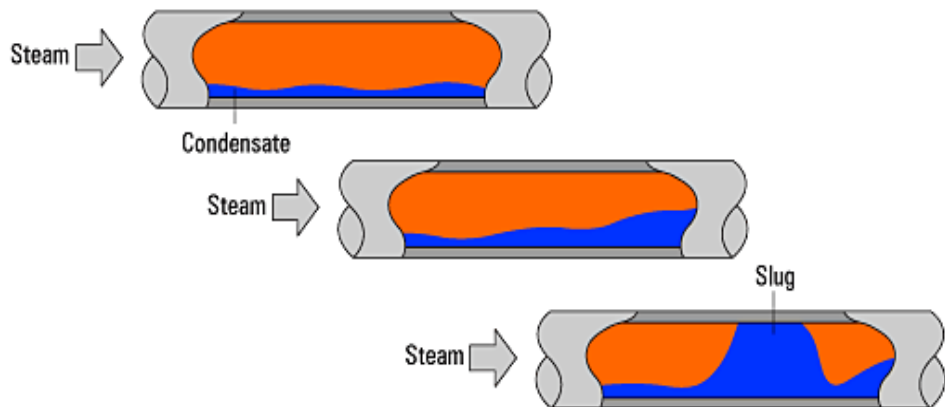
Μηχανική ατμοπαγίδα με φλοτέρ



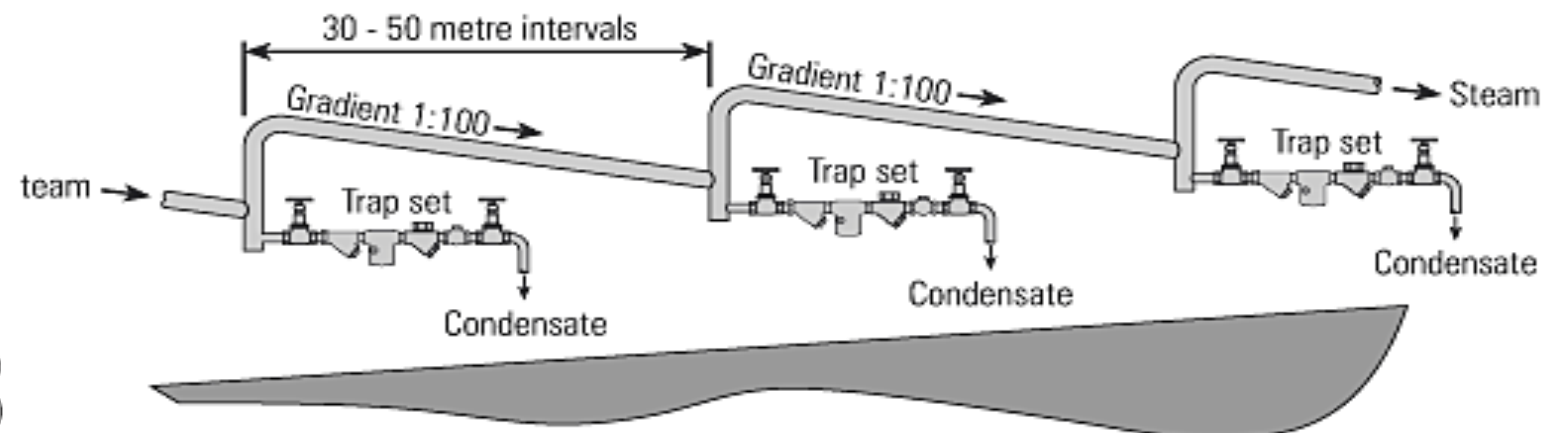
Συνδυασμός



Υδραυλικό πλήγμα



Χωροθέτηση σωληνώσεων



Πίεση διανομής ατμού και πίεση λειτουργίας συσκευών

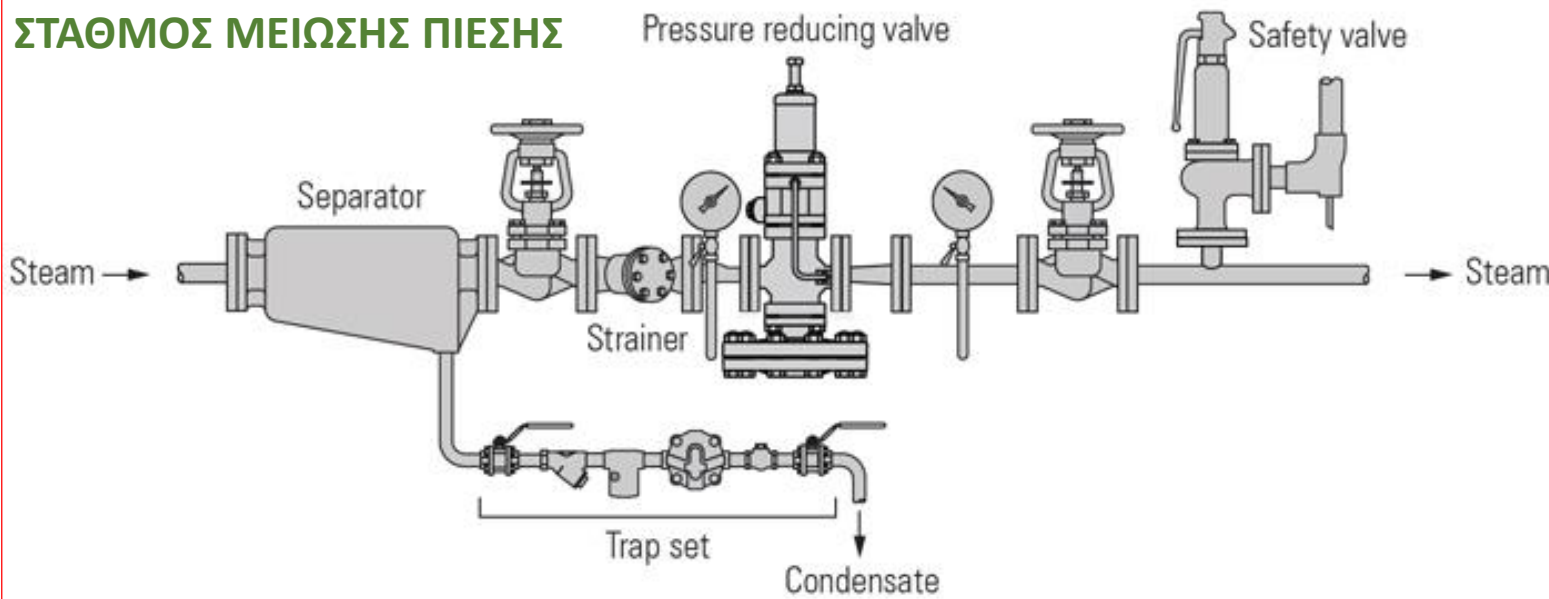
ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΥΨΗΛΗΣ ΠΙΕΣΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ/ΔΙΑΝΟΜΗΣ

- Υψηλότερη θερμοχωρητικότητα του λέβητα και καλύτερη απόκριση σε αυξομειώσεις φορτίου
- Μικρότερες διαμέτροι κεντρικού συστήματος διανομής και μέγεθος βαλβίδων, ατμοπαγίδων
- Ευχερής μεταφορά σε μεγαλύτερες αποστάσεις

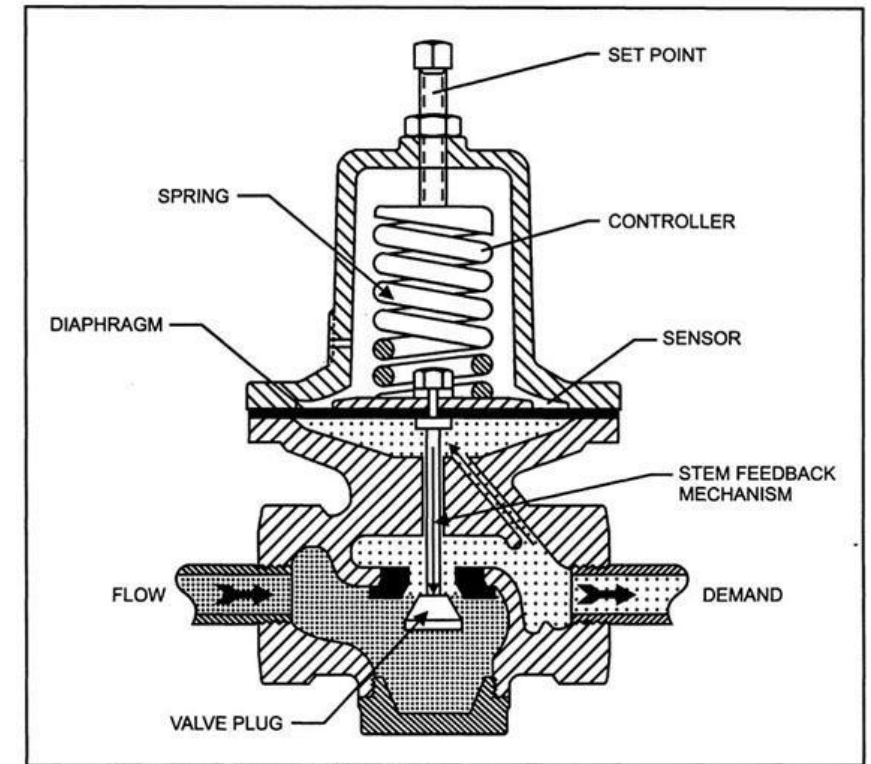
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΣΥΣΚΕΥΩΝ

- Μέγιστη επιτρεπτή πίεση
- Ατμός θέρμανσης κοντά στον κορεσμό
- Έλεγχος θερμοκρασίας μέσω ελέγχου της πίεσης, $p_{\text{sat}} = f(T_{\text{sat}})$

ΣΤΑΘΜΟΣ ΜΕΙΩΣΗΣ ΠΙΕΣΗΣ



Απλός μειωτής πίεσης (offset αναλογικού ελέγχου)



Θερμαντήρες ατμού με έλεγχο θερμοκρασίας

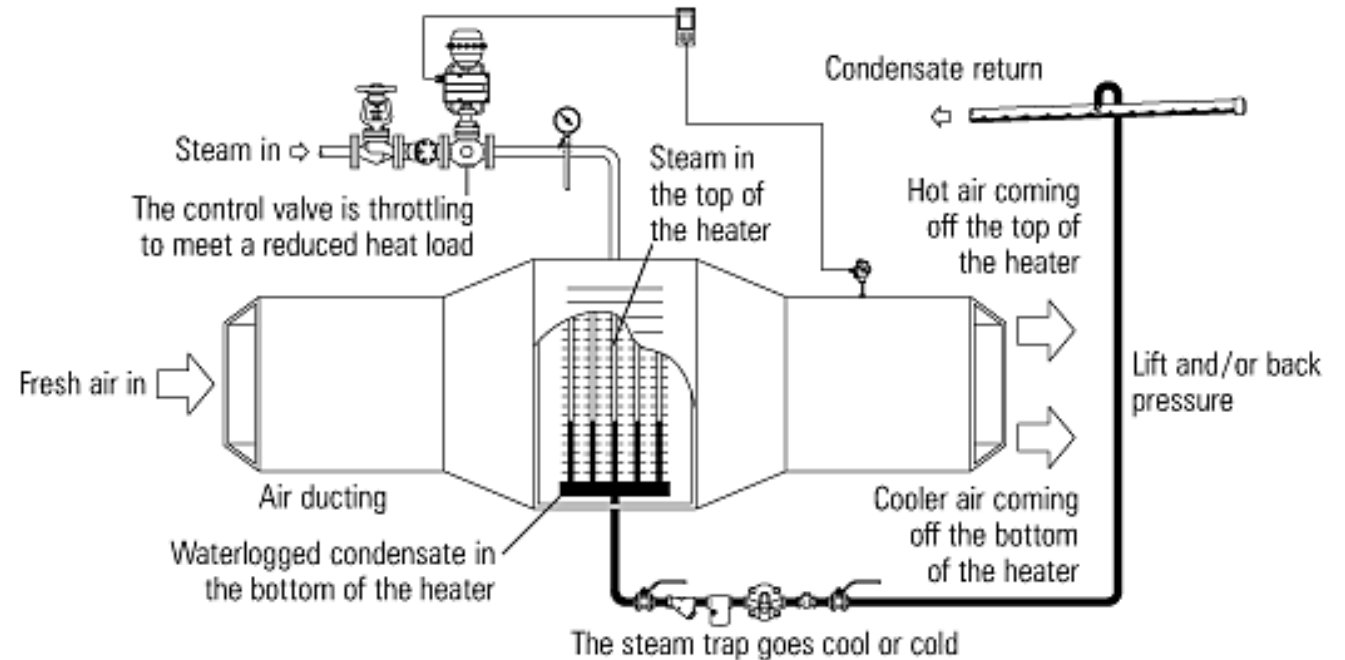
Η πλημμύριση θερμαντήρα με συμπύκνωμα (waterlogging) προκαλείται από μείωση φορτίου και αντίστοιχη μείωση της πίεσης ατμού κάτω από την πίεση επιστροφής του δικτύου συμπυκνωμάτων

ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΑ

- Χλιαρή ή ψυχρή ατμοπαγίδα
- Βάνα ελέγχου που «ψάχνεται»
- Αυξομείωση θερμοκρασίας ή/και θερμοκρασιακή στρωμάτωση ρεύματος εξόδου
- Αυξημένη διάβρωση (το κρύο νερό διαλύει O_2 , CO_2)
- Διαρροές/αστοχία εναλλάκτη (θερμικές τάσεις)

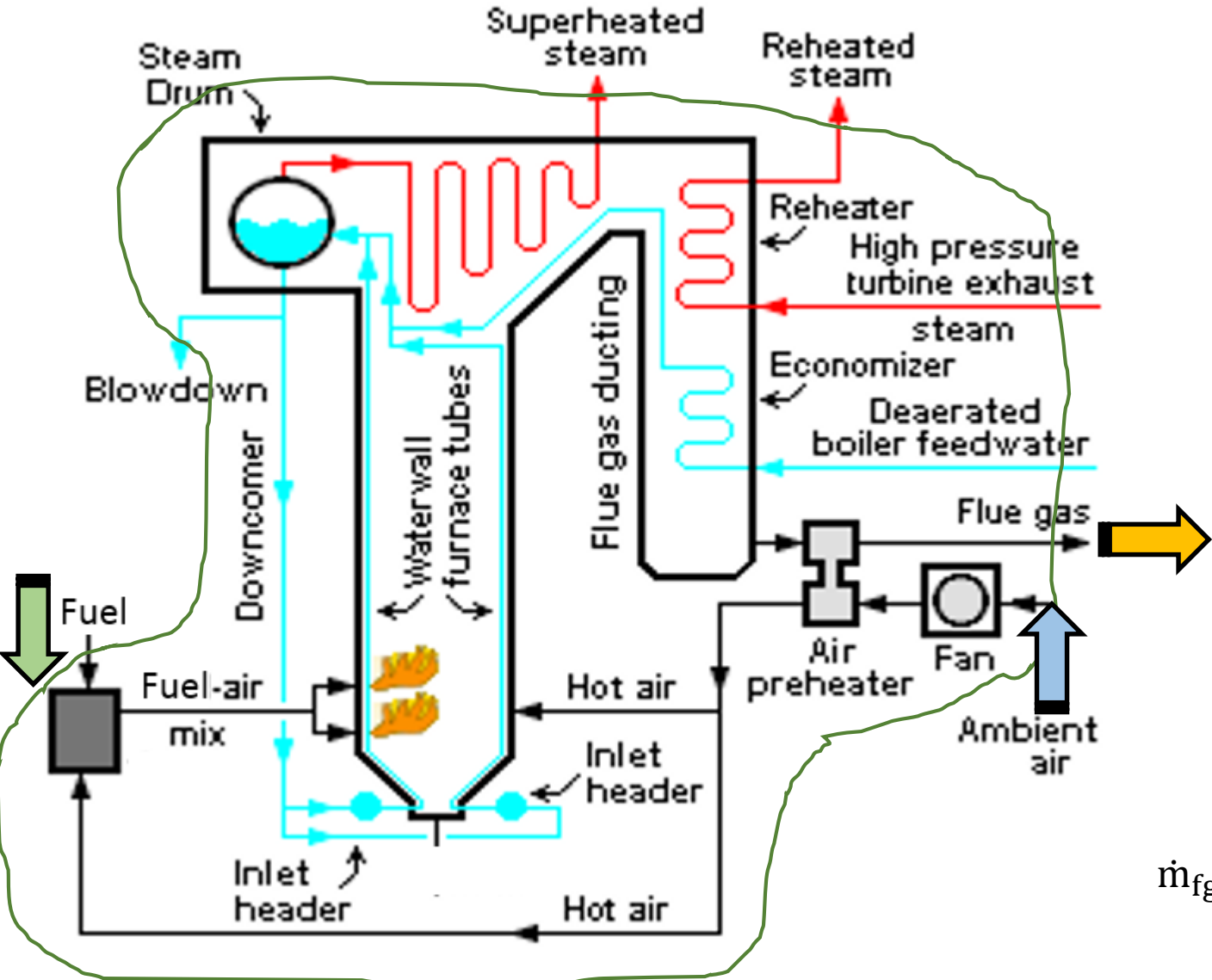
ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ

- Εξασφάλιση τουλάχιστον ατμοσφαιρικής πίεσης στο χώρο ατμού και απομάκρυνση συμπυκνώματος με βαρύτητα μέσω μηχανικής ατμοπαγίδας (και vacuum breaker)
- Εγκατάσταση συνδυασμένης ατμοπαγίδας-αντλίας συμπυκνώματος
- Διατήρηση σταθερής πίεσης ατμού (υψηλότερης της πίεσης επιστροφής συμπυκνωμάτων) και έλεγχος λειτουργίας με αυξομείωση της παροχής εισόδου



Υπολογισμοί καύσης

Θερμικό ισοζύγιο ατμολέβητα



1^ο Θερμοδυναμικό αξίωμα

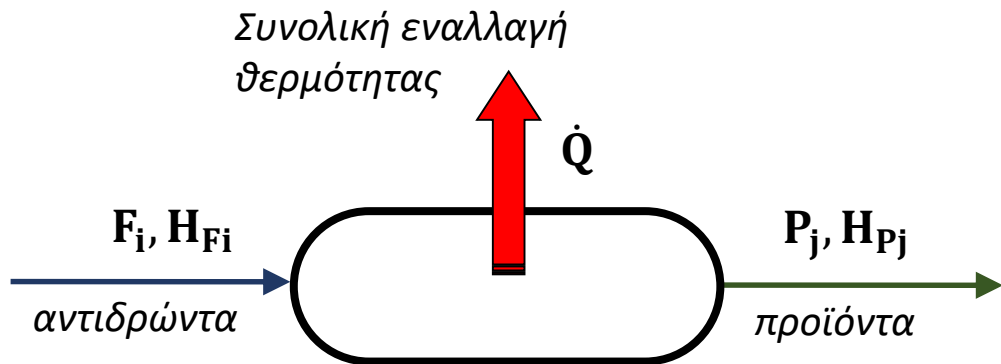
$$\sum_j \dot{m}_{out,j} H_{out,j} = \sum_i \dot{m}_{in,i} H_{in,i} + \dot{Q}$$

Πώς σχετίζονται μεταξύ τους;

$$\dot{m}_{fg} H_{fg}(T_{fg}) = \dot{m}_{CH_4} H_{CH_4}(T_{CH_4}) + \dot{m}_{air} H_{air}(T_{air}) + \dot{Q}$$

Θερμικό αποτέλεσμα χημικών αντιδράσεων

Ορισμός πρότυπης ενθαλπίας χημικής αντίδρασης (με βάση το αντιδρόν συστατικό 1)



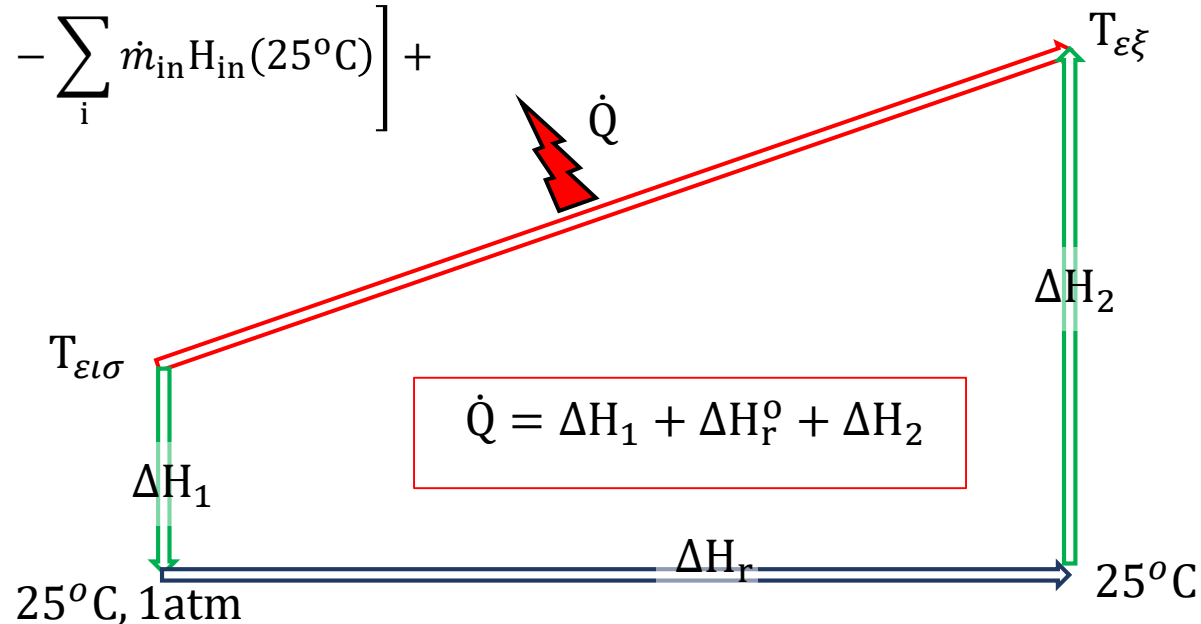
$$\dot{Q} = \left(\sum \dot{m}_{out} H_{out} \right)_{298K} - \left(\sum \dot{m}_{in} H_{in} \right)_{298K} = \dot{m}_{in,1} \Delta H_r^\circ$$

Η ενθαλπία είναι καταστατικό μέγεθος. Μεταβολές της εξαρτώνται μόνον από τις αρχικές και τελικές συνθήκες, όχι από τη διαδρομή.

Γενικός υπολογισμός θερμικού αποτελέσματος

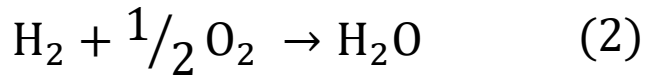
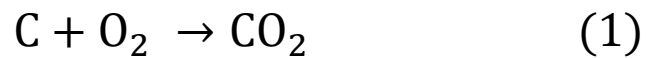
$$\dot{Q} = \left[\sum \dot{m}_{out} H_{out}(T_{\xi\xi}) - \sum \dot{m}_{out} H_{out}(25^\circ\text{C}) \right] + \left[\sum_j \dot{m}_{out} H_{out}(25^\circ\text{C}) - \sum_i \dot{m}_{in} H_{in}(25^\circ\text{C}) \right] + \left[\sum_i \dot{m}_{in} H_{in}(25^\circ\text{C}) - \sum_i \dot{m}_{in} H_{in}(T_{\epsilon\iota\sigma}) \right]$$

$$\dot{Q} = \Delta \left(\sum_i \dot{m}_{in} H_{in} \right)_{T_{\epsilon\iota\sigma} \rightarrow 25} + \Delta H_r^\circ + \Delta \left(\sum_j \dot{m}_{out} H_{out} \right)_{25 \rightarrow T_{\xi\xi}}$$



Υπολογισμός πρότυπης ενθαλπίας αντίδρασης

Σύνθεση αντιδράσεων



$$\Delta H_r^\circ = \Delta H_{r1}^\circ + 2 \Delta H_{r2}^\circ - \Delta H_{r3}^\circ$$

Πολλές αμφίδρομες αντιδράσεις

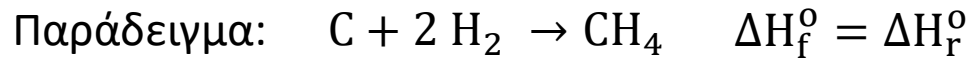
Πρότυπες ενθαλπίες: $\Delta H_{r1}^\circ, \Delta H_{r2}^\circ$

Βαθμοί μετατροπής: ξ_1, ξ_2

Συνολικό θερμικό αποτέλεσμα:

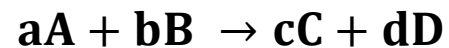
$$\Delta H_{r1}^\circ = \xi_1 \Delta H_{r1}^\circ + \xi_2 \Delta H_{r2}^\circ$$

Πρότυπη ενθαλπία σχηματισμού



(πρότυπη ενθαλπία σχηματισμού μεθανίου)

Θερμικό αποτέλεσμα γενικής αντίδρασης



$$a\Delta H_{\text{react}}^\circ = c\Delta H_{f,C}^\circ + d\Delta H_{f,D}^\circ - a\Delta H_{f,A}^\circ - b\Delta H_{f,B}^\circ \quad \Delta H_{\text{react}}^\circ [=] \text{kJ/mol A}$$

Για όλα τα χημικά στοιχεία: $\Delta H_f^\circ = 0$

Πρότυπες ενθαλπίες σχηματισμού

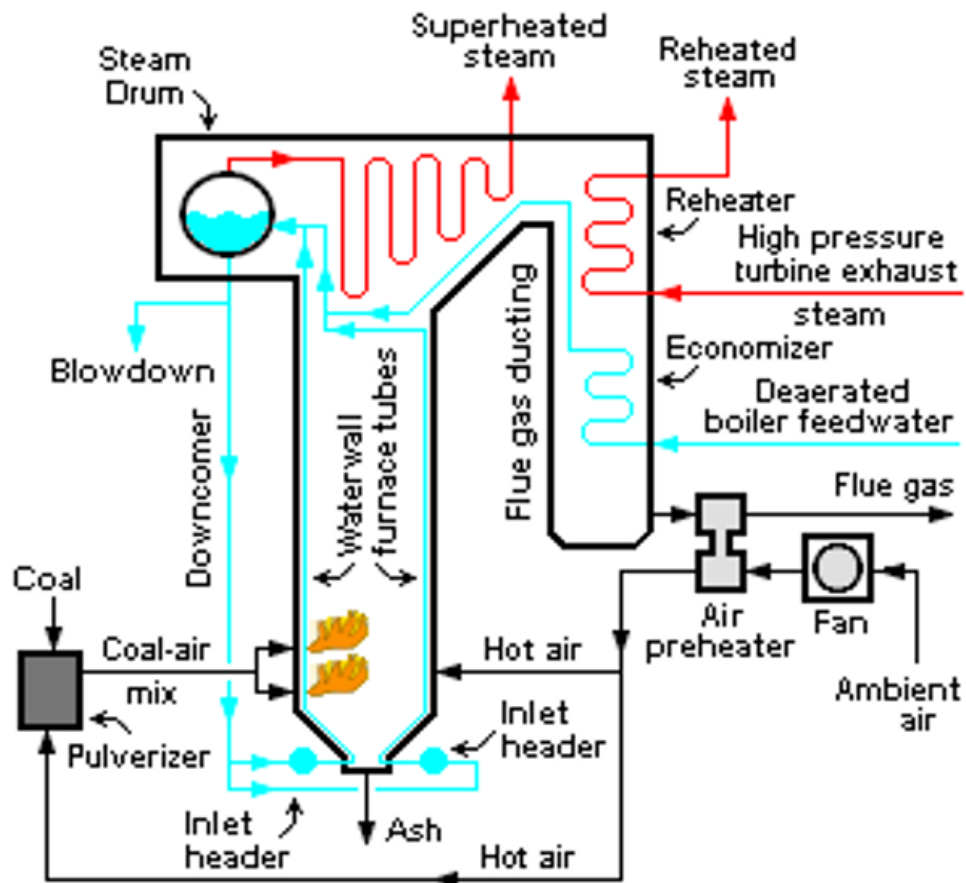
Paraffins:				Miscellaneous organics:			
			<i>J/mol</i>				<i>J/mol</i>
Methane	CH ₄	(g)	-74,520	Acetaldehyde	C ₂ H ₄ O	(g)	-166,190
Ethane	C ₂ H ₆	(g)	-83,820	Acetic acid	C ₂ H ₄ O ₂	(l)	-484,500
Propane	C ₃ H ₈	(g)	-104,680	Acetylene	C ₂ H ₂	(g)	227,480
<i>n</i> -Butane	C ₄ H ₁₀	(g)	-125,790	Benzene	C ₆ H ₆	(g)	82,930
<i>n</i> -Pentane	C ₅ H ₁₂	(g)	-146,760	Benzene	C ₆ H ₆	(l)	49,080
<i>n</i> -Hexane	C ₆ H ₁₄	(g)	-166,920	1,3-Butadiene	C ₄ H ₆	(g)	109,240
<i>n</i> -Heptane	C ₇ H ₁₆	(g)	-187,780	Cyclohexane	C ₆ H ₁₂	(g)	-123,140
<i>n</i> -Octane	C ₈ H ₁₈	(g)	-208,750	Cyclohexane	C ₆ H ₁₂	(l)	-156,230
1-Alkenes:				1,2-Ethanediol	C ₂ H ₆ O ₂	(l)	-454,800
Ethylene	C ₂ H ₄	(g)	52,510	Ethanol	C ₂ H ₆ O	(g)	-235,100
Propylene	C ₃ H ₆	(g)	19,710	Ethanol	C ₂ H ₆ O	(l)	-277,690
1-Butene	C ₄ H ₈	(g)	-540	Ethylbenzene	C ₈ H ₁₀	(g)	29,920
1-Pentene	C ₅ H ₁₀	(g)	-21,280	Ethylene oxide	C ₂ H ₄ O	(g)	-52,630
1-Hexene	C ₆ H ₁₂	(g)	-41,950	Formaldehyde	CH ₂ O	(g)	-108,570
1-Heptene	C ₇ H ₁₄	(g)	-62,760	Methanol	CH ₄ O	(g)	-200,660
Carbon dioxide	CO ₂	(g)	-393,510	Methanol	CH ₄ O	(l)	-238,660
Water (l)	H ₂ O	(l)	-285,830	Methylcyclohexane	C ₇ H ₁₄	(g)	-154,770
Water (v)	H ₂ O	(g)	-241,820	Methylcyclohexane	C ₇ H ₁₄	(l)	-190,160
				Styrene	C ₈ H ₈	(g)	147,360
				Toluene	C ₇ H ₈	(g)	50,170
				Toluene	C ₇ H ₈	(l)	12,180

Ισοζύγια ενέργειας σε ατμοπαραγωγό

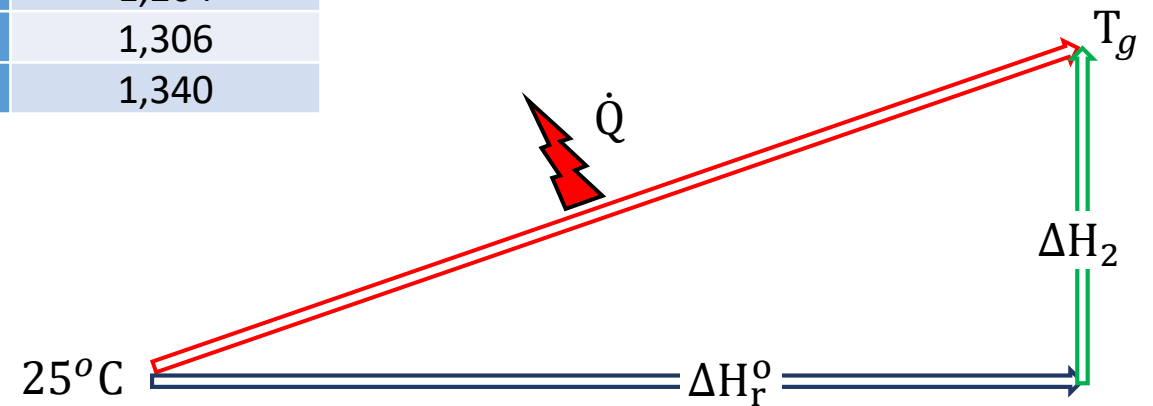
Μεθάνιο καίγεται με 20% περίσσεια αέρα σε ατμολέβητα, ο οποίος παράγει κορεσμένο ατμό πίεσης 5 bar. Ποια η αδιαβατική θερμοκρασία φλόγας; Πόση θερμότητα αποδίδεται στον λέβητα αν τα καυσαέρια εισέρχονται στην καμινάδα στους 165°C; Αν ο λέβητας τροφοδοτείται με συμπύκνωμα 50°C, πόσα kg κορεσμένου ατμού παράγονται ανά mol μεθανίου που καίγεται;

Ενδεικτικές τιμές C_{pg} για καυσαέρια
(13% CO₂, 11% H₂O, 76% N₂)

T [=] °C	C _{pg} [=] kJ/kg°C
0	1,042
200	1,097
400	1,151
600	1,214
800	1,264
1000	1,306
1200	1,340

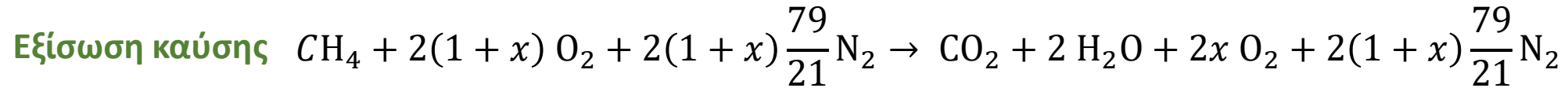


Ισοζύγιο ενέργειας για το κύκλωμα καυσίμου/αέρα-καυσαερίων



$$\dot{Q} = \cancel{\Delta H_1} + \Delta H_r^0 + \Delta H_2, \quad \Delta H_2 = m_g \bar{C}_{pg} (T_g - 25)$$

Ισοζύγια ενέργειας σε ατμοπαραγωγό (συνέχεια)



Σύσταση καυσαερίων ανά mol CH_4 που καίγεται

$$CO_2 : 1 \text{ mol} = 44 \text{ g}$$

$$H_2O : 2 \text{ mol} = 36 \text{ g}$$

$$O_2 : 0,4 \text{ mol} = 12,8 \text{ g}$$

$$N_2 : 9,03 \text{ mol} = 252,8 \text{ g}$$

$$0,3456 \text{ kg/mol } CH_4$$

Πρότυπη ενθαλπία καύσης

$$\Delta H_r^\circ = \Delta H_{f,CO_2} + 2\Delta H_{f,H_2O} - \Delta H_{f,CH_4} = -802,2 \text{ kJ/mol } CH_4$$

Ισοζύγιο ενέργειας

$$\dot{Q} = \cancel{\Delta H_1} + \Delta H_r^\circ + \Delta H_2, \quad \Delta H_2 = m_g \bar{c}_{pg}(T_g - 25)$$

Αδιαβατική θερμοκρασία φλόγας

$$\dot{Q} = 0, T_g \approx 1800^\circ C \rightarrow \bar{c}_{pg} = 1,28 \text{ kJ/kg}^\circ C$$

$$m_g \bar{c}_{pg}(T_g - 25) = -\Delta H_r^\circ \Rightarrow T_g = 1838^\circ C$$

Θερμορροή προς το κύκλωμα νερού/ατμού ανά mol CH_4 που καίγεται

$$T_g = 165^\circ C \rightarrow \bar{c}_{pg} = 1,07 \text{ kJ/kg}^\circ C \Rightarrow \dot{Q} = \Delta H_r^\circ + m_g \bar{c}_{pg}(T_g - 25) =$$

$$\Delta H_r^\circ + m_g \bar{c}_{pg}(T_g - 25) = -802,2 + 0,3456(1,07)(140) \Rightarrow$$

$$\dot{Q} = -750,4 \text{ kJ/mol } CH_4$$

Παραγωγή κορεσμένου ατμού 5 bar από συμπύκνωμα 50°C

$$\dot{Q}_w = -\dot{Q} = \dot{m}_w (H_{w,out} - H_{w,in}) \Rightarrow \dot{m}_w = 750,4 / (2748 - 210) = 0,30 \text{ kg/mol } CH_4$$

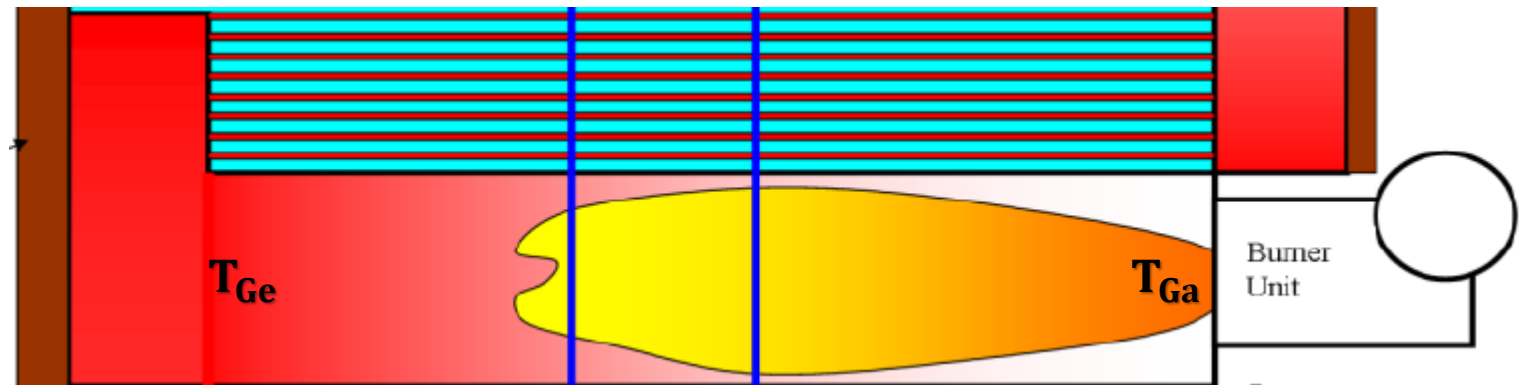
Βαθμός θερμικής απόδοσης ατμοπαραγωγού

$$\left. \begin{aligned} \eta_{th} &= 1 - u_G - u_L - u_E \\ \dot{Q} &= m_B \Delta H_{react} + m_G C_{P,G} (T_G - T_0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u_G &= \frac{m_G C_{P,G} (T_G - T_0)}{m_B \Delta H_{react}} = \frac{\mu_G C_{P,G} (T_G - T_0)}{(\text{LHV})} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mu_G &= \mu_A + 1 = \\ &= \lambda \mu_{A0} (1 + w) + 1 \end{aligned}$$

Αδιαβατική και μέση θερμοκρασία φλόγας

$$m_B \Delta H_{react} + m_G C_{P,G} (T_{Ga} - T_0) = 0 \Rightarrow T_{Ga} \approx \frac{(\text{LHV})}{\mu_G C_{P,G}}$$

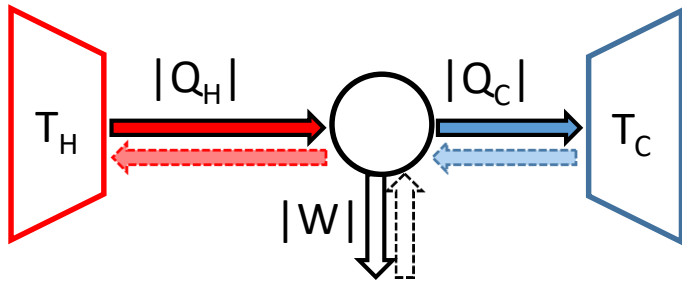
$$T_f = \sqrt{T_{Ga} T_{Ge}}$$



Μηχανές παραγωγής έργου

2^ο Θερμοδυναμικό Αξίωμα - Μηχανή Carnot

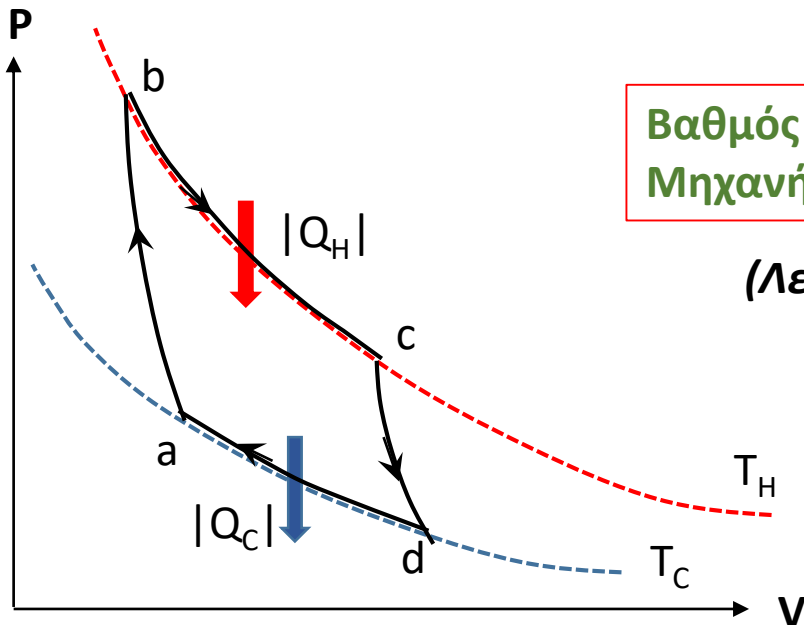
Μηχανή μεταξύ δύο θερμικών δεξαμενών T_H και T_C



Δεν υπάρχει μηχανή που το μοναδικό της αποτέλεσμα να είναι η μεταφορά θερμότητας από χαμηλότερη σε υψηλότερη θερμοκρασία

$$\text{Βαθμός απόδοσης: } \eta = \frac{|W|}{|Q_H|} = \frac{|Q_H| - |Q_C|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|}$$

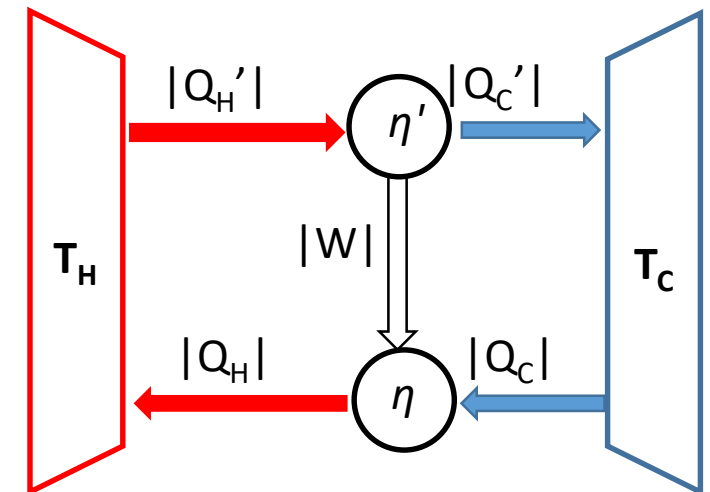
$$(\text{Ισοζύγιο ενέργειας: } |Q_H| = |W| + |Q_C|)$$

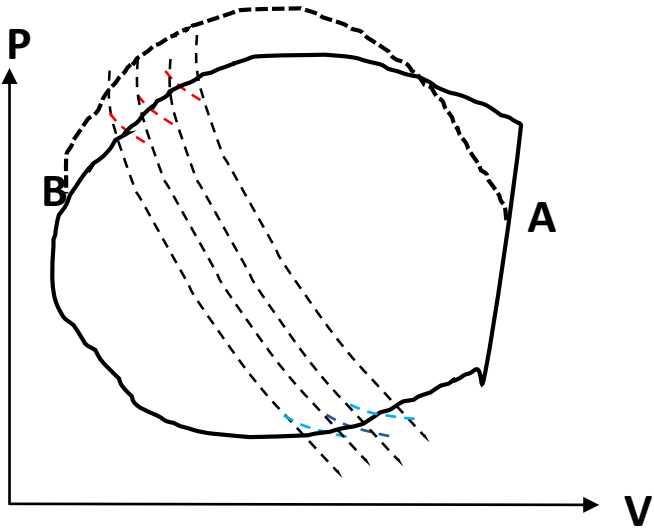


Βαθμός απόδοσης
Μηχανής Carnot

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

(Λειτουργεί και αντίστροφα)





2° Θερμοδυναμικό Αξίωμα: $\Delta S_{\text{total}} \geq 0$

Πηγές αναντιστρεπτότητας

- Εσωτερικές τριβές
- Μεταφορά θερμότητας με πεπερασμένη διαφορά θερμοκρασίας

Για τυχαίο αντιστρεπτό κύκλο:

$$\oint \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = 0 \rightarrow dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}$$

Η εντροπία είναι καταστατικό μέγεθος

Μηχανή που λειτουργεί μεταξύ θερμικών δεξαμενών T_H και T_C :

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_{\text{total}} &= \frac{-|Q_H|}{T_H} + \frac{|Q_C|}{T_C} \\ |W| &= |Q_H| - |Q_C| \end{aligned} \right\} |W| = -T_C \Delta S_{\text{total}} + |Q_H| \left(1 - \frac{T_C}{T_H}\right)$$

Ανοικτό σύστημα σε μόνιμες συνθήκες:

$$\sum (\dot{m}S)_{\text{out}} - \sum (\dot{m}S)_{\text{in}} + \frac{dS_{\text{surr}}^t}{dt} = \dot{S}_G \geq 0, \quad \frac{dS_{\text{surr}}^t}{dt} = - \sum_j \frac{\dot{Q}_j}{T_{\sigma,j}}$$

Αισθητές και λανθάνουσες θερμικές μεταβολές

Αισθητή μεταβολή, εξάρτηση από T, P

$$dH = C_p dT + \left[V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right] dP$$

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP$$

Ιδανικά αέρια

$$dH = C_p dT$$

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P}$$

Υγρά

$$dH = C_p dT + (1 - \beta T) V dP$$

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - \beta V dP$$

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

Συνδυασμός 1^{ου} και 2^{ου} Θερμοδυναμικού Αξιώματος

Για κάθε διαφορική μεταβολή (1 mol) ισχύει ότι:

$$dU = \delta Q_{rev} - \delta W_{rev} = T dS - P dV$$

$$G = H - TS \Rightarrow dG = -S dT + V dP$$

Αλλαγή φάσης α->β (εξάτμιση, τήξη, εξάχνωση)

Για μία διαφορική μάζα που εξατμίζεται

$$P, T = \text{σταθ} \Rightarrow dG = 0 \Rightarrow G^\alpha = G^\beta \Rightarrow \Delta H^{\alpha\beta} = T \Delta S^{\alpha\beta}$$

Πώς αλλάζει η τάση ατμών αν αλλάξει λίγο η θερμοκρασία;

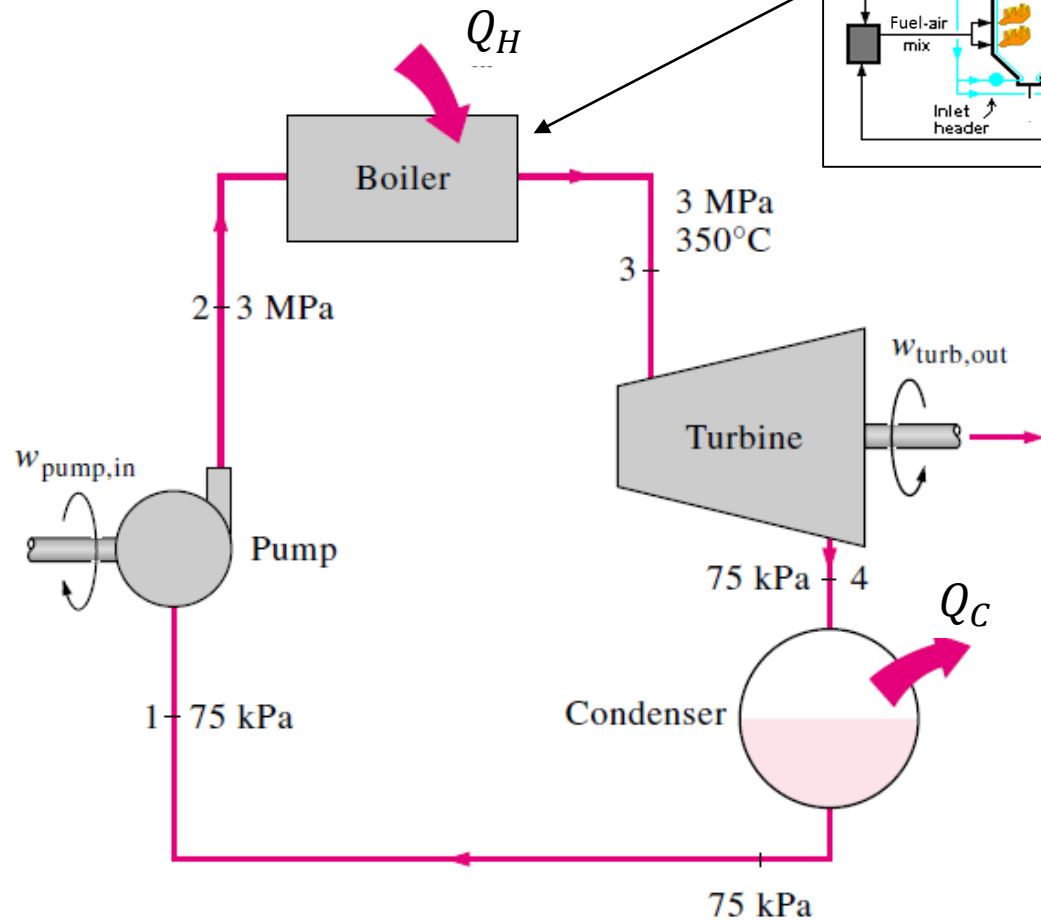
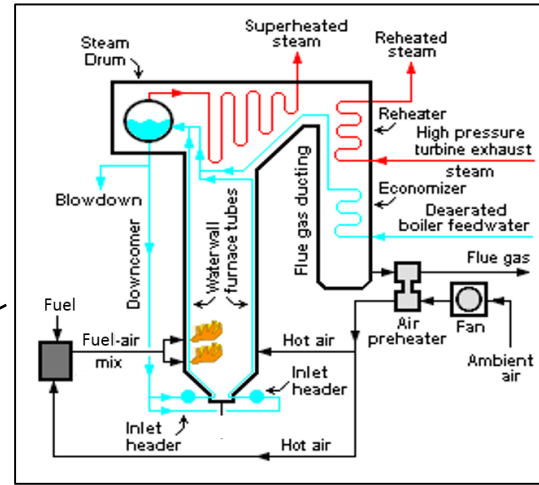
$$T \rightarrow T + dT, \quad P^{sat} \rightarrow P^{sat} + dP^{sat}$$

$$dG^\alpha = dG^\beta \Rightarrow \frac{dP^{sat}}{dT} = \frac{\Delta H^{\alpha\beta}}{T \Delta V^{\alpha\beta}} \quad (\text{Εξίσωση Clapeyron})$$

Εξίσωση Antoine (A, B, C από <http://vle-calc.com>)

$$\log_{10} P^{sat} [\text{bar}] = A - \frac{B}{T[\text{oC}] + C}$$

Κύκλος Rankine



$$Q_H = H_3 - H_2 = \int_2^3 T ds = T_m (s_4 - s_1)$$

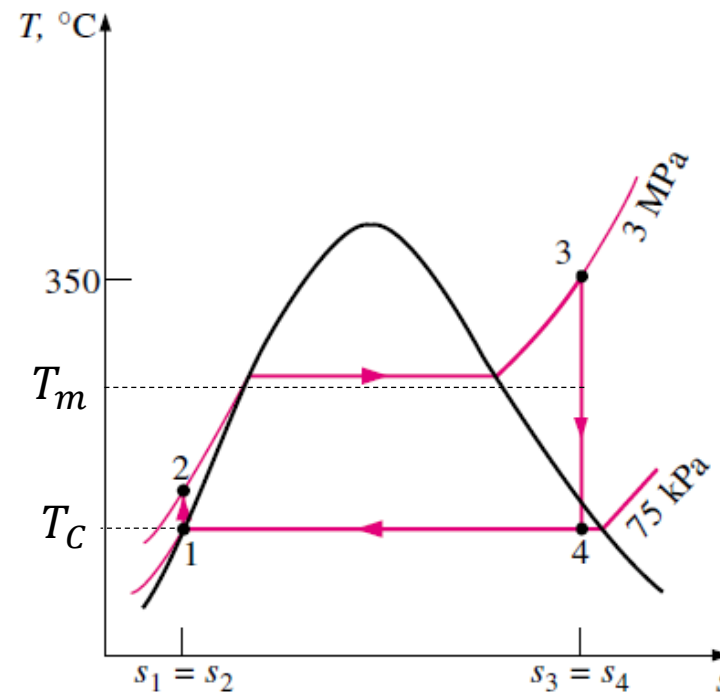
$$Q_C = H_4 - H_1 = T_C (s_4 - s_1)$$

$$W_{\sigma\tau\rho} = \eta_{\sigma\tau\rho} (H_3 - H_4)$$

$$W_{\alpha\nu\tau} = \frac{V_1 (P_2 - P_1)}{\eta_{\alpha\nu\tau}}$$

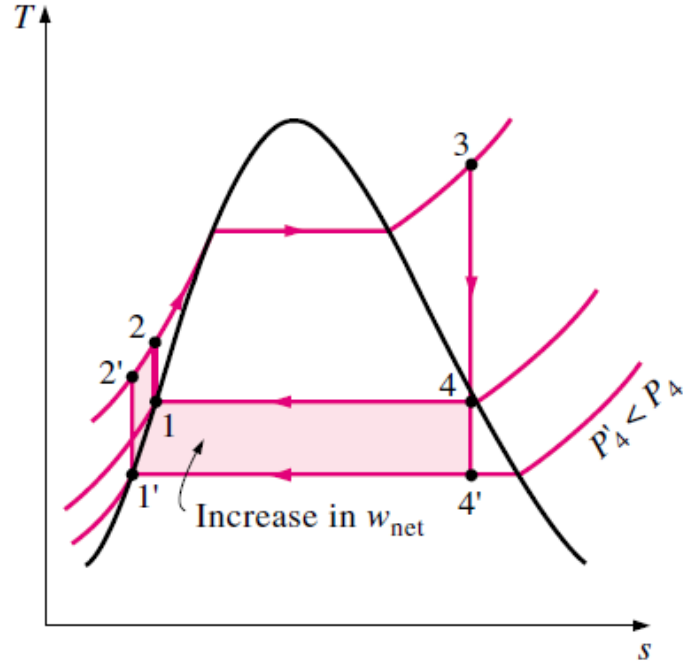
$$\eta_{th} = \frac{W_{\sigma\tau\rho} - W_{\alpha\nu\tau}}{Q_H}$$

$$\eta_{th} \approx 1 - \frac{T_C}{T_m}$$

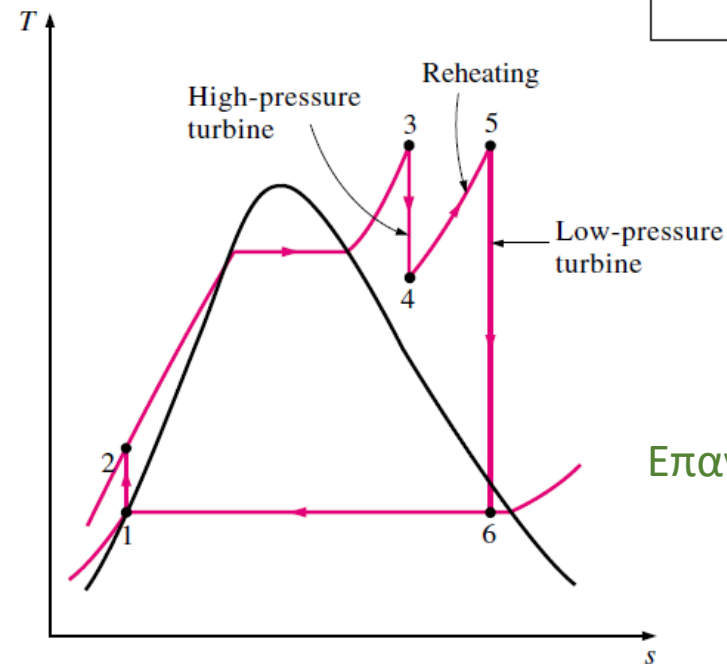
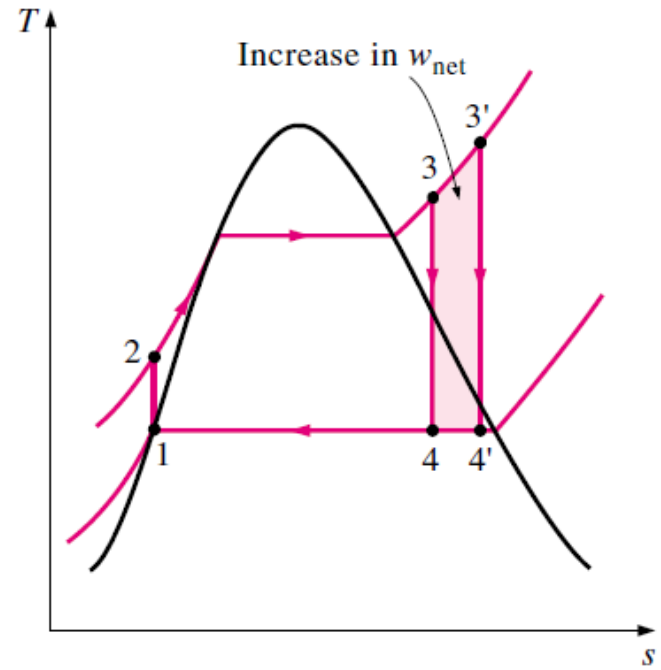


Βελτίωση βαθμού απόδοσης κύκλου Rankine

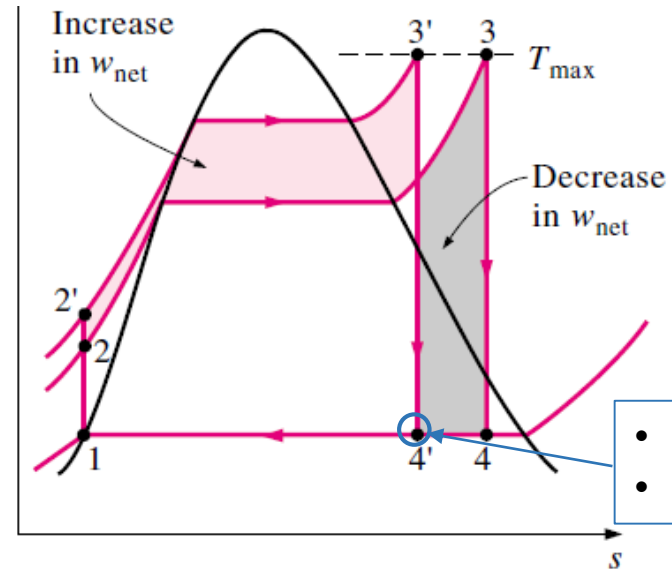
Μείωση πίεσης εξόδου στροβίλου



Υπερθέρμανση ατμού



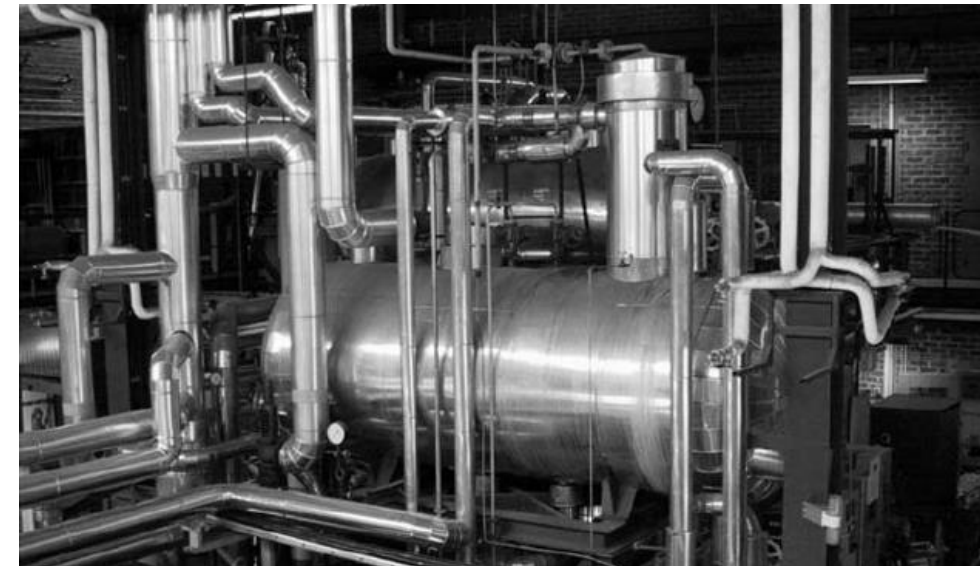
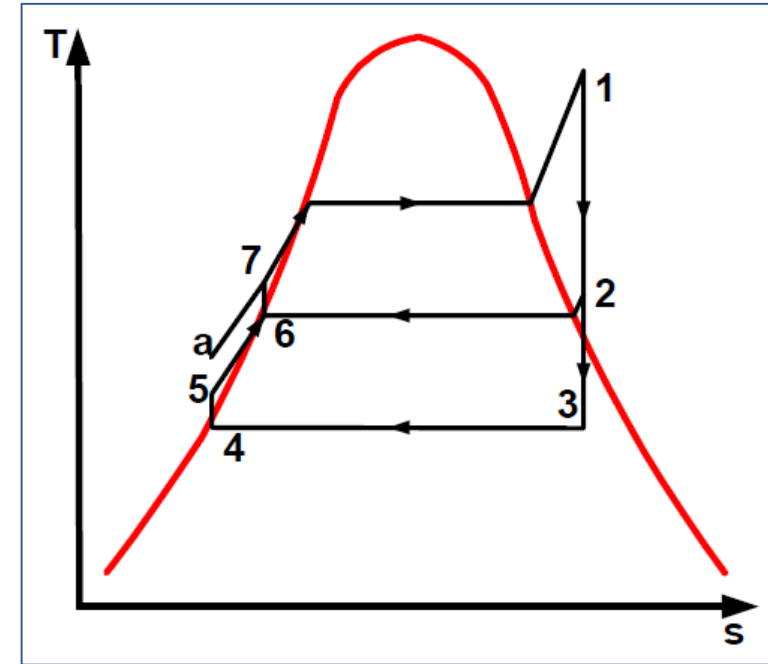
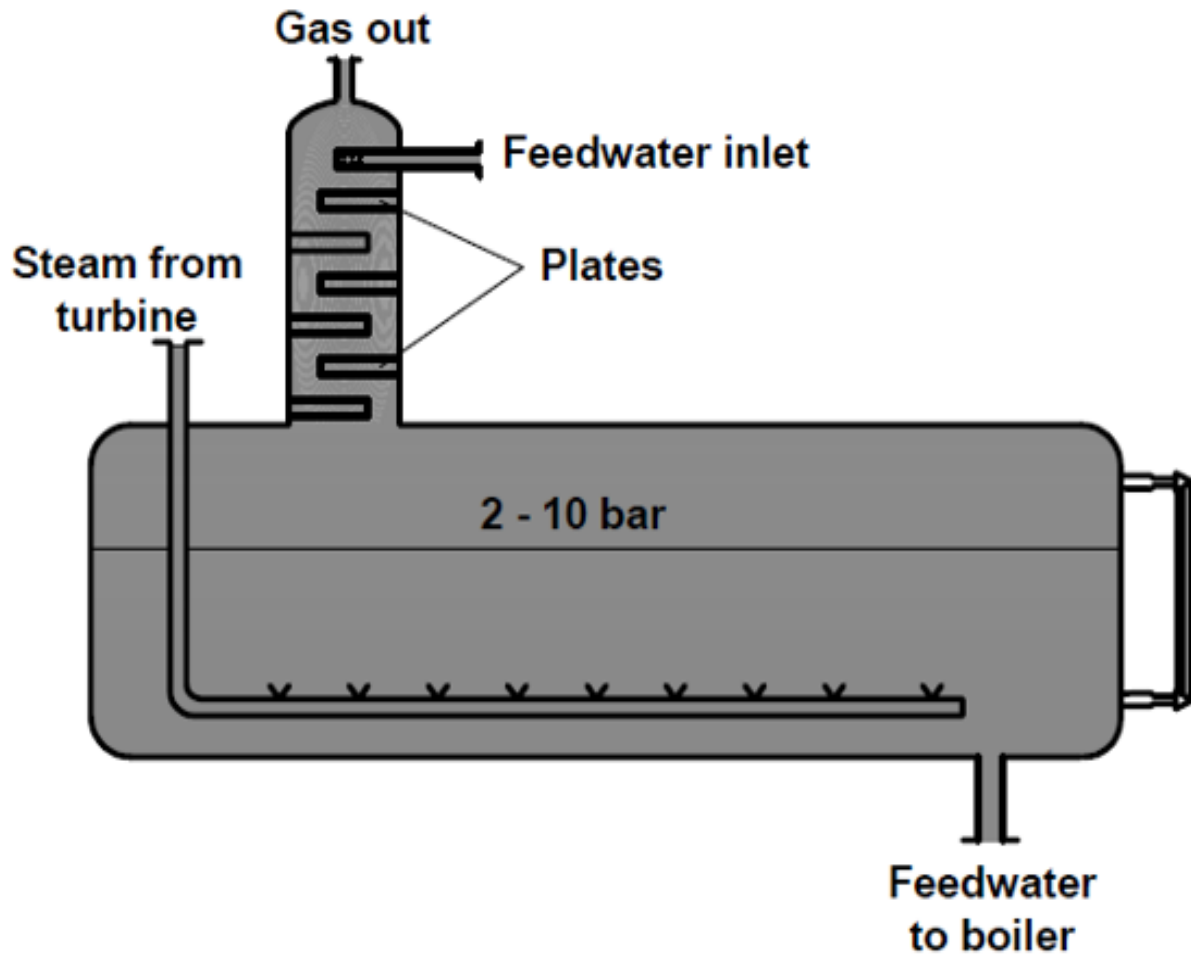
Επαναθέρμανση ατμού



Αύξηση πίεσης λειτουργίας

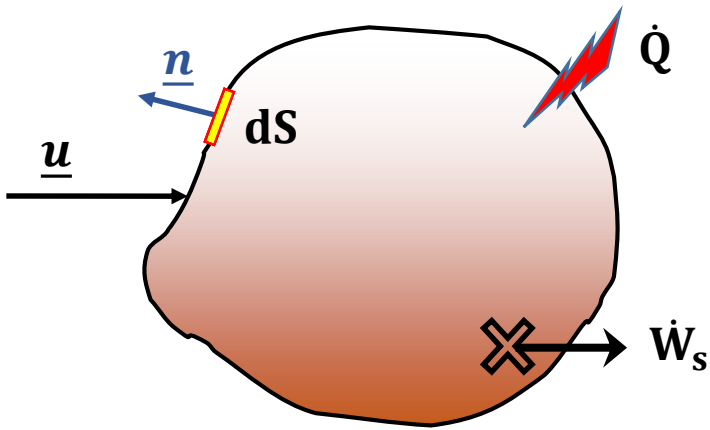
- Αυξημένη υγρασία
- Διόρθωση με επαναθέρμανση

Προθερμαντής άμεσης επαφής - Απαεριωτής



Μηχανική Ρευστών

Ολοκληρωτικά ισοζύγια στη μηχανική ρευστών (μόνιμες συνθήκες)



Ισοζύγιο μάζας (κινηματική)

$$\int \rho(\underline{u} \cdot \underline{n})dS = 0$$

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 = \dot{m}$$

Ισοζύγιο ορμής (δυναμική)

$$\sum \underline{F} = \int \rho \underline{u}(\underline{u} \cdot \underline{n})dS$$

$$\sum \underline{F} = \dot{m}(\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \quad \text{ή}$$

$$\sum \underline{F}_{other} = \dot{m}(\underline{u}_2 - \underline{u}_1) + p_1 A_1 \underline{n}_1 + p_2 A_2 \underline{n}_2$$

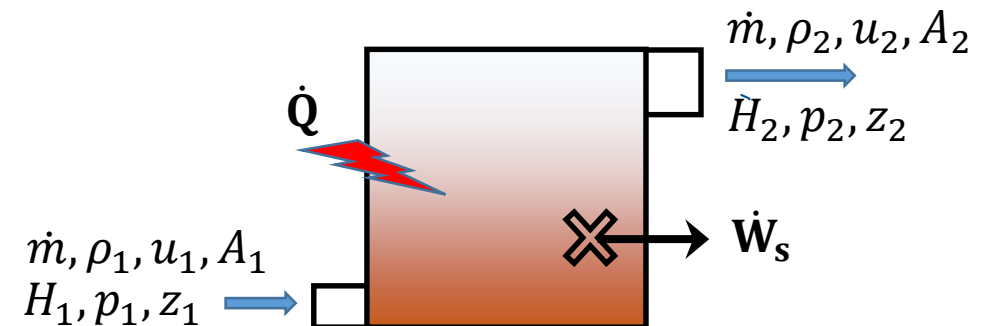
Ισοζύγιο ενέργειας

$$\int \left(H + \frac{1}{2} u^2 + gz \right) \rho(\underline{u} \cdot \underline{n})dS = \dot{Q} - \dot{W}_s \quad \dot{m} \left[(H_2 - H_1) + \frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2) + g(z_2 - z_1) \right] = \dot{Q} - \dot{W}_s$$

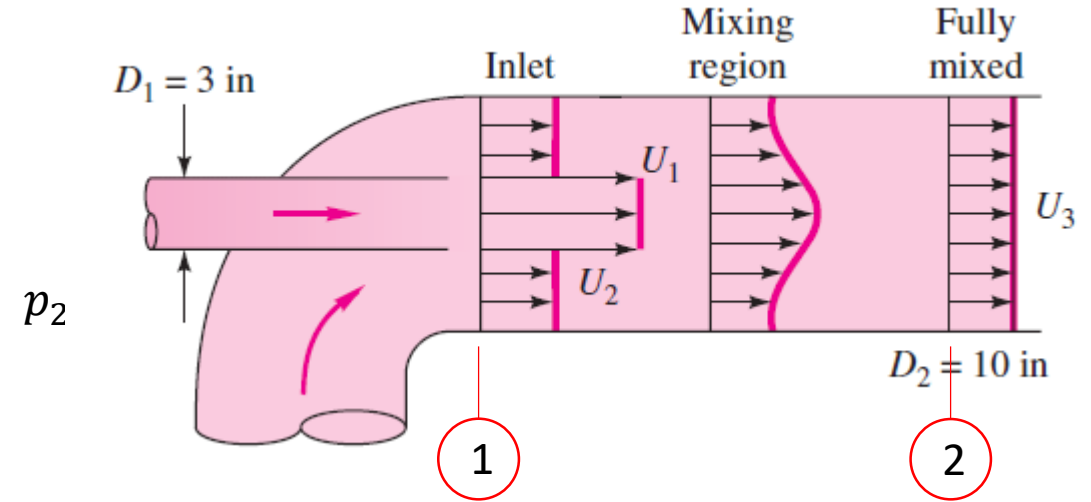
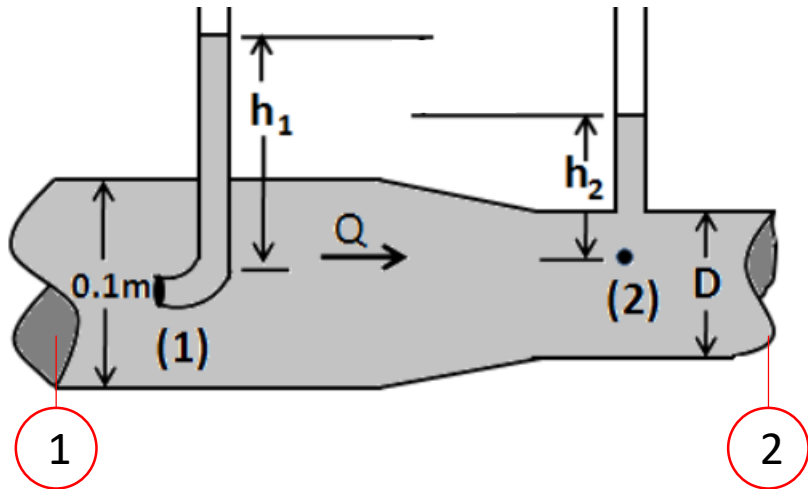
Ισοζύγιο μηχανικής ενέργειας

$$\dot{m} \left[\frac{1}{2} \Delta(u^2) + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho} + l_w \right] + \dot{W}_s = 0$$

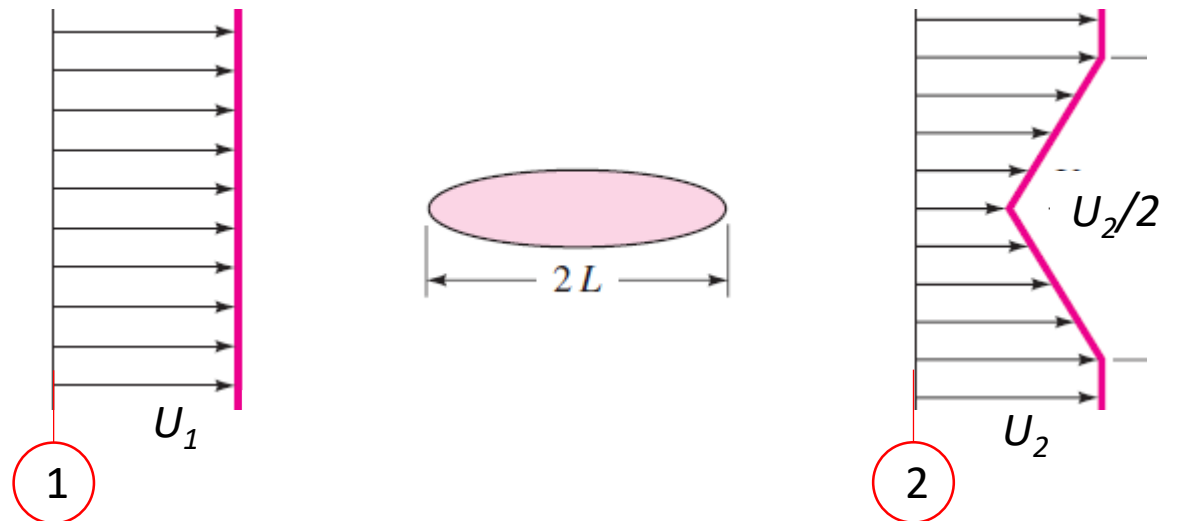
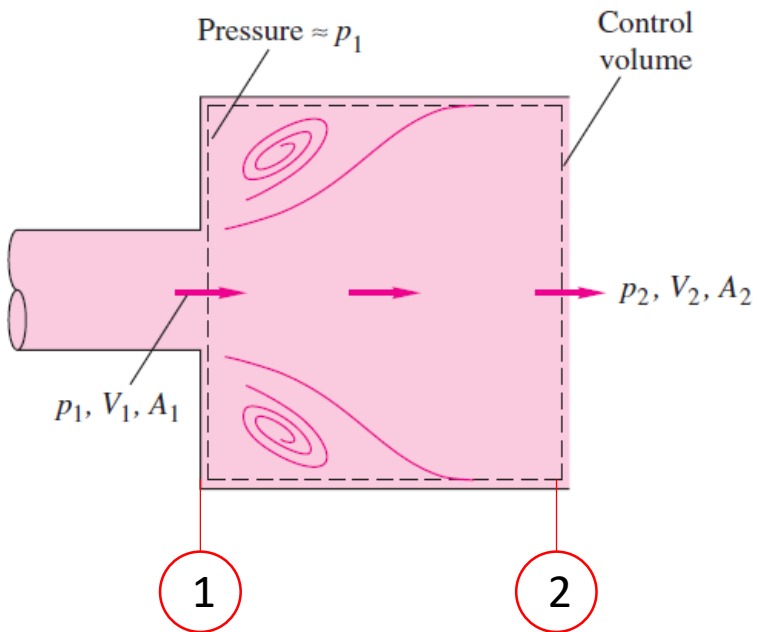
Άγνωστοι: p_2, l_w, F



Παραδείγματα εφαρμογής ολοκληρωτικών ισοζυγίων

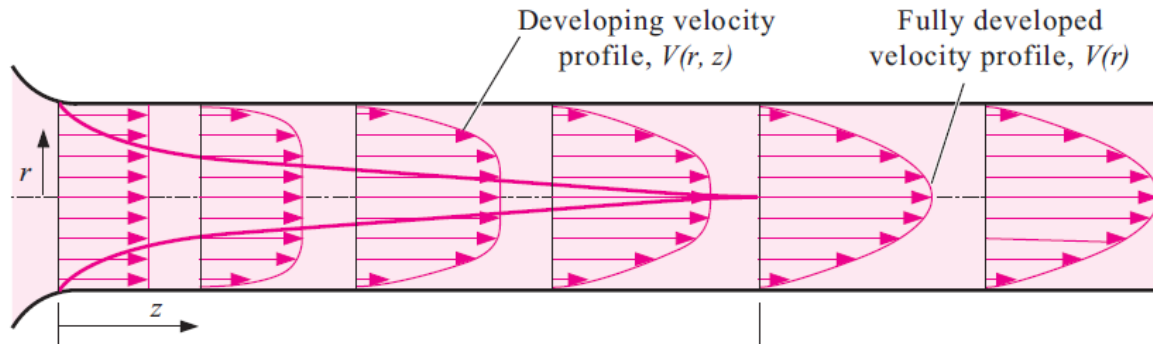


Άγνωστοι: p_2, l_w, F

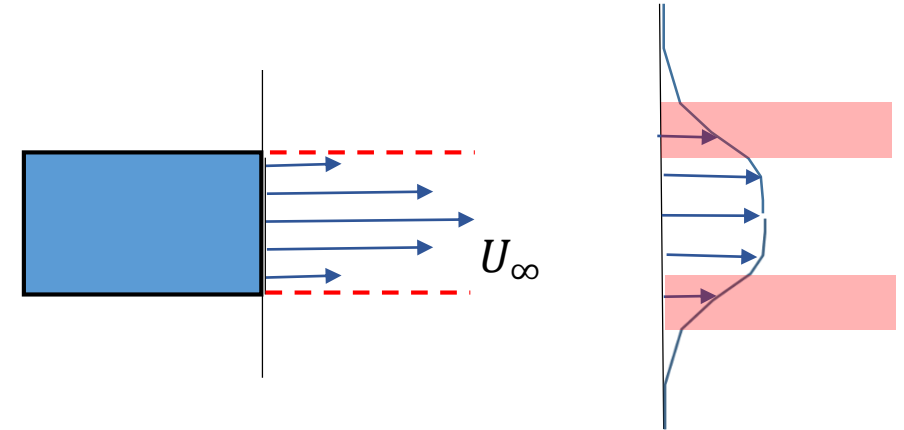


Η επίδραση του ιξώδους

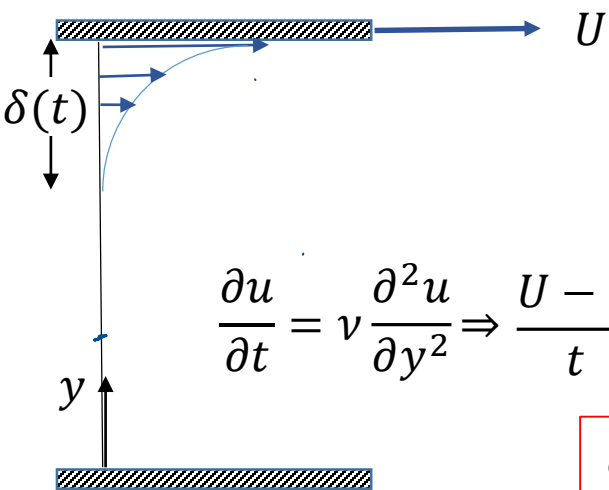
ΡΟΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟ: Η επίδραση του ιξώδους εκτείνεται σε όλο το πεδίο



ΡΟΗ ΔΕΣΜΗΣ-ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ



Βάθος διείσδυσης

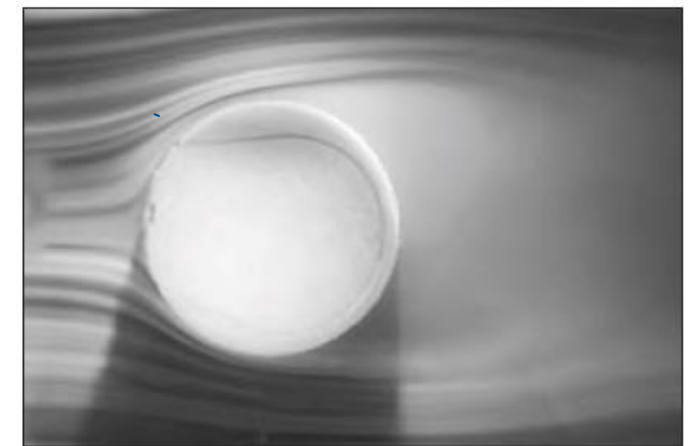
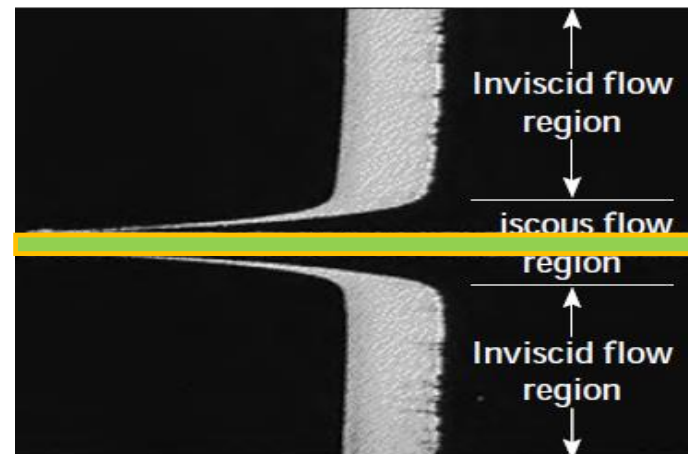


$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{U - 0}{t} \sim \nu \frac{U - 0}{\delta^2}$$

$$\delta(t) \sim \sqrt{\nu t}$$

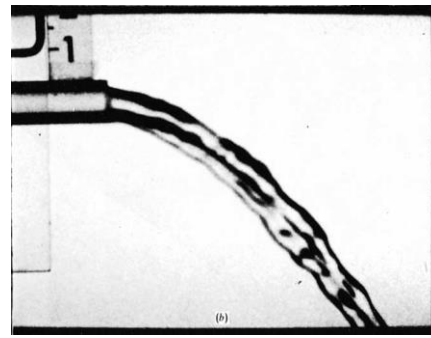
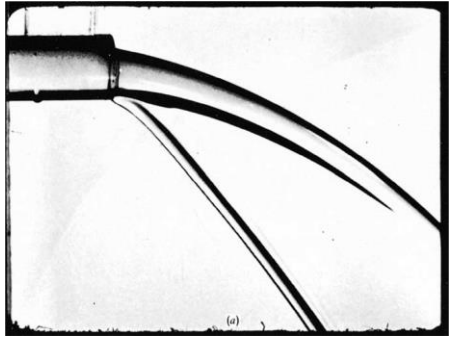
ΡΟΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΟΙΧΩΜΑ ΚΑΙ ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΦΑΙΡΑ

Το ιξώδες καθορίζει τη ροή κοντά στο τοίχωμα και πίσω από το σώμα



(Έχω την εξίσωση αλλά δεν μπορώ να την λύσω)

Ο αριθμός Reynolds και η μετάπτωση σε τύρβη



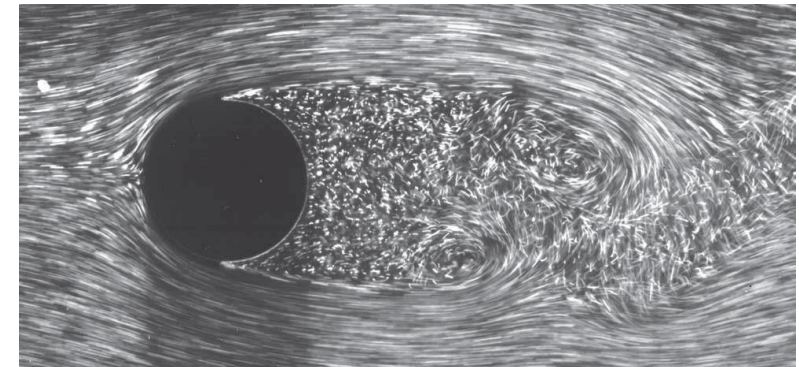
Αριθμός Reynolds

$$Re = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{u d}{\nu} = \frac{\text{(Αδρανειακές δυνάμεις)}}{\text{(Ιξώδεις δυνάμεις)}}$$

Οριακό στρώμα τοιχώματος	$Re \approx 3 - 5 \times 10^5$
Δέσμη-απόρρευμα	$Re \approx 10 - 100$
Ροή σε αγωγό	$Re \approx 2 - 100 \times 10^3$
Ροή γύρω από κύλινδρο	$Re \approx 5, 40, 200, 300000$

Θέματα έρευνας

- Εξέλιξη της ροής μέσω μίας (υπο-κρίσιμης) ή περισσότερων (υπερ-κρίσιμων) υδροδυναμικών ασταθειών
- Γραμμική και ασθενώς μη-γραμμική θεωρία
- Μεταβατική ενίσχυση διαταραχών (nonmodal growth)
- Δυναμικά συστήματα και χάος



Διανύσματα

$$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3 = u_i \underline{e}_i$$

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_i \underline{e}_i) \cdot (b_j \underline{e}_j)$$

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$a_i \delta_{ij} = a_j$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_i b_i$$

Σύμβαση επαναλαμβανόμενων δεικτών

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_i \underline{e}_i) \times (b_j \underline{e}_j)$$

$$\underline{e}_i \times \underline{e}_j = \varepsilon_{ijk} \underline{e}_k$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & i = j \text{ or } j = k \text{ or } i = k \\ +1, & ijk = 123 \text{ or } 231 \text{ or } 312 \\ -1, & ijk = 132 \text{ or } 213 \text{ or } 321 \end{cases}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \underline{e}_k$$

Τανυστής 2^{ης} τάξης

$$\underline{\underline{T}} = \tau_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j \quad \underline{a} \cdot \underline{\underline{T}} = (a_i \underline{e}_i) \cdot (\tau_{jk} \underline{e}_j \underline{e}_k) = a_j \tau_{jk} \underline{e}_k$$

Χρήσιμη ιδιότητα: $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$

Διαφορικοί τελεστές

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i$$

Κλίση

$$\underline{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \underline{e}_i$$

$$\underline{\nabla} \underline{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_i \underline{e}_j$$

Απόκλιση

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{T}} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \underline{e}_j$$

Στροφή

$$\underline{\nabla} \times \underline{u} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_k$$

Τελεστής Laplace

$$\nabla^2 \varphi = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i}$$

Διαφορική μεταβολή

$$\varphi(x_i, t) \Rightarrow d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i$$

Κινηματική Ροών

Περιγραφή κίνησης ρευστού

Περιγραφή κατά Euler: $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, t)$, $p = p(\underline{x}, t)$

και κατά Lagrange: $\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}_0, t)$, $\underline{x}(t = 0) = \underline{X}_0$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) \equiv \underline{u}(\underline{X}_0, t)$$

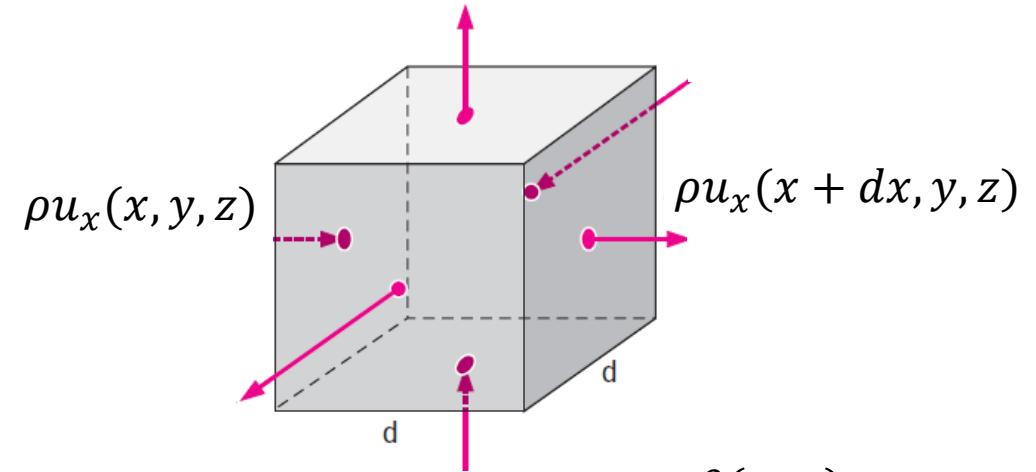
Υλική ή σωματιδιακή παράγωγος

$$\begin{aligned} T = T(\underline{x}, t) \rightarrow dT &= \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x_i} dx_i \end{aligned}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T$$

(Σύμβαση επαναλαμβανόμενων δεικτών)

Ισοζύγιο μάζας (εξίσωση συνέχειας)



$$\rho u_x(x + dx, y, z) dydz = \rho u_x(x, y, z) dydz + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx dydz$$

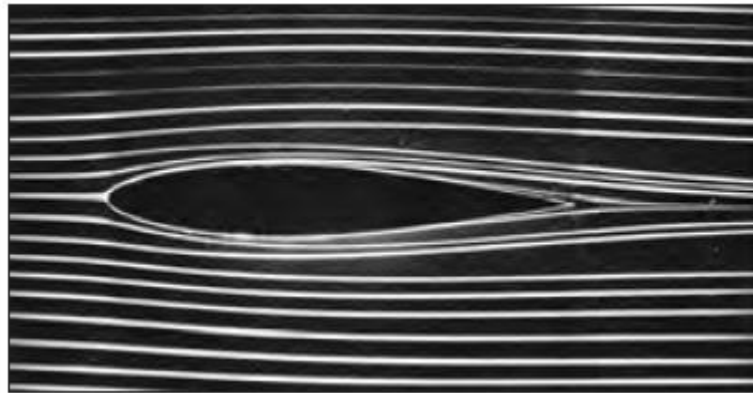
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) dx dy dz = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \rho + \rho (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) = 0 \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) = 0$$

$$(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt}$$

Ρυθμός μεταβολής όγκου
σωματιδίου ρευστού

Ροϊκές γραμμές: στιγμιαία απεικόνιση πεδίου ροής
(φωτογράφιση με υψηλή ταχύτητα)



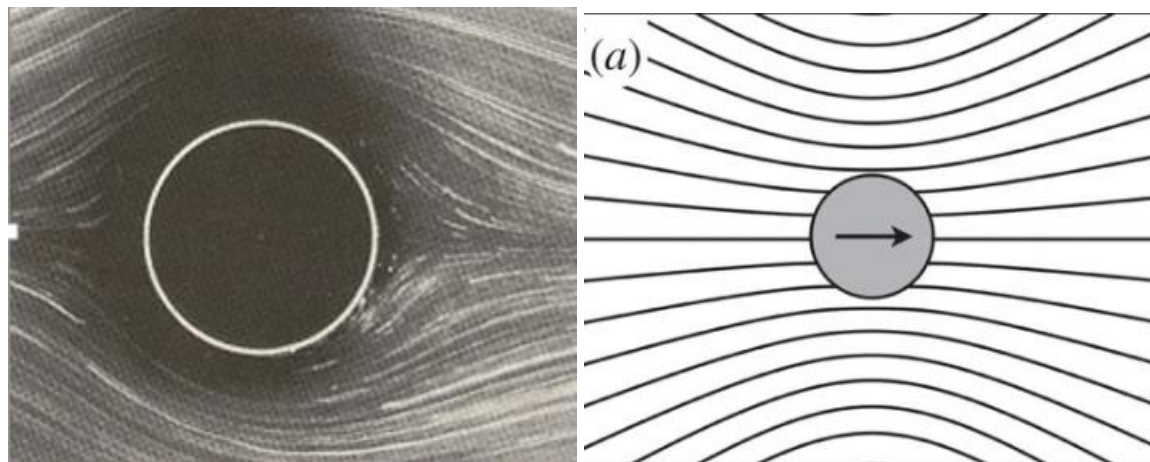
$$d\underline{x} \parallel \underline{u} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

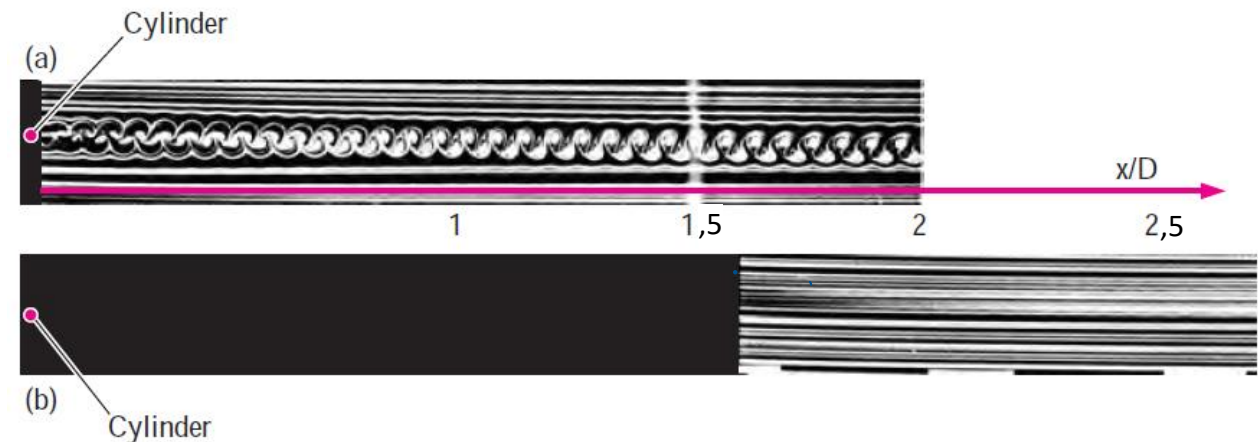
Τροχιές σωματιδίων: ολοκλήρωση χρονικής εξέλιξης
(φωτογράφιση με ανοικτό διάφραγμα)



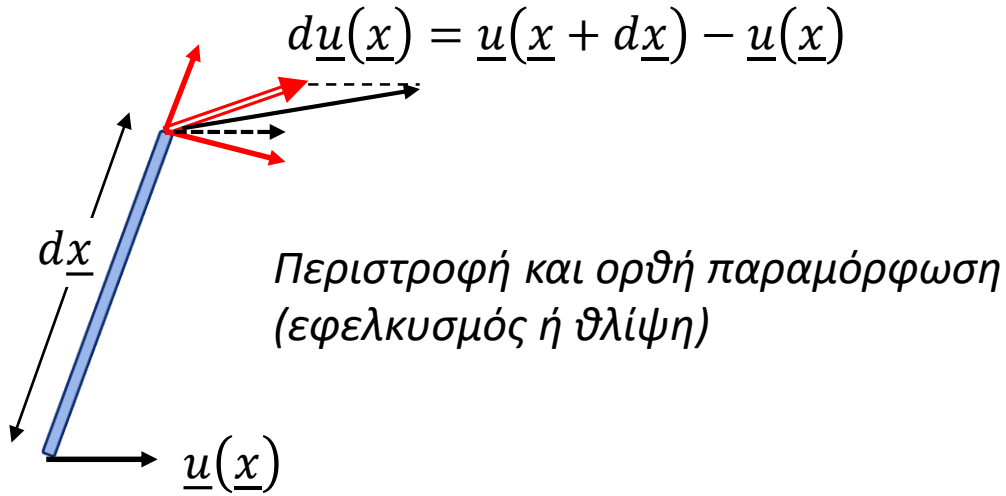
Ροϊκές γραμμές: κύλινδρος σε έρπουσα ροή



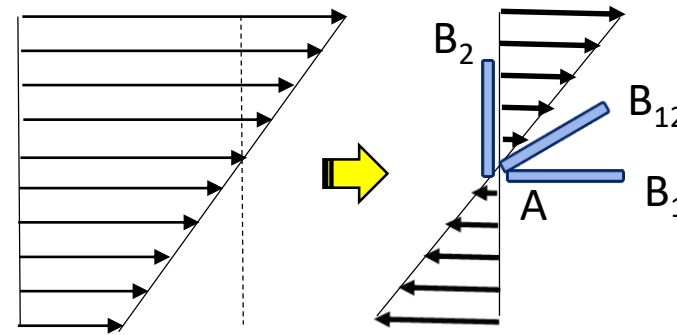
Γραμμές ιχνηθέτη: έγχυση χρωστικής



Ανάλυση κίνησης ρευστού



Ροή Couette (απλή διάτμηση-το όριο κάθε πεδίου ταχύτητας)

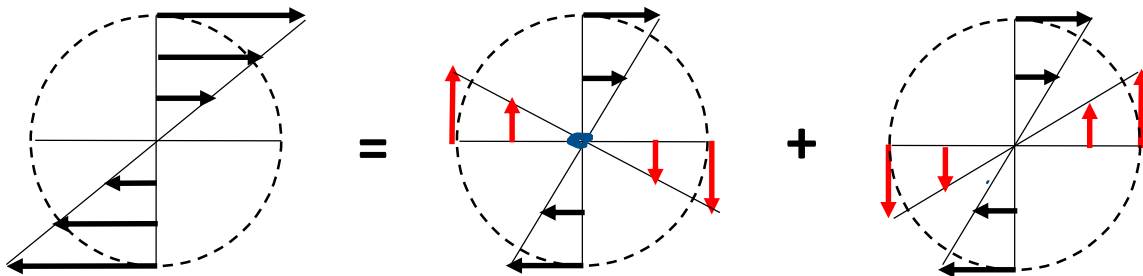


AB_1 : μετατόπιση
 AB_2 : περιστροφή
 AB_{12} : επιμήκυνση
 και περιστροφή

περιστροφή στερεού σώματος = μέση περιστροφή δύο ινών σε ορθή γωνία:

απλή παραμόρφωση = σχετική κίνηση - περιστροφή στερεού σώματος

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{AB_2} &= -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \Omega_{AB_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \Omega_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$



ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

ΑΠΛΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ

απλή παραμόρφωση $\xrightarrow{\text{ιξώδες}}$ εσωτερικές τάσεις

Μαθηματική περιγραφή σχετικής κίνησης ρευστού

$d\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}(\underline{x} + d\underline{x}) - \underline{u}(\underline{x})$
 $\left[d\underline{u} = du_1 \underline{e}_1 + du_2 \underline{e}_2 + du_3 \underline{e}_3 \quad du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \right]$

$d\underline{u} = du_i \underline{e}_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \underline{e}_i = \left[\underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{d_{ij}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j \underline{e}_i = d_{ij} dx_j \underline{e}_i + a_{ij} dx_j \underline{e}_i = \underline{\underline{D}} \cdot d\underline{x} + \underline{\underline{A}} \cdot d\underline{x}$

a_{ij} : Αντισυμμετρικός τανυστής στροφής. Αξονικό διάνυσμα: $\Omega_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} a_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} = \underline{\underline{\Omega}} \times \underline{b} \Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot d\underline{x} = \underline{\underline{\Omega}} \times d\underline{x}$ (περιστροφή στερεού σώματος με γωνιακή ταχύτητα Ω)

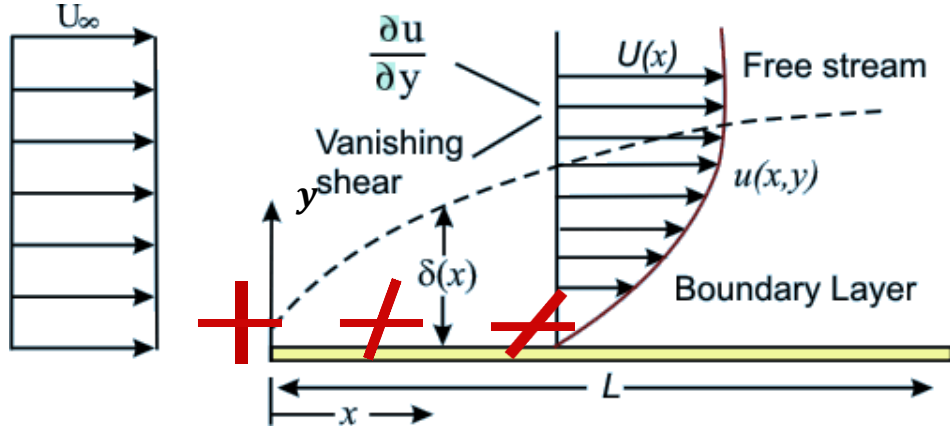
d_{ij} : Συμμετρικός τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης. Χαρακτηριστικές διευθύνσεις.

$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{n}_1 = \lambda_1 \underline{n}_1 \Rightarrow \underline{\underline{D}} \cdot (dx \underline{n}_1) = \lambda_1 dx \underline{n}_1 \Rightarrow \underline{\underline{D}} \cdot d\underline{x} = \lambda_1 d\underline{x}$ (απλή επιμήκυνση)

ΣΤΡΟΒΙΛΟΤΗΤΑ: $\underline{\underline{\omega}} = \underline{\nabla} \times \underline{u} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_k = 2\underline{\underline{\Omega}}$

π.χ. $\omega_3 = \varepsilon_{ij3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$

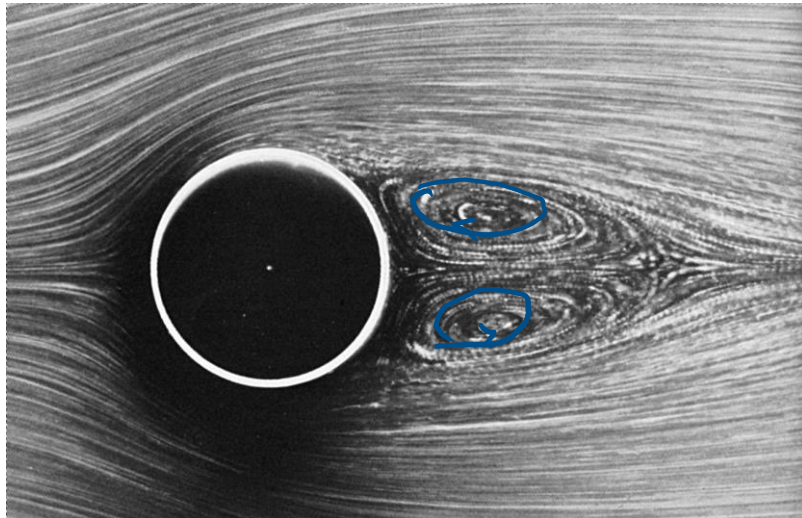
Δημιουργία στροβιλότητας



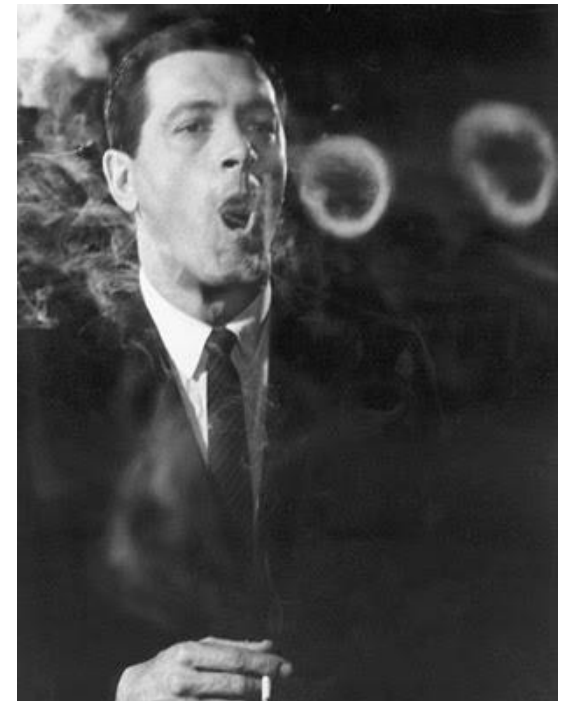
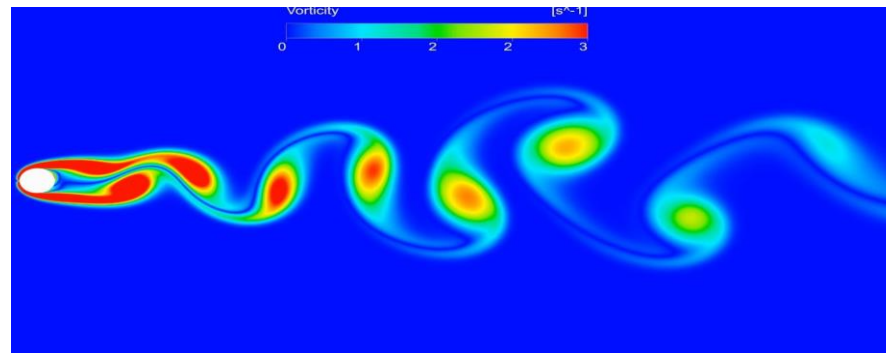
- Σωματίδια ρευστού κοντά στο τοίχωμα αποκτούν στροβιλότητα λόγω της συνοριακής συνθήκης μη-ολίσθησης
- Η στροβιλότητα μεταφέρεται με τη ροή και απλώνεται κάθετα στη ροή (διαχέεται με διαχυτότητα $\nu = \mu/\rho$). Ατριβείς ροές είναι συνήθως αστρόβιλες
- Ρευστό με στροβιλότητα συχνά αποκολλάται και σχηματίζει στροβίλους (περιοχές συγκεντρωμένης στροβιλότητας με κλειστές ροϊκές γραμμές)

Σχηματισμός στροβίλων

- Παραδείγματα: απόρευμα μη-αεροδυναμικών σωμάτων, δίνες vonKarman, smoke rings
<https://www.youtube.com/watch?v=3mULL6O6f38>
<https://www.youtube.com/watch?v=IDeGDFZSYo8>



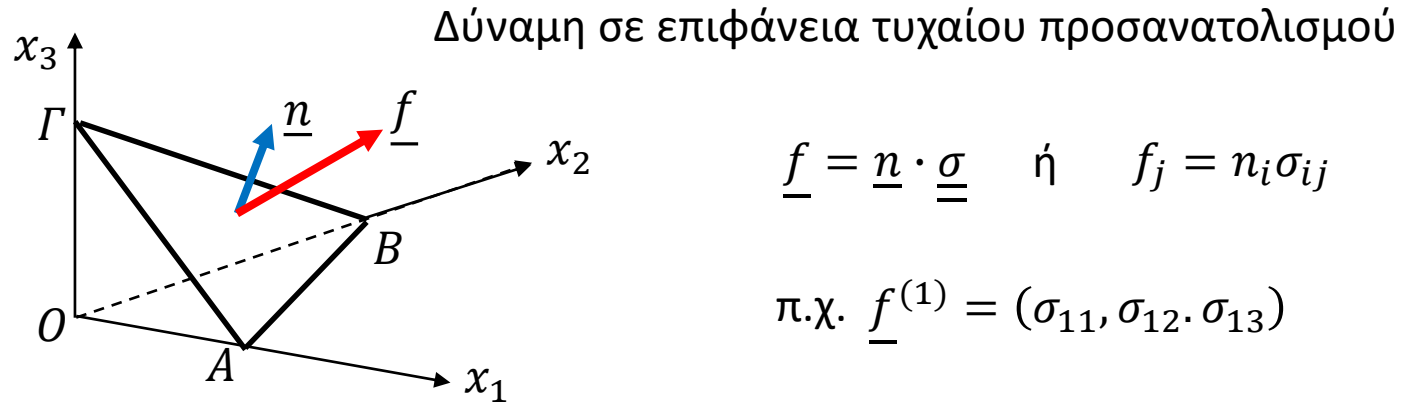
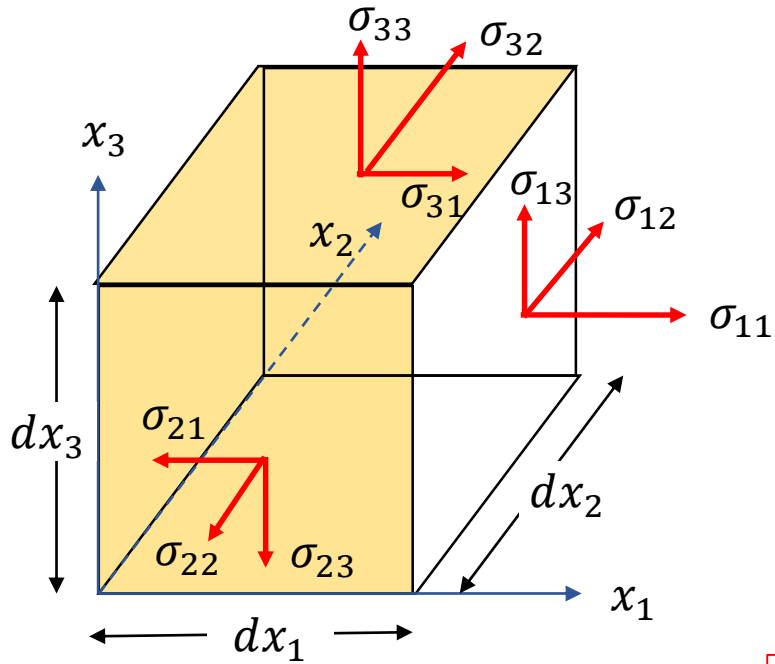
<https://www.youtube.com/watch?v=54Dm3IMwIL4> (Σχηματισμός «μανιταριού» σε θερμικό πλούμιο)
<https://www.youtube.com/watch?v=5YwnY0wPphA> (Αεροτομή σε απώλεια στήριξης)



Δυναμική Ροών

Ανάλυση εσωτερικών δυνάμεων στη ροή

Συνιστώσες τανυστή τάσης



$$\underline{f} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \quad \text{ή} \quad f_j = n_i \sigma_{ij}$$

$$\text{π.χ. } \underline{f}^{(1)} = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$$

Γενική καταστατική εξίσωση ρευστού

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \tau_{ii} = 0$$

Η ιξώδης τάση τ_{ij} σε ένα σημείο εξαρτάται από τη σχετική κίνηση σε μια μικρή γειτονία του σημείου και είναι ανεξάρτητη της μεταφοράς ή περιστροφής του συστήματος αναφοράς

Τανυστής ιξώδους τάσης

$$\tau_{ij} = F(d_{ij}) = \kappa_0 \delta_{ij} + \kappa_1 d_{ij} (+\kappa_2 d_{il} d_{lj})$$

$$\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2 = f(I_D, II_D, III_D) \quad (\text{αναλλοίωτες του τανυστή})$$

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$I_D = \text{tr}(\underline{\underline{D}}) = d_{ii} \quad II_D = \text{tr}(\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}) = d_{ij} d_{ij} \quad III_D = \det(\underline{\underline{D}})$$

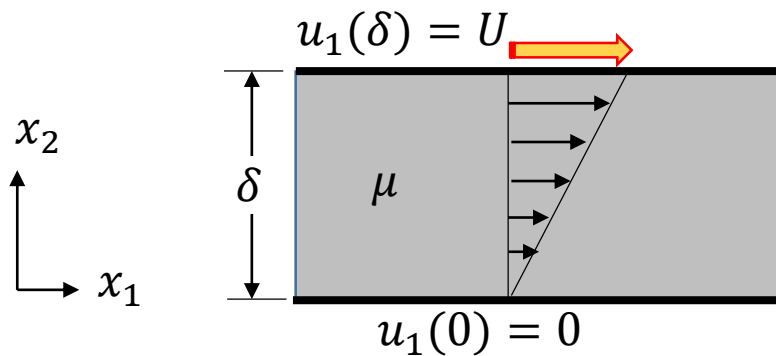
Ορθές/διατμητικές παραμορφώσεις προκαλούν -ή προκαλούνται από- αντίστοιχα ορθές/διατμητικές τάσεις.

$$\tau_{ij} = \kappa_0 \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \Rightarrow \kappa_0 = -\frac{2\mu}{3} d_{kk}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} - \frac{2\mu}{3} d_{kk} \delta_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

ασυμπίεστο

Ιξώδης διατμητική τάση

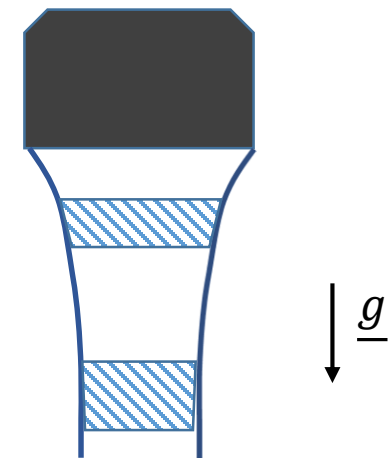


$$\tau_{21} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \mu \frac{(U - 0)}{\delta}$$

Ορισμός ιξώδους : $\mu [=] \text{ kg/m} \cdot \text{s}$



Ιξώδης ορθή τάση

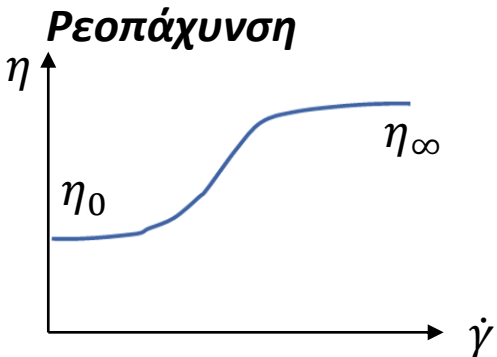
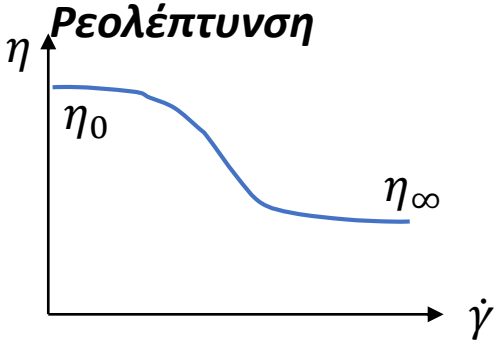


$$\tau_{22} = 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

Γενικευμένα Νευτωνικά ρευστά

$$\tau_{ij} = 2\eta(\dot{\gamma}) d_{ij}$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\text{II}_D} = \sqrt{d_{ij}d_{ij}} \text{ (ένταση διάτμησης)}$$



Rheology_Markovitz(NatlComFluidMech)

https://www.youtube.com/watch?v=Ol6bBB3zuGc&list=PL0EC6527BE871ABA3&index=3&feature=plpp_video

Μη-Νευτωνικά ρευστά (απόκριση σε διάτμηση)

Διάτμηση μη-Νευτωνικού ρευστού προκαλεί ορθές τάσεις

Ιξωδοπλαστική συμπεριφορά

$$\tau = \mu\dot{\gamma} + \tau_y$$

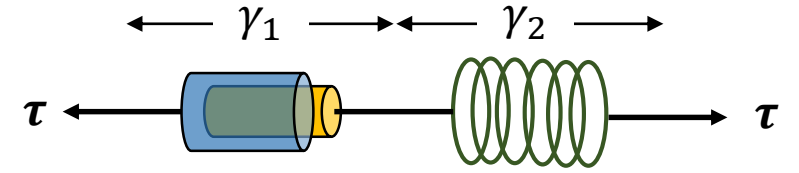
$$\tau \leq \tau_y \Rightarrow \dot{\gamma} = 0$$

Ιξωδοελαστική συμπεριφορά (μοντέλο Maxwell)

$$\tau = \mu\dot{\gamma}_1$$

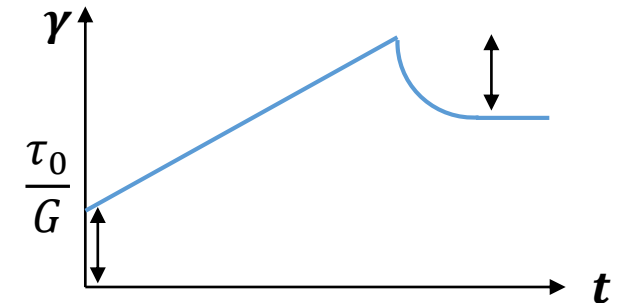
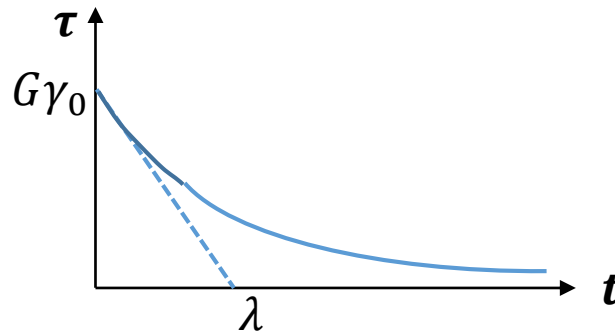
$$\tau = G\gamma_2 \quad (\dot{\gamma}_2 = G\dot{\gamma}_1)$$

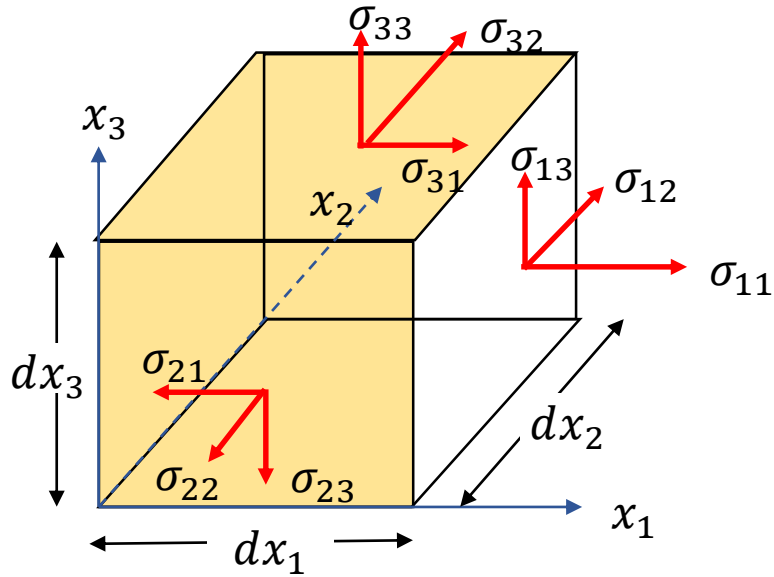
$$\tau + \lambda\dot{\tau} = \mu\dot{\gamma}$$



$\lambda = \mu/G$: χρόνος χαλάρωσης

$$De = \lambda/t_{flow}$$





$$\sigma_{1j}(\underline{x} + dx_1 \underline{e}_1) = \sigma_{1j}(\underline{x}) + \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1} dx_1 \Rightarrow \rho \frac{Du_j}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho g_j \quad (\text{εξίσωση Cauchy})$$

Ασυμπίεστο Νευτώνικό ρευστό

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho \frac{Du_j}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} \right) + \rho g_j$$

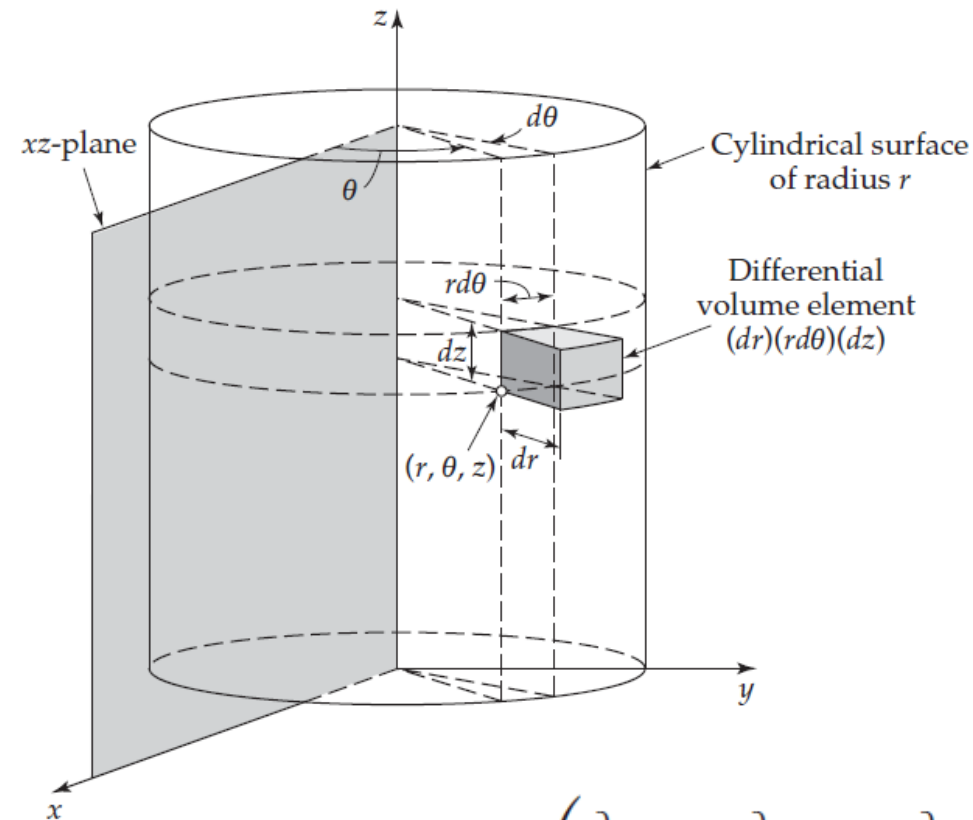
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Εξισώσεις συνέχειας και Navier-Stokes σε κυλινδρικές συντεταγμένες



Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Εξισώσεις r, θ, z ορμής

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Εξισώσεις συνέχειας και Navier-Stokes σε σφαιρικές συντεταγμένες

Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0$$

Εξισώσεις r, θ, φ ορμής

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

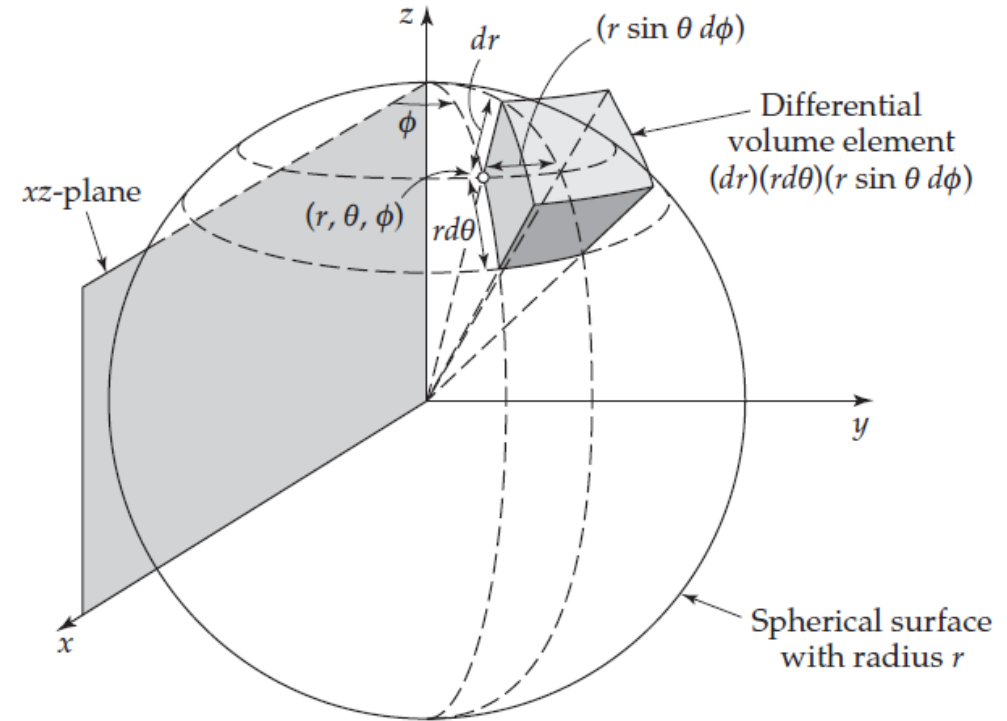
$$+ \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 v_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta - v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r + v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi}$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] + \rho g_\phi$$



Χαρακτηριστικές κλίμακες-Ανάλυση τάξης μεγέθους

ή $\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \rho \underline{g}$ (Εξίσωση Navier-Stokes)

αδρανειακές δυνάμεις (επιτάχυνση)

δυνάμεις πίεσης

Ιξώδεις δυνάμεις

Βαρυτικές (εξωτερικές) δυνάμεις

Σύγκριση αδρανειακών με ιξώδεις δυνάμεις

$$\frac{|\rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}|}{|\mu \nabla^2 \underline{u}|} \sim \frac{\rho U(U/L)}{\mu U/L^2} = \frac{\rho UL}{\mu} = \mathbf{Re}$$

Σύγκριση αδρανειακών με βαρυτικές δυνάμεις
(για ροές με ελεύθερη επιφάνεια)

$$\frac{|\rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}|}{|\rho \underline{g}|} \sim \frac{\rho U(U/L)}{\rho g} = \frac{U^2}{gL} = \mathbf{Fr}$$

Η πίεση εξισορροπεί την κυρίαρχη δύναμη

$$\mathbf{Re} \gg 1 \Rightarrow \Delta p \sim \rho U^2$$

$$\mathbf{Re} \ll 1 \Rightarrow \Delta p \sim \mu U/L$$

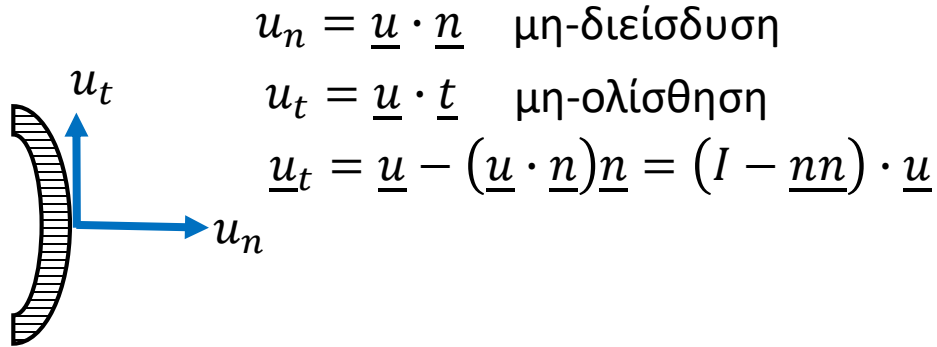
Ανάλυση τάξης μεγέθους

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\Delta u}{\Delta x} \sim \frac{U - 0}{L - 0} \sim \frac{U}{L}$$

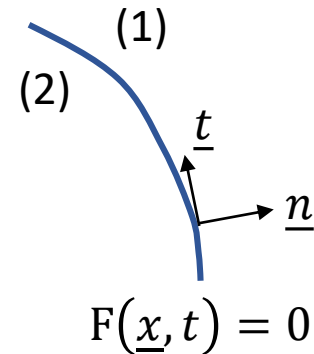
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \sim \frac{(\Delta u / \Delta x) - 0}{\Delta x} \sim \frac{\Delta u}{(\Delta x)^2} \sim \frac{U}{L^2}$$

Συνοριακές συνθήκες

ΣΤΕΡΕΟ ΤΟΙΧΩΜΑ



ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΥΓΡΟΥ-ΑΕΡΙΟΥ



$$u_n^{(1)} = u_n^{(2)}$$

$$u_t^{(1)} = u_t^{(2)}$$

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{u}^{(i)} \cdot \underline{\nabla} F = 0, i = 1, 2$$

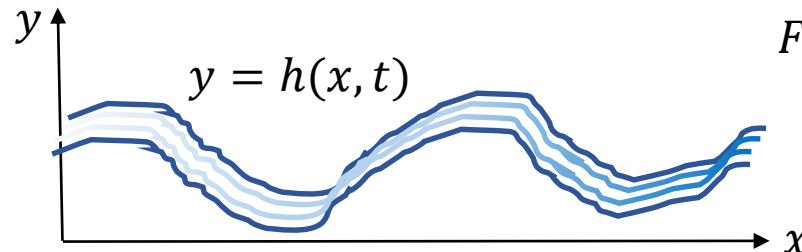
Συνθήκη ολίσθησης σε τοίχωμα

- Ατριβές ρευστό
- Αραιά αέρια (μοριακή ολίσθηση)
- Μικροφουσαλίδες
- Ηλεκτρικό πεδίο (ζ-δυναμικό τοιχωμάτων)

$$u_{slip} = \lambda \left(\frac{du}{dy} \right)_w$$

Παράδειγμα: Διδιάστατα κύματα στο νερό

Ένα σωματίδιο στην ελεύθερη επιφάνεια κινείται παραμένοντας πάντα στην επιφάνεια, άρα $DF/Dt = 0$



$$F(\underline{x}, t) = h(x, t) - y \Rightarrow$$

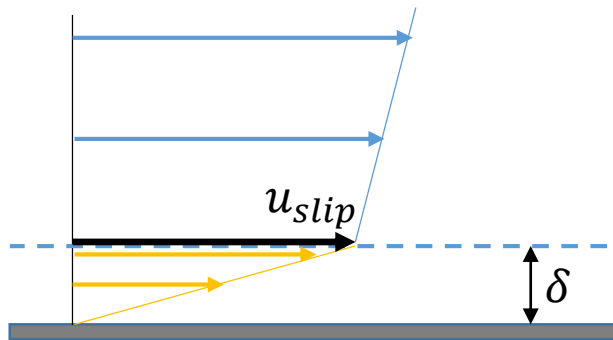
$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v$$

Δυναμικές συνοριακές συνθήκες

ΣΤΕΡΕΟ ΤΟΙΧΩΜΑ Οι τάσεις παραλαμβάνονται από το στερεό υλικό

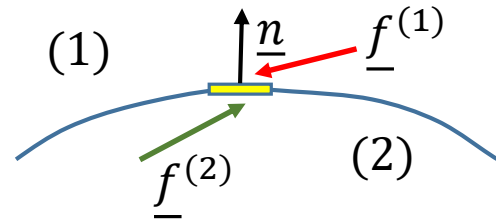
ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΥΓΡΟΥ-ΑΕΡΙΟΥ Οι δυνάμεις ισορροπούν (μηδενική μάζα στη διεπιφάνεια)

Μικροφυσολίδες στο τοίχωμα



$$\mu_w \left(\frac{du}{dy} \right)_w = \mu_{air} \frac{u_{slip}}{\delta} \Rightarrow$$

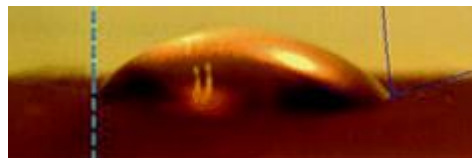
$$u_{slip} = \left(\frac{\mu_w \delta}{\mu_{air}} \right) \left(\frac{du}{dy} \right)_w$$



$$\underline{f}^{(1)} = \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} \cdot \underline{n}$$

$$\underline{f}^{(2)} = \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \cdot (-\underline{n})$$

Η σημασία της επιφανειακής τάσης



$$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} \cdot \underline{n} + \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \cdot (-\underline{n}) + \gamma(-2\kappa_m \underline{n}) + \underline{\nabla}_S \gamma = 0$$

γ : επιφανειακή τάση

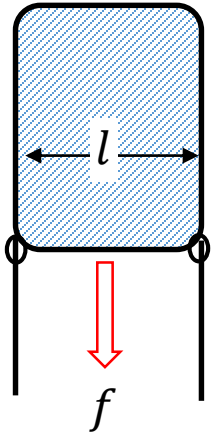
κ_m : μέση καμπυλότητα διεπιφάνειας

$\gamma(-2\kappa_m \underline{n})$: κάθετη δύναμη

$\underline{\nabla}_S \gamma$: τάση Marangoni

Επιφανειακή τάση-τριχοειδής πίεση

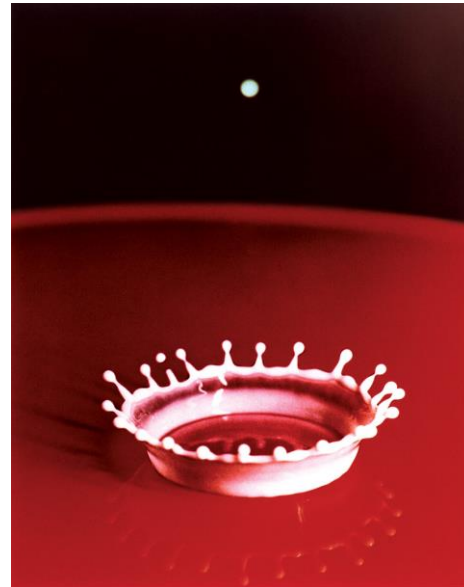
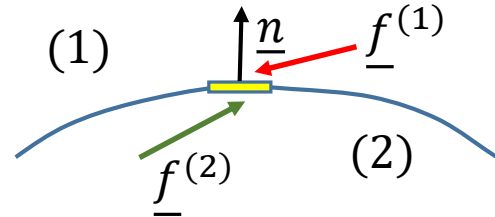
Ορισμός επιφανειακής τάσης



$$f = \gamma \cdot 2l \Rightarrow \gamma = \frac{f}{2l}$$

$$\begin{aligned} \delta W_s &= f dx = (\gamma \cdot 2l) dx \\ &= \gamma dA \Rightarrow \gamma = \frac{\delta W_s}{\delta A} \end{aligned}$$

γ : ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας

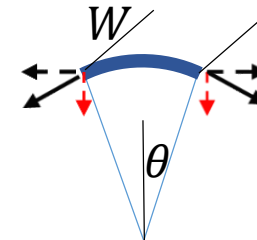


Σφαιρική σταγόνα ή φυσαλίδα

$$P_{in} - P_{out} = \frac{2\gamma}{R}$$

Ισορροπία χωρίς ροή

$$\frac{\underline{\sigma}^{(1)} \cdot \underline{n}}{-p_1 \underline{n}} + \frac{\underline{\sigma}^{(2)} \cdot (-\underline{n})}{p_2 \underline{n}} + \gamma(-2\kappa_m \underline{n}) + \underline{\nabla}_s \gamma = 0$$

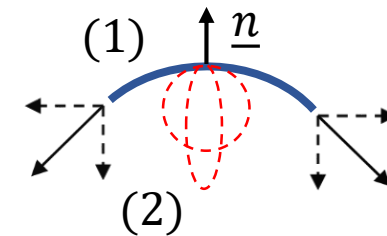


Καμπυλότητα σε μία διάσταση

$$2(\gamma W \sin \theta) = \Delta p (W \cdot 2\theta R)$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{\gamma}{R} = \kappa \gamma$$

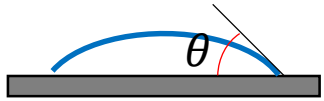
Μέση καμπυλότητα



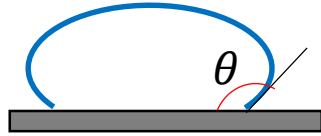
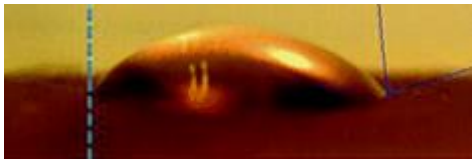
$$2\kappa_m = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

https://www.youtube.com/watch?v=MUImkSnrAzM&list=PL0EC6527BE871ABA3&index=4&feature=plpp_video

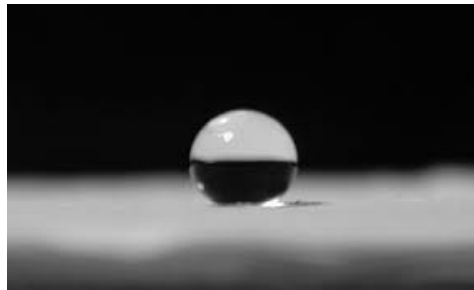
ΔΙΑΒΡΟΧΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΑΠΟ ΥΓΡΟ



Διαβρεχόμενη επιφάνεια

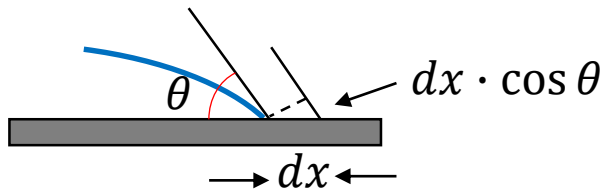


Μη-διαβρεχόμενη επιφάνεια



Γωνία επαφής

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{SL}}{\gamma}$$



$$dE = (\gamma_{SL} - \gamma_{SV})2\pi R \cdot dx + \gamma 2\pi R dx \cdot \cos \theta = 0$$

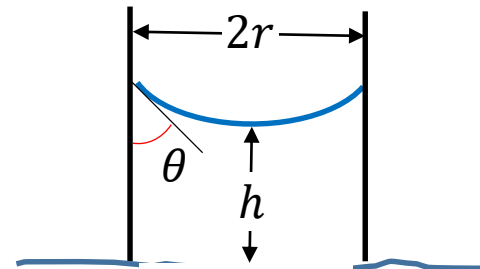
$$S = (\gamma_{SV} - \gamma_{SL}) - \gamma$$

$S \geq 0$: τέλεια διαβροχή

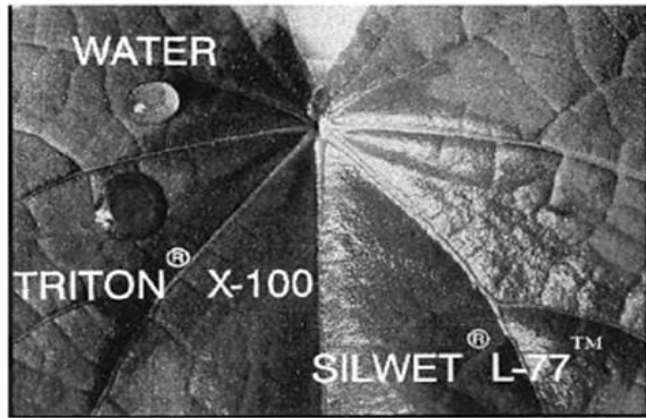
$S < 0$: μερική διαβροχή



ΤΡΙΧΟΕΙΔΗΣ ΑΝΥΨΩΣΗ ΥΓΡΟΥ



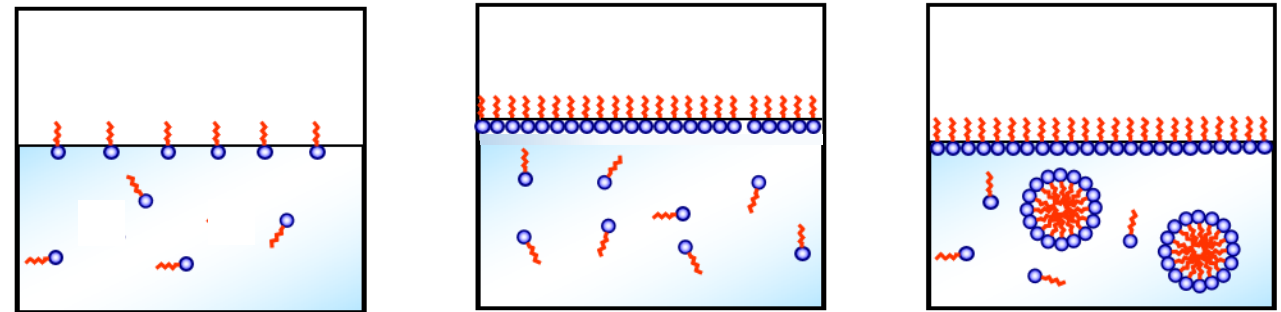
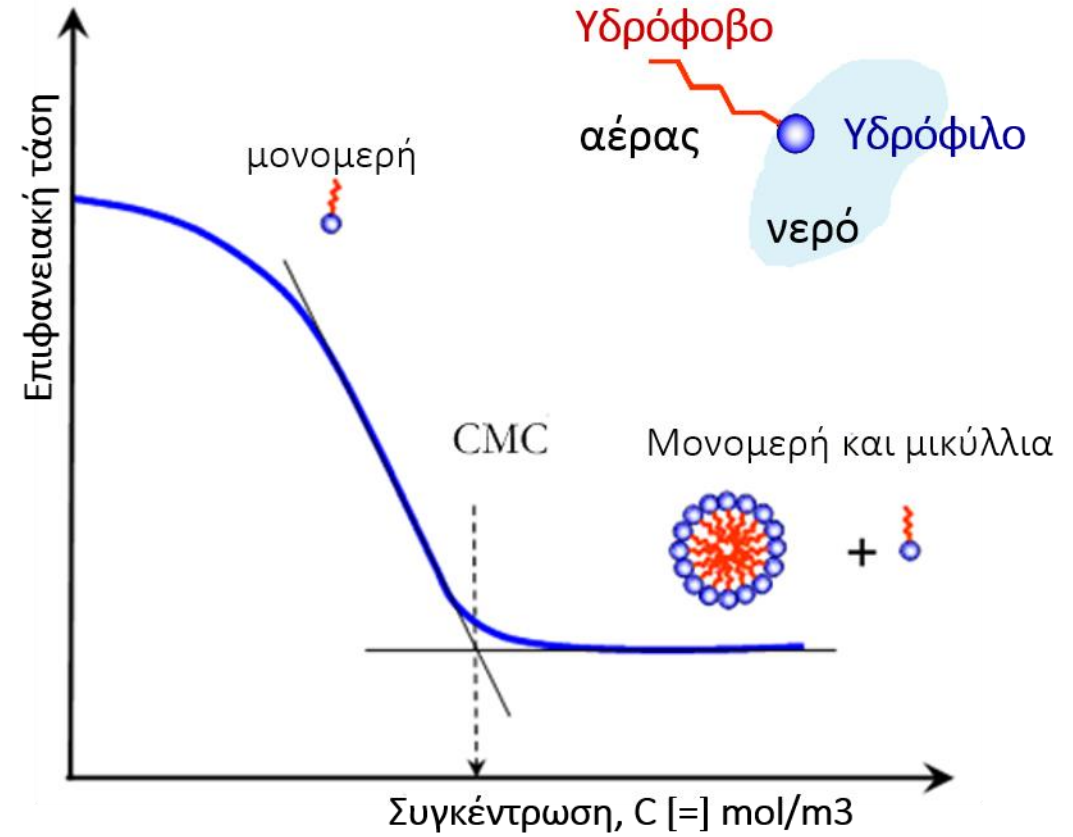
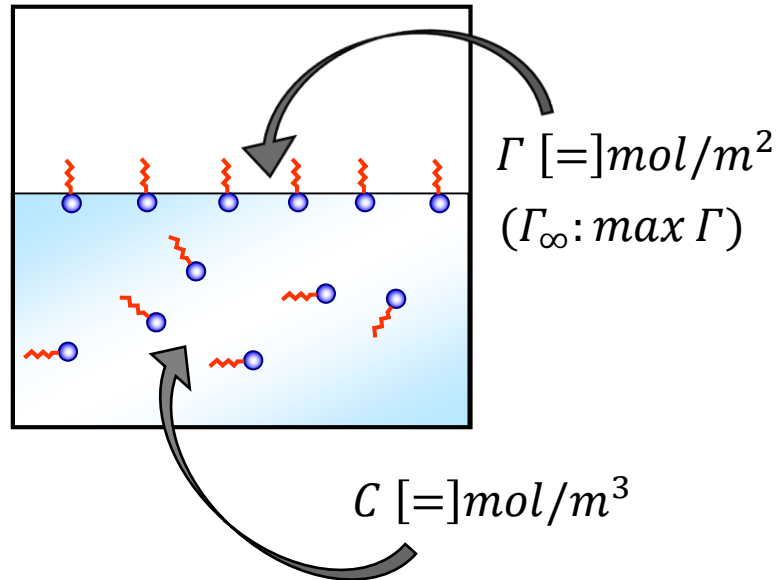
$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{rg(\rho_l - \rho_v)}$$



$$\gamma = \gamma(\Gamma)$$

$$\Gamma \uparrow \Rightarrow \gamma \downarrow$$

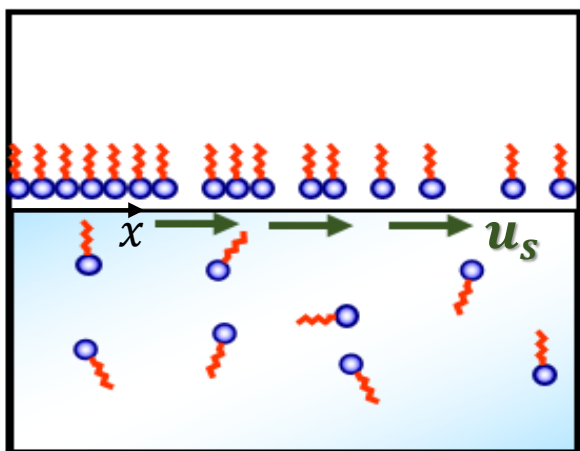
$$k_a C (\Gamma_\infty - \Gamma) = k_d \Gamma$$



$$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} \cdot \underline{n} + \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \cdot (-\underline{n}) + \gamma(-2\kappa_m \underline{n}) + \underline{\nabla}_s \gamma = 0$$

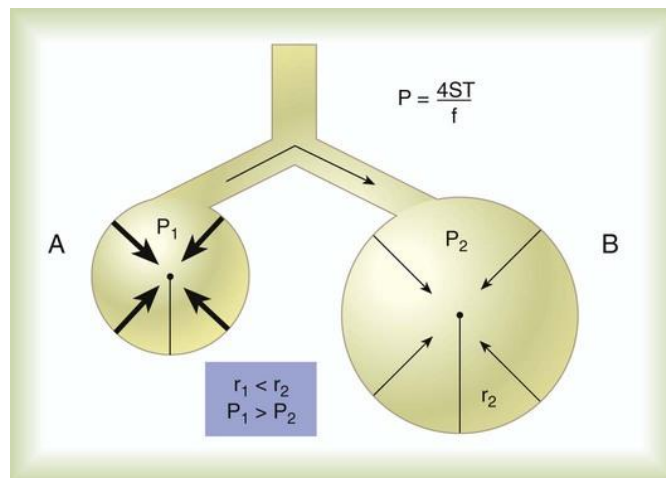
Δύο πηγές σχηματισμού τάσεων Marangoni

$$\gamma = \gamma(\Gamma, T) : \Gamma \uparrow \Rightarrow \gamma \downarrow \text{ or } T \uparrow \Rightarrow \gamma \downarrow \quad \longrightarrow$$

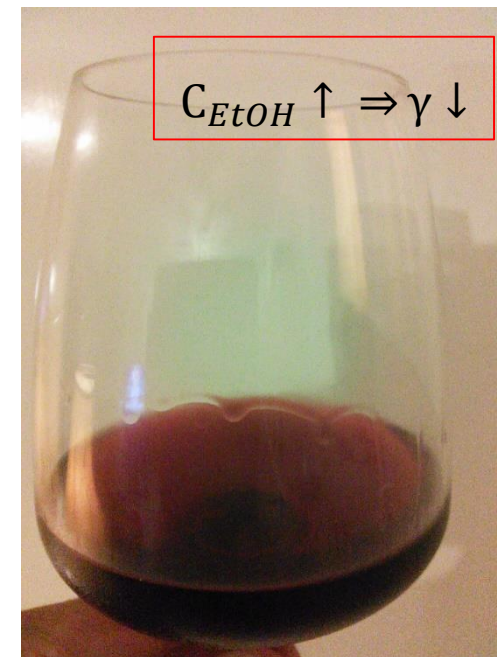


$$\begin{aligned} \gamma &\longleftarrow \overbrace{\hspace{2cm}}^{dx} \longrightarrow \gamma + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) dx \\ &= \gamma + \left(\frac{d\gamma}{d\Gamma}\right) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right) dx \end{aligned}$$

Πνευμονικές κυψελίδες



Το κρασί που δακρύζει



<https://www.youtube.com/watch?v=FeUdsyRZdTs>

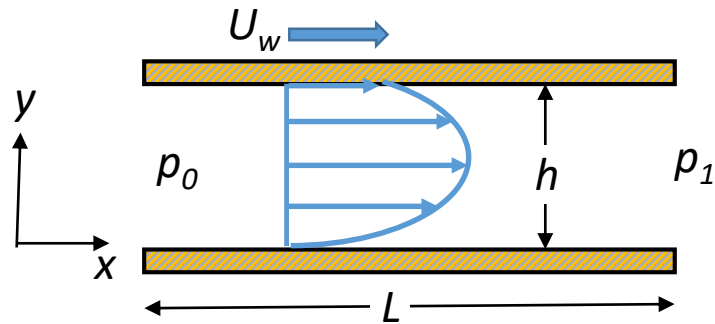
Ευθύγραμμες ροές και υδραυλικά δίκτυα

The art of the engineer (Richard Feynman)

We know what physical laws mean. We have the mathematical tools to derive exact solutions for a few simple situations. To combine the two in order to estimate precisely enough what will happen in a complex situation is the art of the engineer. This frequently involves the ability to know which simple situation (from the solvable ones) best approaches the real-life problem faced.

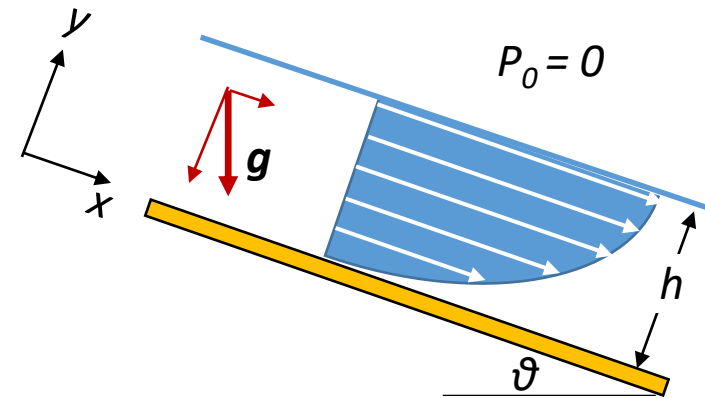
$$\underline{u}(x, y, z) = (u_x, 0, 0) \quad (\nabla \cdot \underline{u}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow u_x(x, y, z) = u_x(y)$$

Ροή Couette-Poiseuille σε κανάλι



Ισοζύγια;
Συνοριακές συνθήκες;

Βαρυτική ροή υγρού υμένα



$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} \\ \frac{dp}{dx} &= \frac{p_1 - p_0}{L} = -\frac{\Delta P}{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_x(y) = U_w \frac{y}{h} + \frac{\Delta P}{2\mu L} y(h - y)$$

$$g_y = -g \cos\theta \Rightarrow p(x, y) = \rho g \cos\theta (h - y)$$

$$g_x = g \sin\theta \Rightarrow u_x(y) = \frac{\rho g \sin\theta}{2\mu} y(2h - y)$$

$$V = \frac{\rho g \sin\theta h^2}{3\mu} = \frac{2}{3} u_x(h), \quad Re = \frac{Vh}{\nu} = \frac{\rho g \sin\theta h^3}{3\nu^2}$$

Μονοδιάστατη ροή

$$(\nabla \cdot \underline{u}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

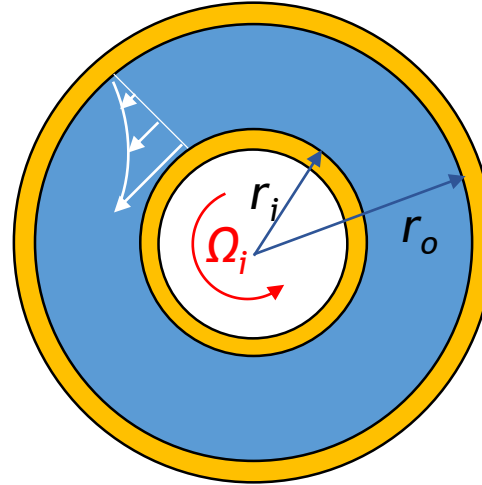
Συμμετρία ως προς ϑ

$$u_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{u}(r, \theta, z) = (0, u_\theta, 0) \\ u_\theta(r, \theta, z) = u_\theta(r) \end{cases}$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) \right) \right] \Rightarrow u_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

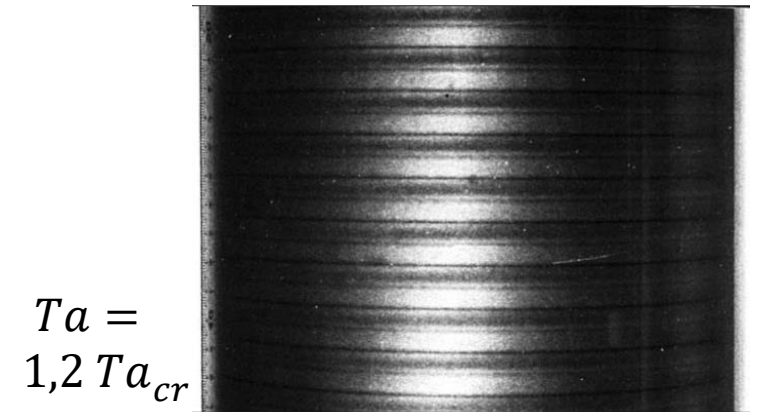
Συμμετρία ως προς ϑ

$$\left. \begin{array}{l} u_\theta(r_i) = r_i \Omega_i \\ u_\theta(r_o) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u_\theta = r_i \Omega_i \frac{\left(\frac{r_o}{r} - \frac{r}{r_o} \right)}{\left(\frac{r_o}{r_i} - \frac{r_i}{r_o} \right)}$$

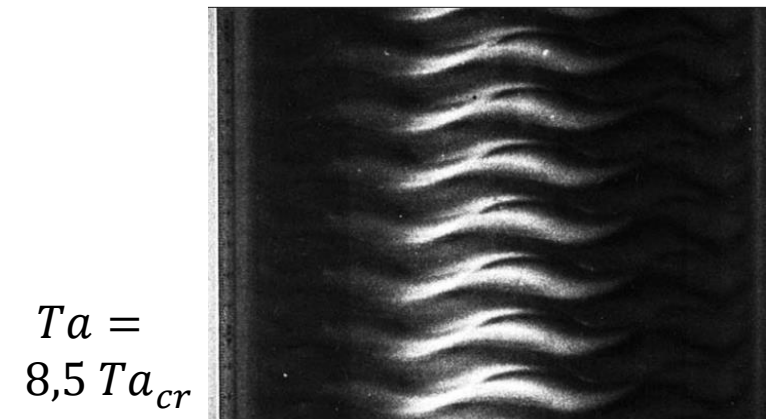


Αστάθεια Couette-Taylor

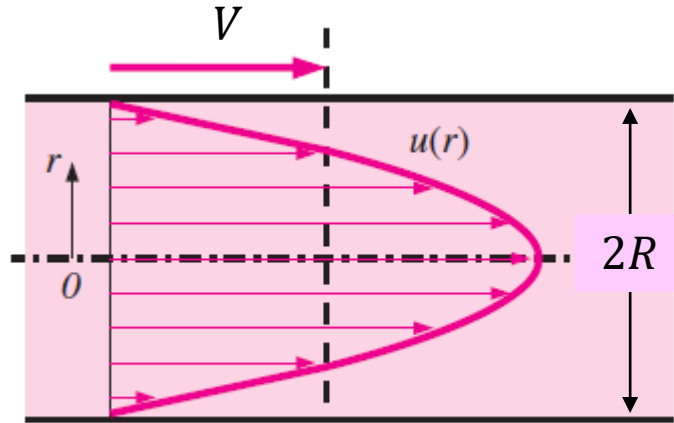
$$Ta_{cr} = \frac{r_i (r_o - r_i)^3 \Omega_i^2}{\nu^2} \approx 1700$$



$Ta = 1,2 Ta_{cr}$



$Ta = 8,5 Ta_{cr}$



Laminar flow

$$\underline{u}(r, \theta, z) = (0, 0, u_z)$$

Εξίσωση συνέχειας

$$(\nabla \cdot \underline{u}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow u_z(r, \theta, z) = u_z(r)$$

Εξίσωση Navier-Stokes σε κυλινδρικές συντεταγμένες (z-ορμή)

$$0 = -\frac{dp}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right), \quad \frac{dp}{dz} = \text{const} = -\frac{\Delta P}{L} \Rightarrow u_z(r) = \frac{\Delta P}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

Συνοριακές συνθήκες $u_z(R) = 0, \left(\frac{du_z}{dr} \right)_{r=0} = 0$

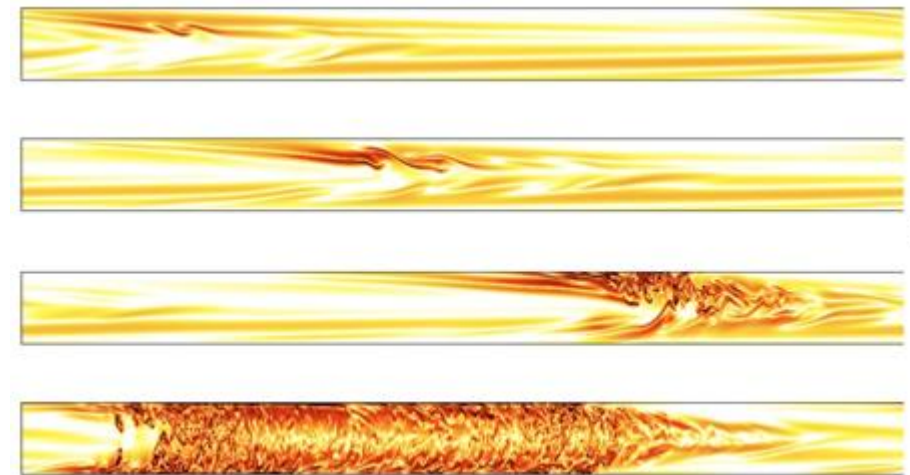
$$Q = V(\pi R^2) = \int_0^R u_z(r) 2\pi r dr \Rightarrow$$

$$V = \frac{\Delta P R^2}{8\mu L} = \frac{u_z(0)}{2} \Rightarrow$$

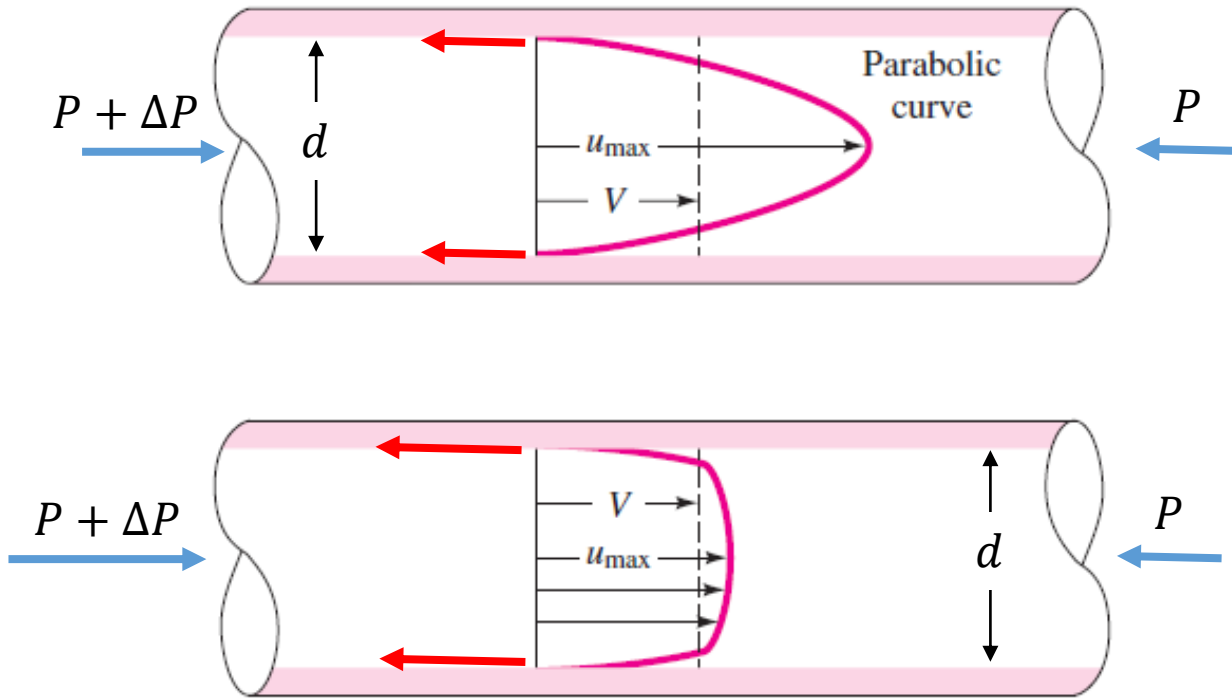
$$\Delta P = \frac{8\mu L V}{R^2}$$

Αστάθεια και τύρβη

(Turbulent puffs and slugs)



Συντελεστής τριβής και πτώση πίεσης σε αγωγό

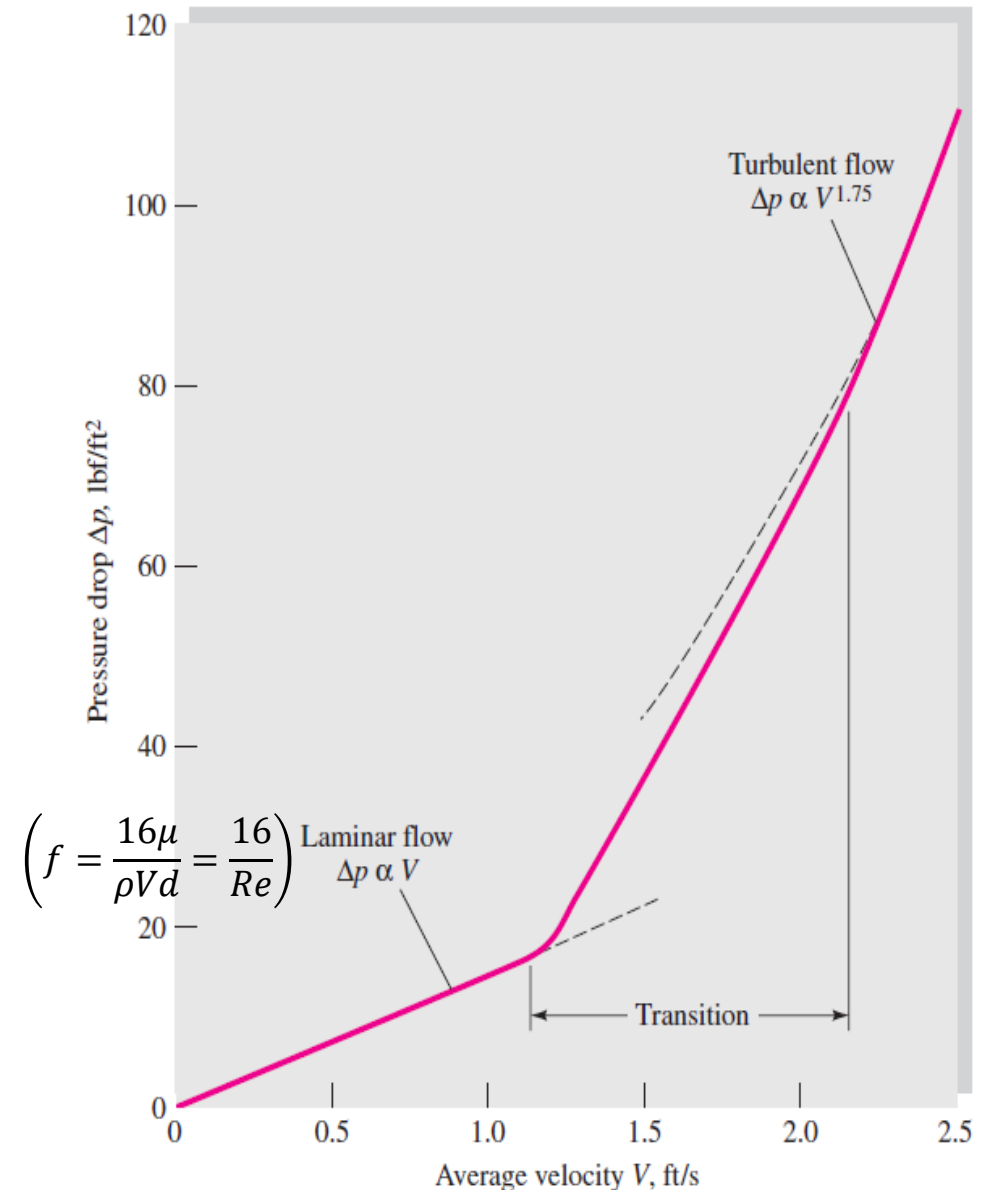


Ισοζύγιο δυνάμεων στο ρευστό

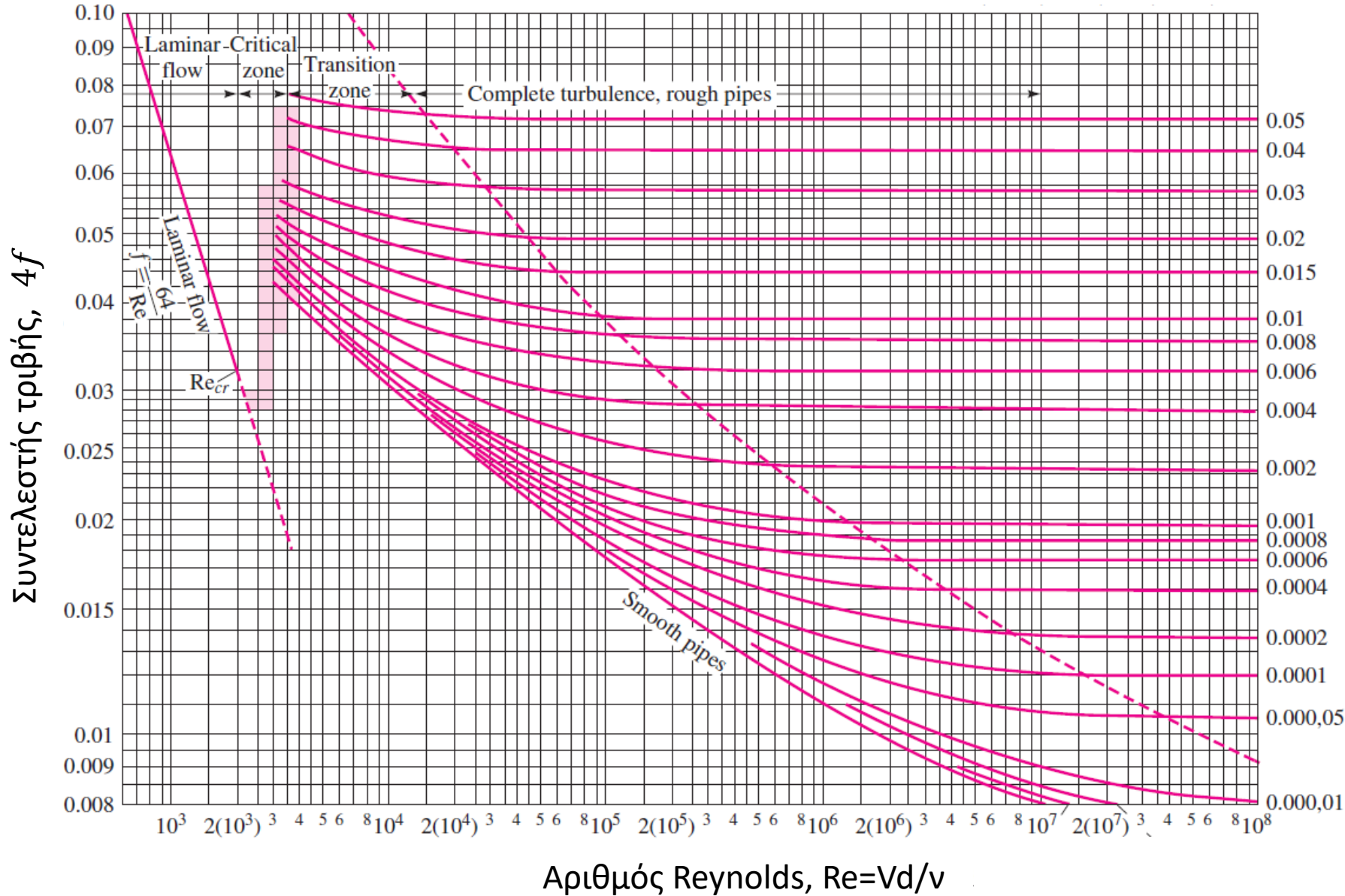
$$\Delta P \frac{\pi d^2}{4} = \tau_w (\pi d L) \Rightarrow \Delta P = \frac{L}{d} 4\tau_w$$

$$\tau_w \sim f \frac{1}{2} \rho V^2 \Rightarrow f = \frac{2\tau_w}{\rho V^2} \text{ Συντελεστής τριβής Moody}$$

$$\Delta P = 4f \frac{L}{d} \frac{\rho V^2}{2}$$



Διάγραμμα Moody



$$\frac{1}{\sqrt{4f}} = -2,0 \log \left(\frac{2,51}{Re\sqrt{4f}} + \frac{\epsilon/d}{3,7} \right)$$

Σχετική τραχύτητα, ϵ/d

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$\left[\dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz \right) \right]_{in} = \left[\dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz \right) \right]_{out} + \dot{W}_s + \dot{m} l_{\tau\rho}$$

$$\left[\dot{m} \left(H + \frac{u^2}{2} + gz \right) \right]_{in} = \left[\dot{m} \left(H + \frac{u^2}{2} + gz \right) \right]_{out} + \dot{W}_s + (-\dot{Q})$$

Παραδείγματα



$$(\dot{m}/\rho)(p_2 - p_1) = -\dot{W}_s, \quad (p_2 - p_3)/\rho = l_{\tau\rho}$$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΙΣΧΥΟΣ

ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΤΡΙΒΩΝ

$$(bhp) = \dot{W}_s / \eta_p, \quad \dot{W}_{s,electric} = \dot{W}_s / (\eta_p \eta_m)$$

η_p : υδραυλικός βαθμός απόδοσης

η_m : βαθμός απόδοσης κινητήρα (0,90-0,95)

Υδραυλικές αντιστάσεις

$$l_{\tau\rho} = \left(4f \frac{L}{d} + \sum_i K_i \right) \left(\frac{1}{2} u^2 \right)$$

$$f = \frac{16}{Re}, \quad Re = \frac{\rho u d}{\mu} < 2100$$

$$\frac{1}{\sqrt{4f}} = -2,0 \log \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{4f}} + \frac{\varepsilon/d}{3,7} \right) \approx$$

$$\approx -1,8 \log \left[\frac{6,9}{Re} + \left(\frac{\varepsilon/d}{3,7} \right)^{1,11} \right], Re > 4000$$

Απώλειες εξαρτημάτων (βάνες, γωνίες, συστολές)

$$K = \frac{K_1}{Re} + K_\infty \left(1 + \frac{K_d}{d_{nom,inch}^{0,3}} \right)$$

Απώλειες εξαρτημάτων

90° Elbow	K1	K _∞	Kd
Threaded, r/D = 1	800	0.14	4.0
Threaded, Long Radius, r/D = 1.5	800	0.071	4.2
Flanged, Welded, Bend, r/D = 1	800	0.091	4.0
Flanged, Welded, Bend, r/D = 2	800	0.056	3.9
Flanged, Welded, Bend, r/D = 4	800	0.066	3.9
Flanged, Welded, Bend, r/D = 6	800	0.075	4.2
Mitered, 1 Weld, 90°	1000	0.270	4.0
Mitered, 2 Weld, 45°	800	0.068	4.1
Mitered, 3 Weld, 30°	800	0.035	4.2

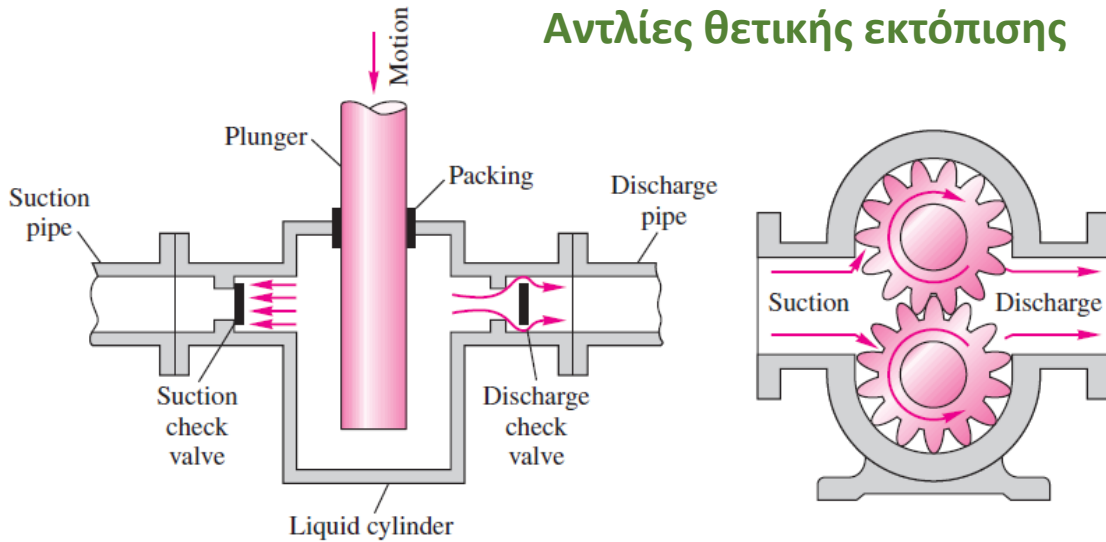
45° Elbow	K1	K _∞	Kd
Standard, r/D = 1	500	0.071	4.2
Long Radius, r/D = 1.5	500	0.052	4.0
Mitered, 1 Weld, 45°	500	0.086	4.0
Mitered, 2 Weld, 22.5°	500	0.052	4.0

180° Bend	K1	K _∞	Kd
Threaded, r/D = 1	1000	0.230	4.0
Flanged/ Welded, r/D = 1	1000	0.120	4.0
Long Radius, r/D = 1.5	1000	0.100	4.0

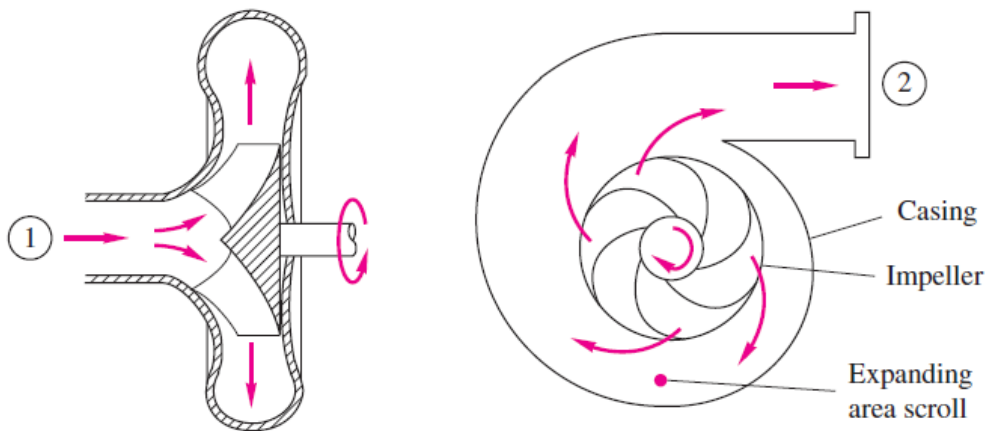
$$K = \frac{K_1}{Re} + K_{\infty} \left(1 + \frac{K_d}{d_{nom,inch}^{0,3}} \right)$$

Valves	K1	K _∞	Kd
Angle Valve = 45°, β = 1	950	0.250	4.0
Angle Valve = 90°, β = 1	1000	0.690	4.0
Globe Valve, β = 1	1500	1.700	3.6
Plug Valve, Branch Flow	500	0.410	4.0
Plug Valve, Straight Through	300	0.084	3.9
Plug Valve, 3-way, Flow Through	300	0.140	4.0
Gate Valve, β = 1	300	0.037	3.9
Ball Valve, β = 1	300	0.017	3.5
Butterfly Valve	1000	0.690	4.9
Swing Check Valve	1500	0.460	4.0
Lift Check Valve	2000	2.850	3.8

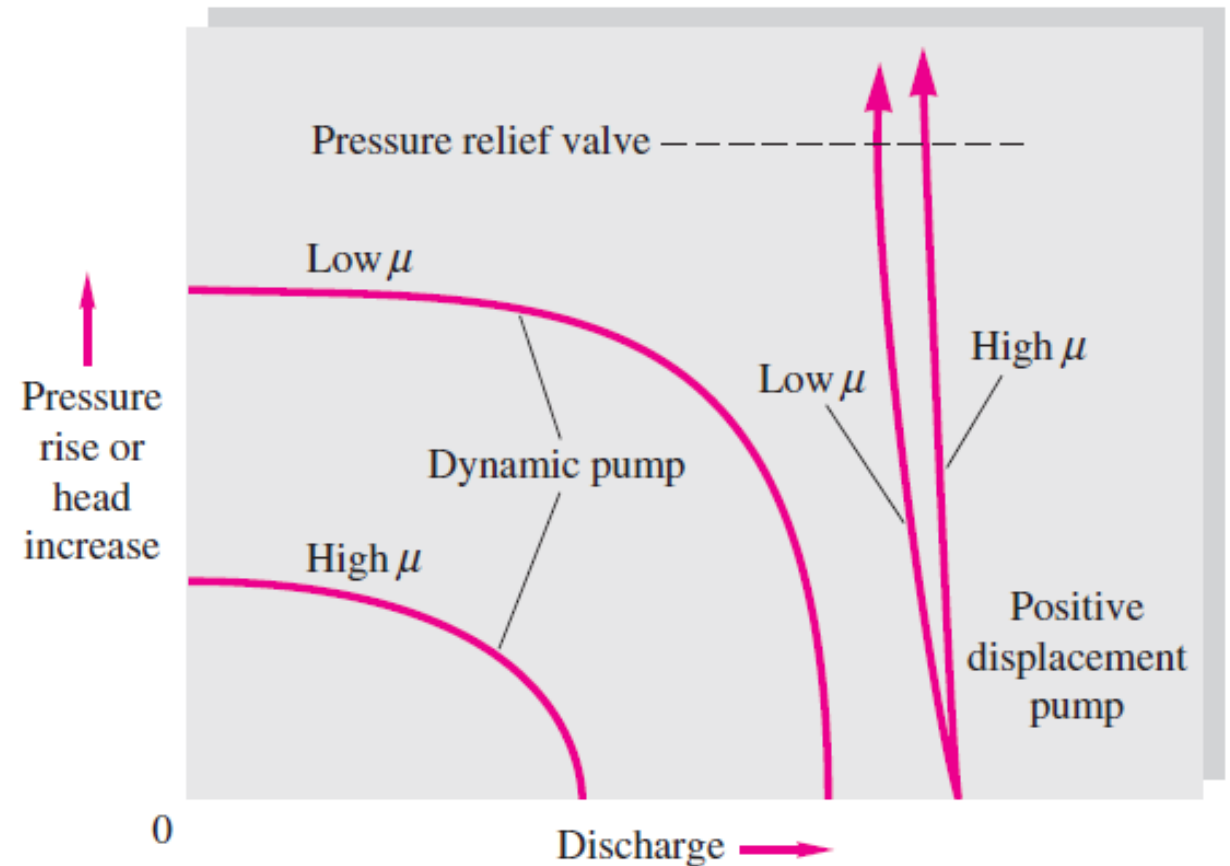
Αντλίες θετικής εκτόπισης



Φυγοκεντρικές αντλίες



Χαρακτηριστική καμπύλη αντλίας



Χαρακτηριστικά φυγοκεντρικών μηχανών

N : αριθμός στροφών

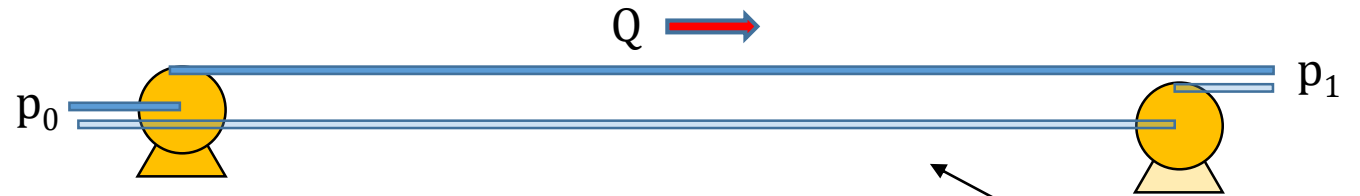
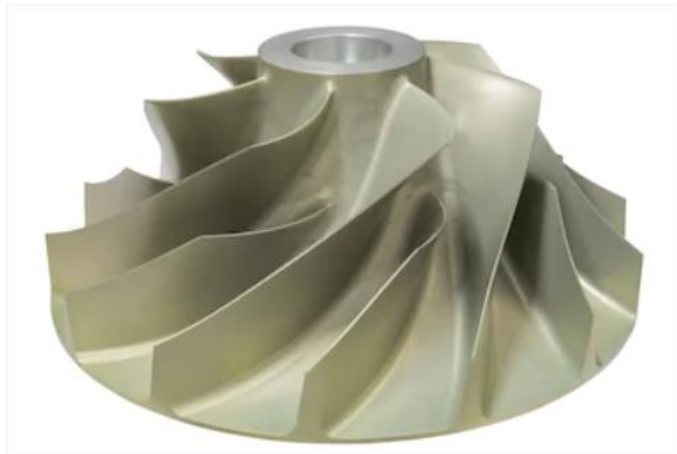
D : διάμετρος φτερωτής

u_{tip} : ταχύτητα ακμής

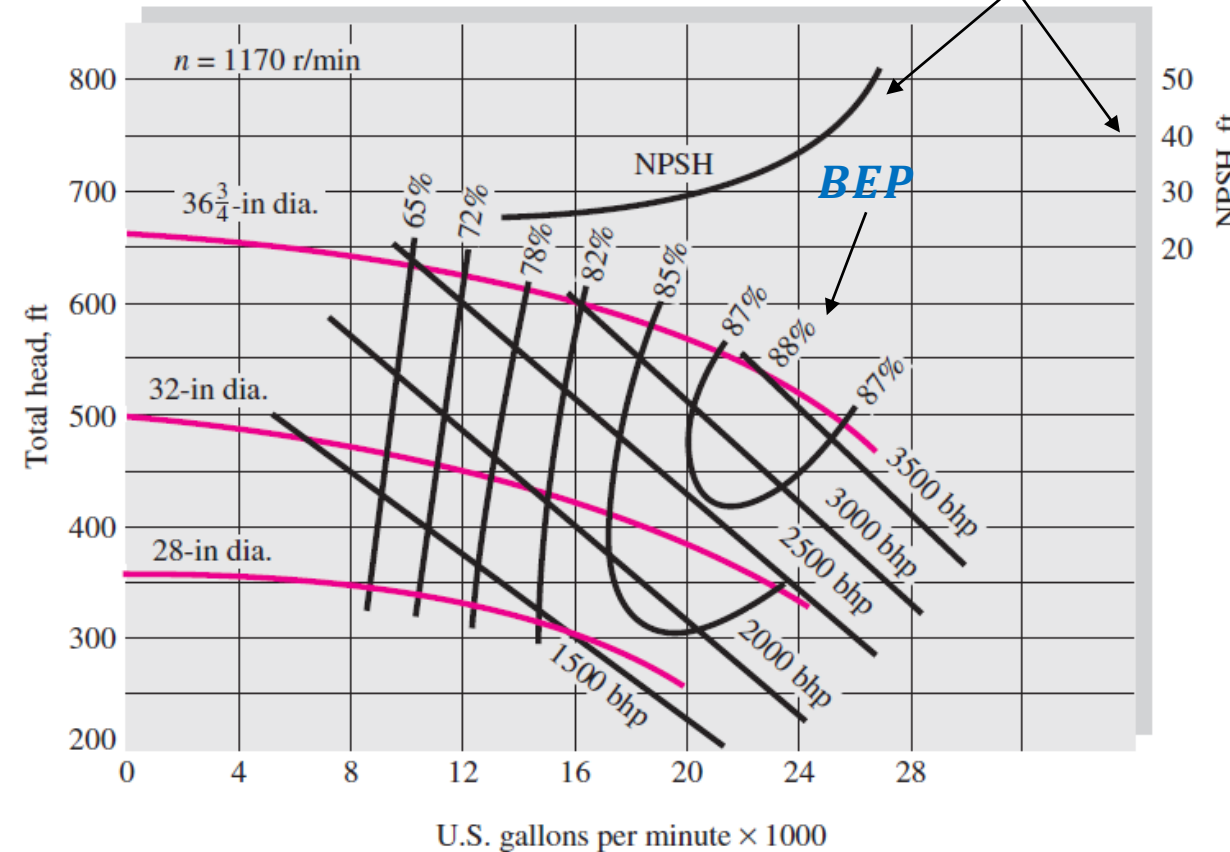
$\Delta P / \rho g$: μανομετρικό ύψος

$$u_{tip} \sim ND$$

$$\Delta P \sim \rho u_{tip}^2$$



Σπηλαίωση

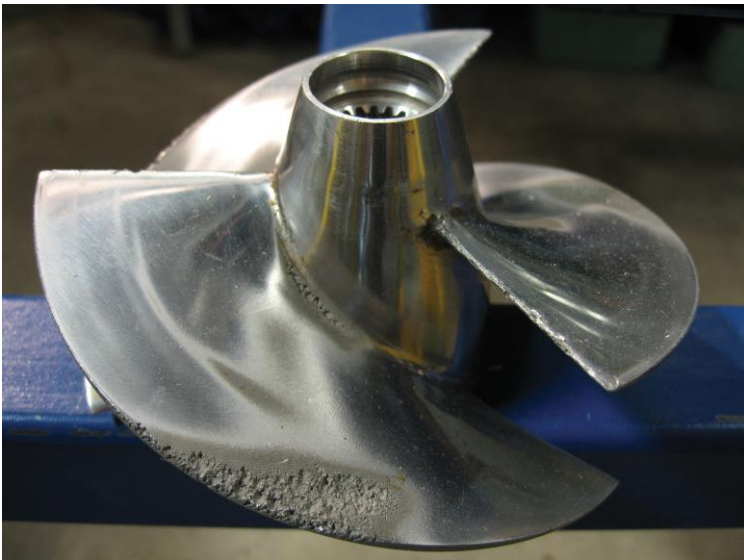
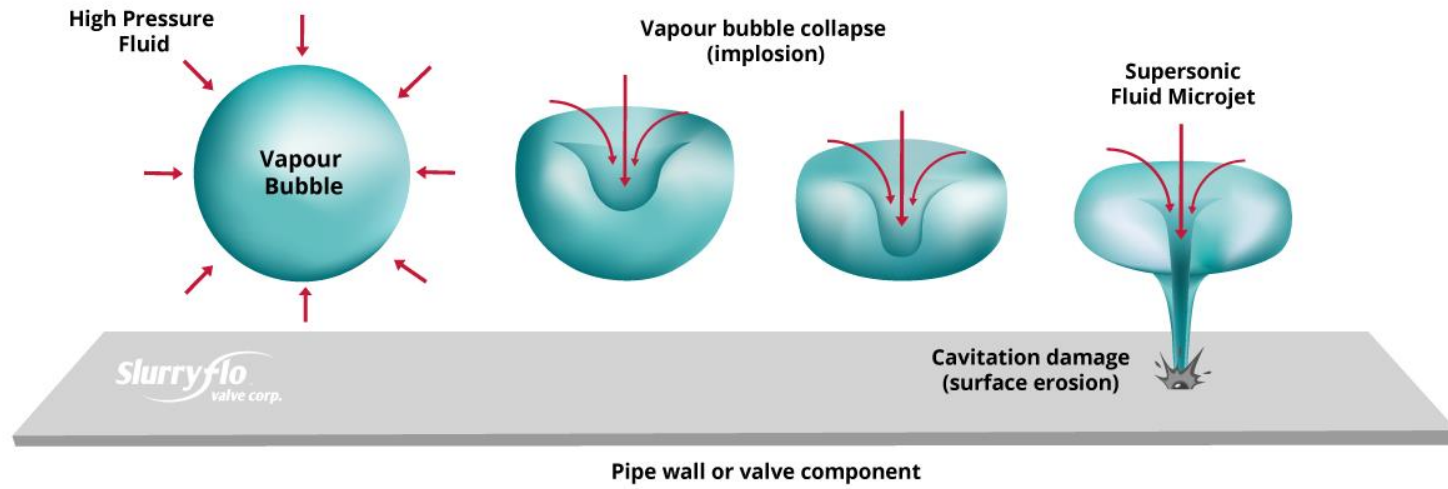


Ανάλυση τάξης μεγέθους

$$Q \sim u_{tip} A_{flow} \sim ND D^2 \sim ND^3 \quad (\text{Ογκομετρικές συσκευές})$$

$$gH = \frac{\Delta P}{\rho} \sim u_{tip}^2 \sim N^2 D^2$$

$$I = Q \Delta P \sim \rho N^3 D^5 \quad (\text{Ωφέλιμη ισχύς})$$



Αδιάστατες παράμετροι και ειδική ταχύτητα

Αδιάστατες παράμετροι

$$C_Q = Q / (ND^3)$$

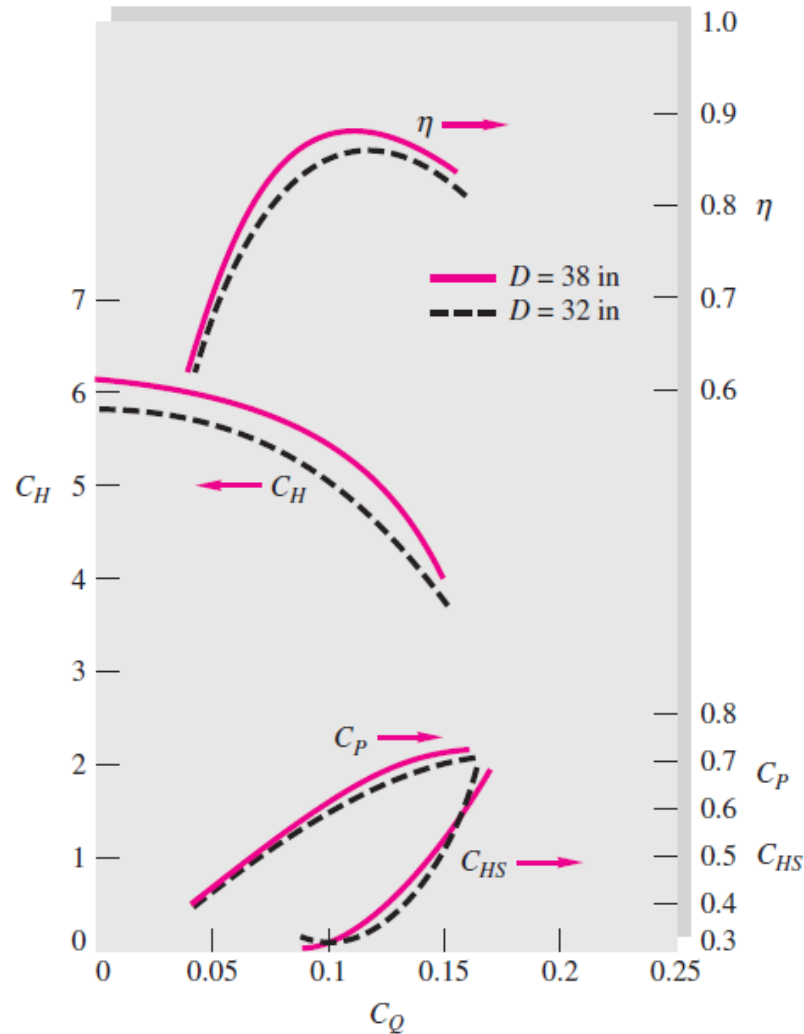
$$C_H = gH / (N^2 D^2)$$

$$C_I = bhp / (\rho N^3 D^5)$$

$$\eta = C_Q C_H / C_I$$

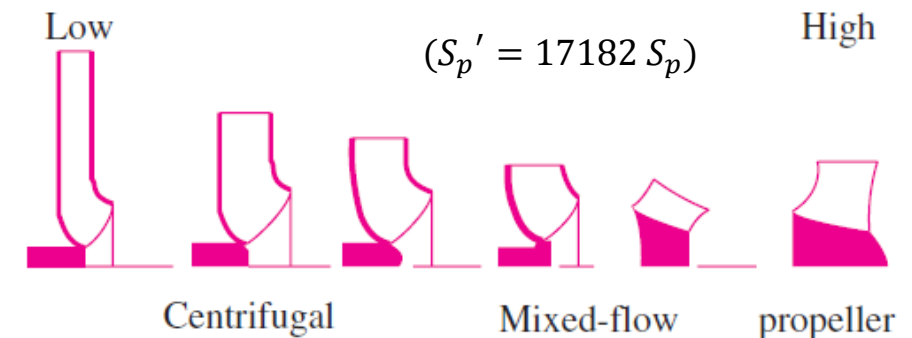
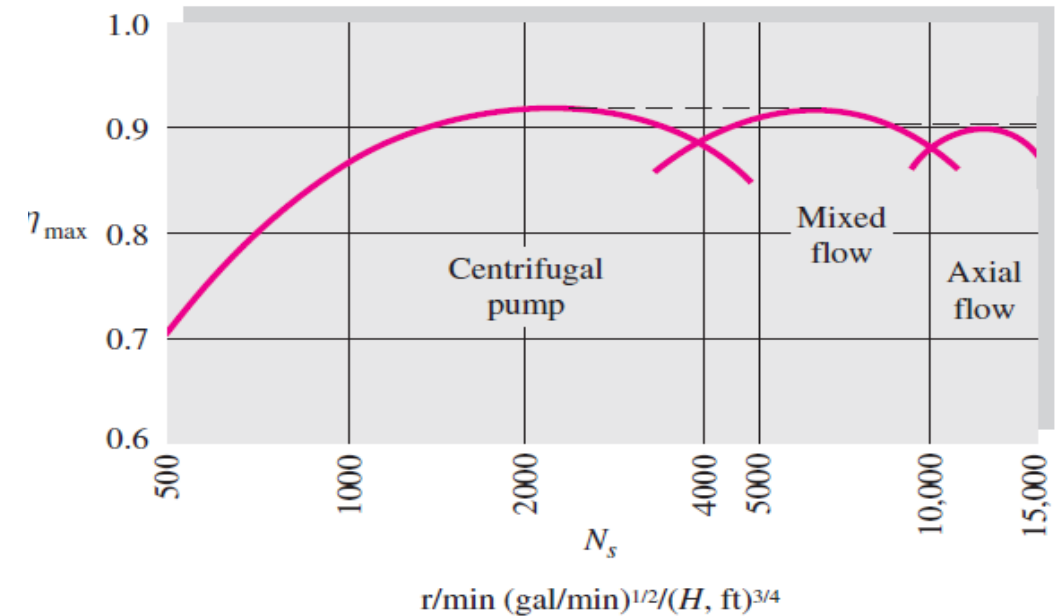
Γεωμετρικά όμοιες αντλίες έχουν σε ομόλογα σημεία λειτουργίας ίδιες τιμές των αδιάστατων παραμέτρων

(BEP : C_{Q*} , C_{H*} , C_{I*})

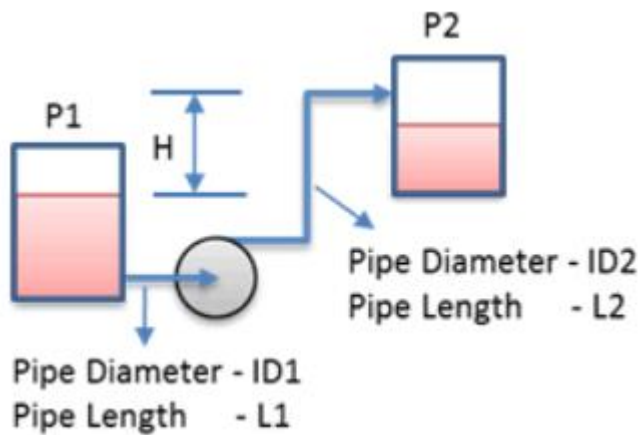


$$S_p = \frac{C_{Q*}^{1/2}}{C_{H*}^{3/4}} = \frac{NQ^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$$

Ειδική ταχύτητα



Σημείο λειτουργίας υδραυλικού δικτύου



Καμπύλη υδραυλικής αντίστασης δικτύου

$$H_{sys} = \frac{-\dot{W}_s}{\rho g Q} = \frac{p_{out} - p_{in}}{\rho g} + \frac{u_{out}^2 - u_{in}^2}{2g} + (z_{out} - z_{in}) + \sum_j \left(4f_j \frac{L_j}{d_j} + \sum_i K_{ji} \right) \frac{u_j^2}{2g}$$

$$= F(Q)$$

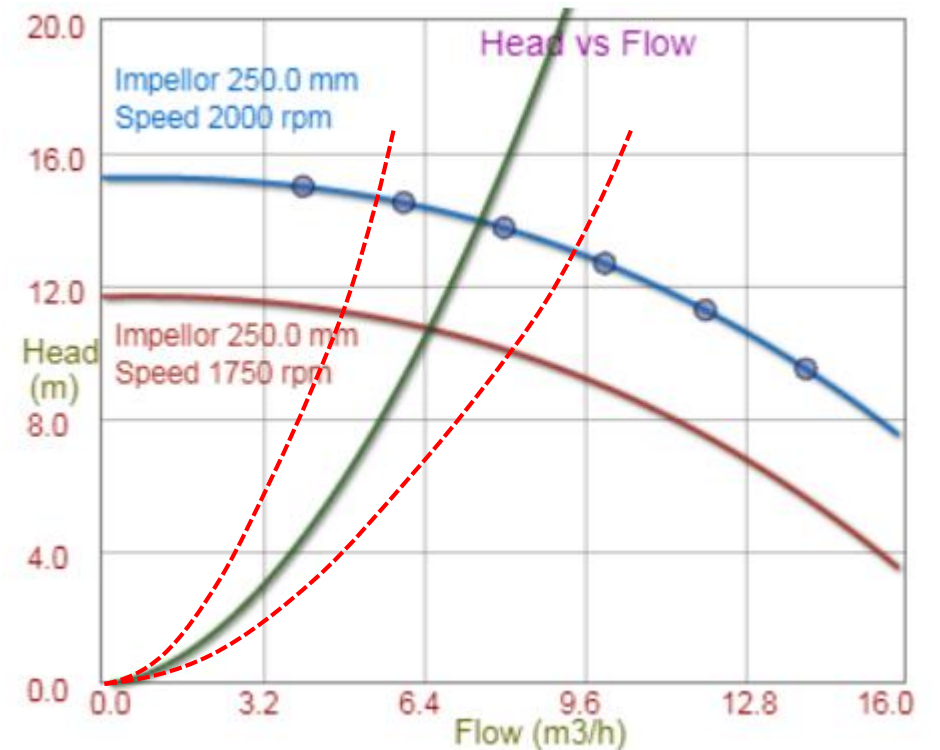
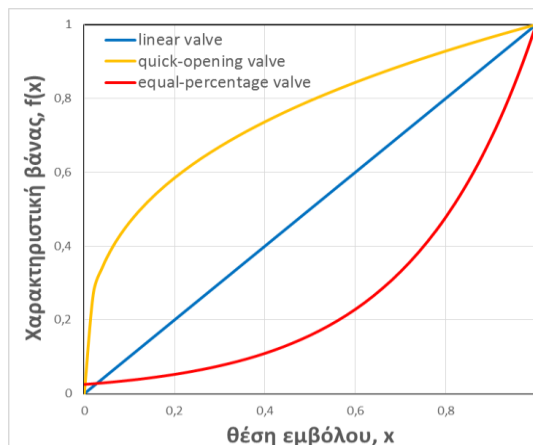
Καμπύλη αντλίας

$$H_{head} = G(Q)$$

Βάνα ελέγχου



$$Q = C_v f(x) \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho / \rho_{H_2O}}}$$



Έρπουσα ροή ($Re \ll 1$)

Κατηγοριοποίηση ροών με Βάση τον αριθμό Reynolds

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u}$$

αδρανειακές δυνάμεις
(επιτάχυνση)

Ιξώδεις δυνάμεις
δυνάμεις πίεσης

Χαρ/κή ταχύτητα: U Χαρ/κό μήκος: L

Σύγκριση αδρανειακών με ιξώδεις δυνάμεις

$$\frac{|\rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}|}{|\mu \nabla^2 \underline{u}|} \sim \frac{\rho U(U/L)}{\mu U/L^2} = \frac{\rho UL}{\mu} = \mathbf{Re}$$

Αδιαστατοποίηση εξίσωσης Navier-Stokes

$$\hat{u} = \underline{u}/U \quad \hat{x} = \underline{x}/L \quad \hat{t} = tU/L$$

Η πίεση εξισορροπεί την κυρίαρχη δύναμη

$$\text{Re} \gg 1 \Rightarrow \Delta p \sim \rho U^2$$

$$\text{Re} \ll 1 \Rightarrow \Delta p \sim \mu U/L$$

Re << 1: Έρπουσα ροή

$$\text{Re} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \cdot \hat{\nabla} \hat{u} \right) = -\hat{\nabla} \hat{p} + \nabla^2 \hat{u}$$

Re >> 1: Αδρανειακή ροή

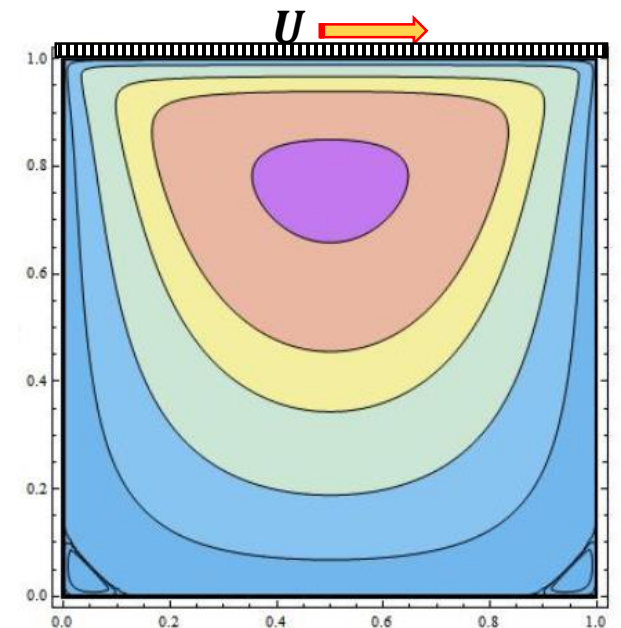
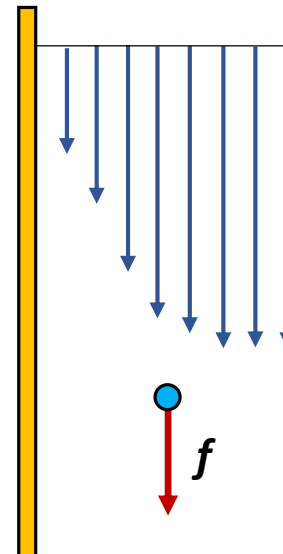
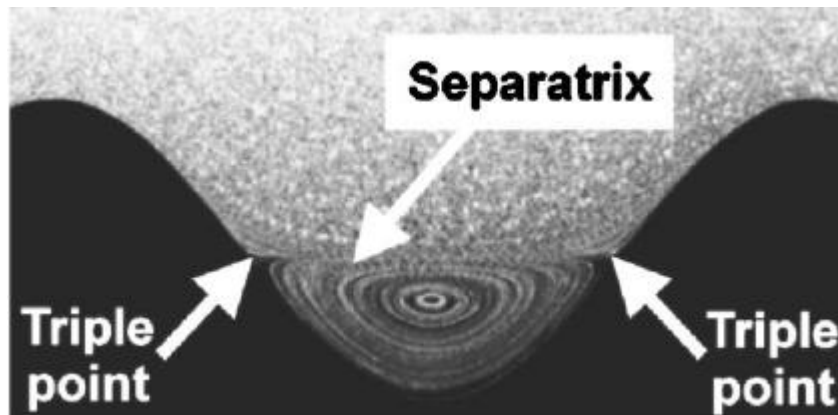
$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \cdot \hat{\nabla} \hat{u} = -\hat{\nabla} \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \hat{u}$$

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} = 0$$

Ακριβής ισορροπία ιξωδών δυνάμεων και δυνάμεων πίεσης

(\underline{u}, p) λύση $\rightarrow (-\underline{u}, -p)$ είναι επίσης λύση

- Ροή με συμμετρικό σύνορο είναι συμμετρική
 - Η δύναμη σε σωματίδιο που κινείται κοντά σε τοίχωμα είναι παράλληλη με το τοίχωμα
 - Η έρπουσα ροή είναι αντιστρεπτή (χρονική εξάρτηση μόνο μέσω των συνοριακών συνθηκών)
- www.youtube.com/watch?v=QcBpDVzBPMk (2-3,5 min)



Η μέθοδος των ιδιόμορφων λύσεων

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

$$\mu \underline{\nabla}^2 \underline{u} = \underline{\nabla} p$$

Γραμμική εξίσωση ως προς τους άγνωστους p και \underline{u}

Κατασκευή λύσεων με γραμμικό συνδυασμό απλούστερων



Ροή γύρω από στερεό σώμα

$$\underline{u} = \underline{u}_\infty + \underline{u}_s$$

\underline{u}_∞ : Το πεδίο ταχύτητας μακριά από το σώμα, πχ $u_i = U_i$ (σταθερή ταχύτητα) ή $u_i = A_{ij}x_j$ (γραμμικό πεδίο)

\underline{u}_s : Ιδιόμορφη λύση $\lim_{r \rightarrow \infty} \underline{u}_s = 0$ και $\lim_{r \rightarrow 0} \underline{u}_s = \infty$ («διαφοροποιεί» το πεδίο ταχύτητας κοντά στο σώμα)

Παραγωγή ιδιόμορφων λύσεων

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

$$\mu \underline{\nabla}^2 \underline{u} = \underline{\nabla} p$$

$$\Rightarrow \nabla^2 p = 0$$

Ιδιόμορφες λύσεις της πίεσης:

$$p(\underline{x}) = 0, \quad \frac{A_0}{r}, \quad A_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{A_j x_j}{r^3}, \quad B_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{x_j}{r^3} \right)$$

$$\mu \underline{\nabla}^2 u_i = \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{A_j x_j}{r^3} \right) = A_j \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right)$$

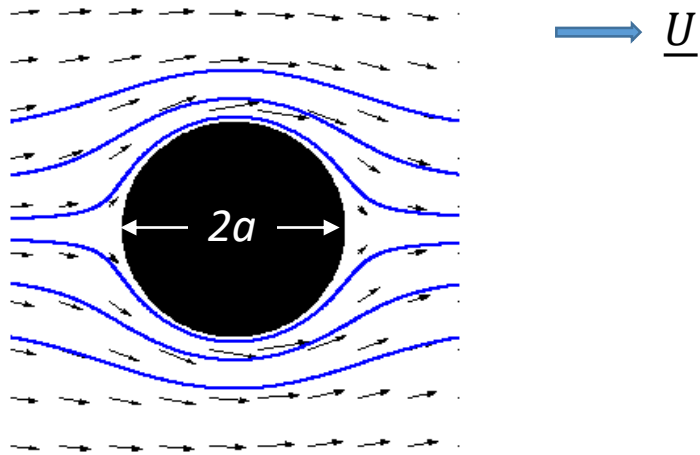
Πεδίο ταχύτητας λόγω σημειακής δύναμης (Stokeslet)

$$u_i = \frac{A_j}{2\mu} \left(\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3} \right), \quad p = \frac{A_j x_j}{r^3}$$

Μαντεύουμε

$$\text{λύση της μορφής: } u_i = A_j \left(\frac{a \delta_{ij}}{r^m} + \frac{b x_i x_j}{r^n} \right)$$

Έρπουσα ροή γύρω από σφαίρα



Αναγκαίες συνθήκες για την ιδιόμορφη συνιστώσα

$$\left. \begin{array}{l} \underline{u} = \underline{u}_\infty + \underline{u}_s \\ \underline{u}_\infty = \underline{U} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r \rightarrow \infty : \underline{u}_s \rightarrow 0 \\ r = a : \underline{u}_s = -\underline{U} \end{array}$$

Επειδή η συνθήκη έχει μία διανυσματική σταθερά, θα επιλέξουμε αντίστοιχες ιδιόμορφες λύσεις

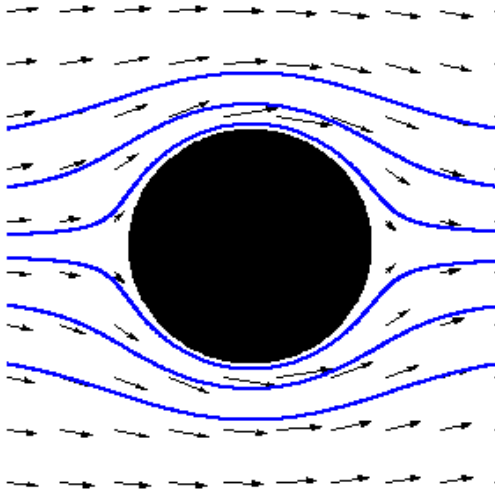
$$u_i(\underline{x}) = A_j \left(\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3} \right) + B_j \left(\frac{-\delta_{ij}}{r^3} + 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right) \Rightarrow u_i(r = a) = -U_i = \delta_{ij} \left(\frac{A_j}{a} - \frac{B_j}{a^3} \right) + x_i x_j \left(\frac{A_j}{a^3} + 3 \frac{B_j}{a^5} \right) \Rightarrow \begin{cases} B_j = -\frac{1}{3} a^2 A_j \\ A_j = -\frac{3}{4} a U_j \end{cases}$$

$$u_i(\underline{x}) = U_i - \frac{3}{4} a U_j \left(\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3} \right) + \frac{1}{4} a^3 U_j \left(\frac{-\delta_{ij}}{r^3} + 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right), \quad p = -\frac{3}{2} \mu a U_j \frac{x_j}{r^3}$$

Η δύναμη στη σφαίρα (νόμος Stokes)

$$F_i = \int_{r=a} \sigma_{ij} n_j dS, \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow F_i = 6\pi \mu a U_i$$

Εφαρμογές έρπουσας ροής γύρω από σφαίρα



Νόμος Stokes

$$\underline{F} = 6\pi\mu a \underline{U}_\infty$$

Γενικότερα, συντελεστής οπισθέλκουσας C_D

$$F = C_D \left(\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \right) (\pi a^2) \quad Re = \frac{\rho U_\infty a}{\mu} < 1 \Rightarrow C_D = \frac{12}{Re} = \frac{24}{Re_d}$$

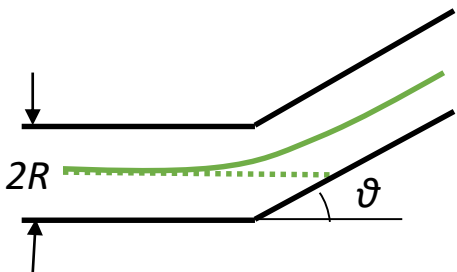
Εφαρμογές

Ταχύτητα ελεύθερης πτώσης - Σχεδιασμός διαχωριστών φάσεων - Φυγοκέντριση

$$\frac{4}{3} \pi a^3 \rho_p g = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho g + 6\pi\mu a u_p \Rightarrow u_p = \frac{2a^2(\rho_p - \rho)g}{9\mu} = \frac{d_p^2(\rho_p - \rho)g}{18\mu}$$

Χαρακτηριστικός χρόνος απόκρισης σε αλλαγή ταχύτητας- Αδρανειακή πρόσκρουση

$$m_p \frac{du_p}{dt} = 6\pi\mu a (U - u_p) \Rightarrow u_p = U(1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau = \frac{m_p}{6\pi\mu a} = \frac{2a^2 \rho_p}{9\mu}$$



Αριθμός Stokes: $St = \frac{\tau}{L/U} = \frac{\text{χαρ/κός χρόνος απόκρισης}}{\text{χαρ/κός χρόνος πρόσκρουσης}} = \frac{2a^2 \rho_p U \tan \vartheta}{9\mu R}$

Διάχυση Brown (μικρά σωματίδια-μεγάλα μόρια)

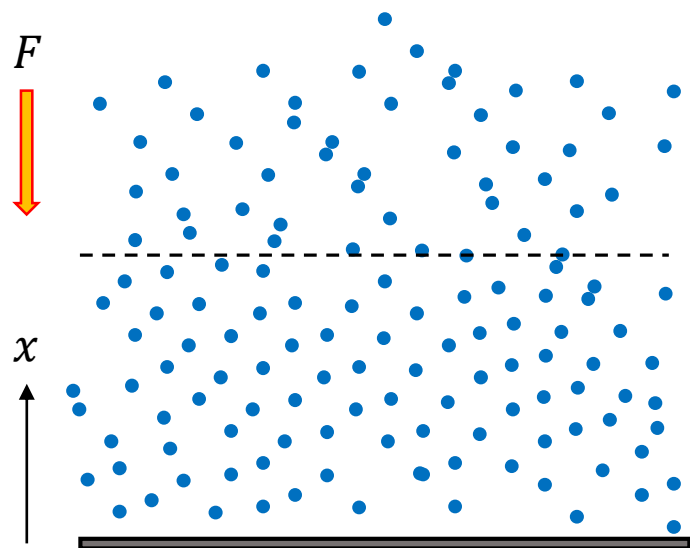
Μοριακή Θερμοδυναμική-Στατιστική Μηχανική

Κάθε στοιχειώδες σωματίδιο έχει την ίδια μέση κινητική ενέργεια (θερμοκρασία)

$$m\langle u^2 \rangle / 2 = 3kT / 2$$

Η συγκέντρωση σωματιδίων στο χώρο ικανοποιεί την κατανομή Boltzmann, όπου $U(\underline{x})$ η δυναμική ενέργεια λόγω αλληλεπίδρασης με εξωτερικές δυνάμεις και γειτονικά σωματίδια

$$C(\underline{x}) = C_0 e^{-U(\underline{x})/kT}$$



Παράδειγμα σταθερής δύναμης

Ροή λόγω διάχυσης (τυχαία κίνηση)

Ροή λόγω δύναμης (συντεταγμένη κίνηση)

$$n = -\mathcal{D} \frac{dC}{dx} + uC = 0$$

$$F = 6\pi\mu a u$$

$$\frac{dC}{C} = \frac{F dx}{6\pi\mu a \mathcal{D}} = -\frac{dU}{6\pi\mu a \mathcal{D}}$$

Η συγκέντρωση ισορροπίας θα διαμορφωθεί ώστε να ικανοποιεί την κατανομή Boltzmann:

$$\frac{dC}{C} = -\frac{dU}{kT}$$

$$\mathcal{D} = \frac{kT}{6\pi\mu a}$$

(Εξίσωση Einstein)

$x \sim L, y \sim H$

$$\varepsilon = H/L \ll 1$$

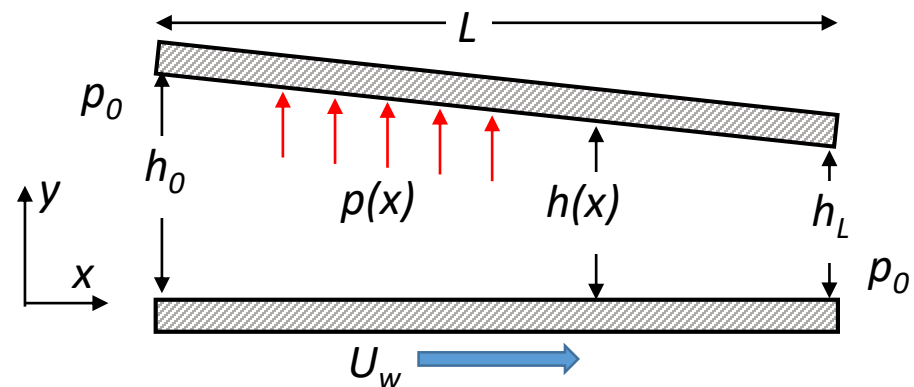
Μεγάλη διαφοροποίηση κλιμάκων μήκους

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{U^2/L} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{U^2/L} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{U^2/L} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}_{\nu U/L^2 \quad \nu U/H^2}$$

$$\nu U/H^2 \gg U^2/L \Leftrightarrow \varepsilon^2 Re \ll 1$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$$

Υδροδυναμική λίπανση



$$Q = \int_0^h u \, dy = \frac{1}{2} U_w h - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx}$$

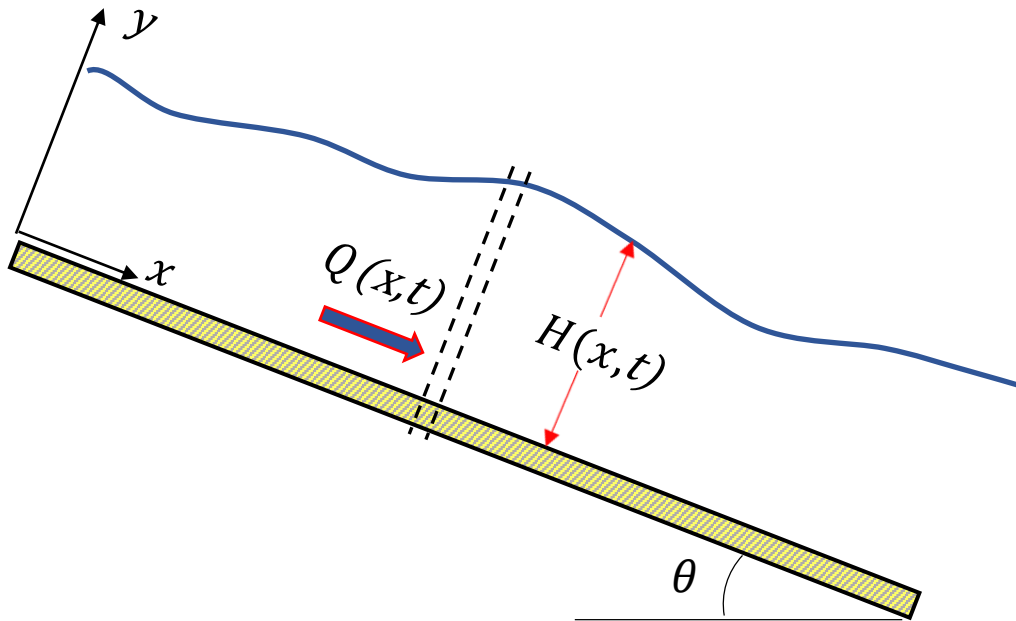
Μονοδιάστατη ροή για το τοπικό ύψος καναλιού

$$u(x, y) = U_w \left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu U_w}{h^2} - \frac{12\mu Q}{h^3}$$

$$p(0) = p(L)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{U_w \int_0^L (1/h^2(x)) \, dx}{2 \int_0^L (1/h^3(x)) \, dx}$$



Ισοζύγιο μάζας

$$\left. \begin{aligned} H_t + u(H)H_x &= v(H) \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{H_t + Q_x = 0}$$

$$\left[[Q(x) - Q(x + dx)]dt = [H(t + dt) - H(t)]dx \right]$$

$$\left. \begin{aligned} x \sim L, y \sim H, \varepsilon = H/L \ll 1 &\Rightarrow \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx -\rho g \sin\theta + \frac{\partial p}{\partial x} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = 0 &\Rightarrow p(x, y) = p(x, H) + \rho g \cos\theta (H - y) \\ p(x, H) = -\gamma\kappa = -\gamma \frac{H_{xx}}{(1 + H_x^2)^{3/2}} &\approx -\gamma H_{xx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\mu} (\rho g \sin\theta - \rho g \cos\theta H_x + \gamma H_{xxx}) y(2H - y) \Rightarrow Q = \int_0^H u dy = \frac{H^3}{3\mu} (\rho g \sin\theta - \rho g \cos\theta H_x + \gamma H_{xxx})$$

$$\boxed{H_t + \left[\frac{H^3}{3\mu} (\rho g \sin\theta - \rho g \cos\theta H_x + \gamma H_{xxx}) \right]_x = 0}$$

Ιδανική ροή ($Re \rightarrow \infty$)

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = \rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \rho \underline{g}$$

$$\frac{|\rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}|}{|\mu \nabla^2 \underline{u}|} \sim \frac{UL}{\nu} = Re = \frac{L^2 U}{\nu L} = \frac{\tau_{viscous}}{\tau_{inertial}} \gg 1$$

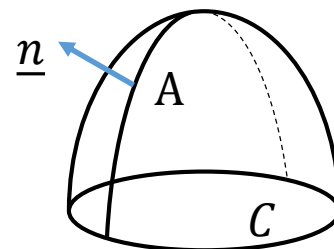
- Γρήγορες μεταβολές που δεν προλαβαίνουν να επηρεαστούν από ιώδεις δυνάμεις
- Ικανοποιείται μόνον η συνοριακή συνθήκη μη-διείσδυσης
- Δεν παράγεται στροβιλότητα στα στερεά τοιχώματα

Συνάρτηση δυναμικού

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} = 0 \Rightarrow \underline{u} = \nabla \varphi$$

Θεώρημα Stokes – Θεώρημα Kelvin

$$\Gamma = \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{l} = \int_A (\nabla \times \underline{u}) \cdot \underline{n} dA = \int_A \underline{\omega} \cdot \underline{n} dA$$



$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0, \quad \underline{\omega} = 0 \Rightarrow \Gamma = 0 \quad \text{Το ρευστό διατηρεί την αρχική στροβιλότητα}$$

Εξίσωση Bernoulli (αποσύνδεση κινηματικής από δυναμική)

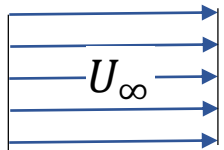
$$\underline{\omega} \times \underline{u} = \underline{u} \cdot (\nabla \underline{u}) - \nabla \left(\frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{u} \right) = 0 \Rightarrow \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 + \frac{p}{\rho} - \underline{g} \cdot \underline{x} \right) = 0$$

Στοιχειώδεις ροές και σύνθεση λύσεων

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{u} = 0 \\ \underline{u} = \nabla \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$$

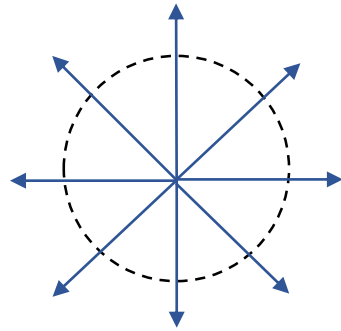
- Η εξίσωση Laplace είναι γραμμική: γραμμικός συνδυασμός λύσεων είναι επίσης λύση
- Κάθε ροϊκή γραμμή μπορεί να θεωρηθεί στερεό σύνορο της ροής (συνθήκη ολίσθησης)

Ομοιόμορφη ροή



$$\varphi = U_\infty x$$

$$(u_x, u_y) = (U_\infty, 0)$$

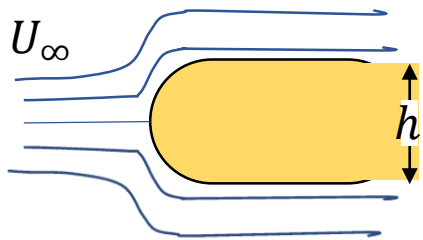


Σημειακή πηγή/καταβόθρα (2-D)

$$\varphi = \frac{M}{2\pi} \ln r, \quad u_r = \frac{M}{2\pi r}, \quad u_\theta = 0, \quad (u_x, u_y) = \left(\frac{Mx}{2\pi r^2}, \frac{My}{2\pi r^2} \right)$$

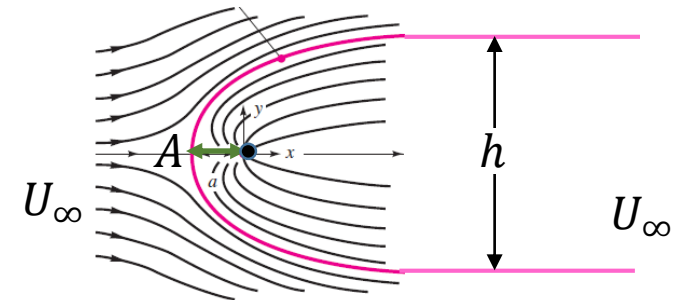
$$(3-D) \quad \varphi = -\frac{M}{4\pi r}, \quad u_r = \frac{M}{4\pi r^2}, \quad (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{Mx}{4\pi r^3}, \frac{My}{4\pi r^3}, \frac{Mz}{4\pi r^3} \right)$$

Σημειακή πηγή + ομοιόμορφη ροή (2-D)



$$\varphi = U_\infty x + \frac{M}{2\pi} \ln r, \quad (u_x, u_y) = (U_\infty, 0) + \left(\frac{Mx}{2\pi r^2}, \frac{My}{2\pi r^2} \right)$$

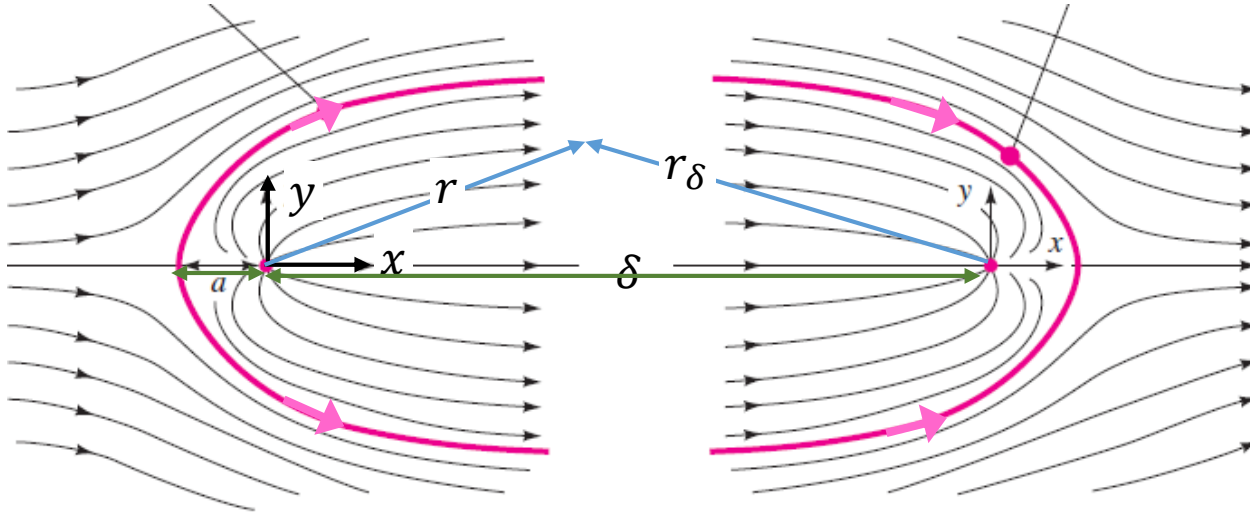
$$\text{Σημείο ανακοπής: } \left(A = -\frac{M}{2\pi U_\infty}, 0 \right) \quad \text{Εύρος: } h = \frac{M}{U_\infty}$$



Ροή γύρω από κυλινδρικά στερεά

Πηγή + Καταβόθρα + Ομοιόμορφη ροή

ροϊκή γραμμή



$$r^2 = x^2 + y^2$$

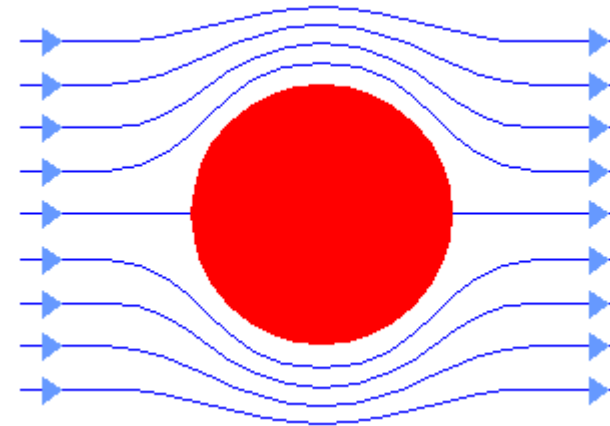
$$r_\delta^2 = (x - \delta)^2 + y^2$$

$$(u_x, u_y) = (U_\infty, 0) + \frac{M}{2\pi} \left[\frac{(x, y)}{r^2} - \frac{(x - \delta, y)}{r_\delta^2} \right]$$

$$\varphi = U_\infty x + \frac{M}{2\pi} \ln r - \frac{M}{2\pi} \ln r_\delta \approx U_\infty x + \frac{M\delta}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (\delta \ll x, y)$$

Ροή γύρω από κύλινδρο ακτίνας a

(πηγή + καταβόθρα \Rightarrow διπλέτα)



$$\left. \begin{array}{l} \delta \rightarrow 0 \\ \delta M = 2\pi U_\infty a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = U_\infty \left(x + \frac{a^2 x}{x^2 + y^2} \right)$$

$$(u_x, u_y) = (U_\infty, 0) + \frac{U_\infty a^2}{r^4} (y^2 - x^2, -2xy)$$

Όμως

$$\underline{F} = \int_S p \underline{n} dS = 0 !!!$$

Αλληλεπίδραση ροής με ιδανικό στρόβιλο

Στρόβιλος σε ιδανική ροή

(Ευθύγραμμος ή σημειακός στρόβιλος)

Αναζητούμε ροή με κυκλικές ροϊκές γραμμές

$$(u_r, u_\theta, u_z) = (0, u_\theta(r), 0)$$

$$\underline{\omega} = \underline{\nabla} \times \underline{u} = (0, 0, \omega_z) = \underline{0} \quad (\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0)$$

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$$

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

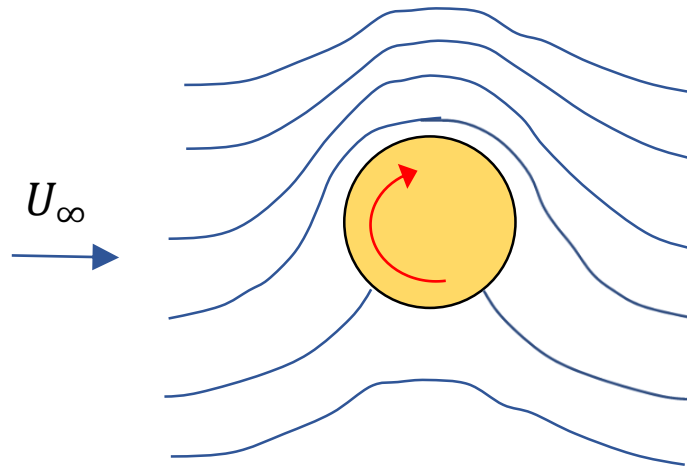
$$\text{ή } (u_x, u_y) = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} (-y, x)$$

$$\Gamma = \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{l} = \int_A \underline{\omega} \cdot \underline{n} dA \neq 0$$

Άπειρη στροβιλότητα στο κέντρο της ροής

Ροή με κυκλοφορία γύρω από κύλινδρο

$$(u_x, u_y) = (U_\infty, 0) + \frac{U_\infty a^2}{r^4} (y^2 - x^2, -2xy) + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} (-y, x)$$



Σημείο ανακοπής
σε γωνία $\pm\alpha$

$$\Gamma = 4\pi a U_\infty \sin \alpha$$

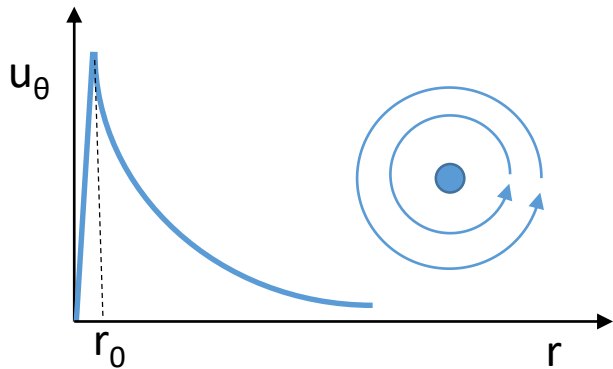
Η δύναμη από την
πίεση στην επιφάνεια

$$\underline{F} = (0, -\rho \Gamma U_\infty)$$

- Στο πλαίσιο της ιδανικής ροής, η κυκλοφορία είναι αυθαίρετη (πολλαπλές λύσεις)
- Στην πραγματικότητα, η κυκλοφορία οφείλεται στο ιξώδες και τη συνθήκη μη-ολίσθησης

Μοντελοποίηση και συμπεριφορά στροβίλου

Ευθύγραμμος (ή σημειακός) στρόβιλος



$$u_\theta = \Omega r \quad r \leq r_0 \Rightarrow \omega_z = 2\Omega$$

$$u_\theta = \frac{\Omega r_0^2}{r} \quad r \geq r_0 \Rightarrow \omega_z = 0$$

$$\Gamma = (2\Omega)(\pi r_0^2) \quad r_0 \rightarrow 0 \Rightarrow \Omega \rightarrow \infty$$

Σταθερή κυκλοφορία σε όλο το μήκος του στροβίλου

Ισοζύγιο r-ορμής

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{u_\theta^2}{r} \Rightarrow p(r) = p_\infty - \frac{\rho \Omega^2 r_0^4}{2r^2}$$

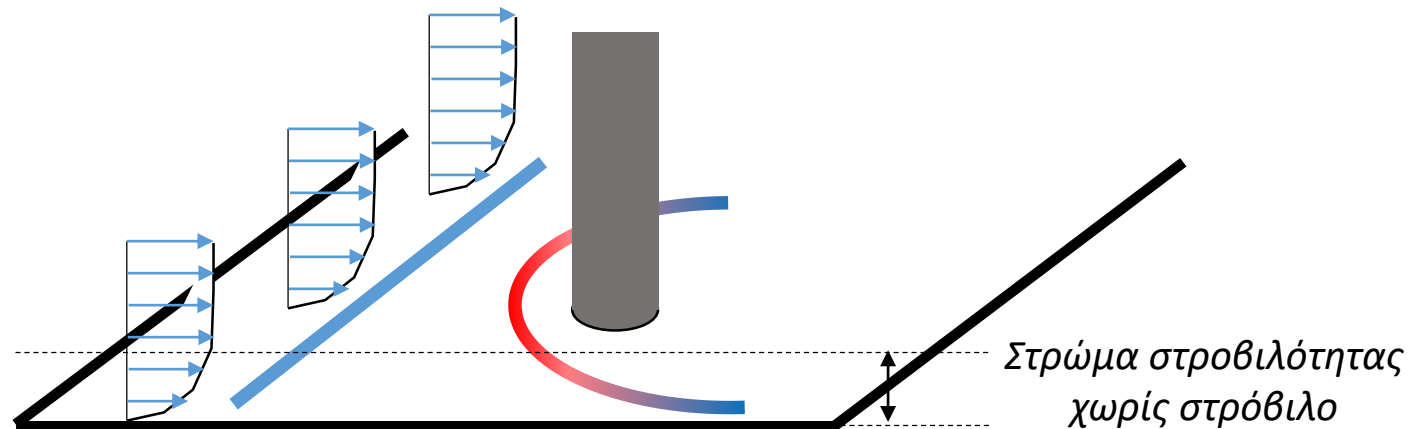
Παραδείγματα

- Ανεμοστρόβιλος «σηκώνει σπίτια»
- Συμπύκνωση υδρατμού στον πυρήνα (δίνη πτερύγων)

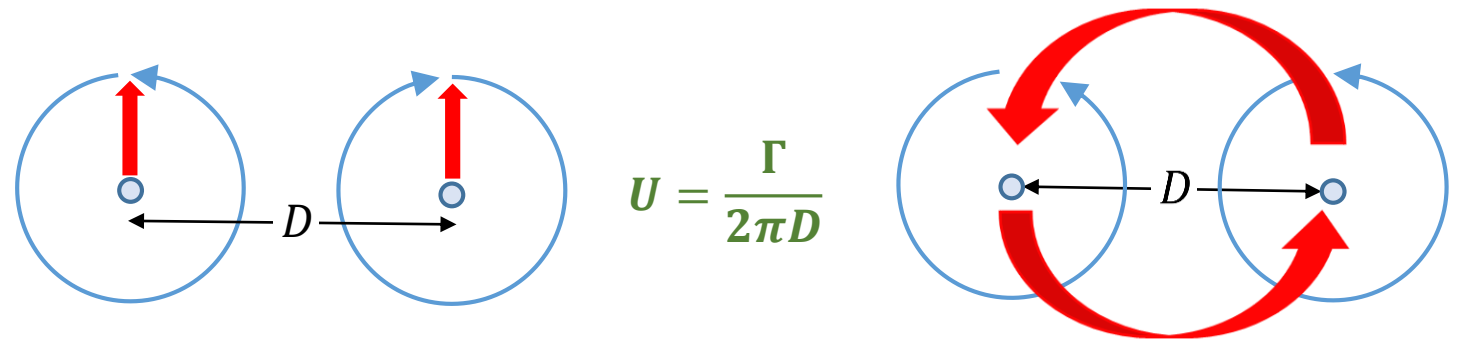
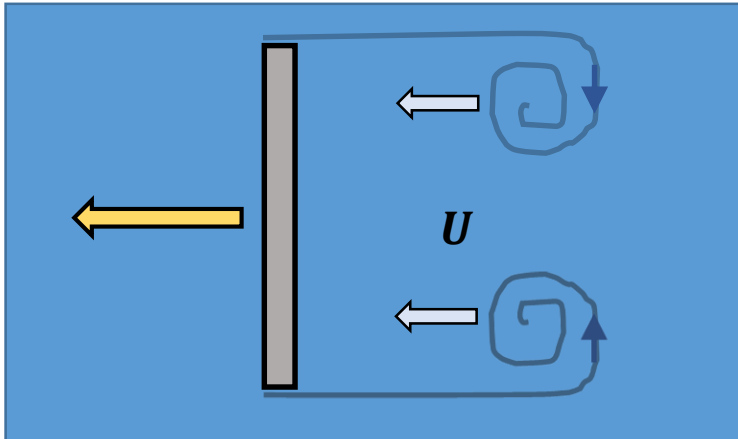


Ενίσχυση στροβιλότητας με εφελκυσμό

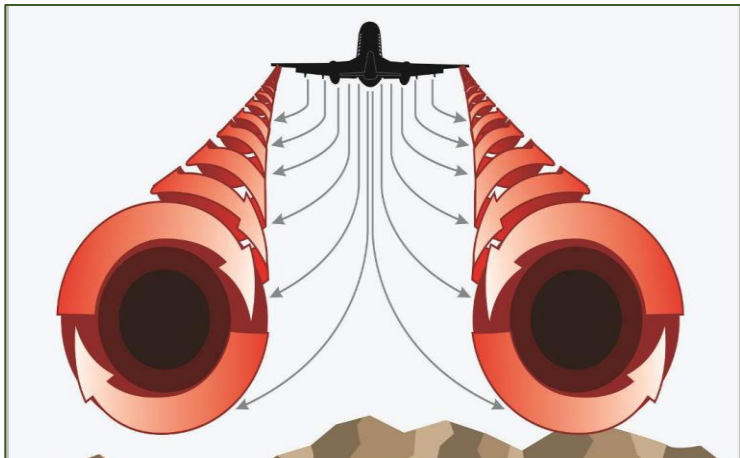
- Δίνη απορροής νεροχύτη
- Πεταλοειδής δίνη



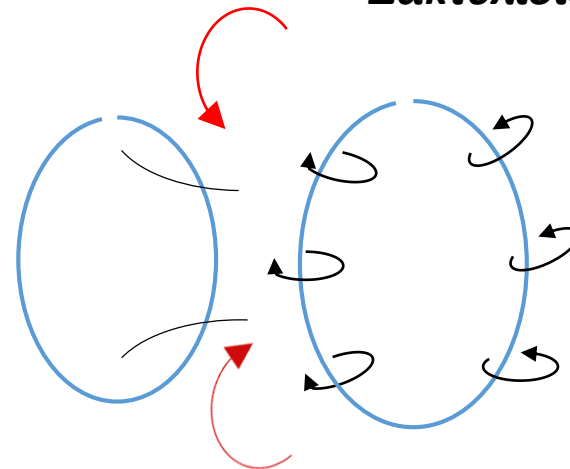
Στρόβιλοι (δίνες) στη μπανιέρα



Στρόβιλοι άκρων πτερύγων (tip vortices)



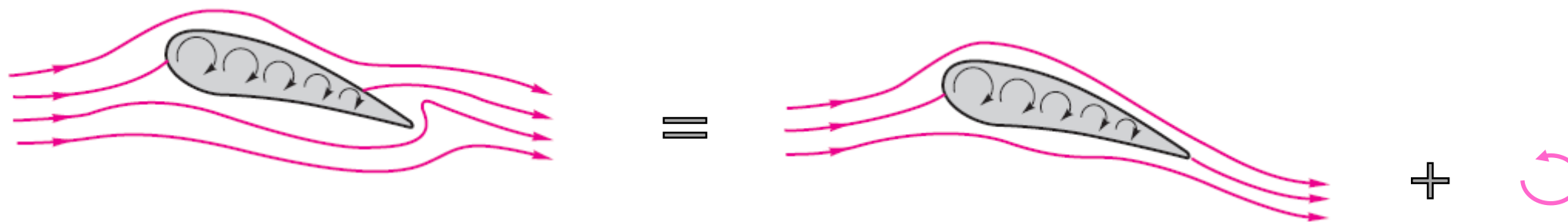
Δακτυλίδια καπνού



Θεώρημα Kutta-Zukowski

$$F_L = -\rho U_\infty \Gamma$$

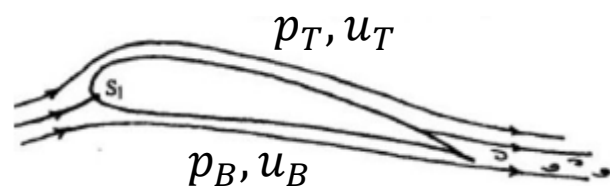
- Ισχύει για κυλινδρικά σώματα οποιασδήποτε διατομής
- Η κυκλοφορία καθορίζεται από το σχήμα της διατομής, σε συνδυασμό με την συμπεριφορά του οριακού στρώματος



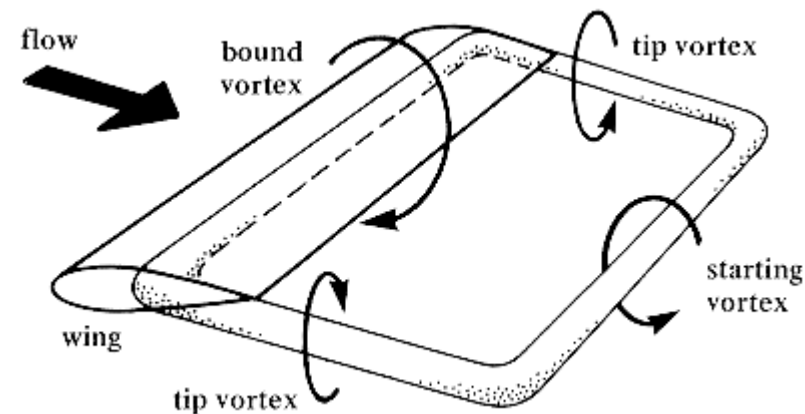
Το παράδειγμα της λεπτής αεροτομής

$$F_L = \int_0^c (p_B - p_T) dx = \int_0^c \frac{1}{2} \rho (u_T^2 - u_B^2) dx \approx \rho U_\infty \int_0^c (u_T - u_B) dx$$

$$= \rho U_\infty (-\oint \underline{u} dx) = -\rho U_\infty \Gamma$$



Δίνες γύρω από πτερύγιο αεροσκάφους



Θεωρία οριακού στρώματος

Η αναγκαιότητα του οριακού στρώματος



$$\frac{\partial \underline{\hat{u}}}{\partial \hat{t}} + \underline{\hat{u}} \cdot \underline{\hat{\nabla}} \underline{\hat{u}} = -\underline{\hat{\nabla}} \hat{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{\hat{u}}$$

$Re \gg 1 \Rightarrow$ Αδρανειακές δυνάμεις \gg Ιξώδεις δυνάμεις : $u_{inv}(x, 0) = u_{\infty}(x)$
 Όμως, η σωστή συνοριακή συνθήκη είναι: $u(x, 0) = 0$

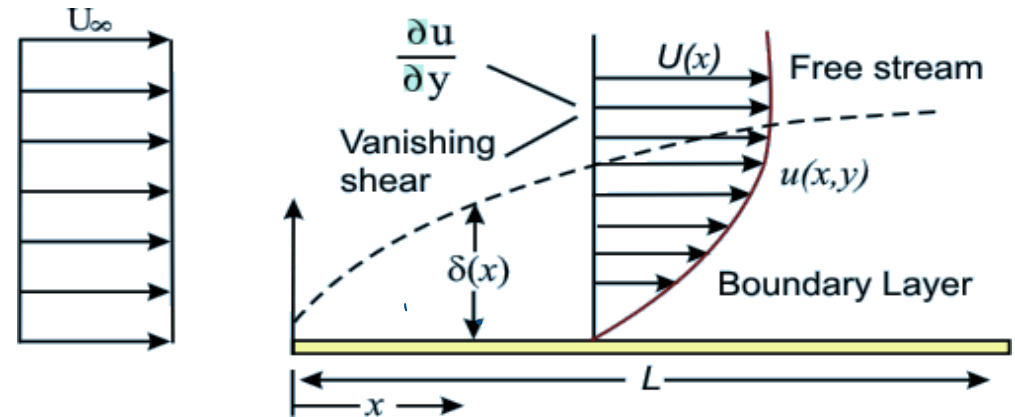
Άρα, $u \rightarrow 0$ σε πολύ μικρή απόσταση, δ , από το τοίχωμα.

(Matched asymptotic expansions: Ταιριασμένα ασυμπτωτικά αναπτύγματα)

Στο πάχος, δ , του οριακού στρώματος οι ιξώδεις δυνάμεις είναι ίσες με τις αδρανειακές. Άρα,

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \mu \frac{U}{\delta^2} \sim \rho U \frac{U}{L} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta}{L} \sim Re^{-1/2}$$



Χαρακτηριστικές κλίμακες οριακού στρώματος

$$\left. \begin{array}{l} x \sim L \\ y \sim \delta \end{array} \right\} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow V \sim \frac{U\delta}{L} \ll U, \quad (\Delta p)_x \sim \Pi, \quad (\Delta p)_y \sim \Lambda$$

Ανάλυση τάξης μεγέθους και εξισώσεις οριακού στρώματος

Έστω ροή πάνω από τοίχωμα μικρής καμπυλότητας. Η ατριβής λύση δίνει: $u(x, 0) = u_\infty(x)$, $p(x, 0) = p_\infty(x)$
 (x το μήκος τόξου πάνω στο τοίχωμα στη διεύθυνση ροής)

x-ορμή

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{U^2}{L} \quad \frac{UV}{\delta} \sim \frac{U^2}{L} \quad \frac{\Pi}{\rho L} \quad \frac{\nu U}{L^2} \ll \frac{\nu U}{\delta^2} \quad \frac{\nu U}{\delta^2} \sim \frac{U^2}{L}$$

y-ορμή

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{UV}{L} \sim \frac{U^2 \delta}{L L} \quad \frac{\Lambda}{\rho \delta} \quad \frac{\nu V}{L^2} \ll \frac{\nu V}{\delta^2} \quad \frac{\nu V}{\delta^2} \sim \frac{U^2 \delta}{L L}$$

κατανομή πίεσης $\frac{\Pi}{\rho L} \sim \frac{U^2}{L}$, $\frac{\Lambda}{\rho \delta} \sim \frac{U^2 \delta}{L L} \Rightarrow \frac{\Lambda}{\Pi} \sim \frac{\delta^2}{L^2} \ll \ll 1$

Μέσα στο οριακό στρώμα: $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$, $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp_\infty}{dx}$

Στο σύνορο:

$$u_\infty \frac{du_\infty}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_\infty}{dx} \quad (\text{εξίσωση Bernoulli στο τοίχωμα})$$

Τελικές εξισώσεις οριακού στρώματος (παραβολικές)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty \frac{du_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{du_\infty}{dx} > 0 \quad \text{Ευνοϊκή κλίση πίεσης}$$

$$\frac{du_\infty}{dx} < 0 \quad \text{Αντίθετη κλίση πίεσης}$$

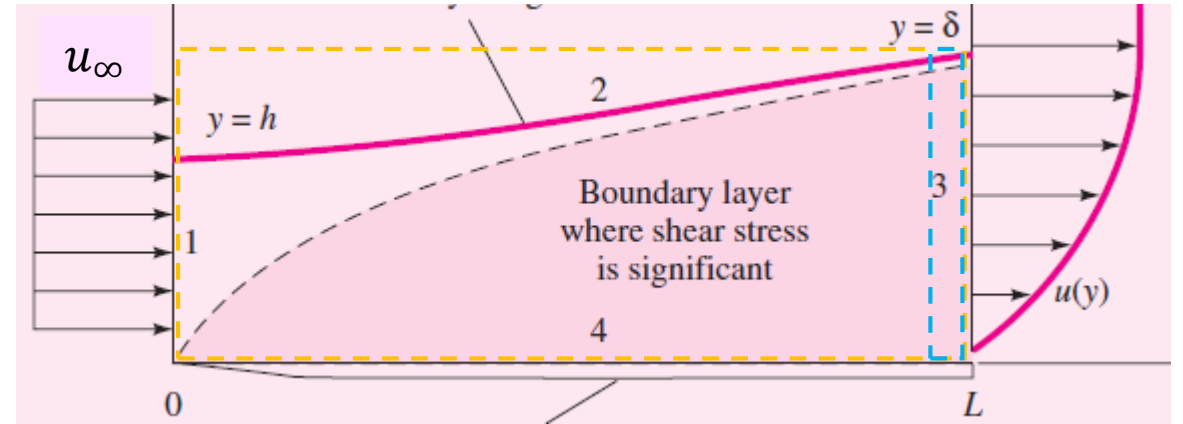
$$\frac{du_\infty}{dx} = 0 \quad \text{Επίπεδη πλάκα}$$

Ανάπτυξη του οριακού στρώματος: ολοκληρωτικά ισοζύγια vonKarman

Ισοζύγιο μάζας για μηδενική κλίση πίεσης

Πάχος μετατόπισης, δ_*

$$u_\infty \delta - \int_0^\delta u \, dy = u_\infty \delta_* \Rightarrow \delta_* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy$$



Ισοζύγιο ορμής για μηδενική κλίση πίεσης

Πάχος ελλείματος ορμής, Θ

$$D(x) = \rho u_\infty^2 \delta - \int_0^\delta \rho u^2 dy - \left(u_\infty \delta - \int_0^\delta u \, dy\right) \rho u_\infty = \int_0^\delta \rho u (u_\infty - u) \, dy = \rho u_\infty^2 \Theta \Rightarrow \Theta = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) \frac{u}{u_\infty} dy$$

Επίλυση με βάση προσεγγιστικό πεδίο ταχύτητας

$$u(x, y) = u_\infty f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)$$

- Εύρεση $\delta_* = \delta_*(\delta)$ και $\Theta = \Theta(\delta)$
- Εύρεση $\tau_w = \mu(\partial u / \partial y)_{y=0} = \tau_w(\delta)$
- Αντικατάσταση στο ισοζύγιο vonKarman $\Rightarrow \delta(x)$

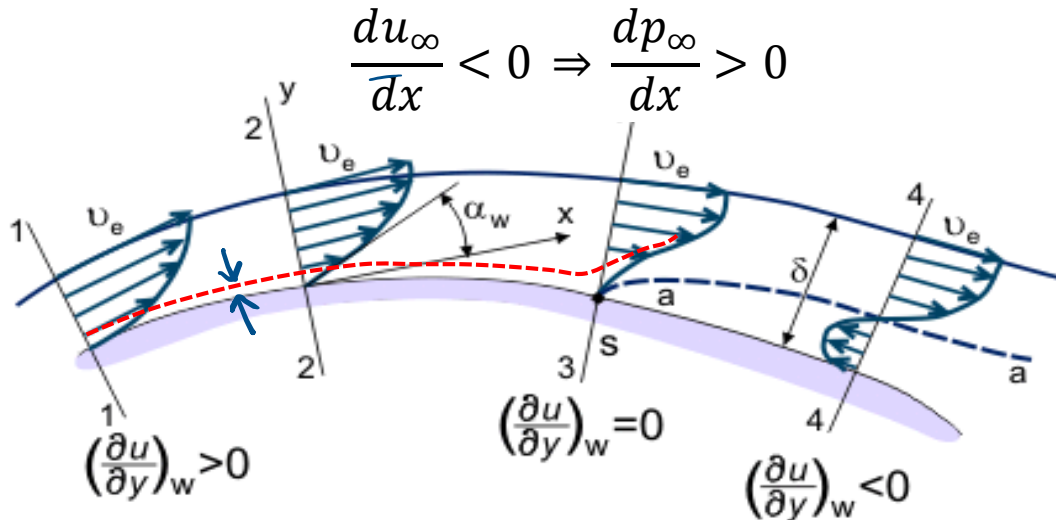
Οριακό στρώμα με μη-μηδενική κλίση πίεσης

$$\frac{d}{dx}(\rho u_\infty^2 \Theta) = \tau_w + \delta_* \frac{dp_\infty}{dx} \Rightarrow \frac{d\Theta}{dx} = \frac{f}{2} - \frac{\delta_* + 2\Theta}{u_\infty} \frac{du_\infty}{dx}$$

$$\frac{dp_\infty}{dx} \leq 0 \text{ αργή/γρήγορη αύξηση πάχους}$$

$$f = \frac{2\tau_w}{\rho u_\infty^2}$$

Αντίθετη κλίση πίεσης



- Κατάντη αύξηση πίεσης επιβραδύνει τα σωματίδια ρευστού κοντά στο τοίχωμα (έχουν μικρή αδράνεια)
- Η κίνηση μπορεί να διατηρηθεί μόνον με μεταφορά ορμής (σύρσιμο) από την κυρίως ροή
- Η αποκόλληση του οριακού στρώματος οδηγεί στη μεταφορά ρευστού με στροβιλότητα μακριά από το τοίχωμα (ακύρωση ιδανικής ροής)

Απομάκρυνση ροϊκής γραμμής από το τοίχωμα

Έστω ροϊκή γραμμή στη θέση $y = h(x)$ κοντά στο τοίχωμα:

$$y \ll \delta \Rightarrow u(y) \approx y \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \approx \frac{y\tau_w}{\mu}$$

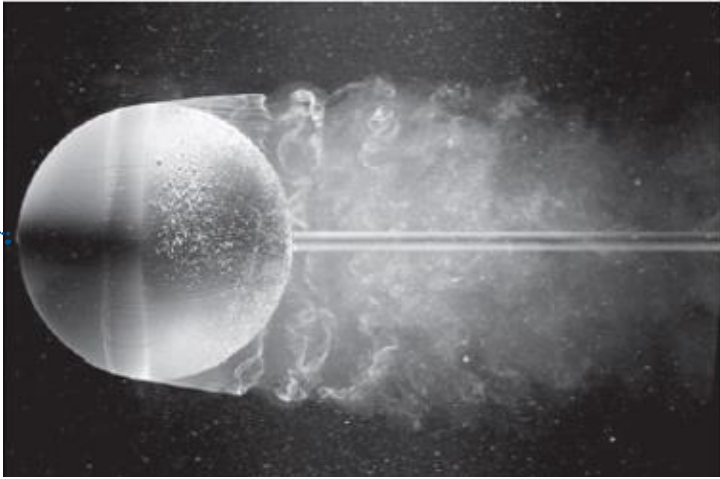
Παροχή μεταξύ τοιχώματος και $y = h(x)$:

$$\dot{m} = \int_0^h \rho u dy \approx \int_0^h \rho \frac{y\tau_w}{\mu} dy \approx \frac{1}{2} h^2 \frac{\tau_w}{\nu} \Rightarrow h(x) \sim \sqrt{\frac{\dot{m}}{\tau_w}}$$

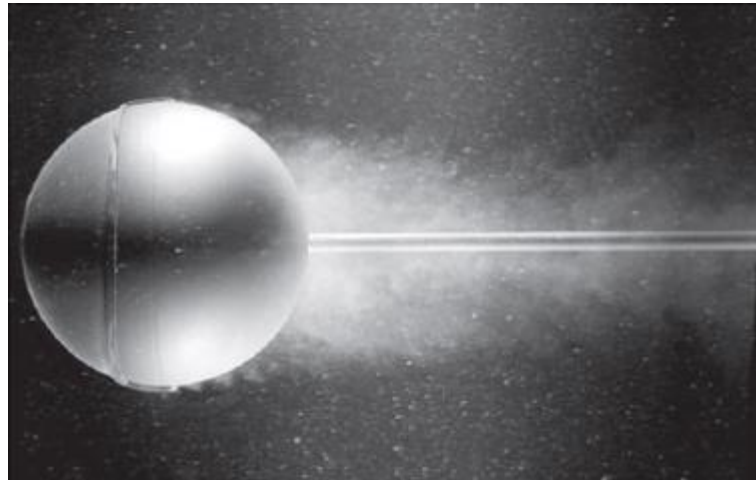
$$\tau_w \rightarrow 0 \Rightarrow h(x) \rightarrow \infty$$

Με τον μηδενισμό της διατμητικής τάσης, η ροή αποκολλάται από το τοίχωμα

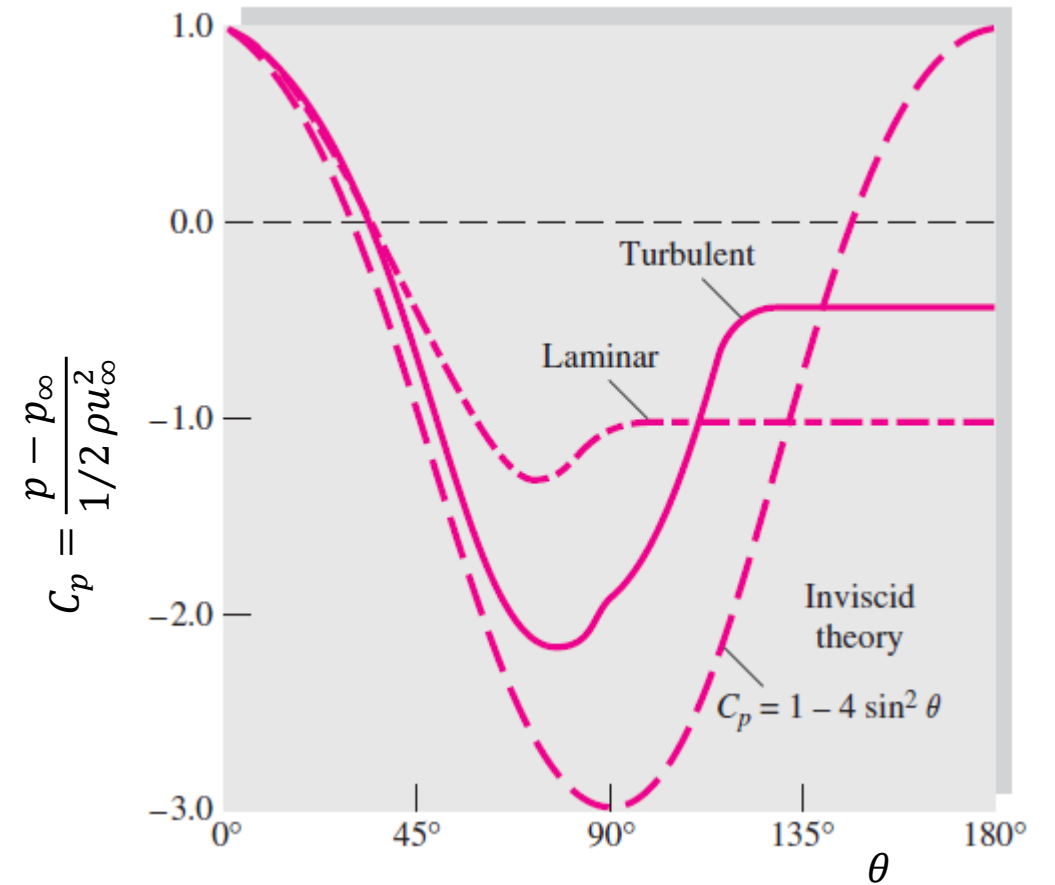
Στρωτή και τυρβώδης αποκόλληση



Στρωτή ροή: μεταφορά ορμής μόνον με μοριακό μηχανισμό



Τυρβώδης ροή: μεταφορά ορμής με δινοδιαχυτότητα

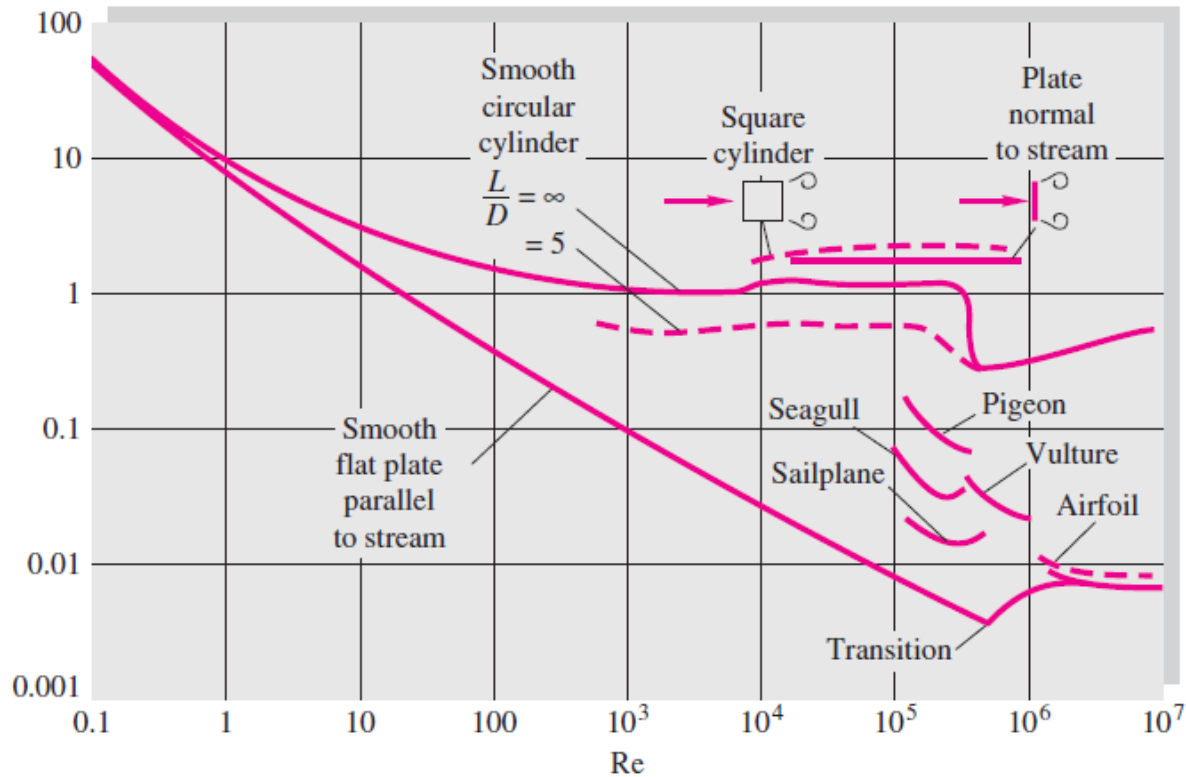
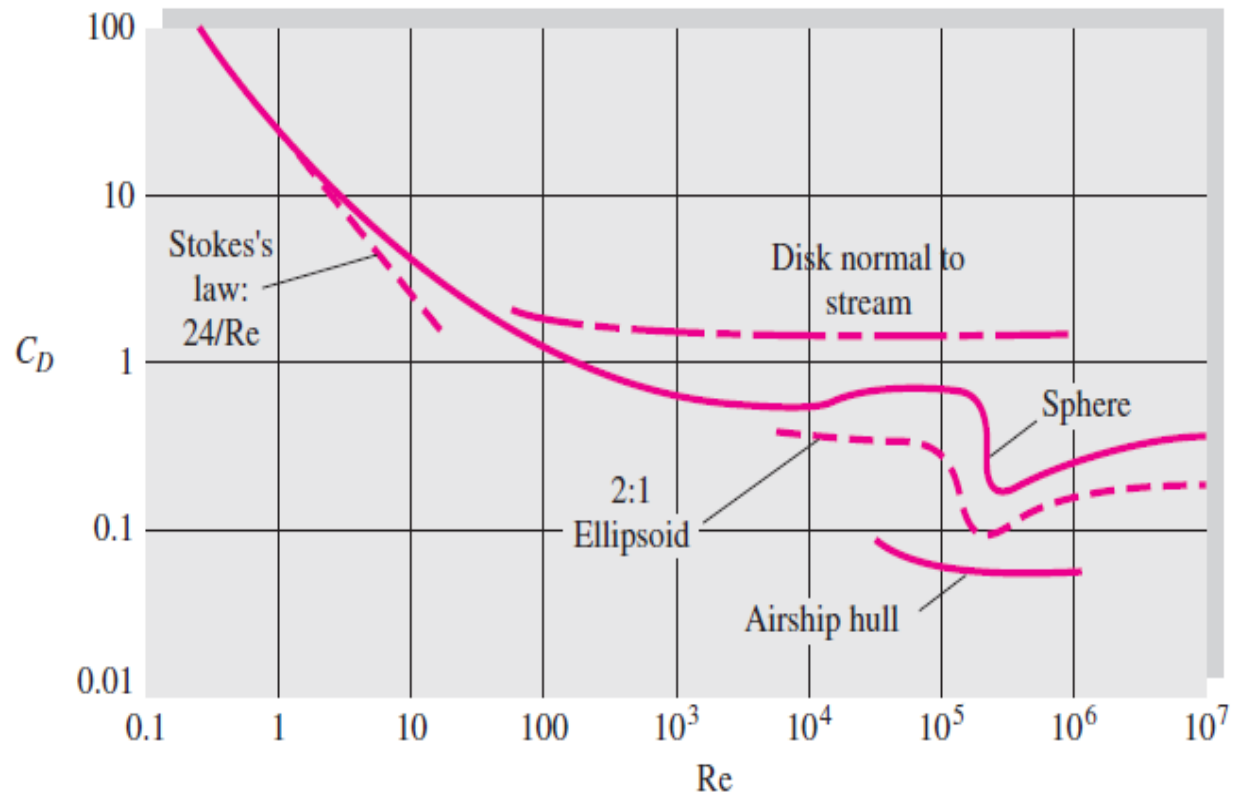


Οπισθέλκουσα δύναμη σε στερεά σώματα

$$F_D = C_D A \frac{1}{2} \rho u_\infty^2$$

Σφαίρα (και άλλα αξονοσυμμετρικά εμπόδια)

$$c_D \approx 0,4 + \frac{24}{Re} + \frac{6}{Re^{1/2}} \quad 10 \leq Re \leq 10^5$$

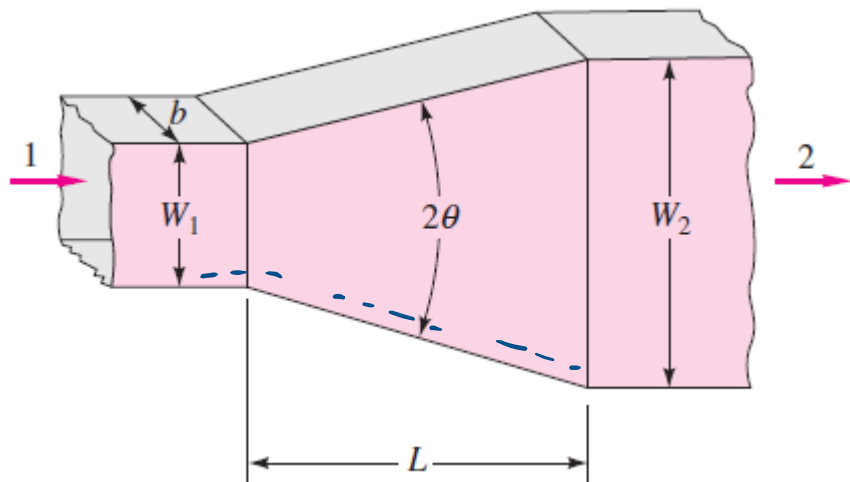


Κύλινδρος (και άλλα διδιάστατα εμπόδια)

$$c_D \approx 1 + \frac{10}{Re^{2/3}} \quad 1 \leq Re \leq 10^4$$

Στόχος

Ανάκτηση πίεσης $p_0 = p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2$

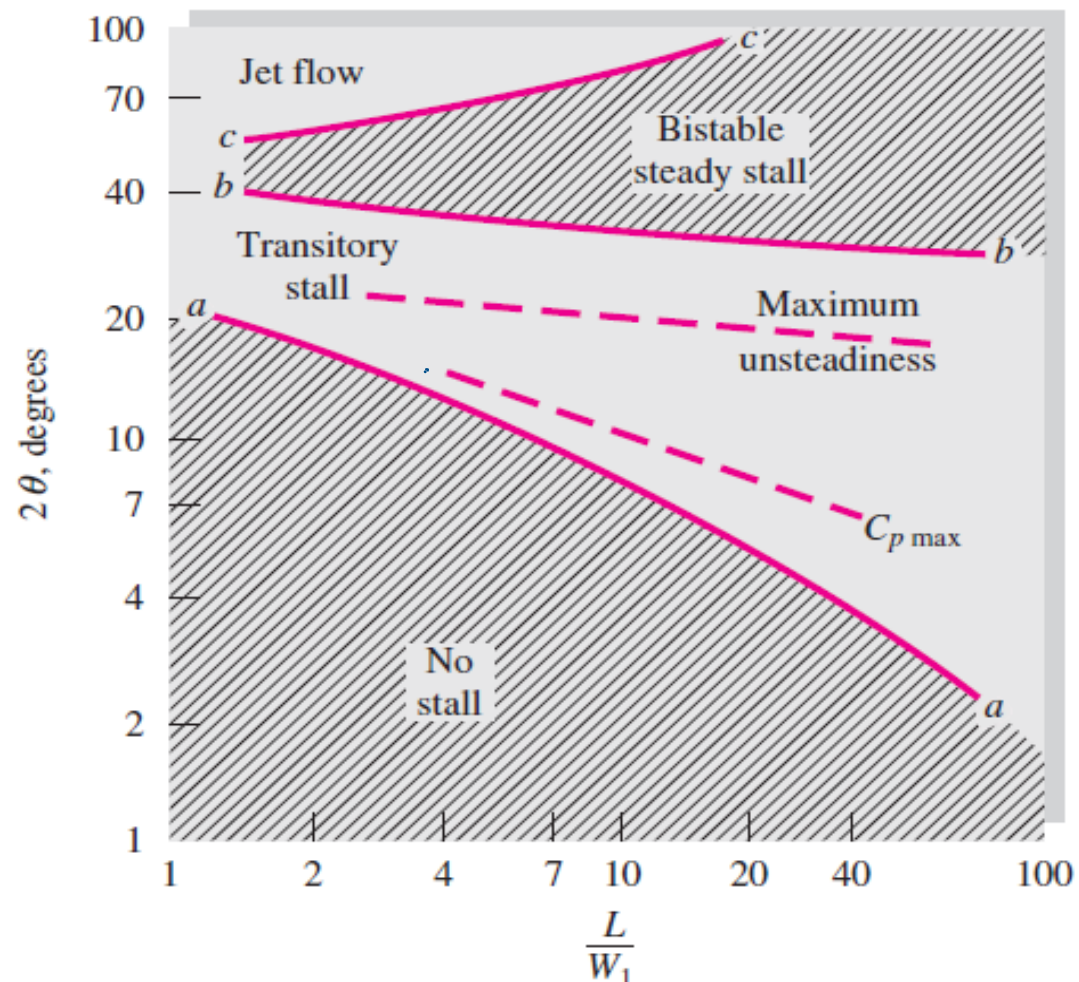


$$C_p = \frac{p_2 - p_1}{p_0 - p_1} \approx 1 - \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 \approx 1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

κλάσμα απόφραξης: $B_1 = \frac{(2W_1 + 2b)\delta_1}{W_1 b} (\approx 0,02 - 0,12)$

Ο ρόλος των οριακών στρωμάτων

- Μερική απόφραξη στην είσοδο λόγω πάχους οριακού στρώματος
- Αποκόλληση/ δυναμική αλληλεπίδραση λόγω αντίθετης κλίσης πίεσης



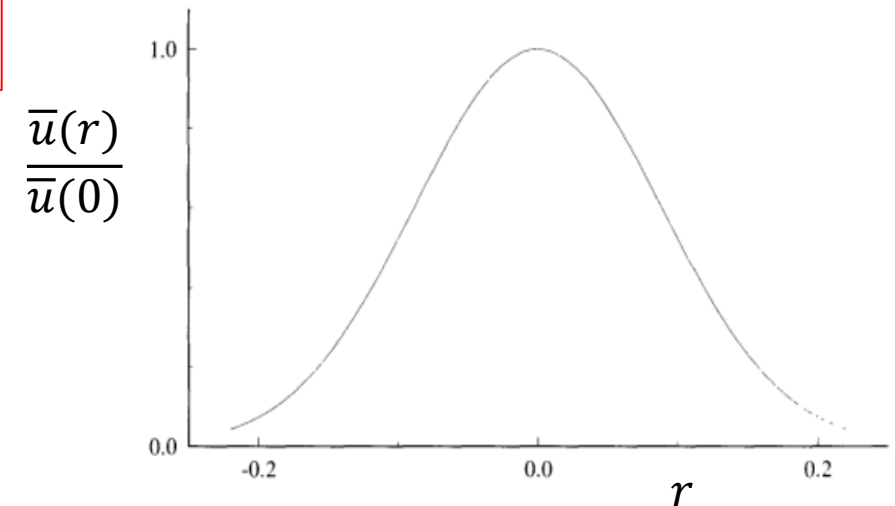
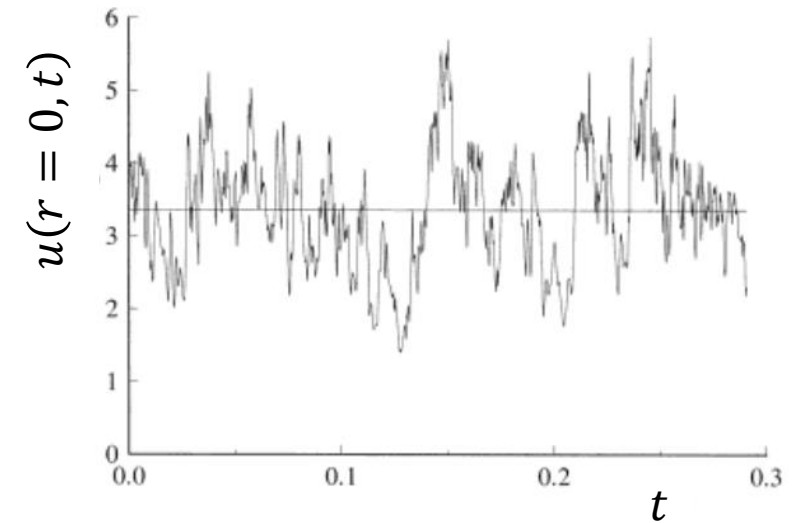
Τυρβώδης ροή

Χαρακτηριστικά της τυρβώδους ροής

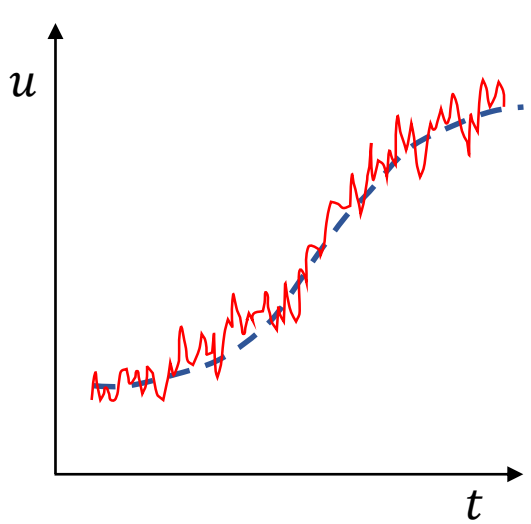


Το παράδειγμα της τυρβώδους δέσμης

- Έντονες διακυμάνσεις
- Δομές σε πολλαπλές χωρικές κλίμακες
- Χρονικές διακυμάνσεις σε μεγάλο εύρος συχνοτήτων
- Ομαλή συμπεριφορά μέσων τιμών



Περιγραφή της τυρβώδους ροής



$$\bar{u}_i(\underline{x}, t) = \frac{1}{T} \int_0^T u_i(\underline{x}, t) dt$$

$$\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \overline{\frac{\partial a}{\partial x, t}} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x, t}$$

$$\overline{\bar{a}} = \bar{a}, \quad \overline{\bar{a}b} = \bar{a}\bar{b} \quad \text{αλλά} \quad \overline{ab} \neq \bar{a}\bar{b}$$

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \Rightarrow \overline{u'_i} = 0$$

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j}$$

$$\text{Ανεξάρτητες διαταραχές} \Leftrightarrow \overline{u'_i u'_j} = 0$$

$$\text{Οι δίνες της τύρβης} \Rightarrow \overline{u'_i u'_j} \neq 0$$

Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS)

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial t} + \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 \overline{u_j}}{\partial x_i \partial x_i} \right) \Rightarrow \rho \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_i} \right)$$

$$\overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} = \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_i}$$

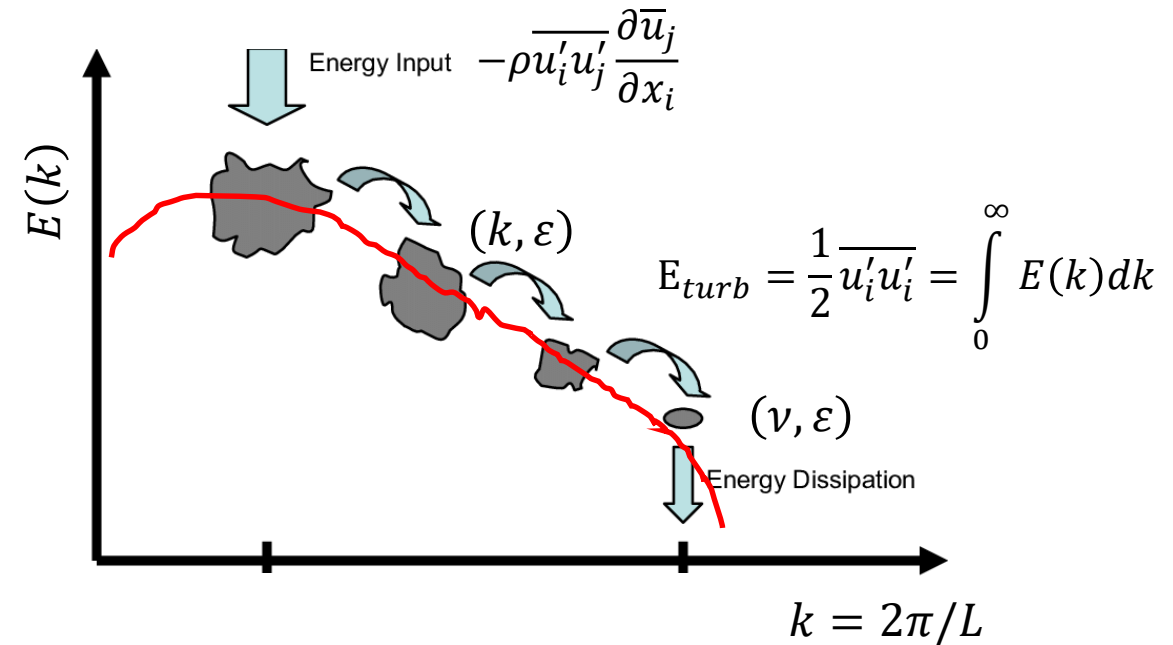
$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right)$$

$$\tau_{ij} = \mu \frac{d\bar{u}_j}{dx_i} - \rho \overline{u'_i u'_j}$$

↑ ↑
 Ιξώδης τάση Τάση Reynolds

Ισοζύγιο τυρβώδους ενέργειας

- Η κινητική ενέργεια της τύρβης κατανέμεται σε πολλές κλίμακες (δίνες)
- Τυρβώδης ενέργεια παράγεται στην μακρο-κλίμακα και μεταφέρεται προς τα κάτω (energy cascade)
- Η ενέργεια σκεδάζεται στην μικρο-κλίμακα Kolmogorov (viscous dissipation)
- Η μικρο-κλίμακα εξαρτάται μόνον από το ιξώδες, $\nu [=] m^2/s$ και το ρυθμό μεταφοράς ενέργειας, $\varepsilon [=] m^2/s^3$



Μακρο-κλίμακα τύρβης

Χαρ/κό μήκος της ροής: L_1

Μέση ταχύτητα: U

Κινητική ενέργεια τύρβης: $u_1^2 = \overline{u'_i u'_i}$

Χαρ/κή ταχύτητα τύρβης: u_1 ($u_1 \sim 0,1 U$)

Χαρ/κός χρόνος ζωής δίνης: $t_1 = L_1/u_1$

Μικρο-κλίμακα Kolmogorov

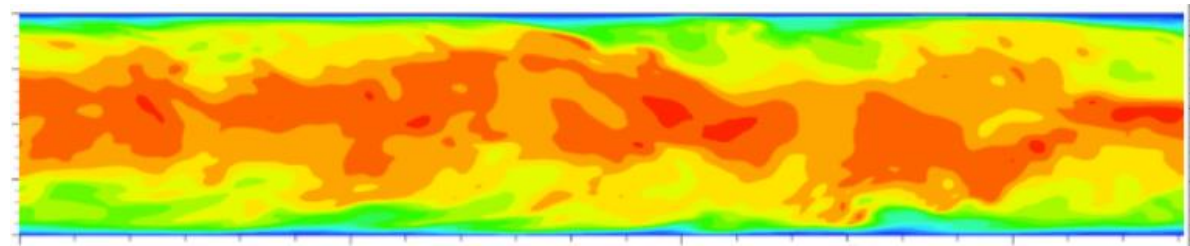
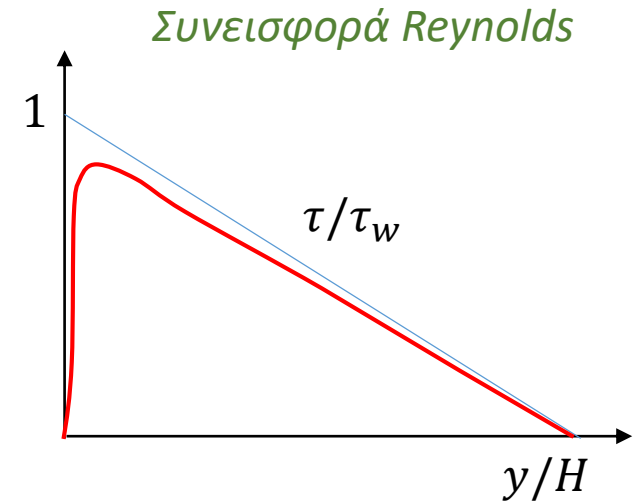
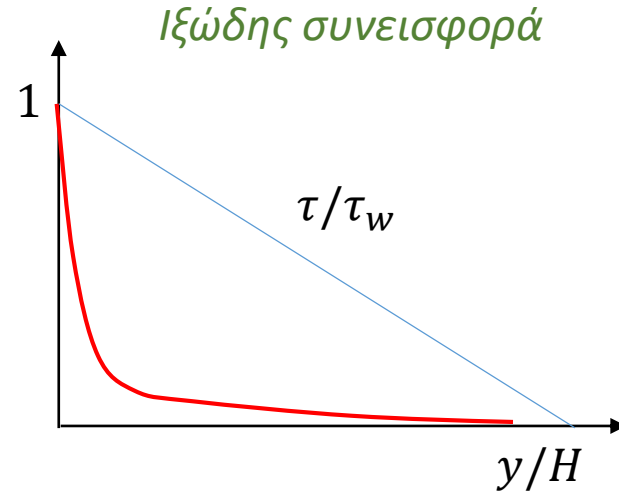
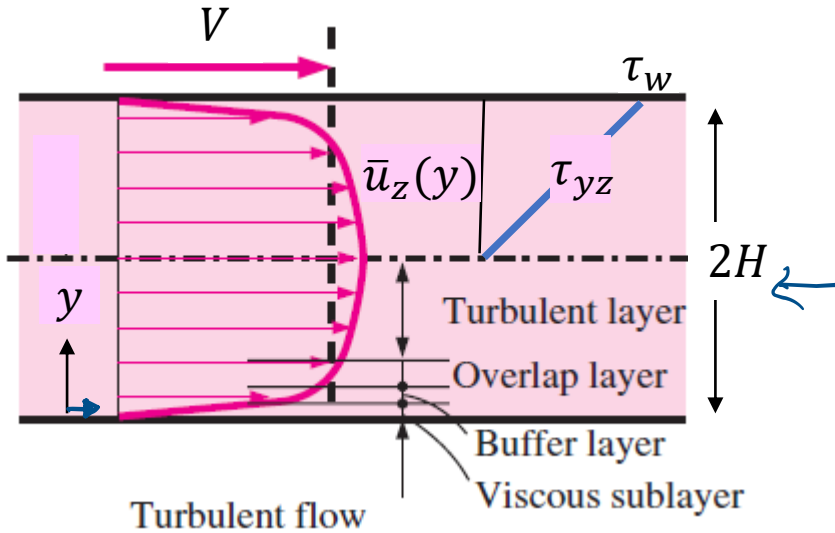
$$L_2, u_2, t_2 = f(\varepsilon, \nu) \quad L_2 = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}, \quad u_2 = (\varepsilon \nu)^{1/4}, \quad t_2 = (\nu/\varepsilon)^{1/2} \quad (Re_2 = 1)$$

$$\text{Ρυθμός μεταφοράς} = \text{Ρυθμός σκέδασης} \Rightarrow \frac{u_1^2}{L_1/u_1} = \varepsilon$$

$$L_2 = L_1 (Re_1)^{-3/4}, \quad u_2 = u_1 (Re_1)^{-1/4}, \quad t_2 = t_1 (Re_1)^{-1/2}$$

Παράδειγμα: Αέρας με $U=15 m/s$ σε αγωγό $d=0,1 m$: $Re_1=10^4$, $L_2=100 \mu m$, $t_2=0,7 ms$

Τυρβώδης ροή κοντά σε τοίχωμα



Χαρακτηριστικές κλίμακες τοιχώματος (ρ, ν, τ_w)

$$\Delta P(W2H) = \tau_w(2WL) \Rightarrow \tau_w = H \frac{\Delta P}{L}$$

$$\underline{\bar{u}} = (0, 0, \bar{u}_z(y)), \tau_{zx} = \tau_{yx} = 0$$

$$\frac{d\tau_{yz}}{dy} = \frac{d\bar{p}}{dz} = -\frac{\Delta P}{L} \Rightarrow \frac{\tau_{yz}}{\tau_w} = \left(1 - \frac{y}{H}\right)$$

$$\tau_{yz} = \mu \frac{d\bar{u}_z}{dy} - \overline{\rho u'_z u'_y}$$

Ιξώδης τάση Τάση Reynolds

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, y_* = \frac{y}{\nu}, Re_* = \frac{u_* y_*}{\nu} = 1$$

$$\underline{u}_+ = \frac{u}{u_*}, \underline{y}_+ = \frac{y}{y_*} = \frac{yu_*}{\nu}$$

Τοπικός Re

Τυρβώδης ροή σε λείο αγωγό: Ο νόμος του τοιχώματος

Η ροή (καναλιού ή αγωγού) προσδιορίζεται πλήρως από: $\rho, \nu, H, u_* \rightarrow U_0$

$$\bar{u}_z = u_* F\left(\frac{y}{H}, \frac{u_* H}{\nu}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{d\bar{u}_z}{dy} = \frac{u_*}{y} \Phi\left(\frac{y}{y_*}, \frac{y}{H}\right) \quad \left(\frac{y}{y_*} = \frac{y u_* H}{H \nu}\right)$$

$$u_+ = 2,44 \ln y_+ + 5,0$$

Βασική παραδοχή (Prandtl)

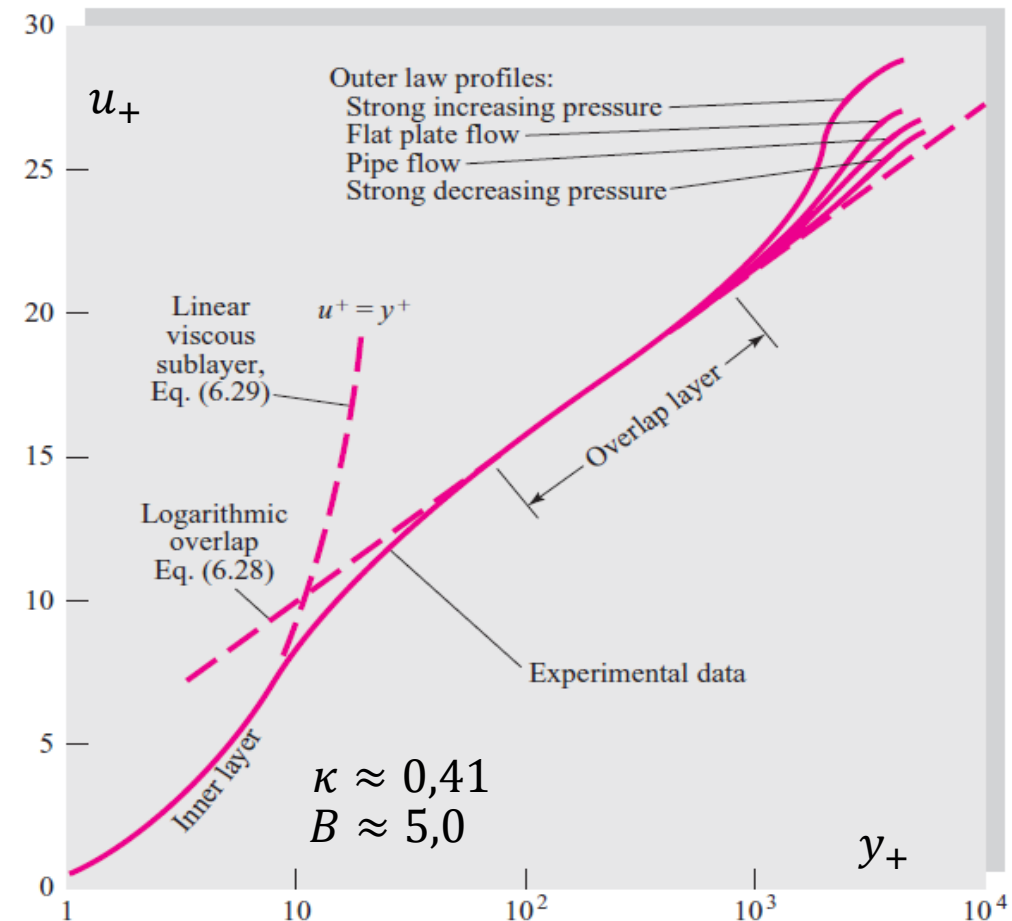
Σε υψηλούς Re, υπάρχει περιοχή κοντά στο τοίχωμα ($y/H < 0,1$ εσωτερική περιοχή) όπου η μέση ταχύτητα καθορίζεται μόνον από τις κλίμακες του τοιχώματος και είναι ανεξάρτητη των H, U_0 .

$$\frac{d\bar{u}_z}{dy} \approx \frac{u_*}{y} \Phi_1\left(\frac{y}{y_*}\right) \Rightarrow \frac{du_+}{dy_+} \approx \frac{1}{y_+} \Phi_1(y_+)$$

$$y_+ \sim O(1): \quad \frac{d\bar{u}_z}{dy} \approx \frac{\tau_w}{\mu} \Rightarrow \frac{du_+}{dy_+} \approx 1 \Rightarrow u_+ = y_+$$

$$y_+ > 50: \quad \Phi_1(y_+) \rightarrow \frac{1}{\kappa} \Rightarrow \frac{du_+}{dy_+} \approx \frac{1}{\kappa y_+} \Rightarrow u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + B$$

εξωτερικό τμήμα εσωτερικής περιοχής (overlap layer)



Τυρβώδης ροή σε τραχύ αγωγό: Ο νόμος του τοιχώματος

Έστω ότι η τραχύτητα χαρακτηρίζεται από το ύψος, s

$$\frac{d\bar{u}_z}{dy} = \frac{u_*}{y} \Phi\left(\frac{y}{H}, \frac{y}{y_*}, \frac{s}{y_*}\right)$$

Εσωτερική περιοχή (Prandtl)

$$\frac{d\bar{u}_z}{dy} \approx \frac{u_*}{y} \Phi\left(\frac{y}{y_*}, \frac{s}{y_*}\right)$$

$$\kappa \approx 0,41 \quad B \approx 5,0 \quad B_2 \approx 8,5$$

$$s \ll y_* : \Phi\left(\frac{y}{y_*}, \frac{s}{y_*}\right) \rightarrow \Phi_1\left(\frac{y}{y_*}\right) \Rightarrow u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + B \quad \text{για } H \gg y \gg y_* \text{ (λείο τοίχωμα)}$$

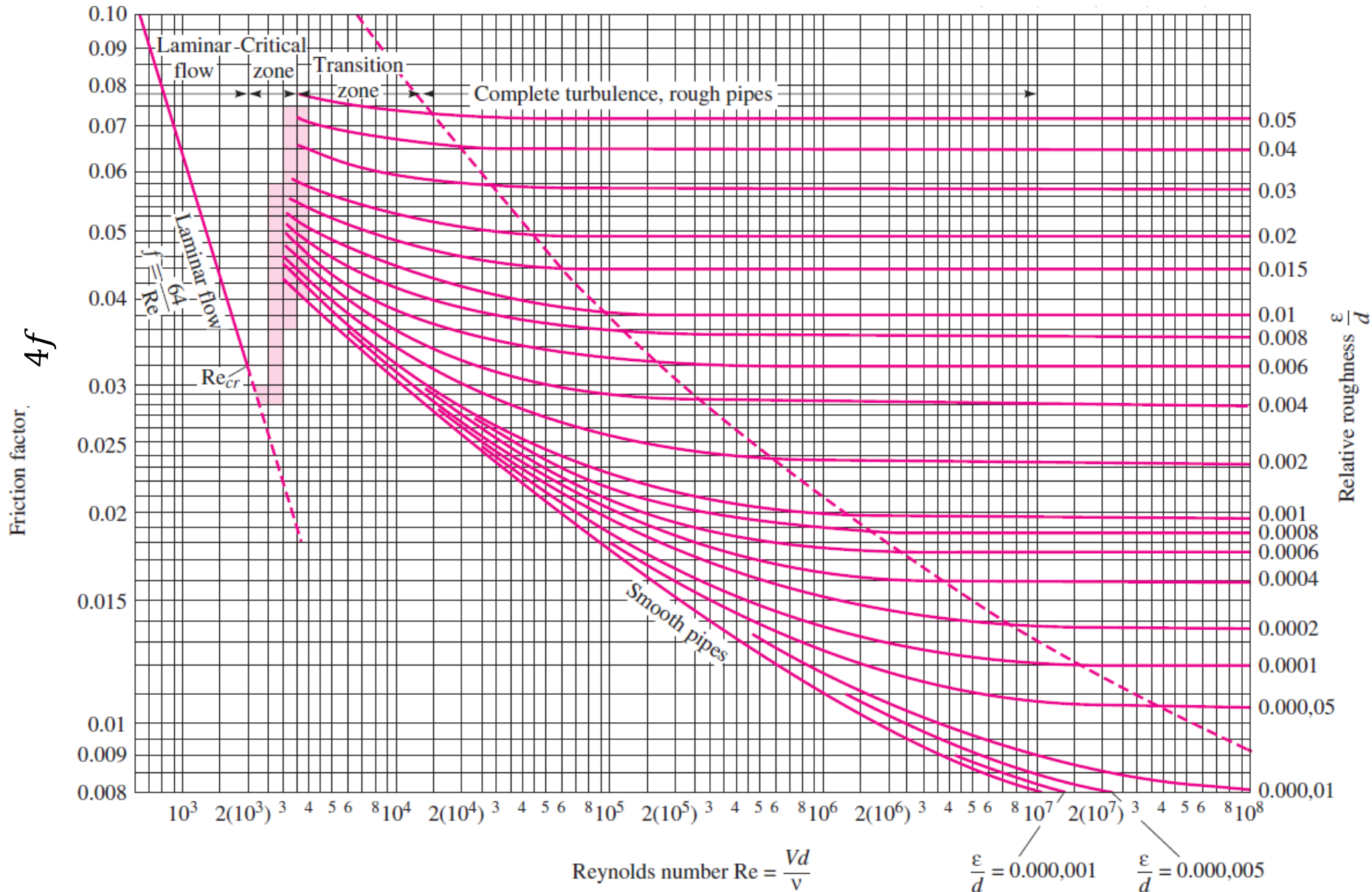
$$u_+ = 2,44 \ln y_+ + 5,0$$

$$s \gg y_* : \Phi\left(\frac{y}{y_*}, \frac{s}{y_*}\right) \rightarrow \Phi_2\left(\frac{y}{s}\right) \Rightarrow \frac{d\bar{u}_z}{dy} \approx \frac{u_*}{y} \Phi_2\left(\frac{y}{s}\right) \Rightarrow u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{s}\right) + B_2 \quad \text{για } H \gg y \gg s$$

$$u_+ = 2,44 \ln\left(\frac{y}{s}\right) + 8,5$$

Μεταφορά ορμής στο τοίχωμα μέσω οπισθέλκουσας μορφής
(αμελητέα συνεισφορά ιξωδών τάσεων: y_* εκπίπτει)

Διάγραμμα Moody



$$\epsilon_+ = \frac{\epsilon u_*}{\nu} < 5$$

$$u_+ = 2,44 \ln y_+ + 5,0$$

$$\frac{\langle u \rangle}{u_*} = 2,44 \ln \left(\frac{u_* R}{\nu} \right) + 1,34$$

$$\frac{1}{\sqrt{4f}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{4f}} \right)$$

$$\epsilon_+ = \frac{\epsilon u_*}{\nu} > 70$$

$$u_+ = 2,44 \ln \frac{y}{\epsilon} + 8,5$$

$$\frac{\langle u \rangle}{u_*} = 2,44 \ln \frac{d}{\epsilon} + 3,2$$

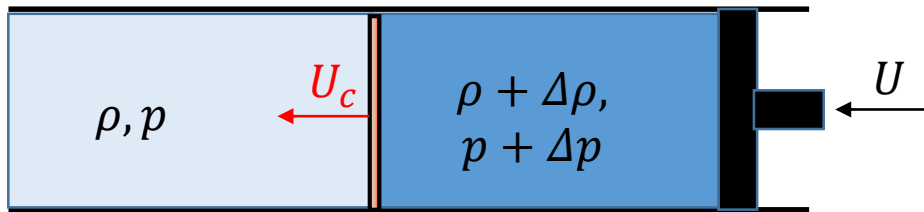
$$\frac{1}{\sqrt{4f}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon/d}{3,7} \right)$$

Συμπιεστές ροές

Ασυμπίεστες και συμπίεστες ροές

$\rho = \rho(p, T)$ Ασυμπίεστη ροή όταν $\Delta\rho/\rho \ll 1$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \frac{u^2}{c^2}, \quad c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s^{1/2} \Rightarrow \boxed{Ma = \frac{u}{c}}$$



$$\begin{aligned} \rho U_c &= (\rho + \Delta\rho)(U_c - U) \Rightarrow U = \frac{\Delta\rho}{\rho + \Delta\rho} U_c \\ (p + \Delta p) - p &= \rho U_c [U_c - (U_c - U)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta p = \rho U_c U \end{aligned}$$

$$\boxed{U_c^2 = \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \left(\frac{\Delta p}{\Delta\rho}\right) \xrightarrow{\Delta\rho/\rho \approx 0} c^2}$$

Αγνοήθηκαν μεταβολές θερμοκρασίας

Κύρια χαρ/κά ασυμπίεστης ροής

- Ακαριαία διάδοση μεταβολών πίεσης
- Ομαλή παράκαμψη σωμάτων

Κύρια φαινόμενα συμπίεστότητας

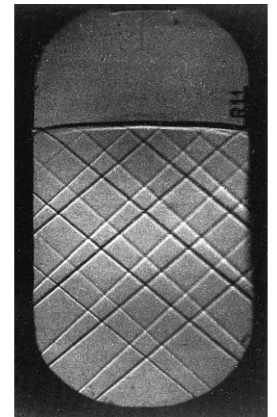
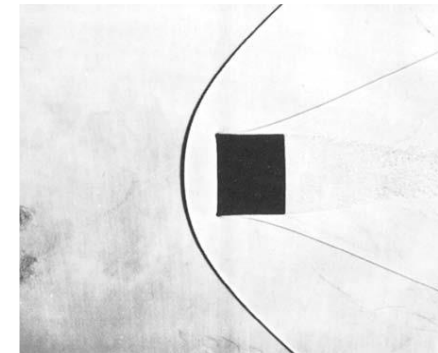
- Στραγγαλισμός ροής (choking)
- Παράκαμψη σωμάτων με κρουστικά κύματα (shock waves)

Όμως

- Ακουστική
- Φυσική συναγωγή



ΚΡΟΥΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ



Χαρακτηριστικά συμπίεστων ροών

- Τα αέρια όταν συμπιέζονται/εκτονώνονται θερμαίνονται/ψύχονται
- Διαταραχές διαδίδονται με την ταχύτητα του ήχου
- Σταδιακές μεταβολές είναι ισεντροπικές
- Αύξηση εντροπίας λόγω τριβών ή κρουστικών κυμάτων

Ισεντροπική συμπίεστη ροή σε ακροφύσια

Ιδιότητες ιδανικών αερίων ($p = \rho RT, R = \frac{\mathcal{R}}{M}$)

$$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^{1/2} = \sqrt{\gamma RT}, \quad \gamma = C_p / C_v$$

Για ισεντροπικές (αδιαβατικές+αντιστρεπτές) μεταβολές

$$T_0, p_0, \rho_0: \text{ιδιότητες ανακοπής: } \frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

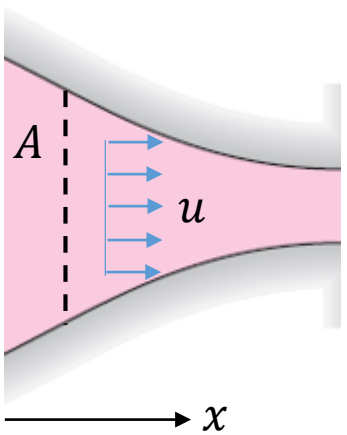
Ισοζύγιο ενέργειας

$$C_p T + \frac{1}{2} u^2 = C_p T_0 \Rightarrow \boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2}$$

$$T_*, p_*, \rho_*: \text{κρίσιμες ιδιότητες: } \frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

Εκτόνωση μέσω ακροφυσίου



Εξίσωση συνέχειας

$$\dot{m} = \rho u A \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

Ισοζύγιο ενέργειας

$$C_p dT + u du = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{\rho} + u du = 0$$

Ταχύτητα ήχου

$$dp = c^2 d\rho$$

Μεταβολή u, p με τη διατομή ροής

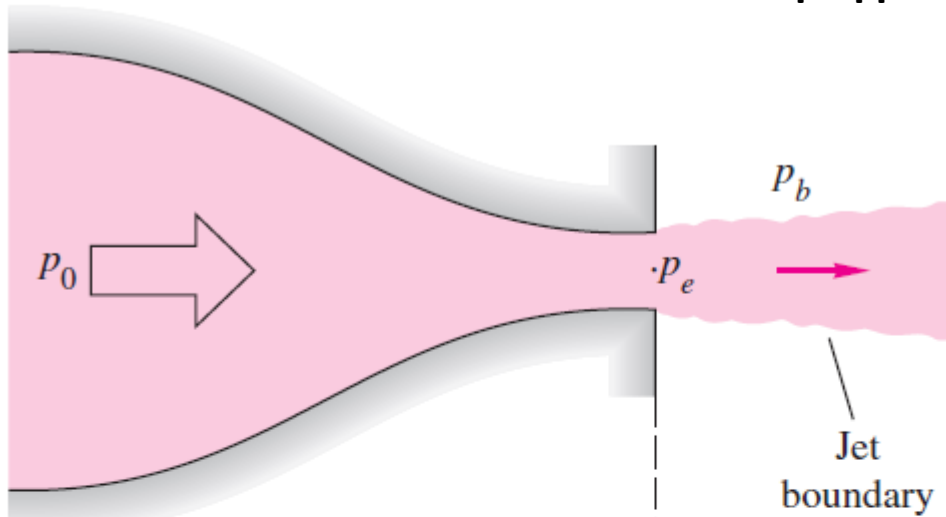
$$\boxed{\frac{du}{u} = \frac{dA}{A} \frac{1}{Ma^2 - 1} = -\frac{dp}{\rho u^2}}$$

Αντίθετη συμπεριφορά για $Ma < 1$ και $Ma > 1$

Όταν $Ma = 1 \Rightarrow dA = 0$

Διαρροές και Βαλβίδες ασφαλείας

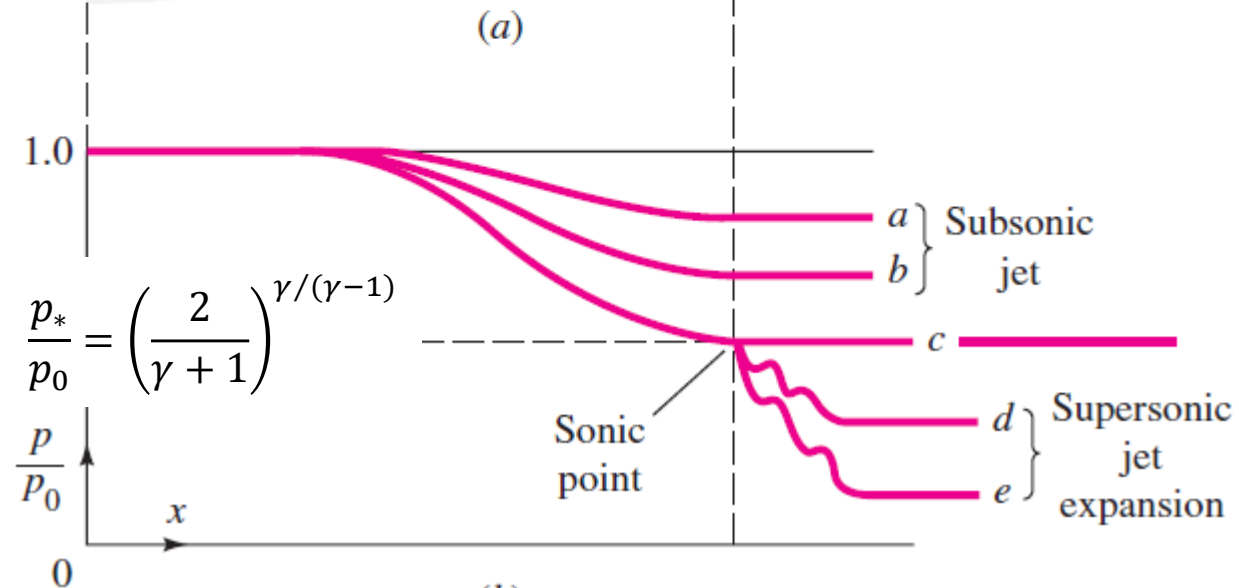
Στραγγαλισμός της ροής: Μείωση πίεσης \Rightarrow μείωση πυκνότητας \Rightarrow αύξηση ταχύτητας



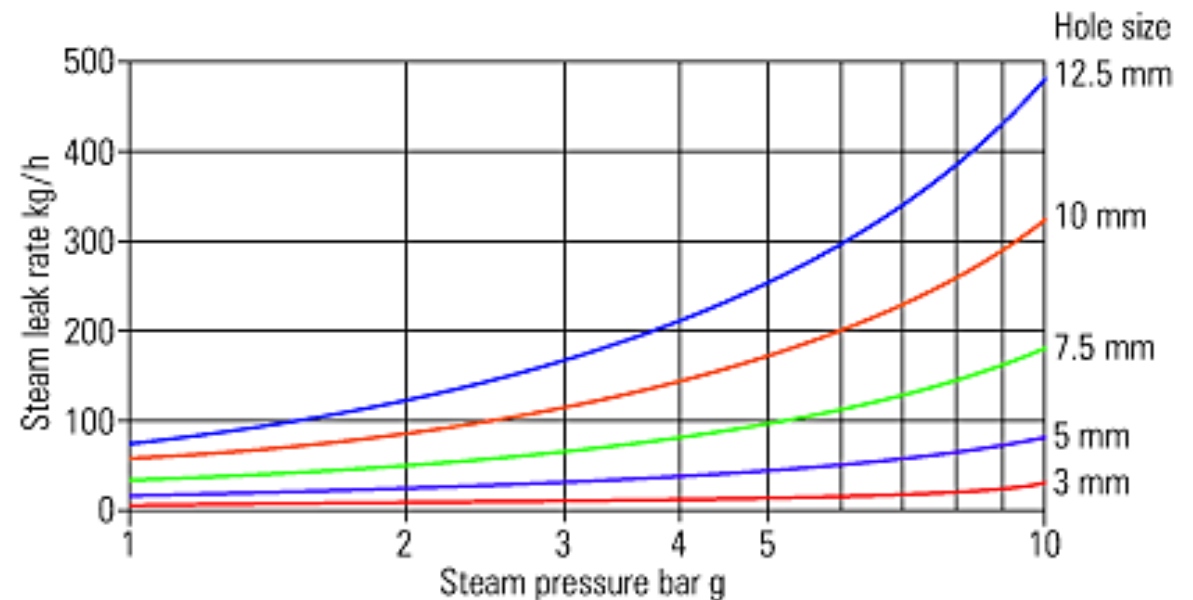
Ιδανικό αέριο- Ασυμπίεστο υγρό

$$\dot{m}_{max} = \rho_* A_* u_* = \rho_* A_{thr} c_* = A_{thr} \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\gamma \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}$$

$$\dot{m}_{max} = A_{thr} \sqrt{2\rho (p_0 - p_b)}$$



Διαφυγή ατμού



2010 ASME Boiler and Pressure Vessel Code

AN INTERNATIONAL CODE

Pressure Relief Devices

UG-125	General
UG-126	Pressure Relief Valves.....
UG-127	Nonreclosing Pressure Relief Devices
UG-128	Liquid Pressure Relief Valves
UG-129	Marking.....
UG-130	Code Symbol Stamp.....
UG-131	Certification of Capacity of Pressure Relief Devices
UG-132	Certification of Capacity of Pressure Relief Valves in Combination With Nonreclosing Pressure Relief Devices.....
UG-133	Determination of Pressure Relieving Requirements
UG-134	Pressure Settings and Performance Requirements.....
UG-135	Installation
UG-136	Minimum Requirements for Pressure Relief Valves.....
UG-137	Minimum Requirements for Rupture Disk Devices
UG-138	Minimum Requirements for Pin Devices
UG-140	Overpressure Protection by System Design

For tests with air,

$$W_T = 356AP \sqrt{\frac{M}{T}}$$

For tests with natural gas,

$$W_T = CAP \sqrt{\frac{M}{ZT}}$$

For tests with water,

$$W_T = 2407A \sqrt{(P - P_d)w}$$

where

A = actual discharge area through the device at developed lift, sq in.

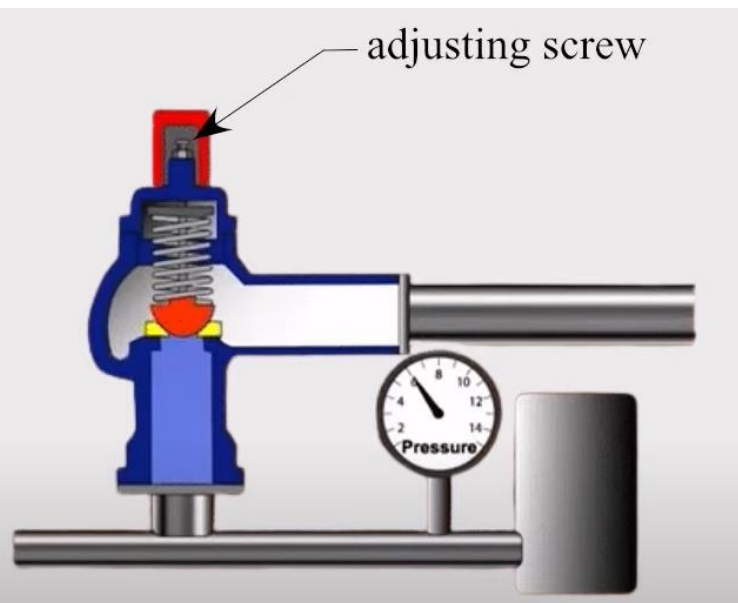
C = constant for gas or vapor based on the ratio of specific heats

$k = c_p/c_v$ (see Fig. 11-1)

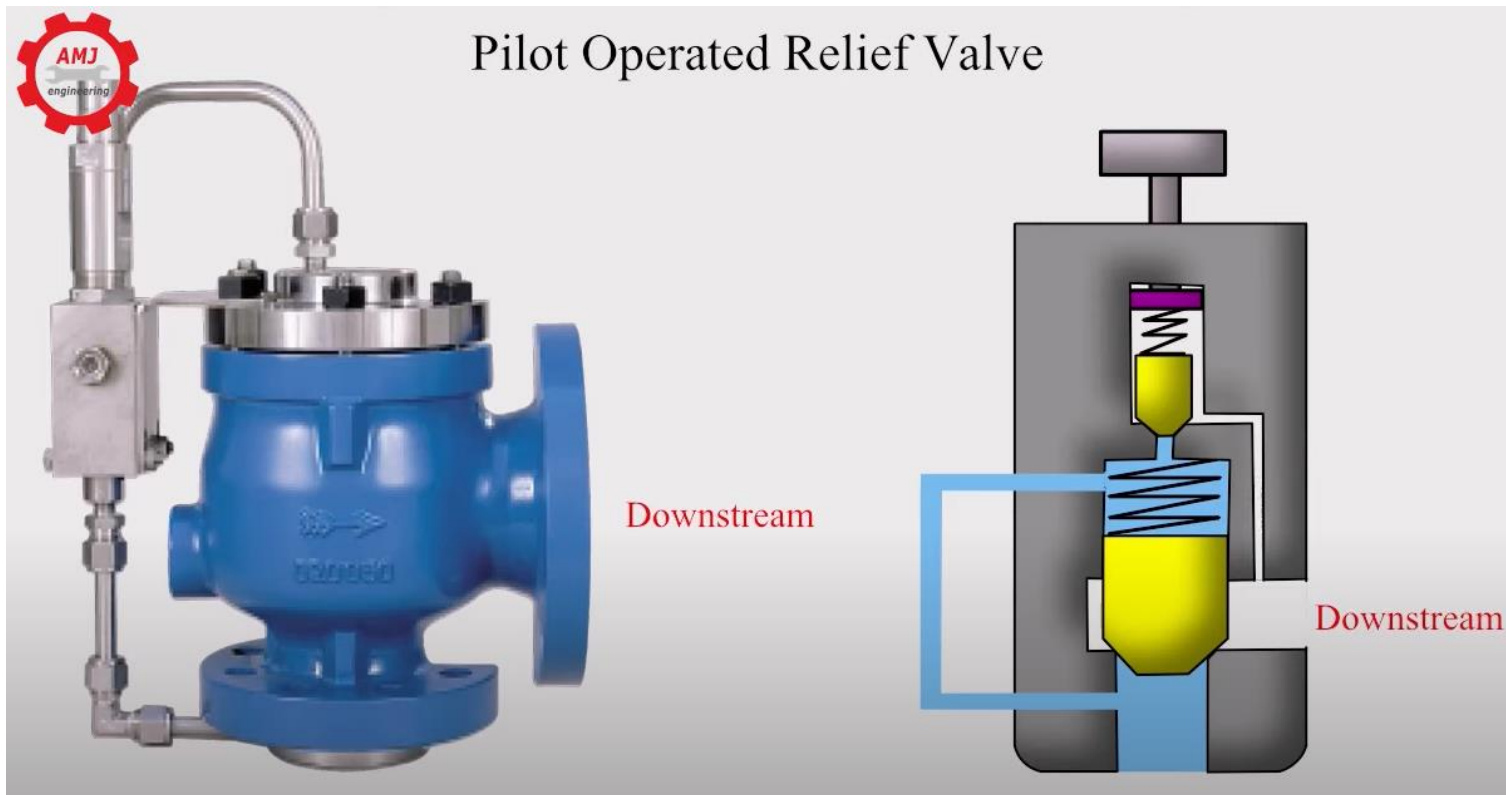
M = molecular weight



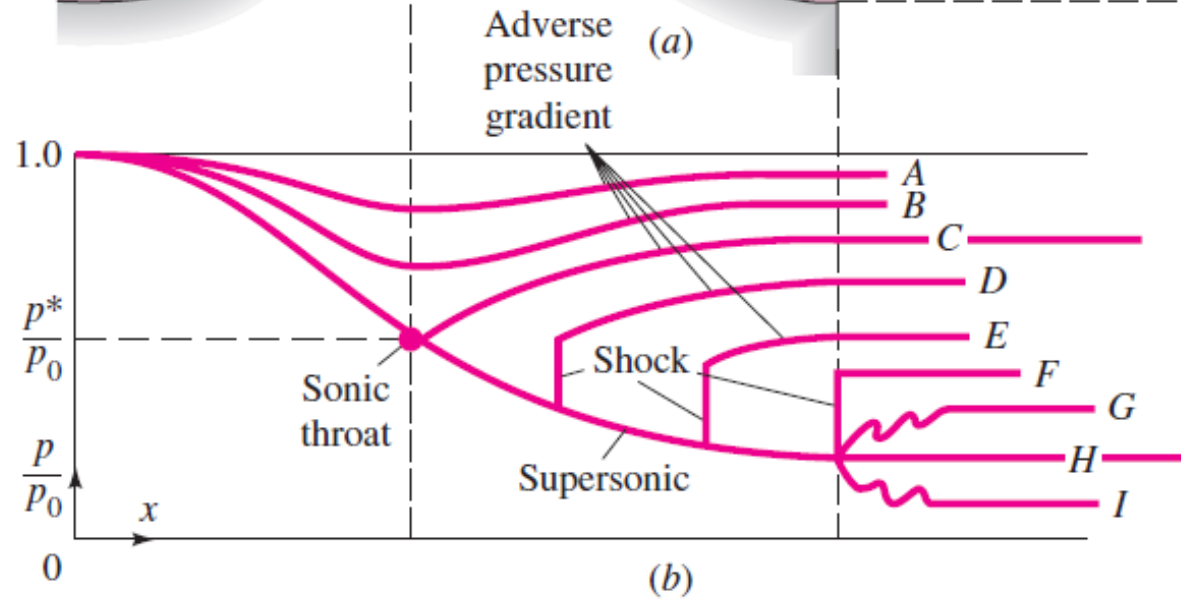
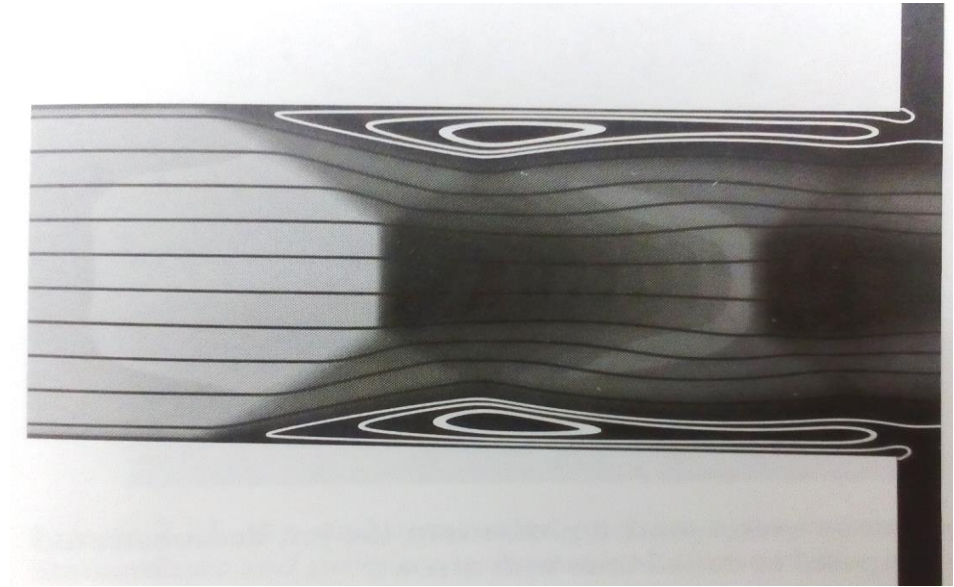
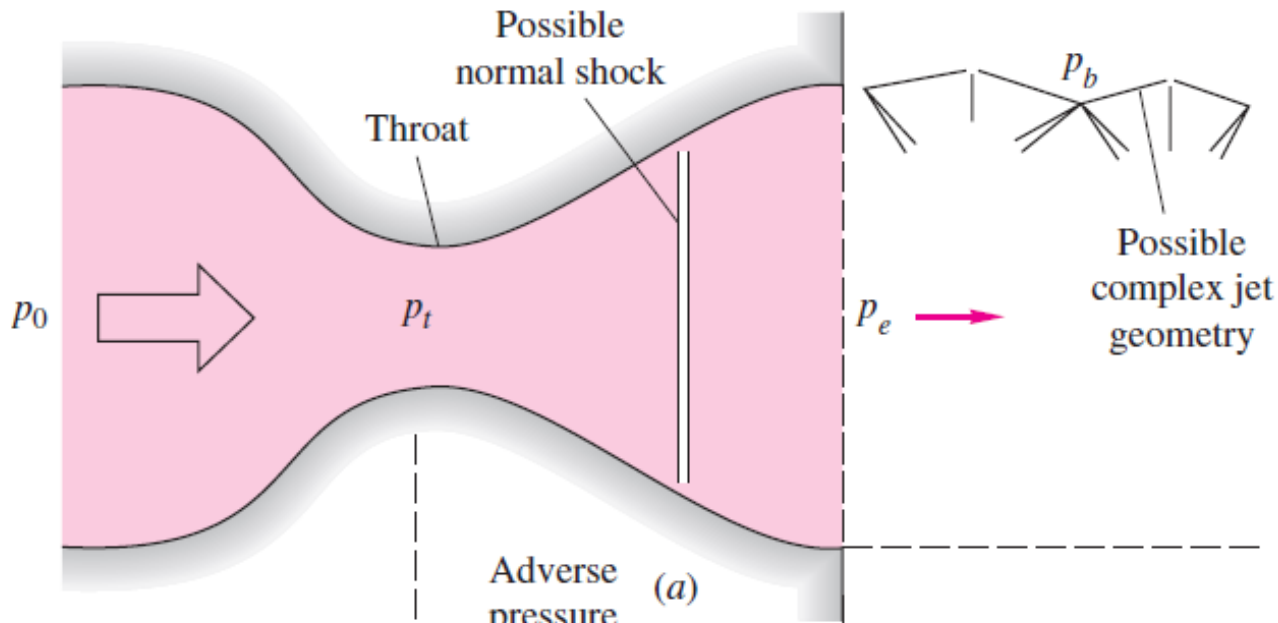
adjusting screw



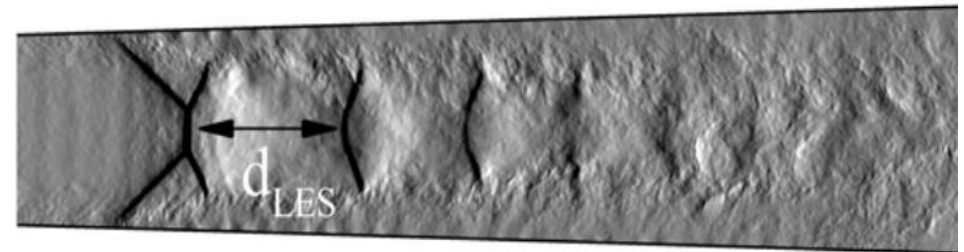
Pilot Operated Relief Valve



Ακροφύσιο deLaval



$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{Ma} \sqrt{\left[\frac{2 + (\gamma - 1)Ma^2}{(\gamma + 1)} \right]^{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}}$$



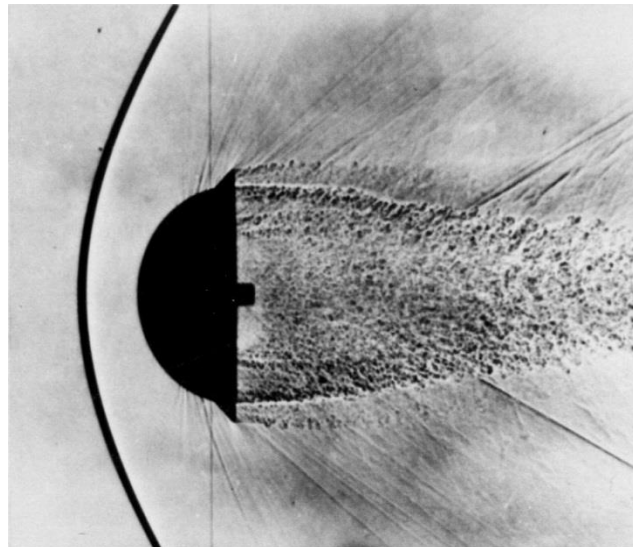
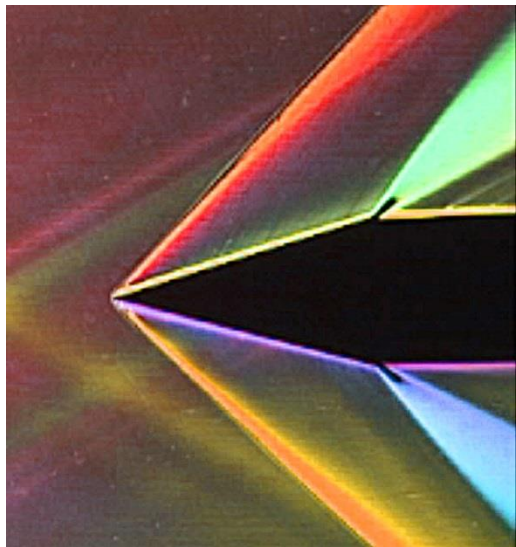
Αλληλεπίδραση ροής-εμποδίου

Ασυμπίεστη ροή ($c = \infty$): Το πεδίο πίεσης διαδίδεται ακαριαία (ελλειπτική συμπεριφορά) \rightarrow Η ροή εκτρέπεται ομαλά

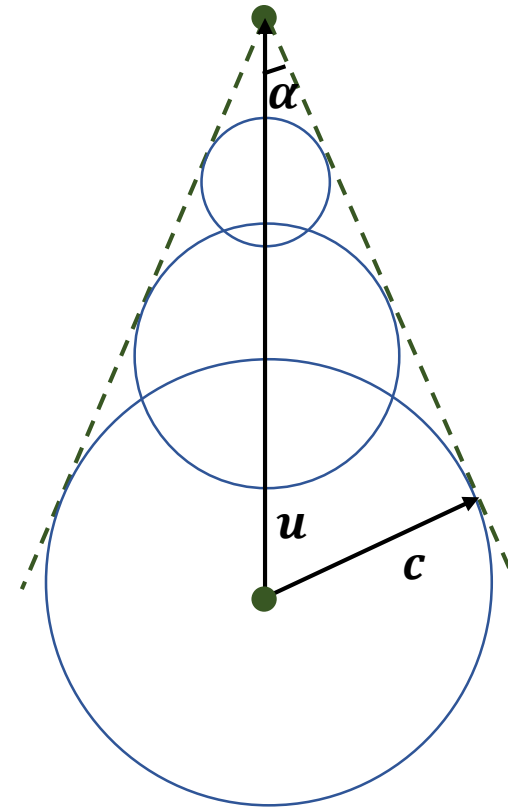
Υπερηχητική ροή ($c < \infty, u > c$): Διαταραχές διαδίδονται με την ταχύτητα του ήχου. (υπερβολική συμπεριφορά) \rightarrow Το εμπόδιο κατάντη δεν επηρεάζει τη ροή

Κρουστικό κύμα

Δημιουργείται όταν η ροή δεν μπορεί να εκτραπεί ομαλά (ισεντροπικά)



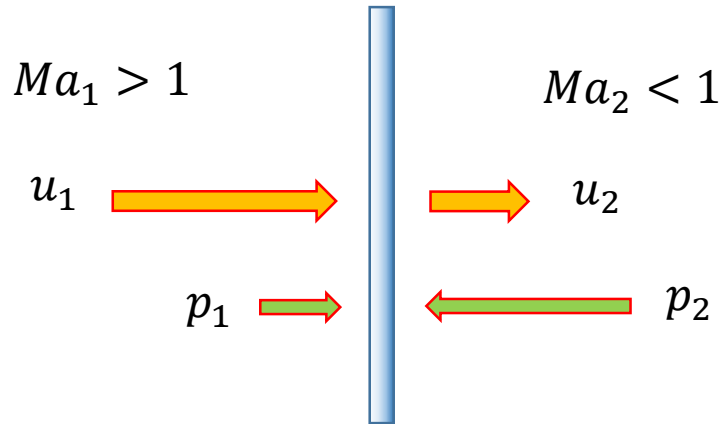
Κύματα Mach-Κώνος επιρροής



$$\sin \alpha = \frac{c}{u} = \frac{1}{Ma}$$



Συστήματα αναφοράς με το βλήμα κινούμενο ή ακίνητο (στάσιμο κρουστικό κύμα)



- Ισχύουν οι ατριβείς εξισώσεις ($Re \gg 1$)
- Η επίδραση του ιξώδους περιορίζεται στο κρουστικό κύμα (ασυνέχεια)

$$u_1 = Ma_1 c_1$$

- Ταχύτητα προσέγγισης ροής σε στάσιμο κρουστικό κύμα
- Ταχύτητα διάδοσης κρουστικού κύματος

$$Ma_1 \rightarrow 1 \Rightarrow S_2 - S_1 \sim (Ma_1 - 1)^3$$

Ισοζύγιο μάζας

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

Ισοζύγιο ορμής

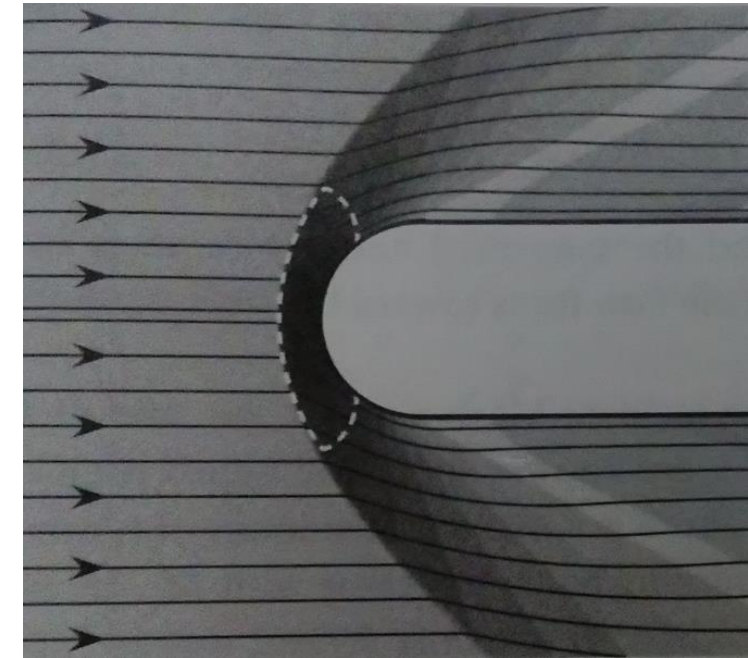
$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

Ισοζύγιο ενέργειας

$$h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} u_2^2$$

$$p = \rho RT, h = C_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

$$Ma_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)}$$



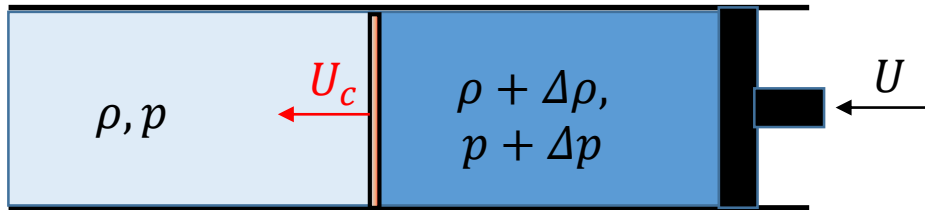
$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (Ma_1^2 - 1)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1)Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} \quad (u_2 = Ma_2 c_2)$$

Παράδειγμα διάδοσης κύματος έκρηξης

Έκρηξη στον αέρα, θερμοκρασίας 25°C, δημιουργεί κρουστικό κύμα. Αν μία στιγμή η πίεση στο χώρο έκρηξης είναι 12 atm, υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος και την ταχύτητα του αέρα που ακολουθεί το κύμα.



Για αέρα $\gamma = 1,4$ $R = 286,7 \text{ J/kgK}$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (Ma_1^2 - 1)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 12 \Rightarrow Ma_1 = 3,229$$

$$c_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = 346 \text{ m/s}$$

$$u_1 \equiv U_c = Ma_1 c_1 = 1117 \text{ m/s}$$

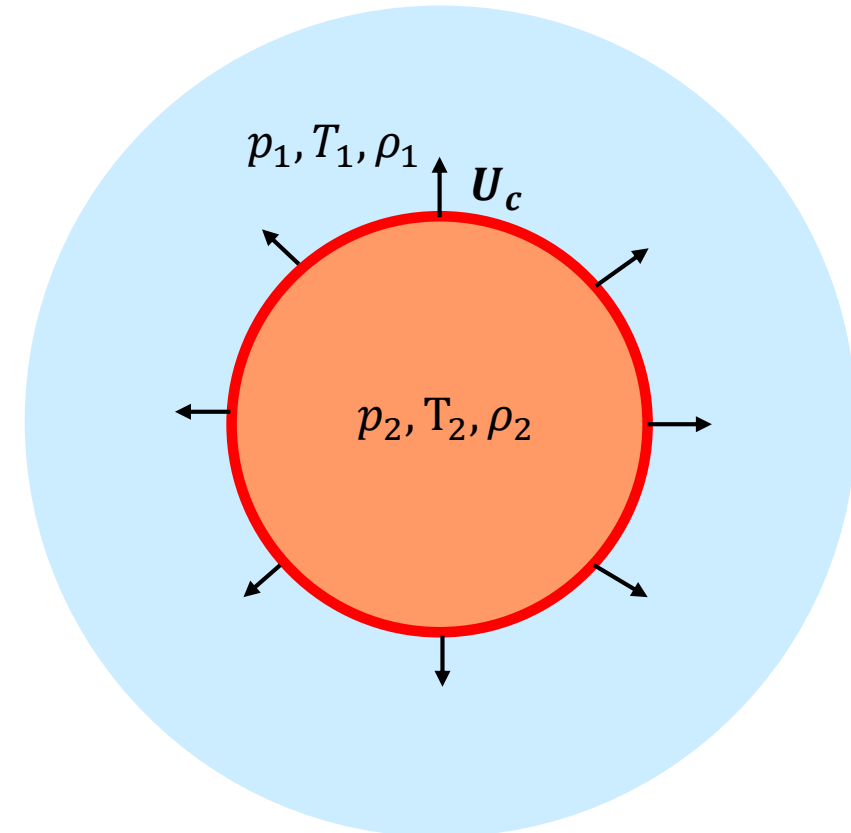
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2} = 4,05 \Rightarrow$$

$$U = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} U_c = 841 \text{ m/s}$$

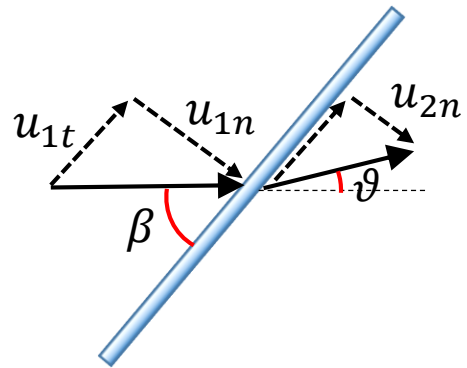
$$\rho U_c = (\rho + \Delta\rho)(U_c - U)$$

$$\Rightarrow U = \frac{\Delta\rho}{\rho + \Delta\rho} U_c$$

$$\rho \equiv \rho_1, (\rho + \Delta\rho) \equiv \rho_2$$



Πλάγιο κρουστικό κύμα



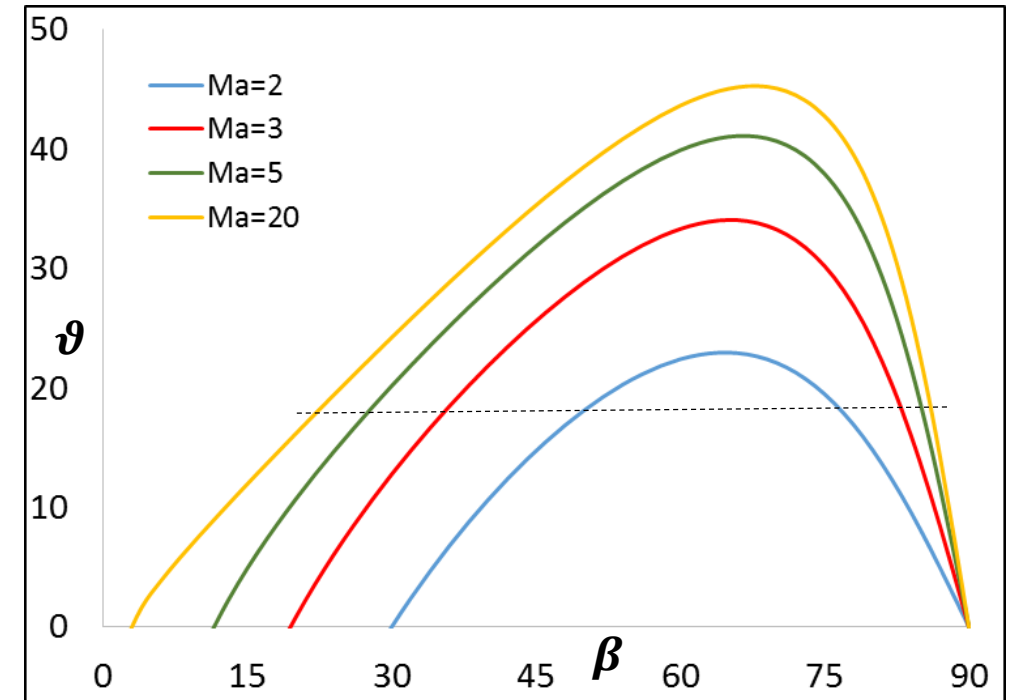
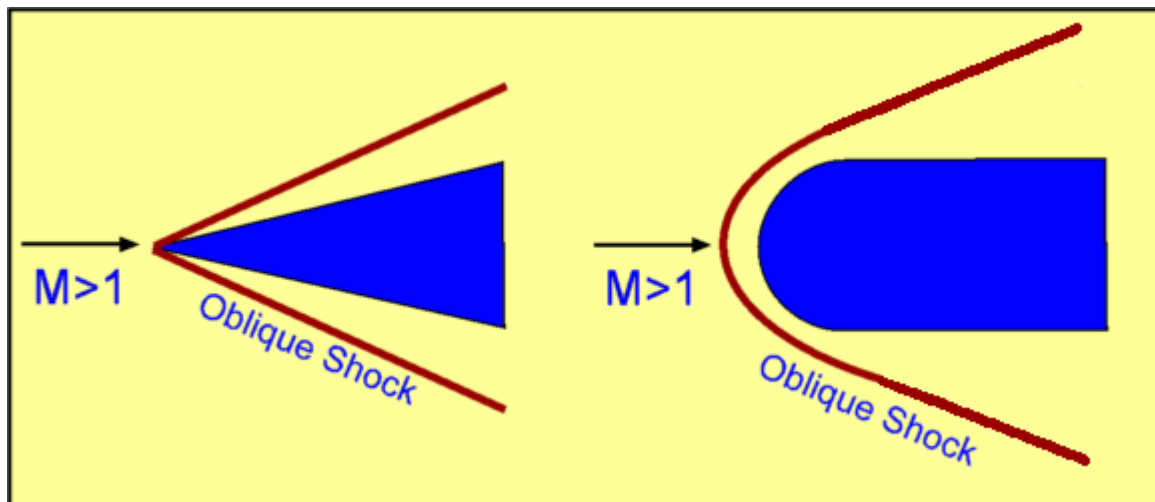
$$u_{1t} = u_{2t}$$

$$u_{1n} > u_{2n}$$

$$Ma_1 \rightarrow Ma_{1n} = Ma_1 \sin \beta$$

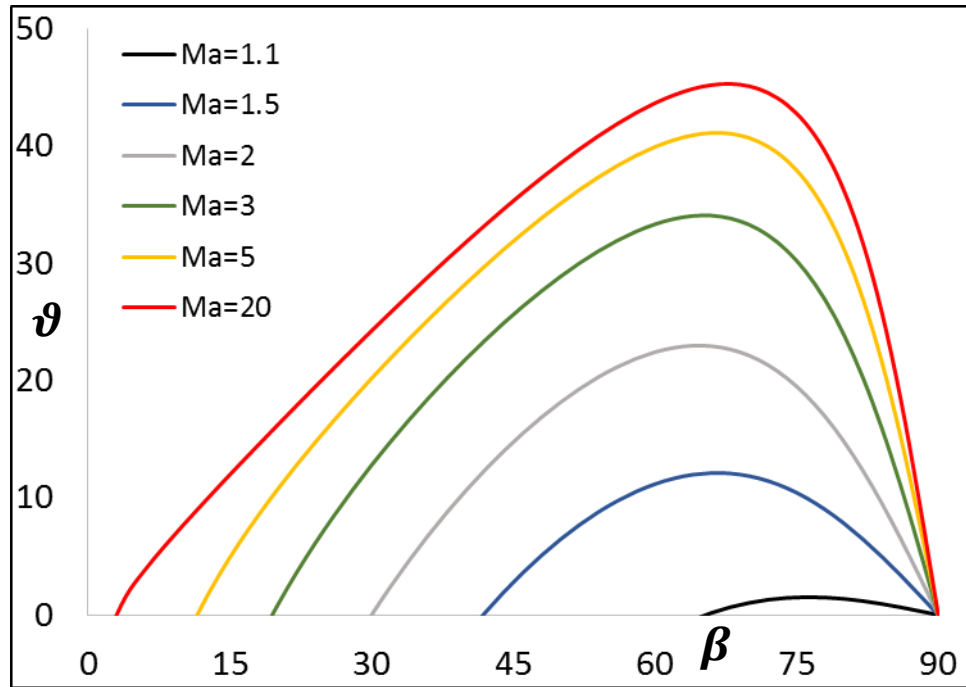
ϑ : Γωνία εκτροπής

$$\frac{u_{1n}}{u_{2n}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)(Ma_1 \sin \beta)^2}{2 + (\gamma - 1)(Ma_1 \sin \beta)^2} = \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \vartheta)}$$

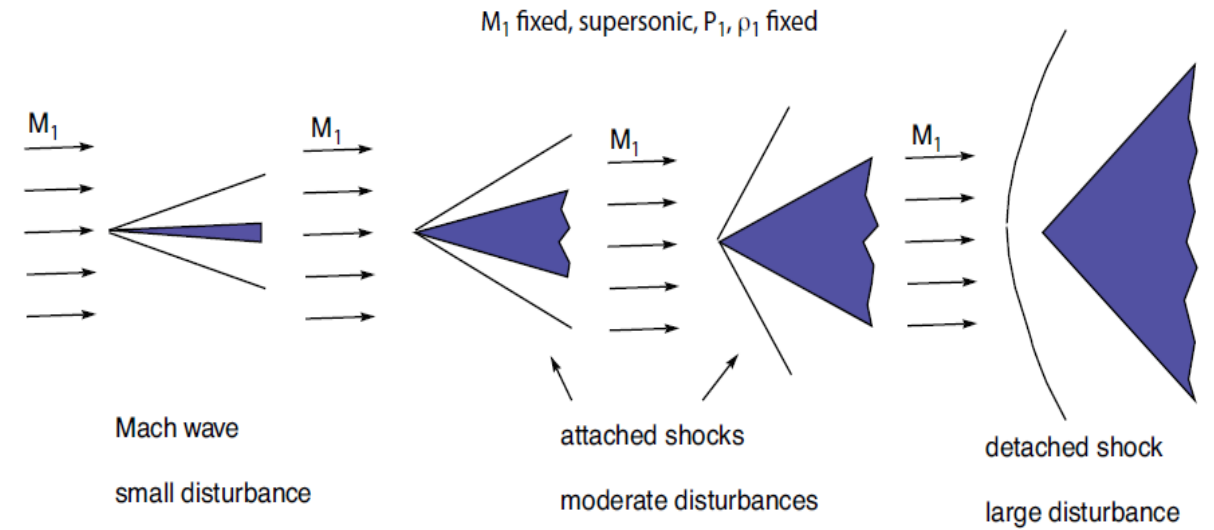


- Ασθενές ($Ma_2 > 1$) και ισχυρό ($Ma_2 < 1$) πλάγιο κρουστικό κύμα
- $\vartheta \rightarrow 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ$ or $\beta \rightarrow \sin^{-1}(1/Ma_1) \equiv \alpha$
- Μέγιστη γωνία εκτροπής, ϑ_{max}
- Τι συμβαίνει για $\beta < \sin^{-1}(1/Ma_1) \Rightarrow \vartheta < 0$;

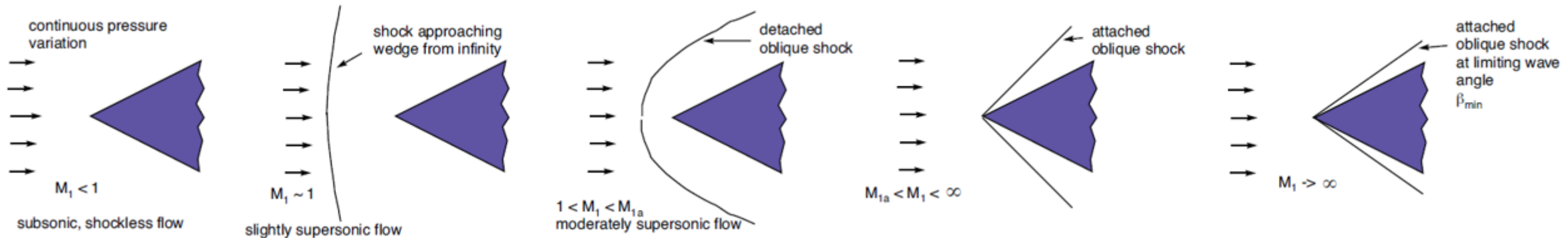
Εξάρτηση εκτροπής από αριθμό Mach και γωνία προσβολής



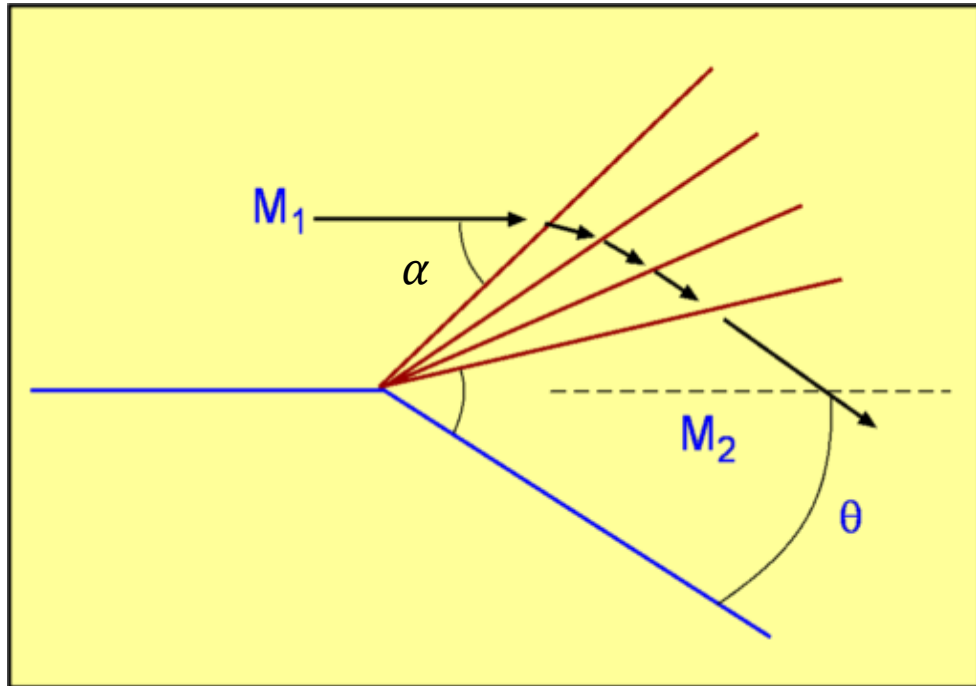
Αύξηση γωνίας σφήνας με σταθερό αριθμό Mach (Ma_1)



Αύξηση αριθμού Mach προσβολής (Ma_1)



Κύμα εκτόνωσης Prandtl-Meyer



Μικρή (αρνητική) γωνία εκτροπής μέσω αλληλουχίας κυμάτων Mach με σταδιακά μεταβαλλόμενη γωνία $\beta \approx \alpha = \sin^{-1}(1/M_1)$

$$\frac{|u + du|}{|u|} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - d\vartheta)} \approx 1 - \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - M^2}} \Rightarrow \frac{d|u|}{|u|} \approx \frac{-d\vartheta}{\sqrt{1 - M^2}}$$

Ισεντροπική μεταβολή

$$\frac{M + dM}{M} = \frac{|u + du|}{|u|} \sqrt{\frac{T}{T + dT}} = \frac{|u + du|}{|u|} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)(M + dM)^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}}$$

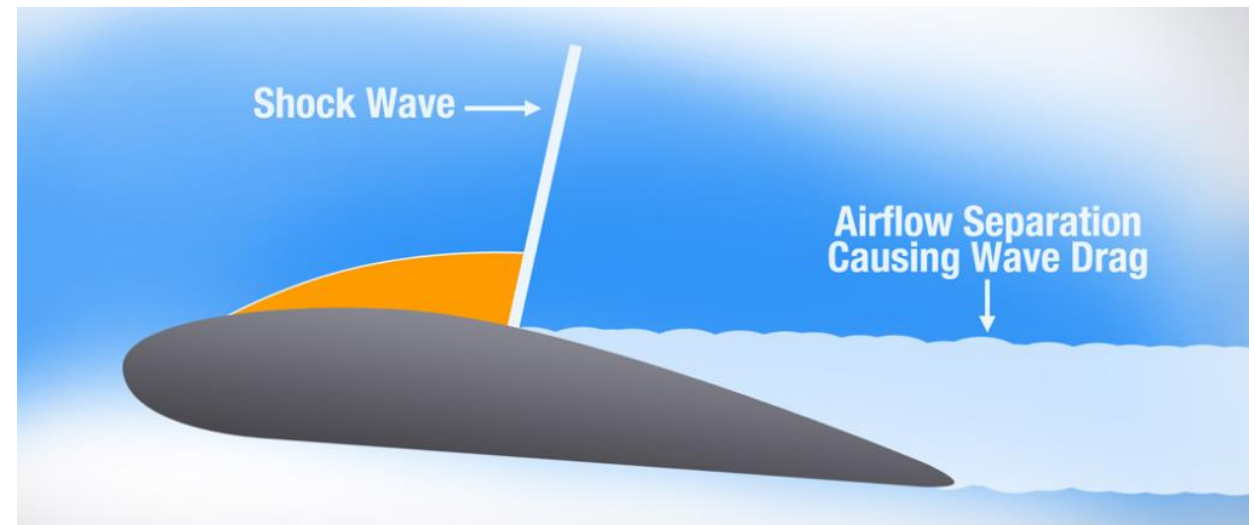
$$\frac{dM}{M} = \frac{-d\vartheta}{\sqrt{1 - M^2}} + \frac{(\gamma - 1)M dM}{2 + (\gamma - 1)M^2} \Rightarrow$$

$$-\vartheta = \int_{M_1}^{M_2} \frac{2\sqrt{1 - M^2}}{2 + (\gamma - 1)M^2} \frac{dM}{M} = v(M_2) - v(M_1)$$

$$(M_1, \vartheta \rightarrow v(M_2) \rightarrow M_2)$$

$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1)} - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1}$$

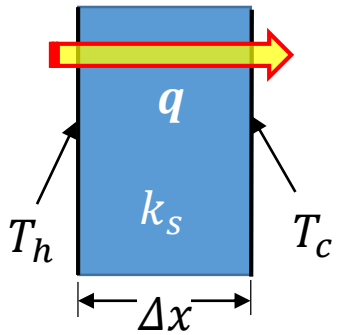
Παραδείγματα αποκόλλησης λόγω κρουστικού κύματος



Μεταφορά θερμότητας με αγωγή

Μεταφορά θερμότητας με αγωγή

Κλίση θερμοκρασίας προκαλεί ροή θερμότητας



$$q = \frac{Q}{A} = k_s \frac{(T_h - T_c)}{\Delta x}$$

Θερμοροή: $q [=] W/m^2$

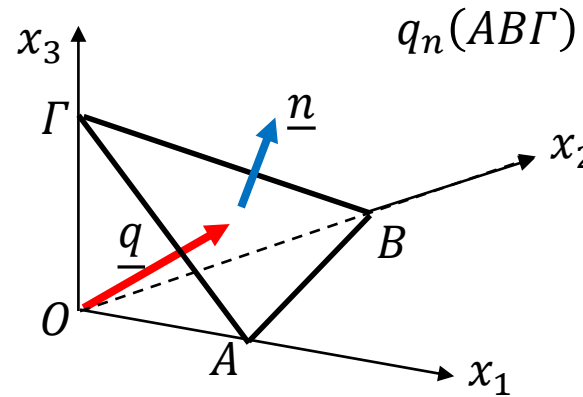
Συντ. θερμικής αγωγιμότητας:

$$k_s [=] W/m \text{ } ^\circ C$$

Διαφορική μορφή

$$q_i = -k_s \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad \underline{q} = -k_s \underline{\nabla} T$$

Θερμοροή στη διεύθυνση \underline{n}

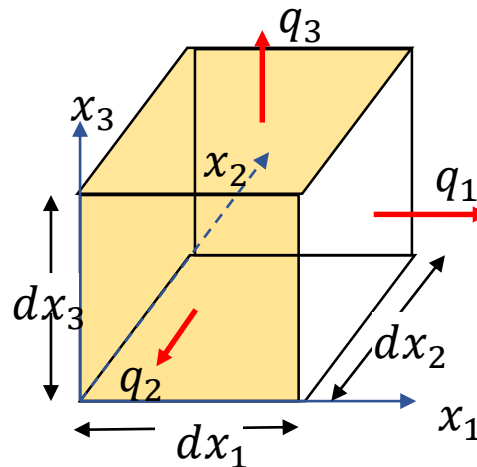


$$q_n(AB\Gamma) = q_1(OB\Gamma) + q_2(OA\Gamma) + q_3(OAB)$$

$$\Rightarrow q_n = q_i n_i$$

$$q_n = -k_s \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i = -k_s \underline{\nabla} T \cdot \underline{n}$$

Ισοζύγιο θερμικής ενέργειας

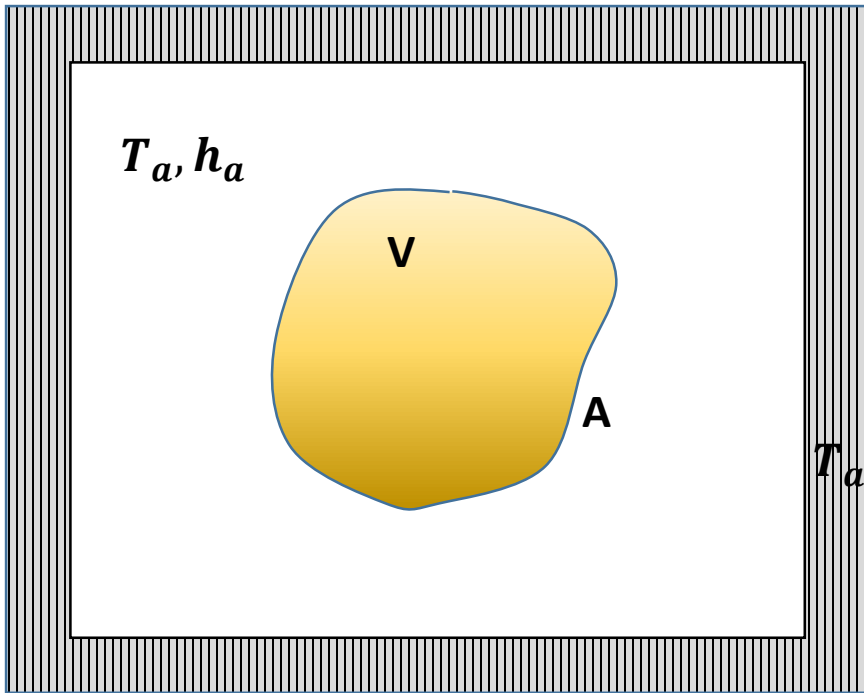


$$\frac{\partial}{\partial t} (C_{Ps} T \rho_s dx_1 dx_2 dx_3) =$$

$$[q_1(\underline{x}) - q_1(\underline{x} + dx_1)](dx_2 dx_3) + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s C_{Ps} T) = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

$$\rho_s C_{Ps} \frac{\partial T}{\partial t} = k_s \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} \right) = k_s \nabla^2 T$$



Έστω στερεό σώμα όγκου V με εξωτερική επιφάνεια A

$T|_A = T_0$ (συνθήκη Dirichlet)

ή

$q|_A = \underline{n} \cdot (-k_s \underline{\nabla} T)|_A = q_0$ (συνθήκη Neumann)

ή

$q|_A = \kappa T|_A + \lambda \underline{n} \cdot \underline{\nabla} T|_A = q_0$ (συνθήκη Robin)

ή

$T|_{A1} = T_0$ και $q|_{A2} = \underline{n} \cdot (-k_s \underline{\nabla} T)|_{A2} = q_0$, ($A1 \cup A2 \equiv A$ μεικτή συνθήκη)

Σύνδεση με τον εξωτερικό χώρο

Συναγωγή (εξαναγκασμένη ή φυσική)

$$q|_{A,conv} = h_a (T|_A - T_a)$$

Ακτινοβολία (μικρό σώμα με γκριζα επιφάνεια)

$$q|_{A,rad} = \sigma \varepsilon (T^4|_A - T_a^4)$$

Σύγκριση αγωγής με συναγωγή

$$\underline{n} \cdot (-k_s \underline{\nabla} T)|_A = h_a (T|_A - T_a)$$

Αριθμός Biot

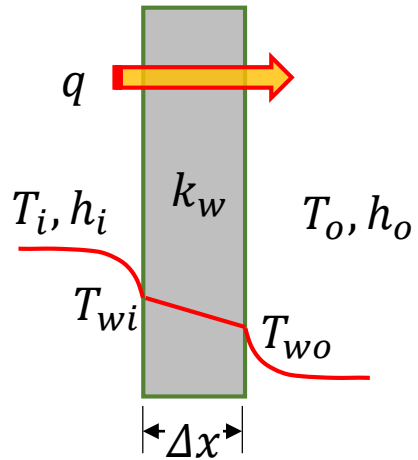
$$Bi = \frac{h_a L}{k_s}$$

$Bi \ll 1 \Rightarrow T(\underline{x}) \approx T|_A$

$Bi \gg 1 \Rightarrow T|_A \approx T_a$

$$L \sim \frac{V}{A} \Rightarrow \frac{T - T|_A}{T|_A - T_a} \sim \frac{h_a L}{k_s}$$

Μόνιμη αγωγή - θερμικές αντιστάσεις σε σειρά



Καρτεσιανή γεωμετρία

$$\nabla^2 T \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow$$

$$Q = Ak_w \frac{(T_{wi} - T_{wo})}{\Delta x}$$

$$Q = Ah_i(T_i - T_{wi})$$

$$Q = Ah_o(T_{wo} - T_o)$$

$$Q = AU(T_i - T_o)$$

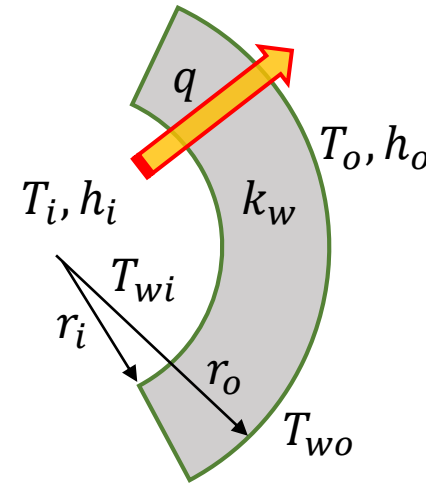
$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \frac{\Delta x}{k_w} + \frac{1}{h_o}$$

Έλεγχος αντίστασης

$$\frac{k_w}{\Delta x} \ll h_i, h_o \Rightarrow T_{wi} \approx T_i, T_{wo} \approx T_o \text{ (μόνωση)}$$

$$\frac{k_w}{\Delta x} \gg h_i, h_o \Rightarrow T_{wi} \approx T_{wo} = T_i + (T_o - T_i) \frac{h_o}{h_o + h_i}$$

$$h_i \gg h_o \Rightarrow T_w \approx T_i$$



Κυλινδρική γεωμετρία

$$\nabla^2 T \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \Rightarrow$$

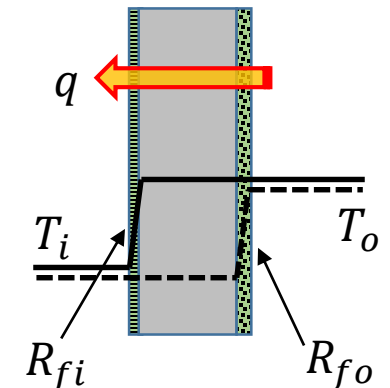
$$Q = 2\pi Lk_w \frac{(T_{wi} - T_{wo})}{\ln(r_o/r_i)}$$

$$Q = A_o U (T_i - T_o)$$

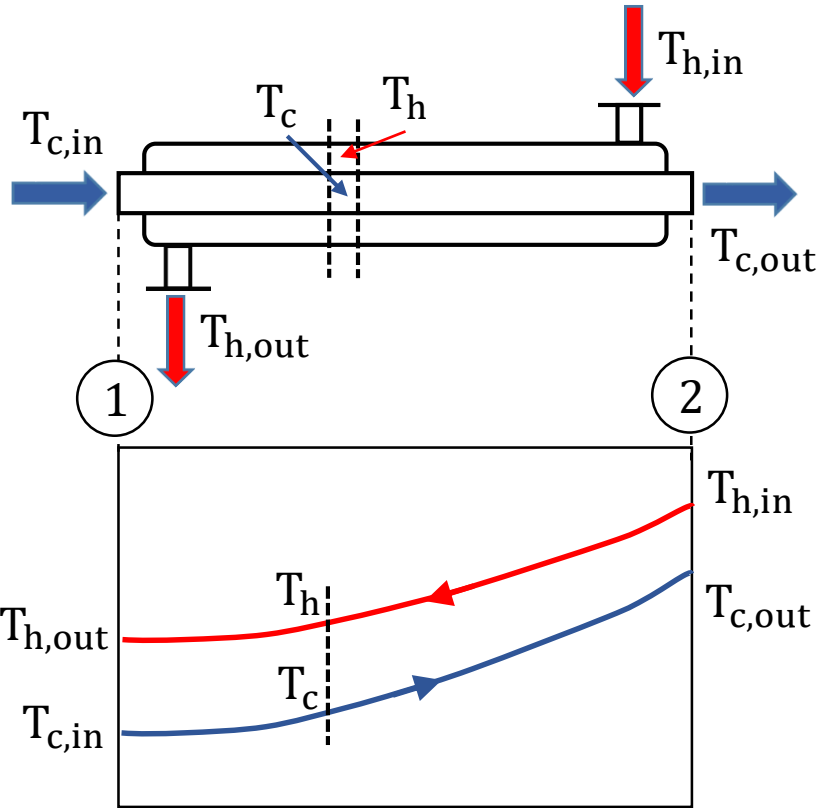
$$\frac{1}{U} = \frac{A_o}{A_i h_i} + \frac{r_o \ln(r_o/r_i)}{k_w} + \frac{1}{h_o}$$

Παράδειγμα αυλών ατμοπαραγωγού

- Ποια η θερμοκρασία του τοιχώματος;
- Τί επίπτωση έχει ο σχηματισμός επικαθήσεων;



Διαστασιολόγηση εναλλάκτη θερμότητας



Διαφορικό θερμικό ισοζύγιο

$$dQ = \underbrace{U dA (T_h - T_c)}_{\text{Μεταφορά Θερμότητας}} = \underbrace{m_h C_{ph} (-dT_h)}_{\text{Θερμοδυναμική}} = m_c C_{pc} (dT_c) \Rightarrow$$

$$Q = UA(\Delta T)_{LM}$$

Ολικός συντελεστής μεταφοράς

$$\frac{1}{U} = \frac{A_o}{A_i h_i} + \frac{r_o \ln(r_o/r_i)}{k_w} + \frac{1}{h_o}$$



$$Q = m_h C_{ph} (T_{h,in} - T_{h,out}) = m_c C_{pc} (T_{c,out} - T_{c,in})$$

Εκτίμηση θερμοκρασιών εξόδου με βάση τη θερμοκρασιακή προσέγγιση, ΔT

$$T_{c,out} = T_{h,in} - \Delta T \quad (m_h C_{ph} > m_c C_{pc})$$

$$T_{h,out} = T_{c,in} + \Delta T \quad (m_h C_{ph} < m_c C_{pc})$$



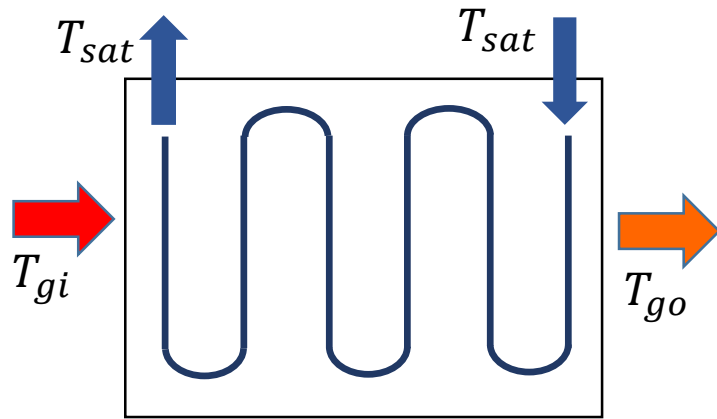
Μέση λογαριθμική διαφορά θερμοκρασίας

$$(\Delta T)_{LM} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1 / \Delta T_2)}$$

$$\Delta T_1 = T_{h,out} - T_{c,in}$$

$$\Delta T_2 = T_{h,in} - T_{c,out}$$

Λέβητας ανάκτησης θερμότητας καυσαερίων (HRSB)



$$Q = \dot{m}_g C_{p,g} (T_{gi} - T_{go}) = UA(\Delta T)_{LM}$$

$$(\Delta T)_{LM} = \left[\frac{(T_{gi} - T_{sat}) - (T_{go} - T_{sat})}{\ln \left[\frac{(T_{gi} - T_{sat})}{(T_{go} - T_{sat})} \right]} \right]$$

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_{sat}} + \frac{\Delta x}{k_w} + \frac{1}{h_g} \approx \frac{1}{h_g}$$

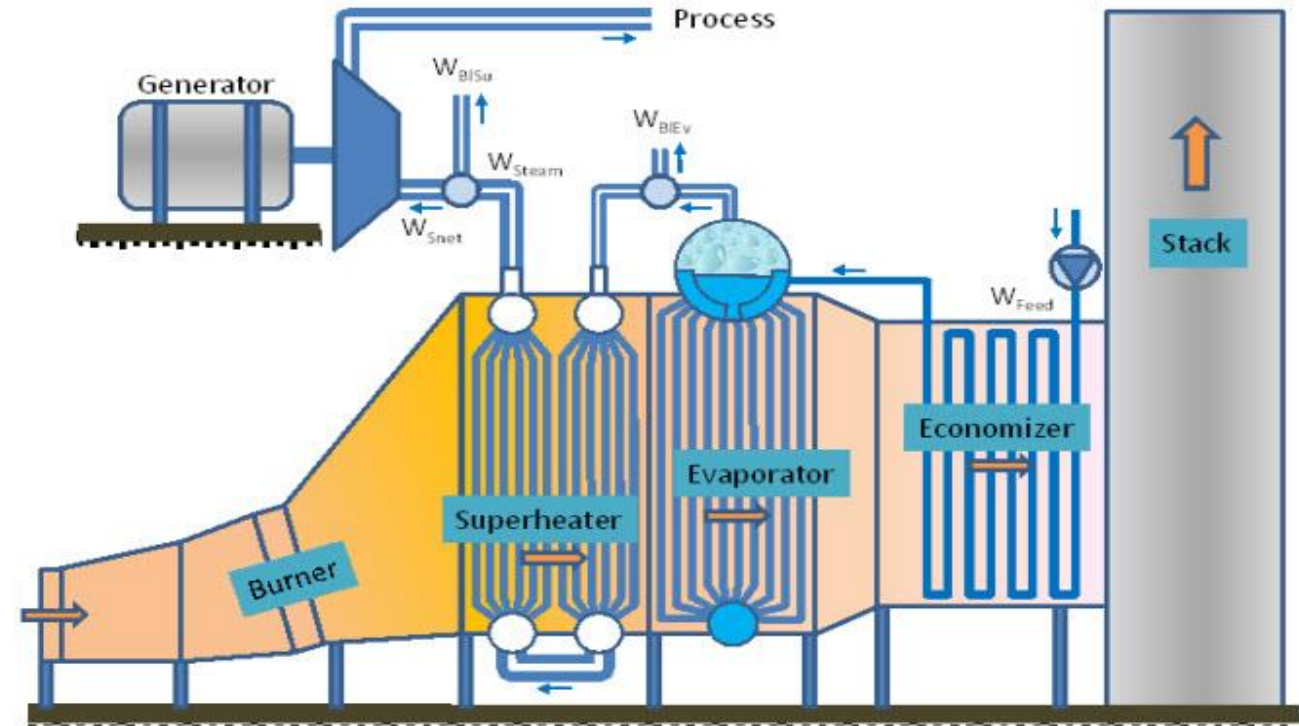
$$\Rightarrow \ln \left[\frac{(T_{gi} - T_{sat})}{(T_{go} - T_{sat})} \right] = \frac{UA}{\dot{m}_g C_{p,g}}$$

ΥΔΡΑΥΛΩΤΟΣ ΛΕΒΗΤΑΣ

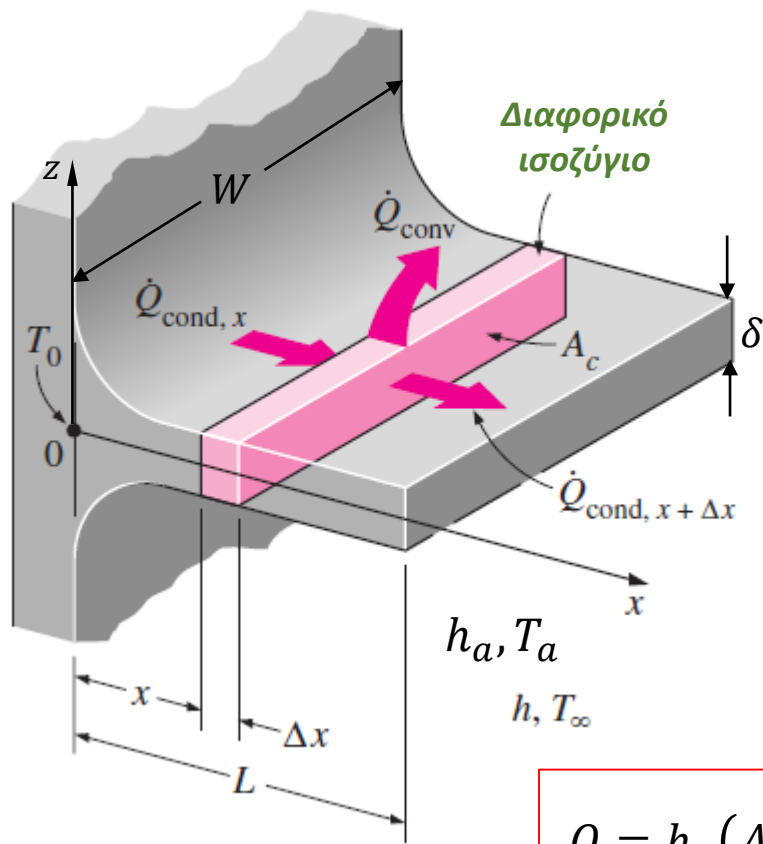
$$Nu \sim Re^{0,6} \Rightarrow U \sim \dot{m}_g^{0,6} \Rightarrow \ln \left[\frac{(T_{gi} - T_{sat})}{(T_{go} - T_{sat})} \right] = \frac{K_Y}{\dot{m}_g^{0,4}}$$

ΦΛΟΓΑΥΛΩΤΟΣ ΛΕΒΗΤΑΣ

$$Nu \sim Re^{0,8} \Rightarrow U \sim \dot{m}_g^{0,8} \Rightarrow \ln \left[\frac{(T_{gi} - T_{sat})}{(T_{go} - T_{sat})} \right] = \frac{K_\Phi}{\dot{m}_g^{0,2}}$$



Αγωγή-συναγωγή σε πτερύγια



$$Bi_\delta \ll 1, Bi_L \sim 1 \Rightarrow T(x, z) \approx T(x)$$

Πτερύγια σταθερής διατομής

$$-d \left(-\delta W k \frac{dT}{dx} \right) = [(2W + 2\delta)dx] h_a (T - T_a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0, m = \sqrt{\frac{2h_a}{k\delta}}$$

$$\Rightarrow \theta(x) = \frac{T(x) - T_a}{T_0 - T_a} = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$$

$$Q = h_a (A_0 + \eta A_f) (T_0 - T_a), \quad \eta = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

Εφαρμογές

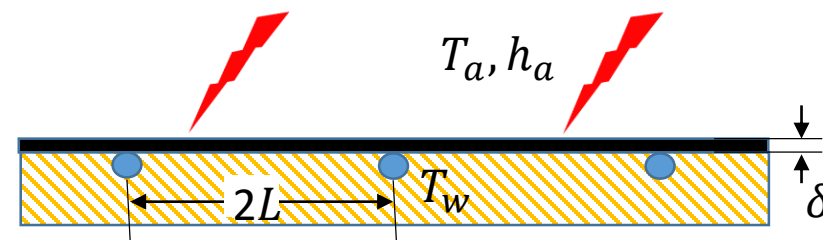
- Ηλιακός συλλέκτης
- Πάνελ ακτινοβολίας



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

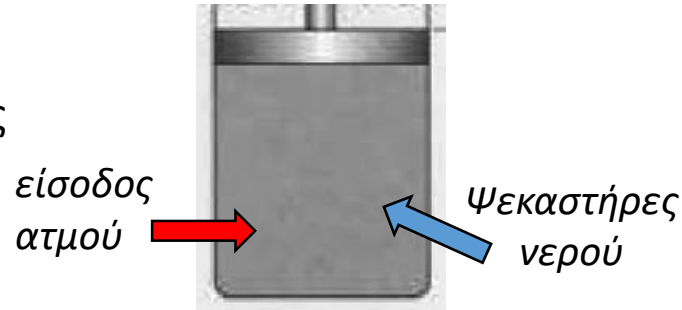
$$\bar{T}(x) = \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta/2} T dz$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} + \frac{2}{\delta} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\delta/2} - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} - \frac{2h_a}{\delta k} [T(x, \delta/2) - T_a] = 0$$

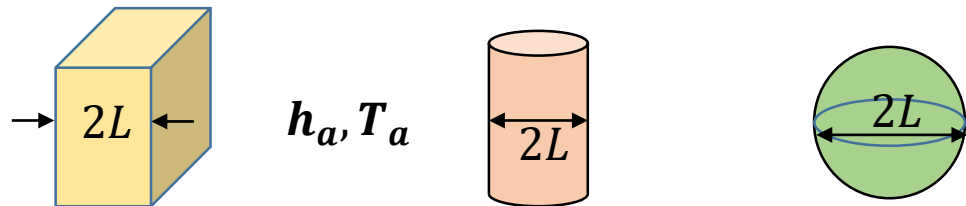


Παραδείγματα μεταβατικής αγωγής

- Σχεδιασμός ψυγείου
- Βελτίωση ατμομηχανής (James Watt)



Το γενικό πρόβλημα μεταβατικής αγωγής



$$\rho_s c_{ps} \frac{\partial T}{\partial t} = k_s \nabla^2 T \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

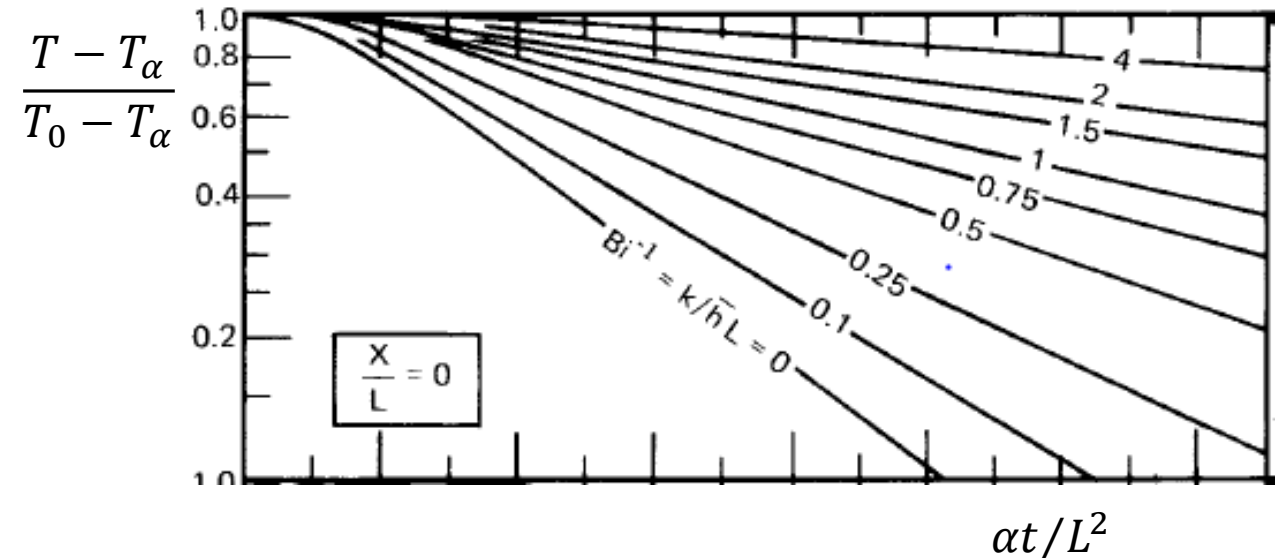
$$T(\underline{x}, 0) = T_0 \quad -k_s \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h_\alpha (T(L, t) - T_\alpha) \Rightarrow$$

Αδιαστατοποίηση

$$\frac{\Delta T}{t} \sim \alpha \frac{\Delta T}{L^2} \Rightarrow \tau = \frac{L^2}{\alpha} \quad \boxed{Fo = \frac{t}{\tau} = \frac{\alpha t}{L^2}}$$

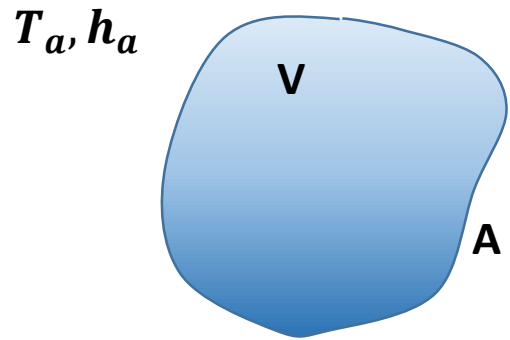
$$-k_s \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h_\alpha (T(L, t) - T_\alpha) \Rightarrow \boxed{Bi = \frac{h_\alpha L}{k_s}}$$

$$T = T(\underline{x}, t, Bi) \Rightarrow \theta = \frac{T(\underline{x}, t) - T_\alpha}{T_0 - T_\alpha} = f\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{\alpha t}{L^2}, \frac{h_\alpha L}{k_s}\right)$$



Οριακές καταστάσεις μεταβατικής αγωγής

Απλοποιήσεις με βάση τον αριθμό Bi



$$Bi = \frac{h_a L}{k_s}$$

$$Bi \ll 1 \Rightarrow T(\underline{x}, t) = T(t)$$

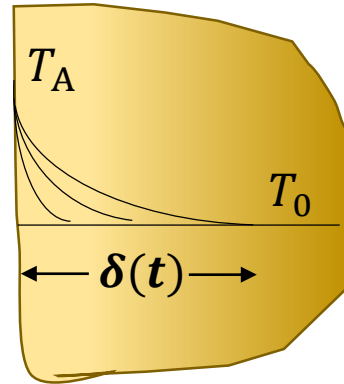
$$\rho_s V C_{Ps} \frac{dT}{dt} = h_a A (T - T_a) \Rightarrow$$

$$\frac{T(t) - T_a}{T(0) - T_a} = \exp \left[- \left(\frac{h_a A}{\rho_s V C_{Ps}} \right) t \right]$$

$$Bi \gg 1 \Rightarrow T|_A \approx T_a$$

Απλοποιήσεις με βάση χρονικές κλίμακες

Βάθος διείσδυσης, $\delta(t) \sim$, σε ημιάπειρο στερεό (αργή απόκριση)

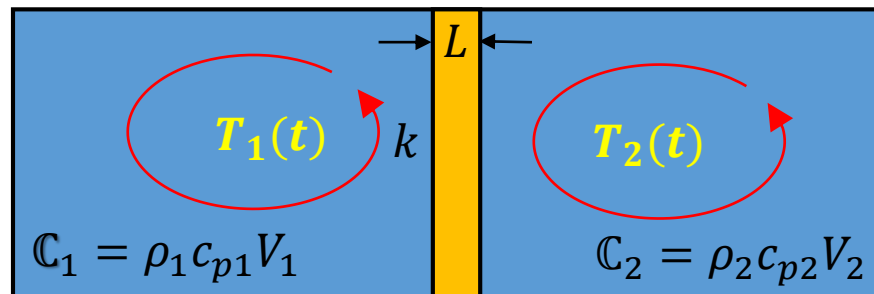


$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\Delta T}{t} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta^2} \Rightarrow \delta(t) \sim \sqrt{\alpha t}$$

$$\eta = x / \sqrt{\alpha t}, \quad \frac{T(x, t) - T_A}{T_0 - T_A} = \Theta(\eta)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &\Rightarrow \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} = -\frac{\eta}{2} \frac{d\Theta}{d\eta} \\ \Theta(0) = 0, \Theta(\eta \rightarrow \infty) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{T(x, t) - T_A}{T_0 - T_A} = \text{erf} \left(\frac{\eta}{2} \right)$$

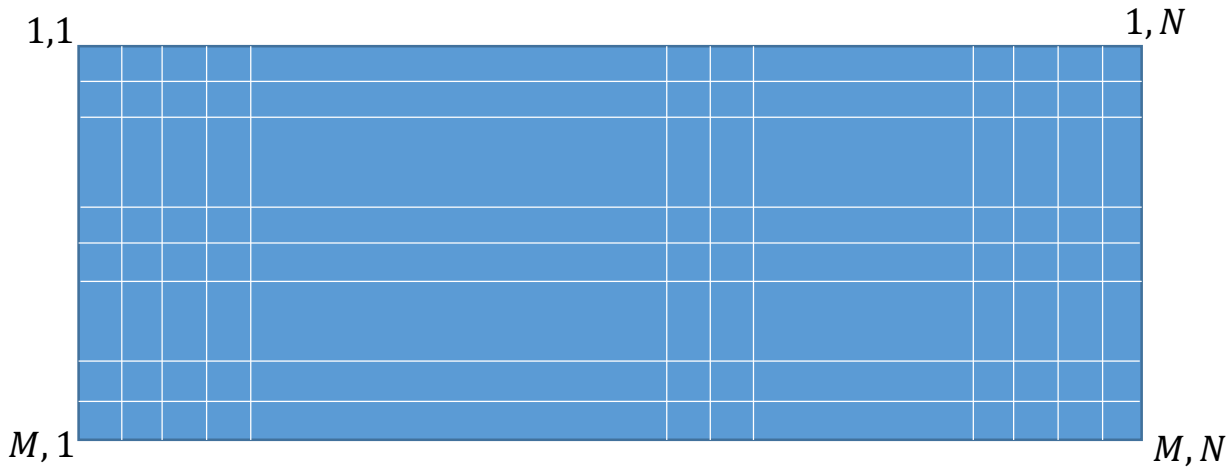
Λεπτό τοίχωμα σε ψευδο-μόνιμη κατάσταση (γρήγορη απόκριση)



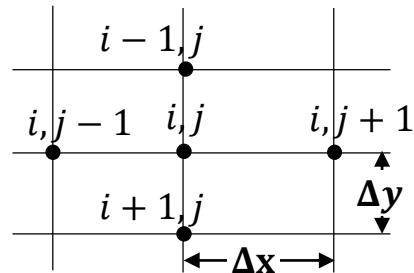
$$Q \approx Ak \frac{T_1(t) - T_2(t)}{L}$$

Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αγωγής

Μόνιμη αγωγή



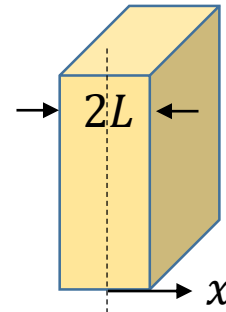
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow$$



$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

$$k = (i - 1)N + j, K = NM \quad T_{i,j} \rightarrow X_k$$

$$A_{k,l} X_l = B_k \quad K \text{ εξισώσεις με } K \text{ αγνώστους}$$



Μεταβατική αγωγή

$$T_i^n = T(x, t) : x = i \Delta x = i \frac{L}{N}, i = 0, N$$

$$t = n \Delta t = n \frac{\tau}{M}, n = 0, M$$

Εξίσωση

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \Rightarrow \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

Συνοριακή συνθήκη

$$k_s \frac{T_{N-1}^{n+1} - T_N^{n+1}}{\Delta x} = h_a (T_N^{n+1} - T_a)$$

$$T_i^{n+1} \rightarrow X_i, i = 0, N$$

$$A_{i,l} X_l = B_i \quad N + 1 \text{ εξισώσεις με } N + 1 \text{ αγνώστους}$$

Μεταφορά θερμότητας με συναγωγή

Μαθηματική περιγραφή και υποπεριπτώσεις

Σύζευξη ροής και μεταφοράς

$$\underline{q} = \rho \underline{u} H - k \underline{\nabla} T = \rho \underline{u} C_p T - k \underline{\nabla} T$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{q} = (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) \rho C_p T + \rho C_p \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T - k \nabla^2 T \Rightarrow$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T \right) = k \nabla^2 T$$

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} \right) = -\underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \rho \underline{g}$$

(σταθερές ιδιότητες, αμελητέα θερμότητα τριβών)

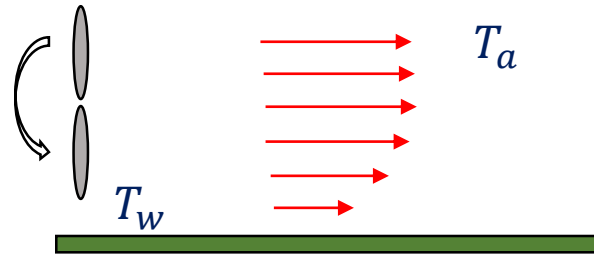
Ημι-εμπειρική αντιμετώπιση

$$q = \frac{Q}{A} = h(T_w - T_a)$$

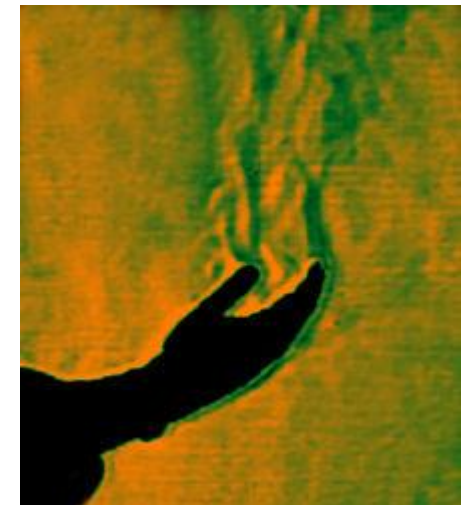
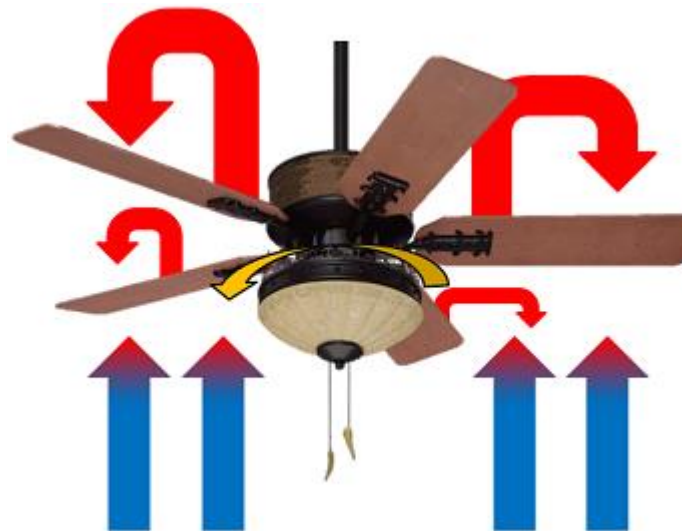
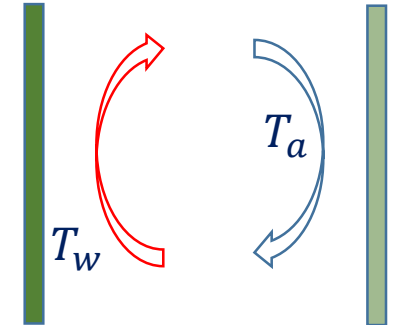
Συντελεστής συναγωγής

$$h [=] W/m^2 \text{ } ^\circ C = f(\rho, \mu, k, C_p, u, L \dots)$$

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗ



ΦΥΣΙΚΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗ



Εξισώσεις

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \rho \underline{g}$$

$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}$ αδρανειακές δυνάμεις (επιτάχυνση)
 $\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}$ αδρανειακές δυνάμεις (επιτάχυνση)
 $-\nabla p$ δυνάμεις πίεσης
 $\mu \nabla^2 \underline{u}$ ιξώδεις δυνάμεις
 $\rho \underline{g}$ βαρυτικές δυνάμεις

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T$$

$\frac{\partial T}{\partial t}$ συσσώρευση
 $\underline{u} \cdot \nabla T$ συναγωγή
 $k \nabla^2 T$ αγωγή

Αριθμός Nusselt

$$Nu = \frac{hL}{k} = \frac{h \Delta T}{k \Delta T / L}$$

Εξαναγκασμένη συναγωγή

$$Nu = f(Re, Pr)$$

Φυσική συναγωγή

$$Nu = f(Gr, Pr)$$

(Σύγκριση μεταφοράς με συναγωγή και αγωγή στο ρευστό)

Σύγκριση αδρανειακών με ιξώδεις δυνάμεις

$$\frac{|\rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}|}{|\mu \nabla^2 \underline{u}|} \sim \frac{\rho U(U/L)}{\mu U/L^2} = \frac{\rho UL}{\mu} = \mathbf{Re}$$

Σύγκριση συναγωγής με αγωγή

$$\frac{|\rho C_p \underline{u} \cdot \nabla T|}{|k \nabla^2 T|} \sim \frac{\rho C_p U(\Delta T/L)}{k \Delta T/L^2} = \frac{UL}{\alpha} = \mathbf{Pe}$$

Σύγκριση διάχυσης ορμής και θερμότητας

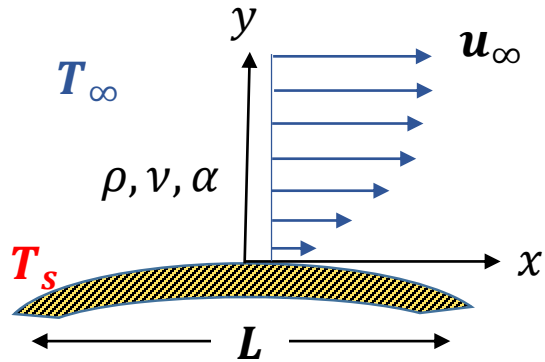
$$\frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{\mu/\rho}{k/\rho C_p} = \mathbf{Pr} \quad (Pe = RePr)$$

Χαρακτηριστική ταχύτητα φυσικής συναγωγής

$$|\rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}| \sim \Delta \rho \underline{g} \Rightarrow U \sim \sqrt{\beta \Delta T g L}$$

$$"Re" = \frac{(\sqrt{\beta g \Delta T L})^2 L^2}{\nu^2} = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\nu^2} = \mathbf{Gr}$$

Το γενικό πρόβλημα συναγωγής από στερεή επιφάνεια



Αδιαστατοποίηση

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} \quad x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L} \quad u^* = \frac{u}{u_\infty} \quad v^* = \frac{v}{u_\infty}$$

$$Re_L = \frac{\rho u_\infty L}{\mu} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

Θερμικό οριακό στρώμα

- Η αγωγή μεταφέρει θερμότητα κατά y
- Η συναγωγή παρασύρει θερμό ρευστό κατά x (οριακό στρώμα)

$$\left. \begin{array}{l} T^* = f(x^*, y^*, u^*, v^*, Pr, Re_L) \\ \underline{u}^* = f(x^*, y^*, Re_L) \end{array} \right\} \Rightarrow T^* = f(x^*, y^*, Pr, Re_L, \text{γεωμετρία})$$

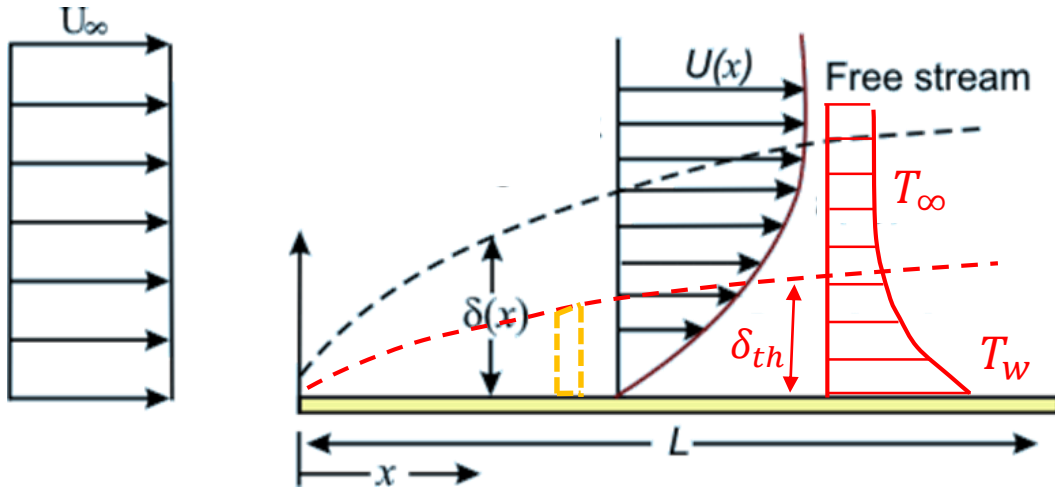
Αριθμός Nusselt

$$q(x) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \Rightarrow h(x) = \frac{q}{T_s - T_\infty} = \frac{-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_s - T_\infty} = \frac{-k}{T_s - T_\infty} \frac{(T_s - T_\infty)}{L} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \Rightarrow Nu(x) = \frac{h(x)L}{k} = f(x^*, Pr, Re_L)$$

Από την πλευρά του ρευστού

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx \Rightarrow \overline{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k} = f(Pr, Re_L, \text{γεωμετρία}) \quad \overline{Nu} = \frac{\bar{h}\Delta T}{k \Delta T/L} = \frac{\text{Θερμορροή με συναγωγή}}{\text{Θερμορροή με αγωγή}}$$

Στρωτό θερμικό οριακό στρώμα



Ολοκληρωτικό ισοζύγιο vonKarman

$$q_w dx = d \left[\int_0^{\delta_{th}} \rho c_p u T dy \right] + \rho c_p T_\infty \left[-d \int_0^{\delta_{th}} u dy \right] \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_{th}} \rho c_p u (T - T_\infty) dy = q_w$$

Αναλογία Reynolds

$$St_x = \frac{h}{\rho c_p u_\infty} = \frac{Nu_x}{Re_x Pr} = 0,332 Re_x^{-1/2} Pr^{-2/3}$$

$$St_x = \frac{c_f}{2} Pr^{-2/3}$$

Ρευστό	Pr
Υγρά μέταλλα	0,004-0,030
Αέρια	0,2-1,0
Νερό	2-14
Ελαφρά οργανικά	5-50
Έλαια	50-10 ⁵

Μη-θερμαινόμενο μήκος ξ

$$Nu_{x,\xi} = \frac{0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}}{[1 - (\xi/x)^{3/4}]^{1/3}}$$

Για τα περισσότερα ρευστά

$$Pr \geq 1 \Rightarrow \delta \geq \delta_{th}: u(\delta_{th}) \approx \frac{\tau_w}{\mu} \delta_{th} \approx u_\infty \frac{\delta_{th}}{\delta}$$

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} \sim k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Rightarrow u_\infty \frac{\delta_{th}}{\delta} \frac{\Delta T}{L} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_{th}^2} \Rightarrow \frac{\delta_{th}}{\delta} \sim Pr^{-1/3}$$

$$\Rightarrow Nu_{x,lum} = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

Για υγρά μέταλλα

$$Pr \ll 1 \Rightarrow \frac{\delta_{th}}{\delta} \sim Pr^{-1/2} \Rightarrow Nu_x = 0,565 Re_x^{1/2} Pr^{1/2}$$

Τυρβώδης μεταφορά από/προς τοίχωμα

Η μεταφορά προσδιορίζεται πλήρως από: $\rho, c_p, k, H, T_w, q_w \rightarrow T_0$

$$T_+ = \frac{(T_w - \bar{T})\rho c_p u_*}{q_w}, \quad T_w - \bar{T} = \frac{q_w}{\rho c_p u_*} F\left(\frac{y}{H}, \frac{u_* H}{\nu}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{d(T_w - \bar{T})}{dy} = \frac{q_w}{\rho c_p u_* y} \Phi\left(\frac{y}{y_*}, \frac{y}{H}\right) \quad \left(\frac{y}{y_*} = \frac{y u_* H}{\nu}\right)$$

Βασική παραδοχή (Prandtl)

Σε υψηλούς Re, υπάρχει περιοχή κοντά στο τοίχωμα ($y/H < 0,1$ εσωτερική περιοχή) όπου η μέση θερμοκρασία καθορίζεται μόνον από τις κλίμακες του τοιχώματος και είναι ανεξάρτητη των H, T_0 .

$$\frac{d(T_w - \bar{T})}{dy} \approx \frac{q_w}{\rho c_p u_* y} \Phi\left(\frac{y}{y_*}\right) \Rightarrow \frac{dT_+}{dy_+} \approx \frac{1}{y_+} \Phi_1(y_+)$$

$$y_+ \sim O(1): \quad \frac{d(T_w - \bar{T})}{dy} \approx \frac{q_w}{k} \Rightarrow \frac{dT_+}{dy_+} \approx Pr$$

$$y_+ > 50: \quad \Phi_1(y_+) \rightarrow \frac{1}{\kappa} \Rightarrow \frac{dT_+}{dy_+} \approx \frac{1}{\kappa y_+} \Rightarrow T_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + A(Pr)$$

$$A(Pr) = 12,7 Pr^{2/3} - 7,7$$

Τυρβώδεις αναλογίες

$$Nu_x = 0,03 Re_x^{4/5} Pr^{1/3} \quad (\text{Reynolds})$$

$$St_x = \frac{c_f/2}{1 + 12,7(Pr^{2/3} - 1)\sqrt{c_f/2}}$$

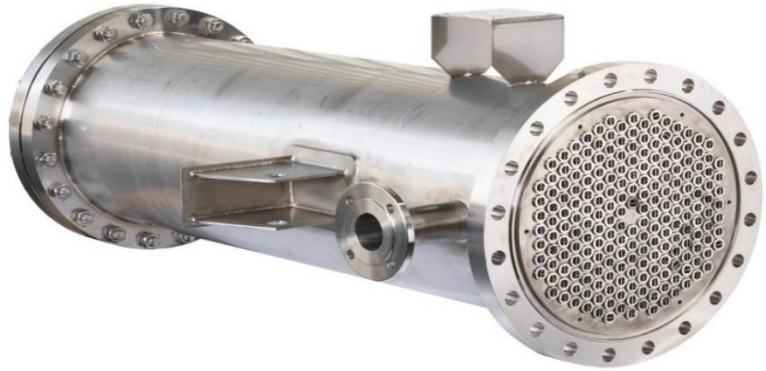
Συνδυασμένη στρωτή και τυρβώδης μεταφορά

$$Nu_L = (0,037 Re_L^{4/5} - 870) Pr^{1/3}$$

Μη-θερμαινόμενο μήκος ξ

$$Nu_{x,\xi} = \frac{Nu_{x,0}}{[1 - (\xi/x)^{9/10}]^{1/9}}$$

Ροή και μεταφορά θερμότητας σε αγωγούς



$$Re_d = \frac{\langle u \rangle d}{\nu}$$

$$Nu = \frac{hd}{k}$$

Μέση θερμοκρασία ανάμιξης (T_b)

$$\frac{\pi d^2}{4} \langle u \rangle T_b = \int_0^{d/2} T(r) u(r) 2\pi r dr$$

$$q_w = h(T_w - T_b), \quad h \approx \frac{k}{\delta_{th}}$$

Θερμικά αναπτυσσόμενη ροή $\frac{L_{th}}{d} \approx 0,05 Re Pr$

$$Nu = 1,86 (Re Pr)^{1/3} \left(\frac{d}{L}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0,14}$$

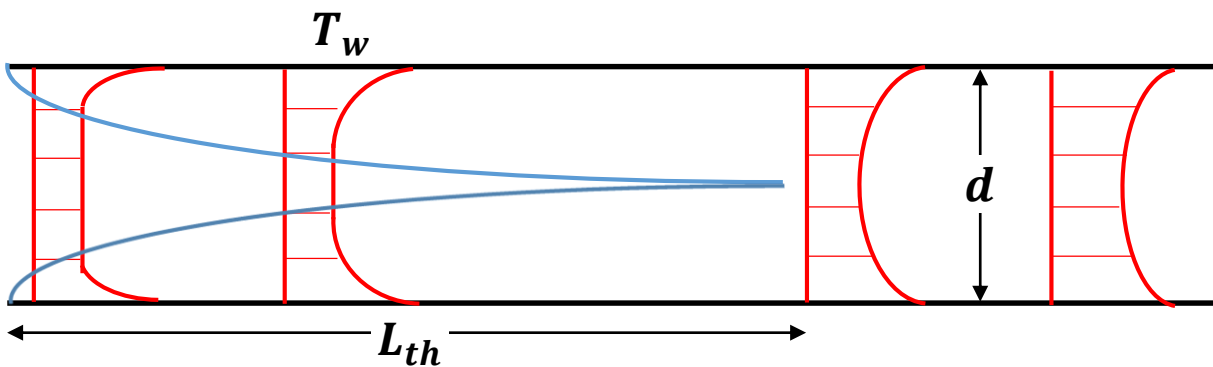
Στρωτή, θερμικά ανεπτυγμένη ροή

$$T_w = \text{σταθ}: Nu = 3,66, \quad q_w = \text{σταθ}: Nu = 4,36$$

Τυρβώδης ροή

$$Nu = \frac{(f/2)(Re - 1000)Pr}{1 + 12,7\sqrt{f/2}(Pr^{2/3} - 1)}$$

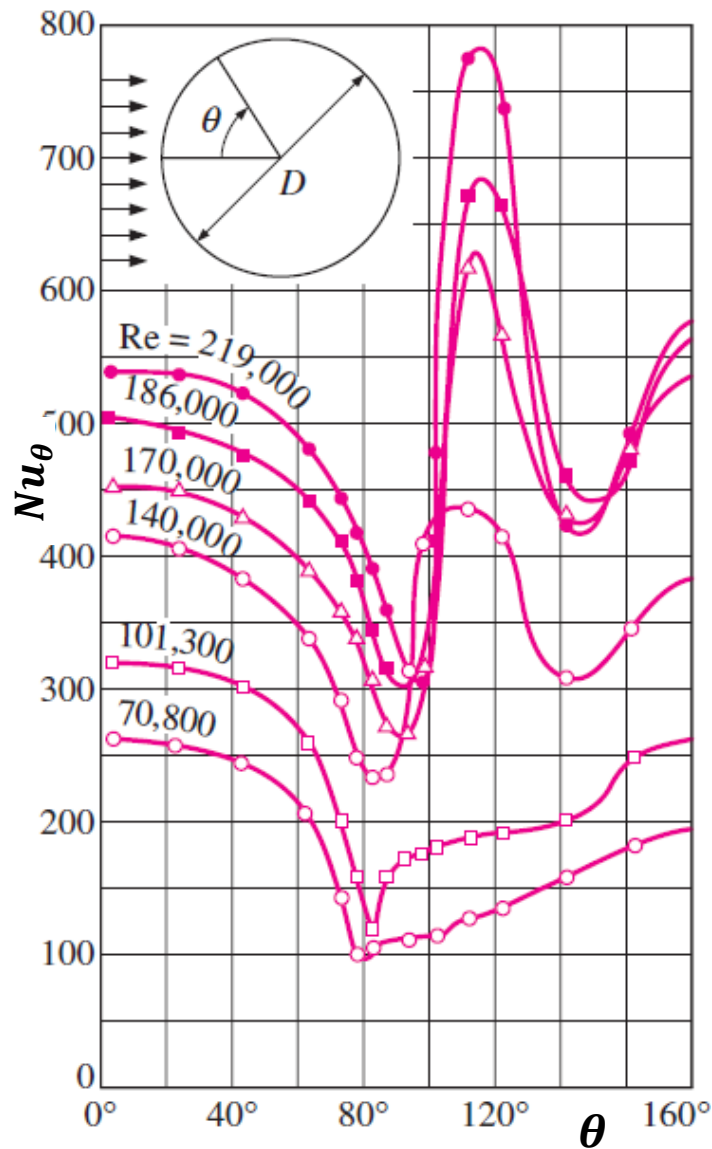
$$\approx 0,027 Re^{0,8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0,14} \quad (\text{λείο τοίχωμα})$$



Θερμική ανάπτυξη: $[T_w - T(r, x)]/[T_w - T_b(x)] \neq f(x)$

$$\frac{Nu}{Nu_{smooth}} = \left(\frac{f}{f_{smooth}}\right)^n \quad n = 0,68 Pr^{0,215}$$

Μεταφορά θερμότητας γύρω από σώματα



Κύλινδρος

$$Nu_d = \frac{hd}{k} = CRe^m Pr^{1/3}$$

Re	C	m
0,4-4	0,989	0,330
4-40	0,911	0,385
40-4x10 ³	0,683	0,466
4x10 ³ -4x10 ⁴	0,193	0,618
4x10 ⁴ -4x10 ⁵	0,027	0,805

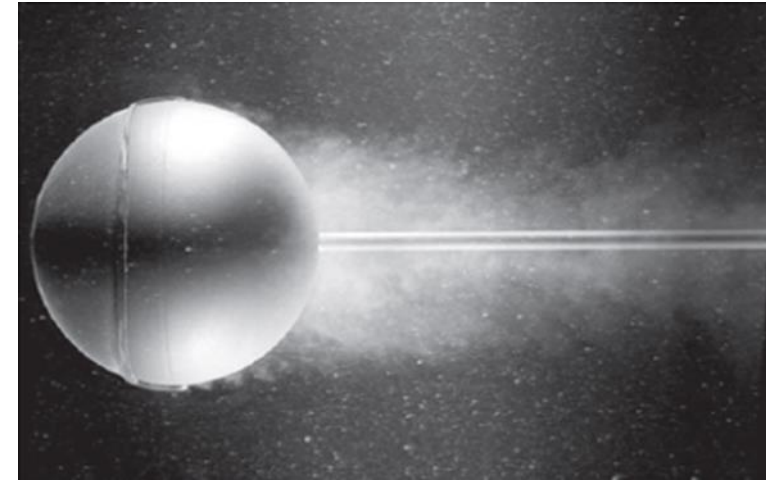
Επίσης, $m \approx 0,6$ για συστοιχίες και μη κυκλικές διατομές

Εναλλακτικά

$$Nu = (0,4Re^{1/2} + 0,06Re^{2/3})Pr^{0,4} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0,14}$$

$$c_f \approx 1 + \frac{10}{Re^{2/3}} \quad 1 \leq Re \leq 10^4$$

Σφαίρα



$$Nu = 2 + (0,4Re^{1/2} + 0,06Re^{2/3})Pr^{0,4} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0,14}$$

$$c_f \approx 0,4 + \frac{24}{Re} + \frac{6}{Re^{1/2}} \quad 10 \leq Re \leq 10^5$$

Φυσική συναγωγή σε κατακόρυφη πλάκα

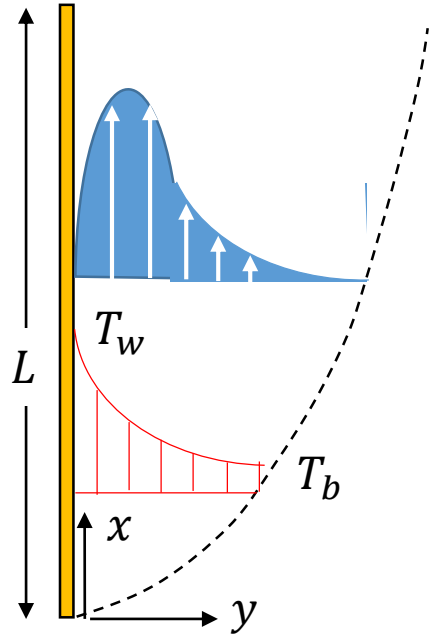
Εξισώσεις οριακού στρώματος

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_b g_x \Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = (\rho - \rho_b) g_x$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$Gr_x = \frac{g\beta(T_w - T_b)x^3}{\nu^2} \quad Ra = Gr Pr$$



Στρωτή ροή ($Gr < 10^9$)

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{[336(Pr + 5/9)]^{1/4}}{Pr^{1/2}} Gr_x^{-1/4}$$

$$u_0(x) = \frac{112[g\beta(T_w - T_b)x]^{1/2}}{[336(Pr + 5/9)]^{1/2}}$$

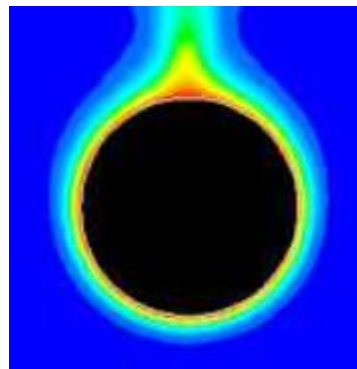
$$Nu_L = \frac{(8/3)Pr^{1/2}}{[336(Pr + 5/9)]^{1/4}} Gr_L^{1/4}$$

$$Q \sim (T_w - T_b)^{1,25}$$

Τυρβώδης ροή ($Gr_x > 10^9$)

$$Nu_x = 0,0295 \left(\frac{Pr^{7/6} Gr_x}{1 + 0,494 Pr^{2/3}} \right)^{2/5}$$

$$h_x \sim x^{1/5} \Rightarrow Nu_L = \frac{5}{6} Nu_x$$



Γενική συσχέτιση ($10^2 < Gr_L < 10^{11}$) $Ra_L = Gr_L Pr$

$$Nu_L = \left[0,825 + \frac{0,387 Ra_L^{1/6}}{[1 + (0,492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right]^2$$

Ολοκληρωτικά ισοζύγια vonKarman

$$\tau_w = \int_0^{\delta} \rho g \beta (T - T_b) dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy$$

$$q_w = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_{th}} \rho c_p u (T - T_{\infty}) dy$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Ταχύτητα: $u_0(x)$

Πάχος οριακού στρώματος: $\delta(x)$

Λύση ομοιότητας $\eta = y/\delta(x)$

$$u(x, y) = u_0(x)(a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4)$$

$$\frac{T(x, y) - T_b}{T_w - T_b} = (1 - \eta)^2$$

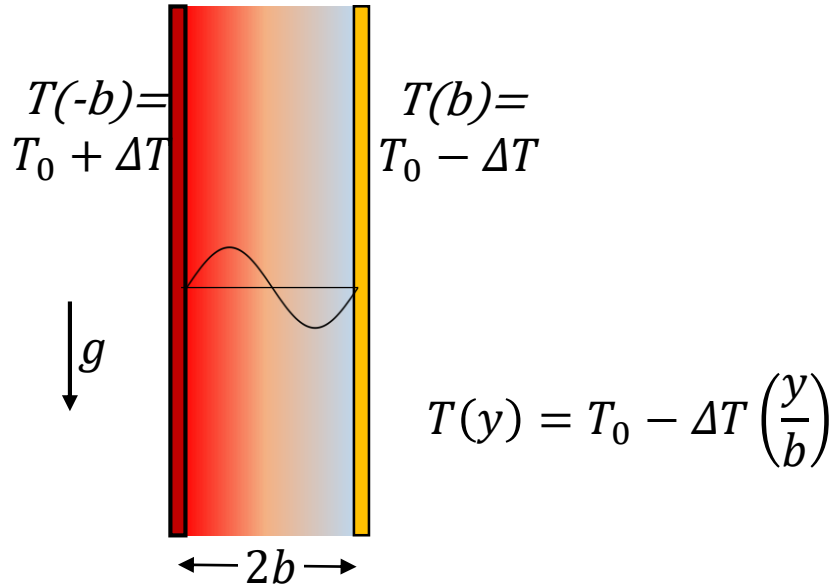
$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w = \mu \frac{u_0(x)}{\delta(x)} \quad q_w = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_w = 2k \frac{(T_w - T_b)}{\delta(x)}$$

$$\left. \begin{aligned} u_0(x) &= C_1 x^m \\ \delta(x) &= C_2 x^n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Αντικατάσταση στα ολοκληρωτικά ισοζύγια}$$

$$m = 1/2, \quad n = 1/4, \quad C_1 = \frac{112[g\beta(T_w - T_b)]^{1/2}}{[336(Pr + 5/9)]^{1/2}}$$

$$C_2 = \frac{[336(Pr + 5/9)]^{1/4}}{Pr^{1/2}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_b)}{\nu^2} \right]^{-1/4}$$

Κατακόρυφη στρωμάτωση



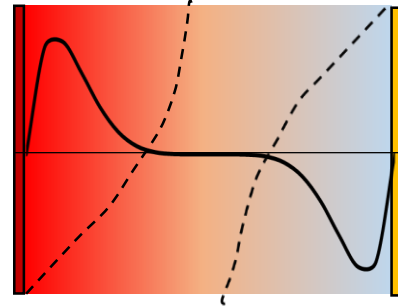
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_d}{\partial x} - \rho_m g = G - \rho_m g$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G + (\rho - \rho_m)g = G - \rho_m \beta (T - T_m)g$$

Για $T_m \equiv T_0 \Rightarrow G = 0$

$$\frac{u(y)b}{\nu} = \frac{\beta \Delta T b^3}{6\nu^2} \left[\left(\frac{y}{b} \right)^3 - \frac{y}{b} \right]$$

Με αύξηση της απόστασης, b
(Άρα και του αριθμού Ra)



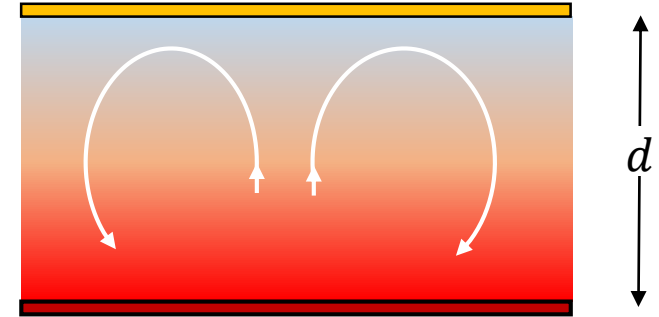
Ευθύγραμμη ροή →
Ροή οριακού στρώματος

Παραδείγματα

- Τζάκια-Ηλιακή καμινάδα
- Ατμόσφαιρα-Αδιαβατική θερμοκρασιακή κλίση

$$\left(\frac{dT}{dz} \right)_{adia} = -\frac{g}{C_p}$$

Οριζόντια στρωμάτωση



$$Ra_d = \frac{g\beta(T_w - T_b)d^3}{\nu \alpha} > 1708$$

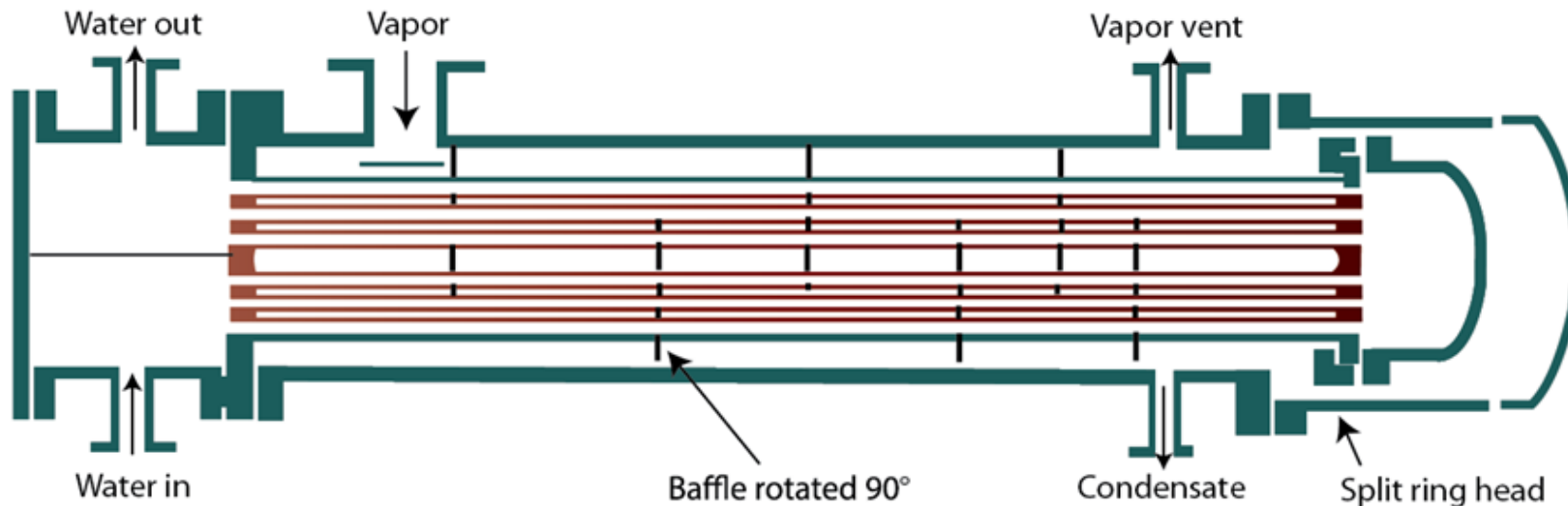
Συναγωγή Rayleigh-Benard



Συμπύκνωση και Βρασμός

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- Συμπυκνωτές αποστακτικών στηλών
- Εναλλάκτες κλιματιστικών μονάδων
- Συμπυκνωτές κενού σε ΑΗΣ
- Συσκευές που λειτουργούν με ατμό θέρμανσης

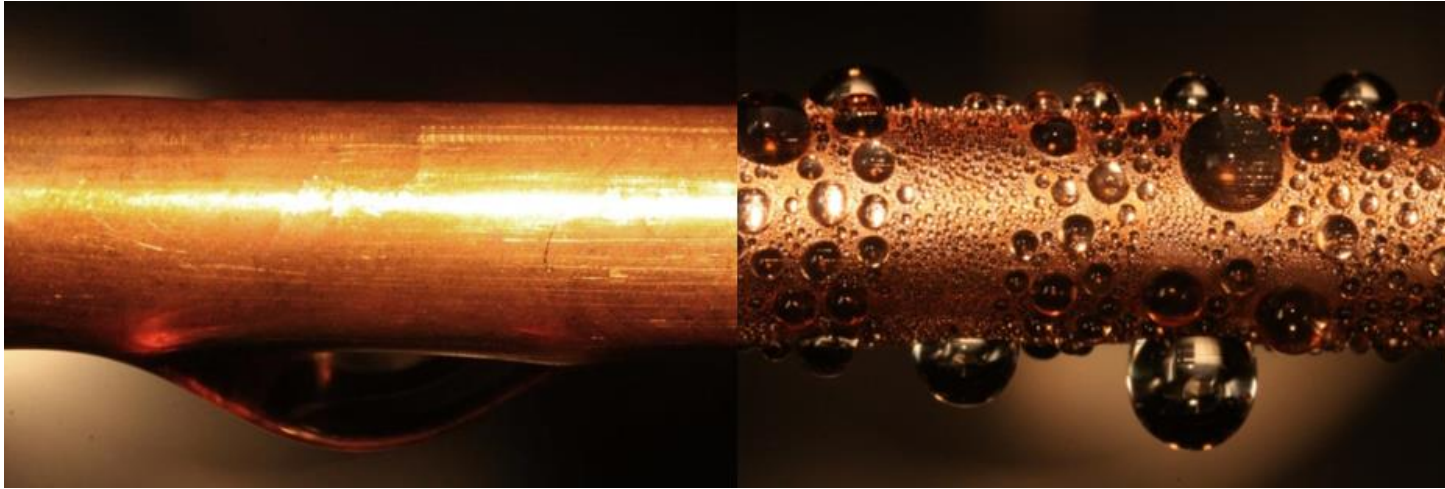


$$Q = UA (T_o - T_i), \quad \frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \frac{\Delta x}{k_w} + \frac{1}{h_o}$$

$h_o = ?$

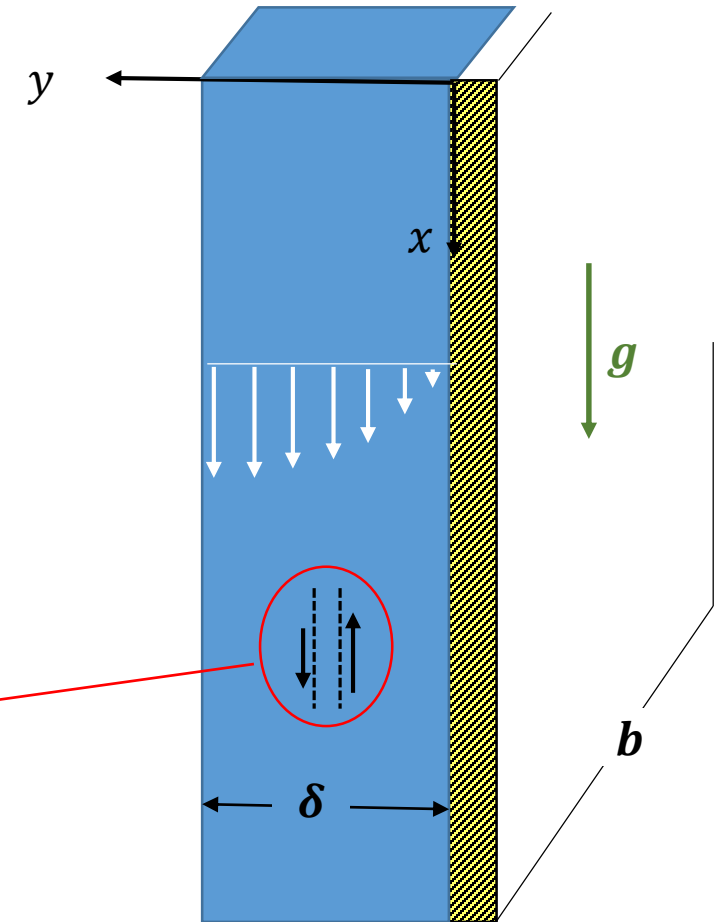
Από ποιες μεταβλητές/φαινόμενα εξαρτάται ο συντελεστής μεταφοράς κατά τη συμπύκνωση;

Συμπύκνωση (και ροή) υγρού υμένα



Συμπύκνωση υμένα

Συμπύκνωση σταγόνων

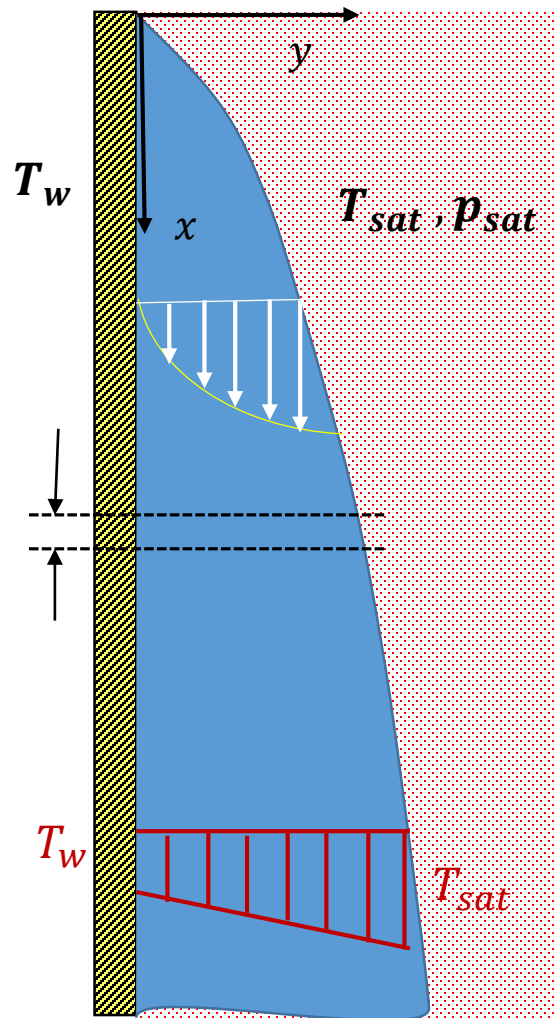


Ισοζύγιο ορμής: $\mu \frac{d^2 u}{dy^2} + (\rho_l - \rho_g)g = 0$ (Ισορροπία ιξωδών και βαρυτικών δυνάμεων)

$$u(y) = \frac{(\rho_l - \rho_g)g\delta^2}{\mu_l} \left(\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{\delta^2} \right) \Rightarrow m = b\Gamma = \int_0^\delta \rho_l u(y) b dy$$

$$\Gamma = \frac{m}{b} = \frac{\rho_l (\rho_l - \rho_g) g \delta^3}{3 \mu_l}$$

Το Βασικό Θερμικό Ισοζύγιο



Γιατί αυξάνεται το πάχος του υγρού υμένα προς τα κάτω (στην κατεύθυνση της βαρύτητας);

$$dm = dQ/\lambda, \quad \lambda \equiv h_{lg}$$

Προσέγγιση ψευδο-μόνιμης ροής (ως προς x):

$$\Gamma(x) = \frac{m(x)}{b} = \frac{\rho_l(\rho_l - \rho_g)g\delta(x)^3}{3\mu_l}$$

Συνοριακές συνθήκες θερμοκρασίας στα άκρα του υγρού υμένα

$$\frac{k_l}{\delta}(T_{sat} - T_w)(b dx) = \lambda b d\Gamma = \lambda b \frac{\rho_l(\rho_l - \rho_g)g\delta^2}{\mu_l} d\delta \Rightarrow \delta^3 d\delta = \left[\frac{\mu_l(T_{sat} - T_w)}{\lambda\rho_l(\rho_l - \rho_g)g} \right] dx$$

$$\Rightarrow \delta(x) = \left[\frac{4k_l\mu_l(T_{sat} - T_w)x}{\lambda\rho_l(\rho_l - \rho_g)g} \right]^{1/4}, \quad h(x) = \frac{k_l}{\delta(x)}$$

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{k_l}{\delta(x)} dx = 0,943 \left[\frac{k_l^3 \lambda \rho_l (\rho_l - \rho_g) g}{\mu_l L (T_{sat} - T_w)} \right]^{1/4}$$

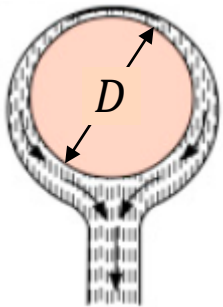
Συντελεστής συμπύκνωσης συναρτήσει Nu και Re

Κατακόρυφος αυλός

$$\bar{h}_L = 0,943 \left[\frac{k_l^3 \lambda \rho_l (\rho_l - \rho_g) g}{\mu_l L (T_{sat} - T_w)} \right]^{1/4}$$

Οριζόντιος αυλός

$$\bar{h}_D = 0,725 \left[\frac{k_l^3 \lambda \rho_l (\rho_l - \rho_g) g}{\mu_l D (T_{sat} - T_w)} \right]^{1/4}$$



Εναλλακτική διατύπωση για κατακόρυφο και οριζόντιο αυλό

Συνολική φόρτιση αυλού ανά μονάδα εύρους:

- Κατακόρυφος αυλός: $G' = W / N_t \pi D$ $W = m(L)$
- Οριζόντιος αυλός: $G' = W / N_t L$

$$Q = \bar{h} (\pi D L) (T_{sat} - T_w) = W \lambda$$

$$\frac{\bar{h}}{k_l} \left(\frac{\mu_l^2}{\rho_l (\rho_l - \rho_g) g} \right)^{1/3} = 1,5 \left(\frac{4G'}{\mu_l} \right)^{-1/3}$$

$$\frac{\bar{h}_D}{\bar{h}_L} = \frac{0,725}{0,943} \left(\frac{L}{D} \right)^{1/4} > 1$$

$$Re = \frac{4G'}{\mu_l}$$

$$Nu = \frac{\bar{h}}{k_l} \left(\frac{\mu_l^2}{\rho_l (\rho_l - \rho_g) g} \right)^{1/3} \approx \frac{\bar{h}}{k_l} \left(\frac{\nu_l^2}{g} \right)^{1/3} = \frac{\bar{h} l_{cond}}{k_l}$$

Κατηγοριοποίηση φαινομένων Βρασμού



Κίνηση του υγρού

- Στάσιμος βρασμός (pool boiling)
- Βρασμός ροής (flow boiling)

Μηχανισμός αλλαγής φάσης

- Εξάτμιση
- Βρασμός πυρήνων (nucleate boiling)
- Βρασμός υμένα (film boiling)

Σφαιρική φυσαλίδα (εξίσωση Young-Laplace)

$$p_B - p_{sat} = \frac{2\sigma}{r}$$

Δυσκολία
ομογενούς βρασμού

$$T = 100^\circ C, \sigma = 0,059 \text{ N/m}$$

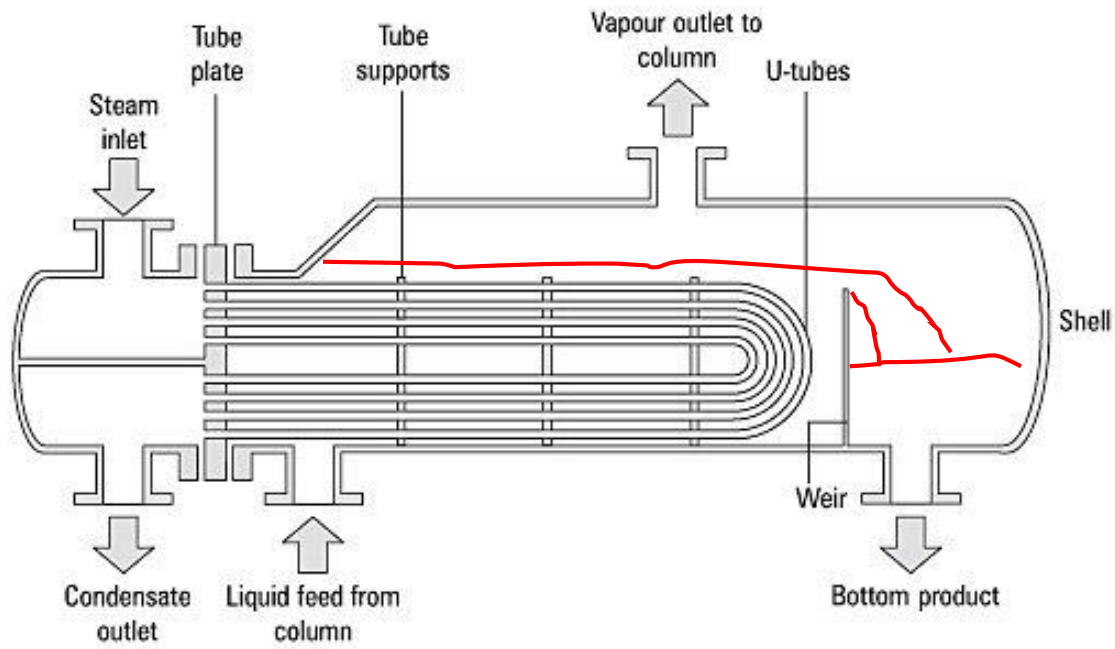
$$r = 10 \mu m \Rightarrow \Delta p = 0,12 \text{ bar}, T_{sat} = 102,8^\circ C$$

$$r = 1 \mu m \Rightarrow \Delta p = 1,2 \text{ bar}, T_{sat} = 123,3^\circ C \leftarrow 1,4 \times 10^{11} \text{ μόρια}$$

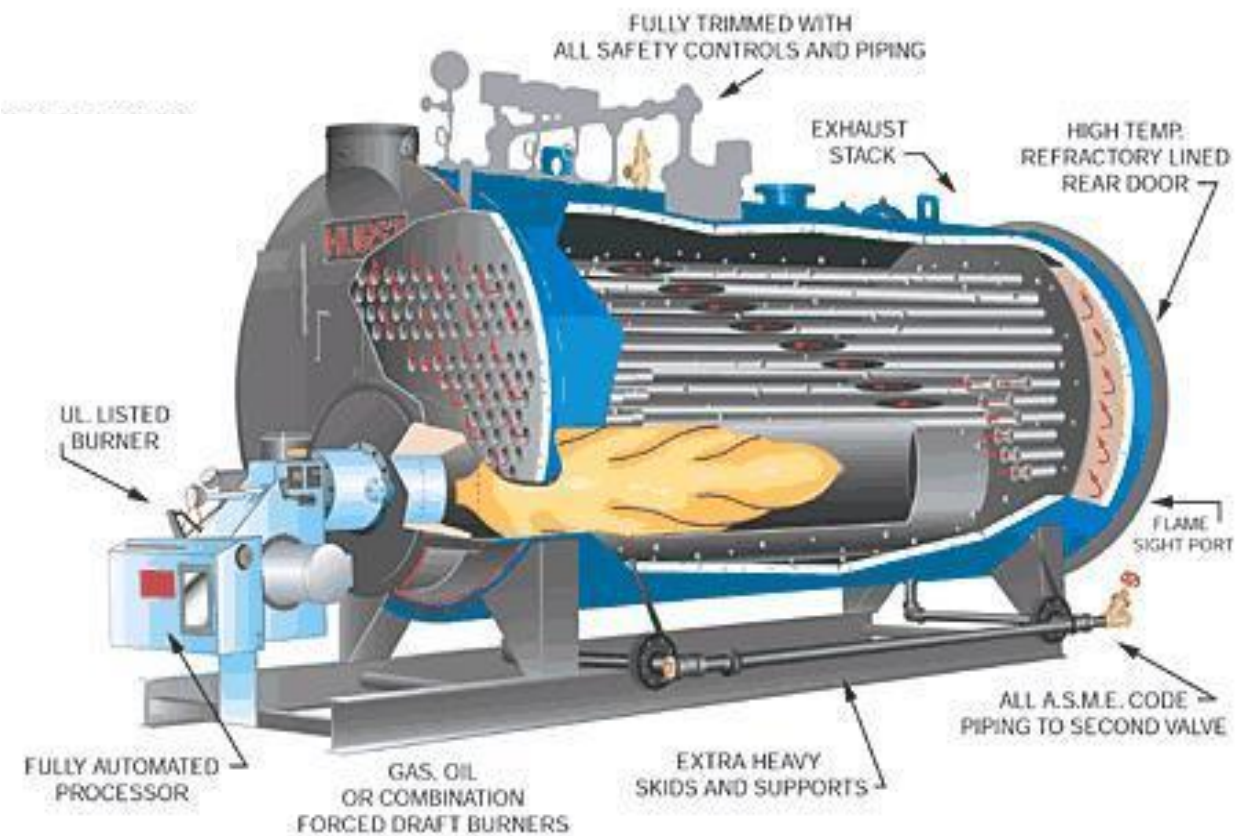
<https://www.youtube.com/watch?v=0xcxumccf8Q>

<https://www.youtube.com/watch?v=GA9MBdePwmo&t=2s>

Αναβραστήρας/εξατμιστήρας τύπου λέβητα (kettle reboiler-flooded evaporator)

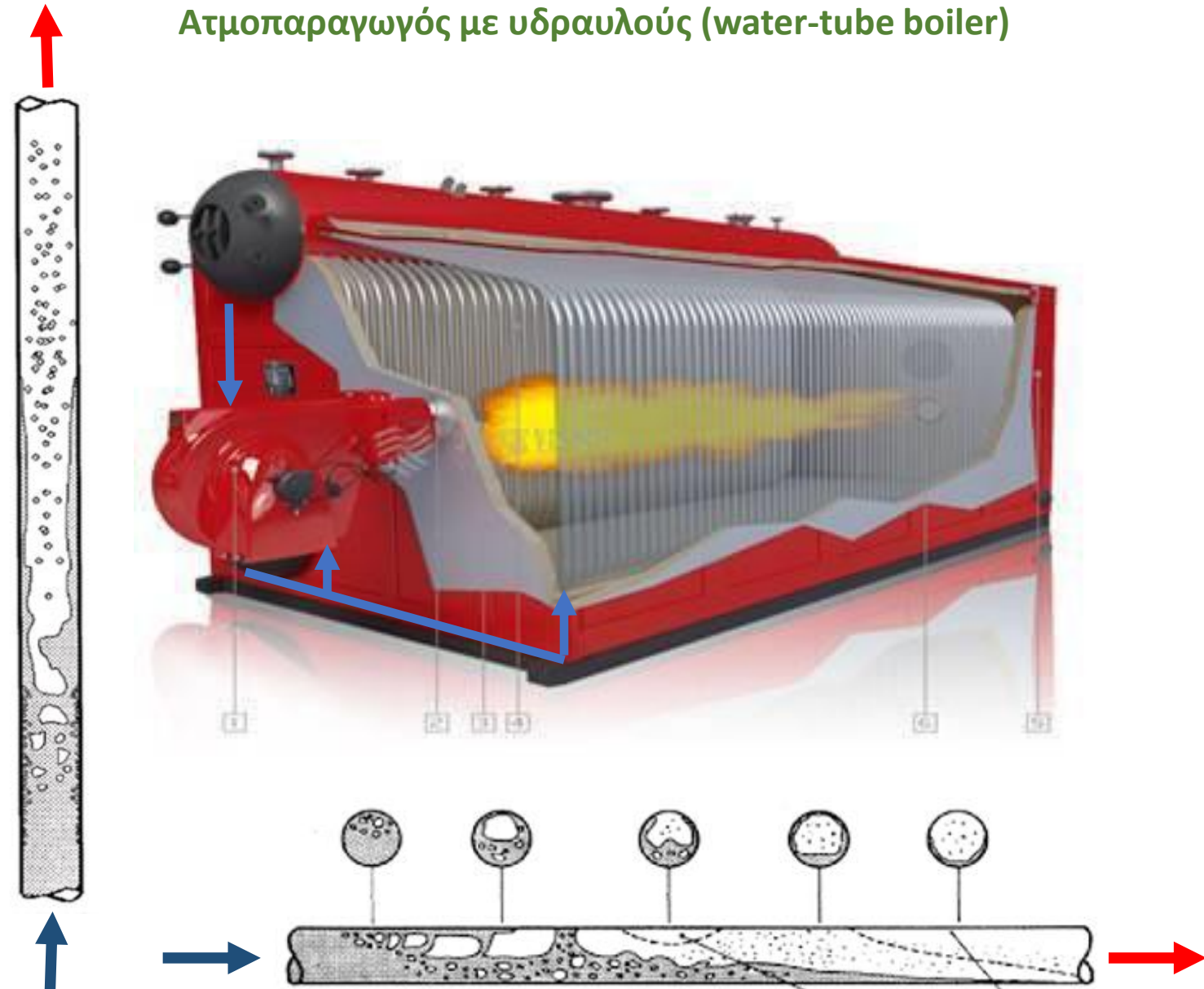


Ατμοπαραγωγός με φλογωσλήνα (shell boiler)

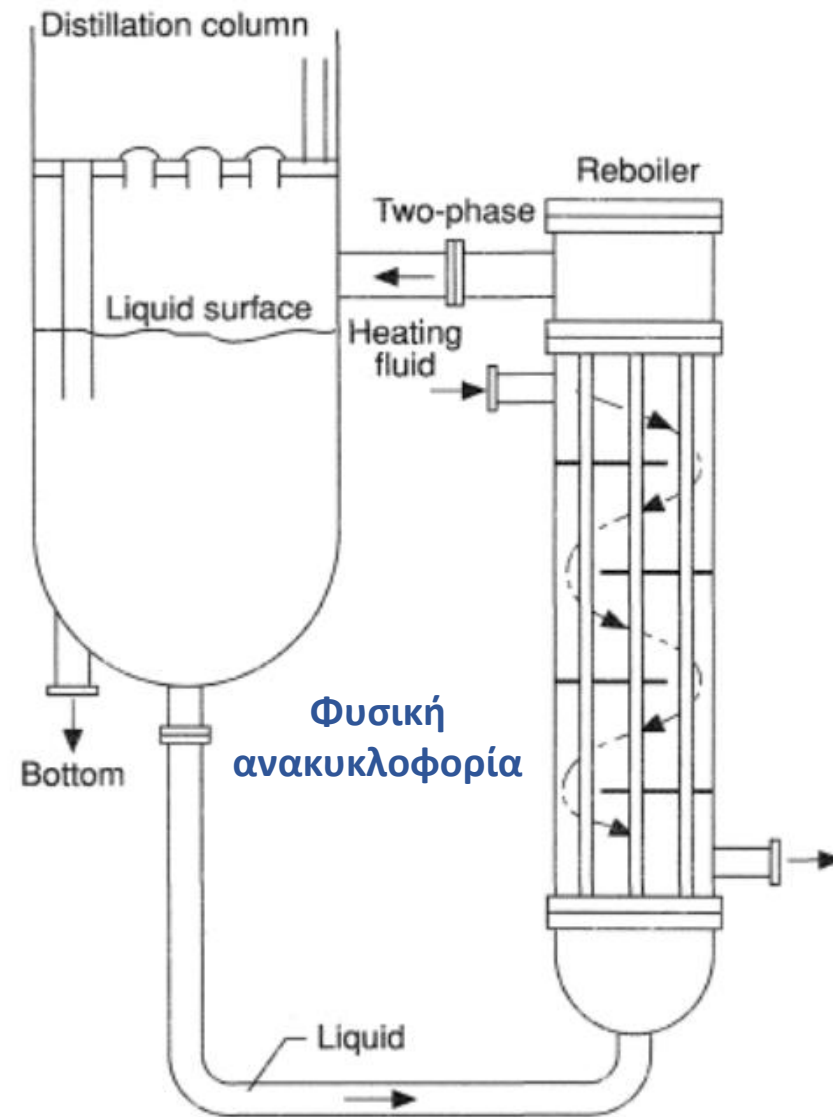


Εφαρμογές Βρασμού ροής

Ατμοπαραγωγός με υδραυλούς (water-tube boiler)

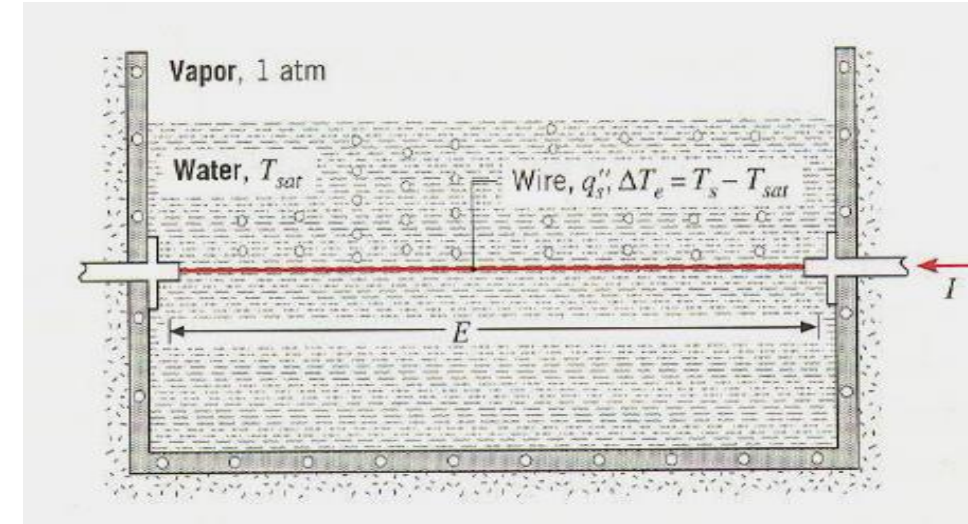
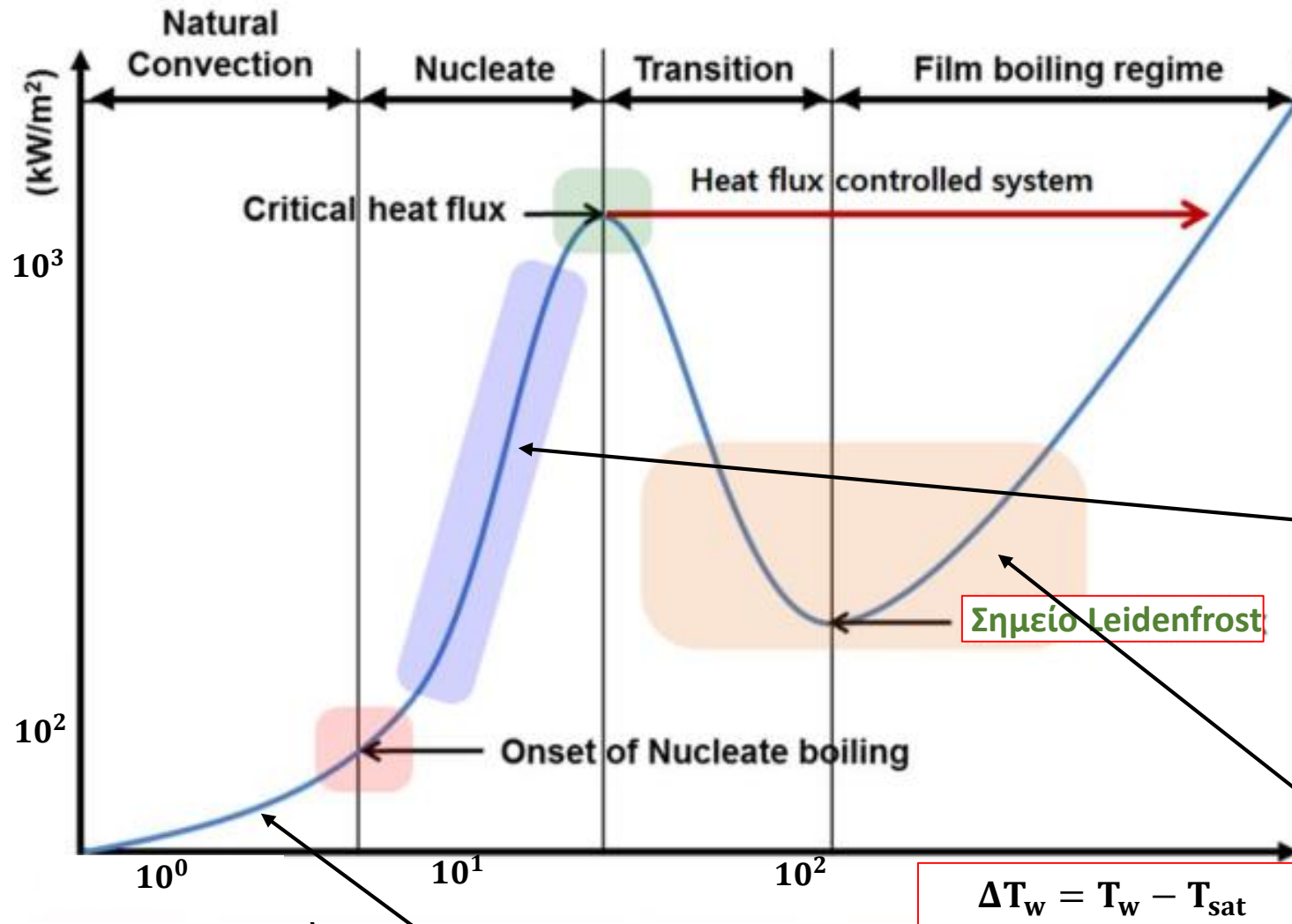


Αναβραστήρας τύπου θερμοσίφωνα (thermosyphon reboiler)



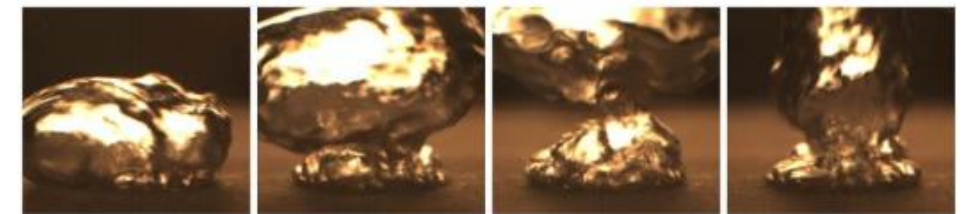
Στάσιμος Βρασμός

Πείραμα Nukiyama (1934)



Βρασμός πυρήνων

$$q \sim (\Delta T_w)^3$$



Βρασμός υμένα



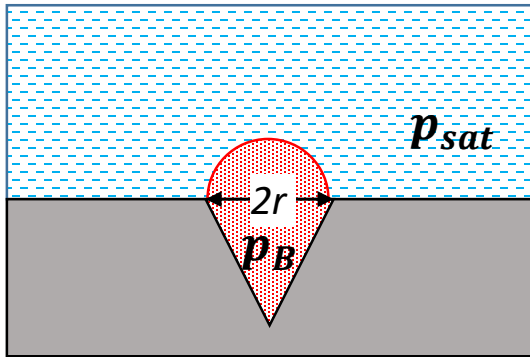
$$\Delta T_w = T_w - T_{sat}$$

Εξάτμιση

$$q \sim (\Delta T_w)^{1,25}$$

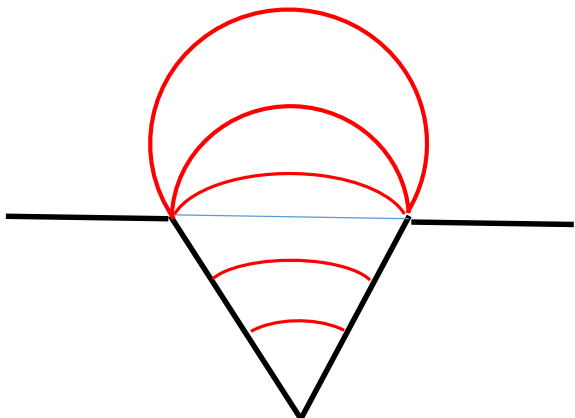
Σημείο Leidenfrost

Ελάχιστη υπερθέρμανση τοιχώματος



Σφαιρική σταγόνα ή φυσαλίδα

$$p_B - p_{sat} = \frac{2\sigma}{r}$$



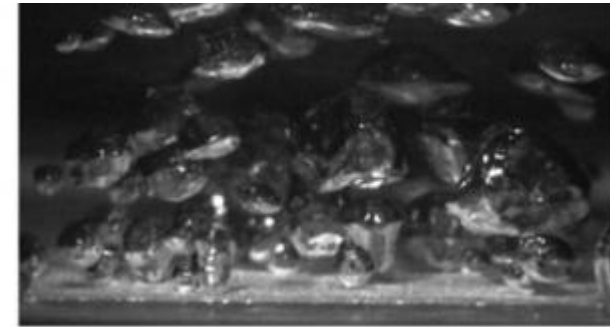
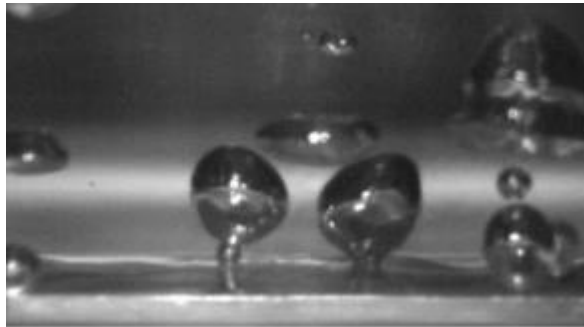
$$T_w = T_{sat} + \frac{dT_{sat}}{dp_{sat}} (p_B - p_{sat})$$

$$\frac{dT_{sat}}{dp_{sat}} = \frac{T_{sat} \Delta v^{vl}}{\Delta h^{vl}} \approx \frac{T_{sat}}{\rho_v \Delta h^{vl}}$$

$$\Delta T_{w,min} = T_w - T_{sat} = \frac{2\sigma T_{sat}}{r \rho_v \Delta h^{vl}}$$

($r \sim 5 \mu m$)

Επίδραση πλήθους μικρο-εγκοπών



Επίδραση επιφανειακής τάσης (με ιοντικό επιφανειοδραστικό)

<https://www.youtube.com/watch?v=XtekyM8awWc>

Θερμορροή Βρασμού πυρήνων

Χαρακτηριστικές κλίμακες: $U = \frac{q}{\lambda \rho_l} \quad L = \left[\frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_v)} \right]^{1/2}$

Τα δύο βασικά προβλήματα μεταφοράς θερμότητας

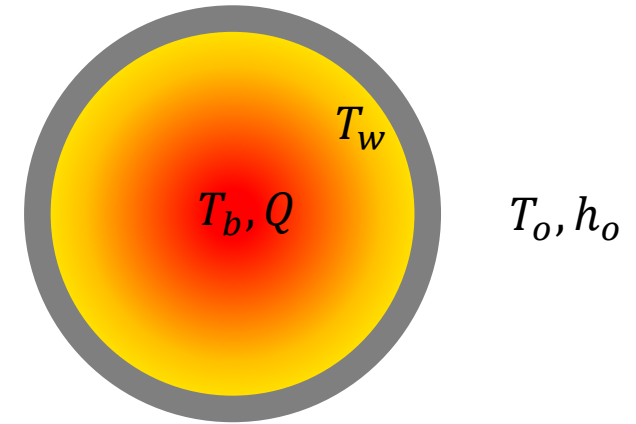
Συσχέτιση Rosenhow

$$Nu = \frac{1}{C_{sl}} Re^{1-m} Pr^{1-n}$$

$$q = h(\Delta T_w) \sim (\Delta T_w)^3$$

$$q = \mu_l \lambda \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left(\frac{c_{p,l} \Delta T_w}{C_{sl} \lambda Pr_l^n} \right)^3$$

Νερό: $n=1$, Οργανικά: $n=1,7$



Συσκευές με θερμαντικό ρευστό

$$Q = UA(T_b - T_o) \quad T_b \rightarrow Q$$

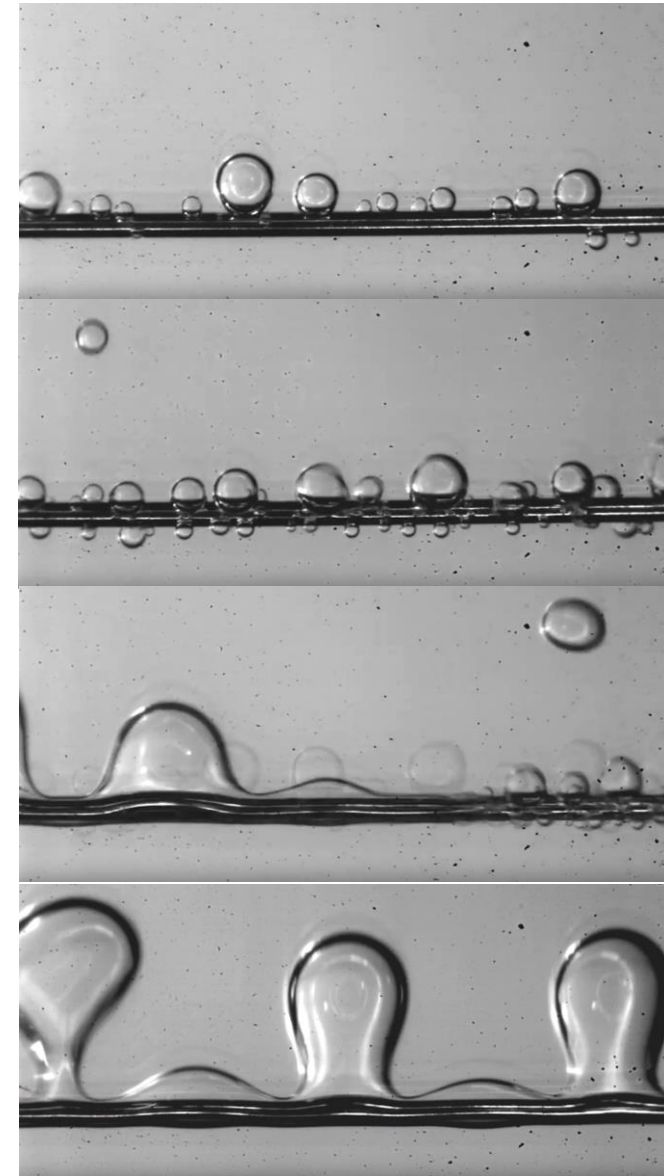
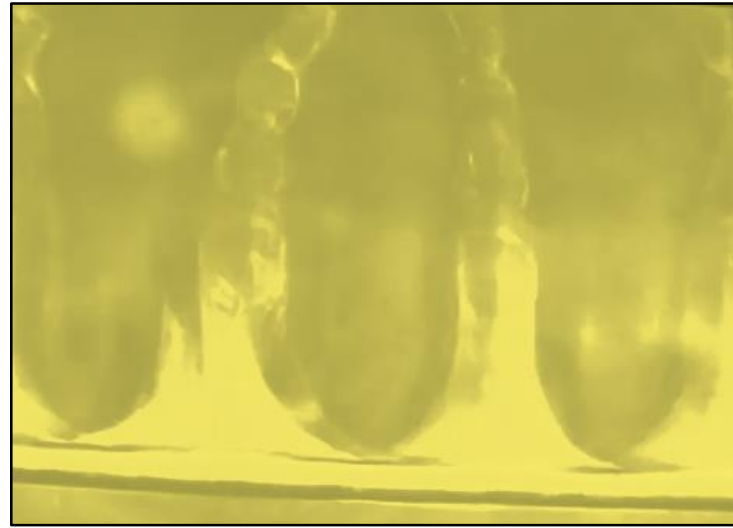
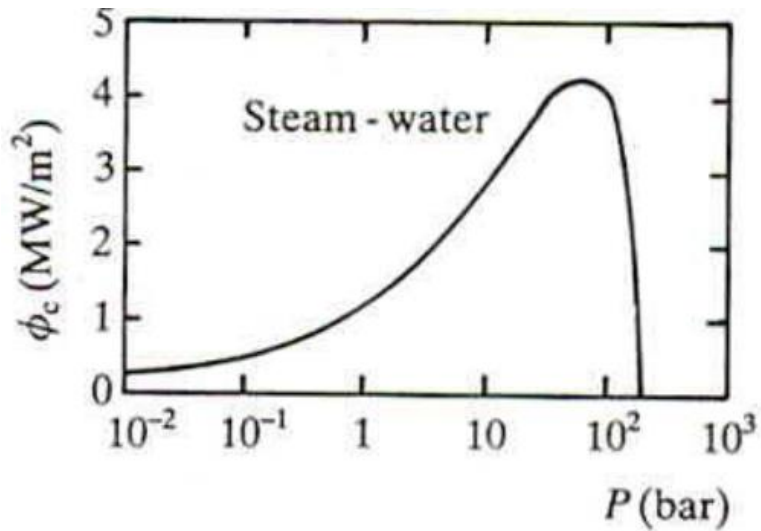
Συσκευές με φλόγα

$$Q = h_o A(T_w - T_o) \quad Q \rightarrow T_w$$

Fluid-Heating Surface Combination	C_{sf}	n
Water-copper (polished)	0.0130	1.0
Water-copper (scored)	0.0068	1.0
Water-stainless steel (mechanically polished)	0.0130	1.0
Water-stainless steel (ground and polished)	0.0060	1.0
Water-stainless steel (teflon pitted)	0.0058	1.0
Water-stainless steel (chemically etched)	0.0130	1.0
Water-brass	0.0060	1.0
Water-nickel	0.0060	1.0
Water-platinum	0.0130	1.0
<i>n</i> -Pentane-copper (polished)	0.0154	1.7
<i>n</i> -Pentane-chromium	0.0150	1.7
Benzene-chromium	0.1010	1.7
Ethyl alcohol-chromium	0.0027	1.7
Carbon tetrachloride-copper	0.0130	1.7
Isopropanol-copper	0.0025	1.7

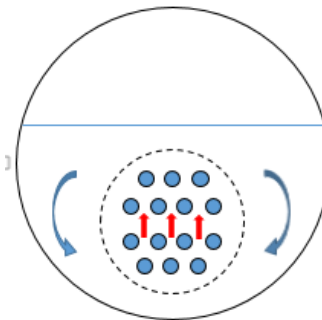
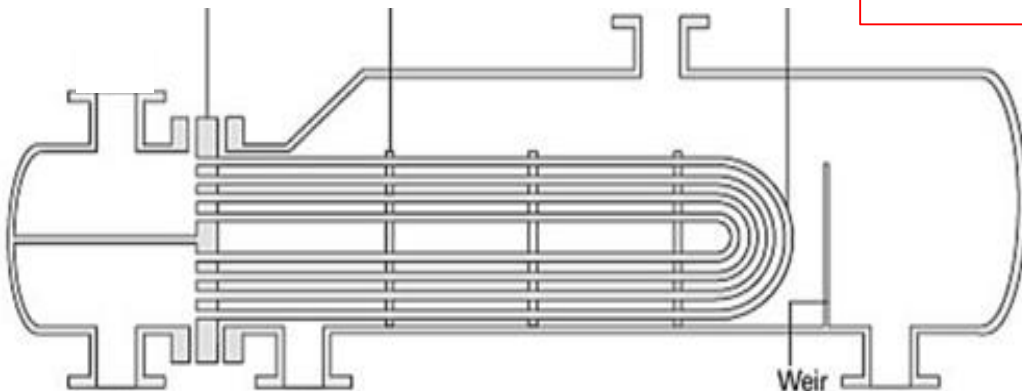
Κρίσιμη θερμότητα-επίπεδη πλάκα

$$q_{cr} = 0,149 \lambda \rho_v^{1/2} [\sigma g (\rho_l - \rho_v)]^{1/4}$$

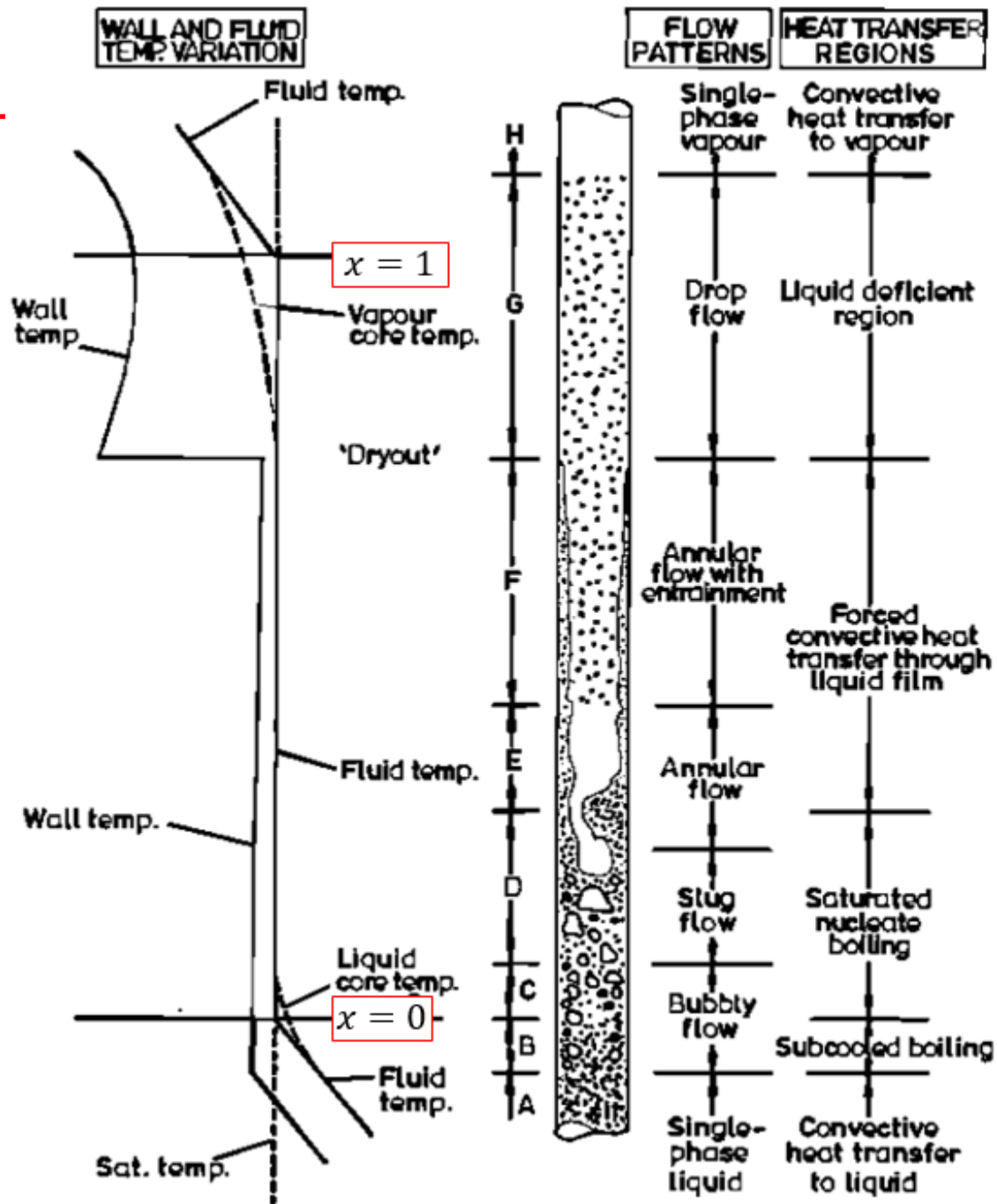


Δέσμη οριζόντιων αυλών

$$q_{cr} = 0,44 \frac{P_T}{d} \frac{1}{\sqrt{N_T}} \lambda \rho_v^{1/2} [\sigma g (\rho_l - \rho_v)]^{1/4}$$



Φαινομενολογία Βρασμού ροής



Παρατηρήσεις

- Συνεχής μεταβολή της ποιότητας κατά μήκος του αυλού
- Το τοπικό καθεστώς ροής επηρεάζει τον μηχανισμό ατμοποίησης
- Κύριο φαινόμενο η μετάπτωση από βρασμό πυρήνων σε εξάτμιση (βρασμός με συναγωγή- convective boiling)

Βρασμός με συναγωγή (εξάτμιση)

$$q = h(T_w - T_{sat}) \approx \frac{k_l}{\delta_l} (T_w - T_{sat})$$

$$\delta_l \downarrow \Rightarrow h \uparrow \Rightarrow T_w \downarrow$$

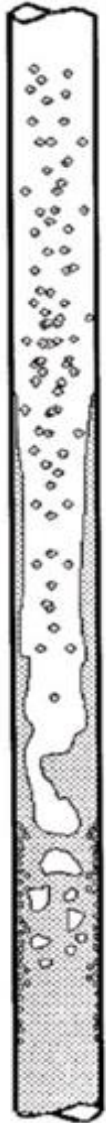
Διακοπή βρασμού πυρήνων
όταν $T_w - T_{sat} < \Delta T_{w,min}$

Γενικευμένος ορισμός ποιότητας μίγματος

$$x = \frac{H - H_l^{sat}}{H_v^{sat} - H_l^{sat}} = \frac{H - H_l^{sat}}{\lambda}$$

$x < 0$: Υπόψυκτο υγρό
 $x > 1$: Υπέρθερμος ατμός

Συντελεστής μεταφοράς στο βρασμό ροής



Συσχέτιση Chen

$$q = h(T_w - T_{sat})$$

$$h = h_{NB} + h_{CB} = Sh_{PB} + Fh_{sl}$$

$S < 1$ Συντελεστής απόσβεσης πυρηνογένεσης
 $F \geq 1$ Συντελεστής διφασικής ροής

Σχέση Foster-Zuber για στάσιμο βρασμό

$$h_{PB} = 0,00122 \frac{\Delta T_w^{0,24} \Delta p_w^{0,75} c_{p,l}^{0,45} \rho_l^{0,49} k_l^{0,79}}{\sigma^{0,5} \lambda^{0,24} \mu_l^{0,29} \rho_g^{0,24}}$$

Υπόψυκτος βρασμός

$$q = h_{NB}(T_w - T_{sat}) + h_{sl}(T_w - T_l)$$

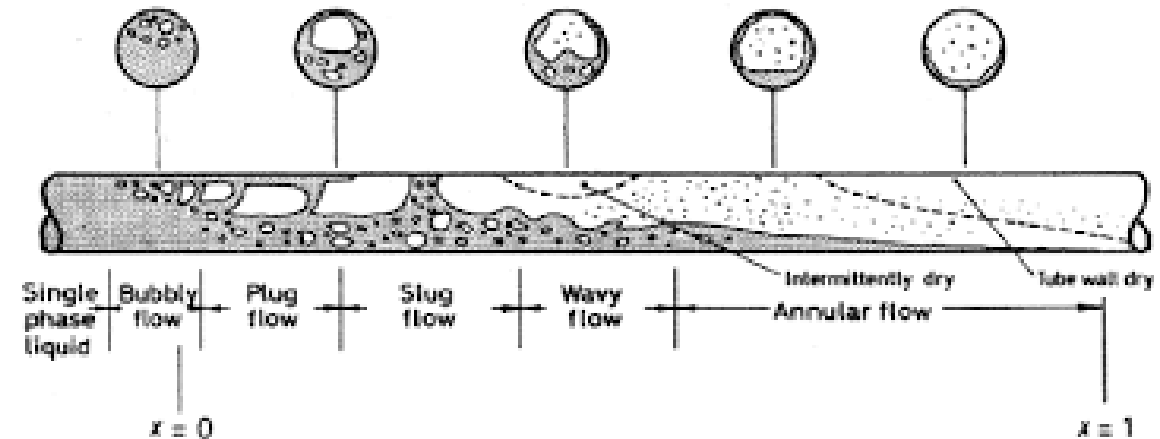
Βρασμός ροής = Πυρηνογένεση + Εξάτμιση

$$Nu_{sl} = 0,023 Re_{sl}^{0,8} Pr_l^{0,4} \quad Re_{sl} = \frac{4(1-x)W}{\pi D \mu_l}$$

$$F = \begin{cases} 2,35 (0,213 + 1/X_{tt})^{0,736} & \text{για } X_{tt} < 10 \\ 1 & \text{για } X_{tt} \geq 10 \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{1 + 2,53 \cdot 10^{-6} (Re_{sl} F^{1,25})^{1,17}}$$

$$X_{tt}^2 = \frac{(dp/dz)_{sl}}{(dp/dz)_{sg}} = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{1,8} \left(\frac{\rho_g}{\rho_l}\right) \left(\frac{\mu_l}{\mu_g}\right)^{0,2}$$



Ισοζύγιο ενέργειας-ομοιόμορφη θερμορροή

$$q(\pi D z) = \left(G \frac{\pi D^2}{4} \right) [x(z) - x_{in}] \lambda \Rightarrow q = \frac{GD\lambda}{4L} (x_{out} - x_{in})$$

Ισχύει και για υπόψυκτο υγρό στην είσοδο

$$\begin{aligned} q(\pi D z) &= \left(G \frac{\pi D^2}{4} \right) [x H_v^{sat} + (1 - x) H_l^{sat} - H_{l,in}] = \\ &= \left(G \frac{\pi D^2}{4} \right) [x (H_v^{sat} - H_l^{sat}) - (H_{l,in} - H_l^{sat})] = \left(G \frac{\pi D^2}{4} \right) [x(z) - x_{in}] \lambda \end{aligned}$$

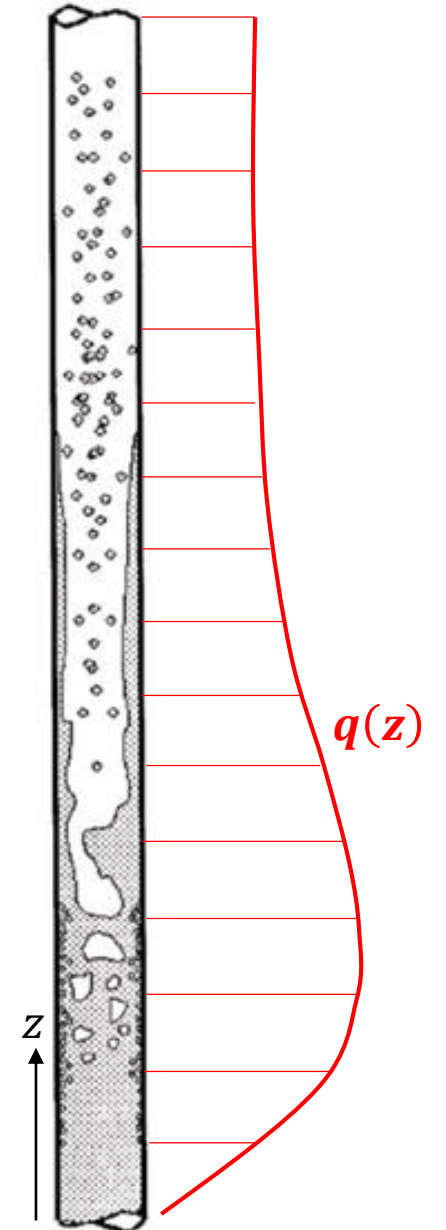
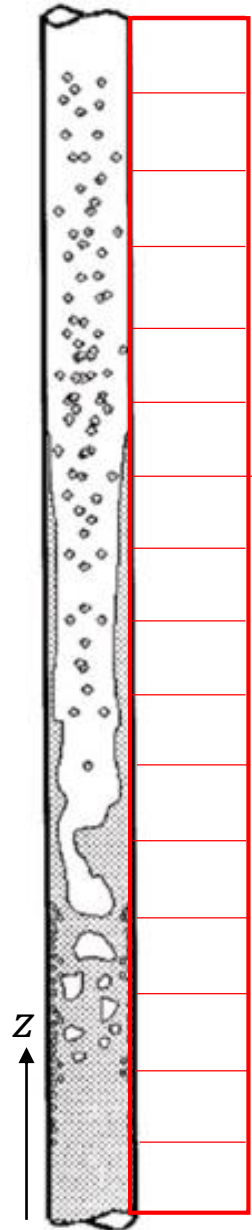
q

Ισοζύγιο ενέργειας-ανομοιόμορφη θερμορροή

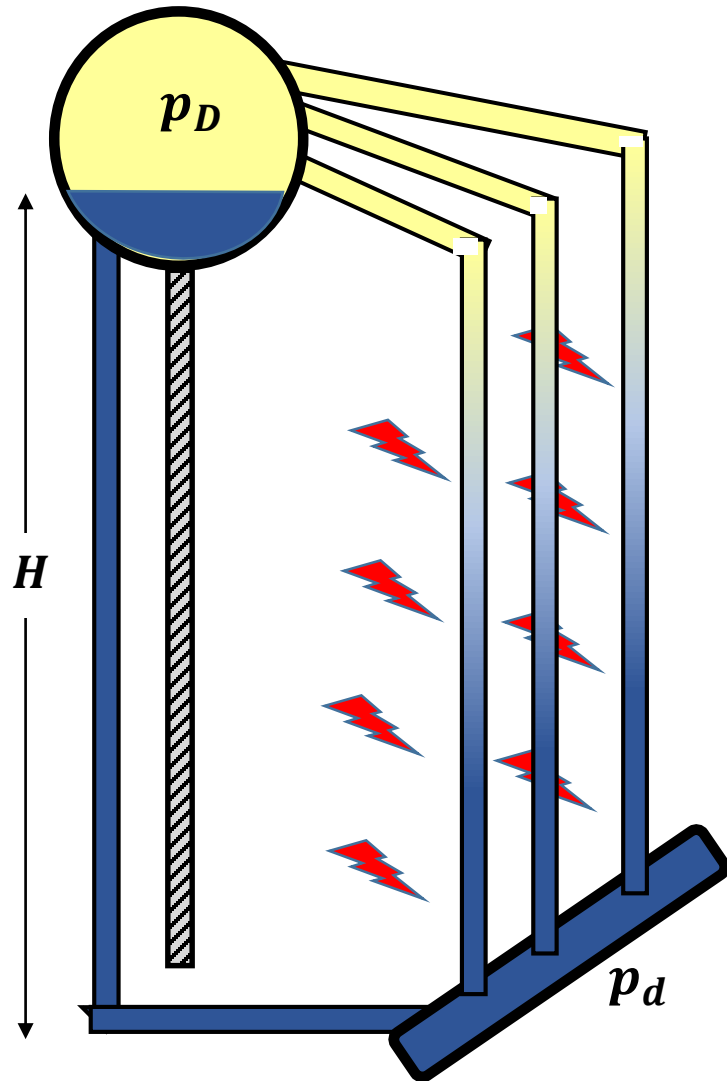
$$Q(z) = \int_0^z q(z) \pi D dz = \left(G \frac{\pi D^2}{4} \right) [x(z) - x_{in}] \lambda$$

$$\Rightarrow x(z) = \dots$$

$$q(z), x(z) \Rightarrow q(x)$$

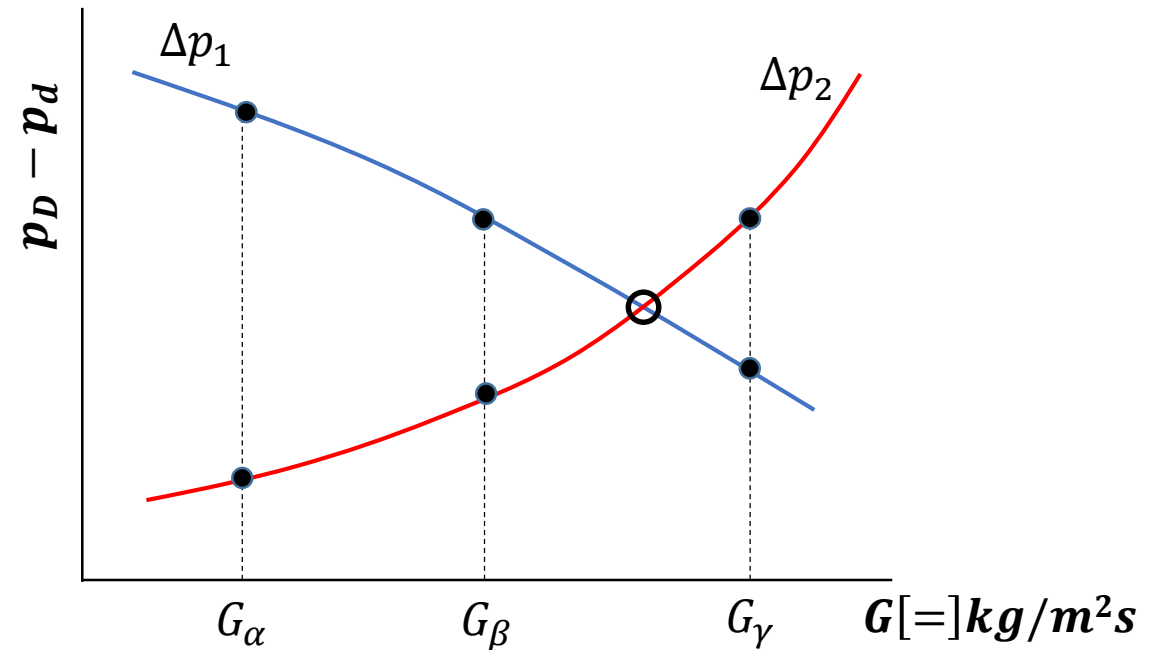


Πρόβλεψη φυσικής ανακυκλοφορίας



$$p_d = p_D + \rho_l g H - \Delta p_{f,l} \Rightarrow p_d - p_D = \Delta p_1 = \rho_l g H - \Delta p_{f,l}$$

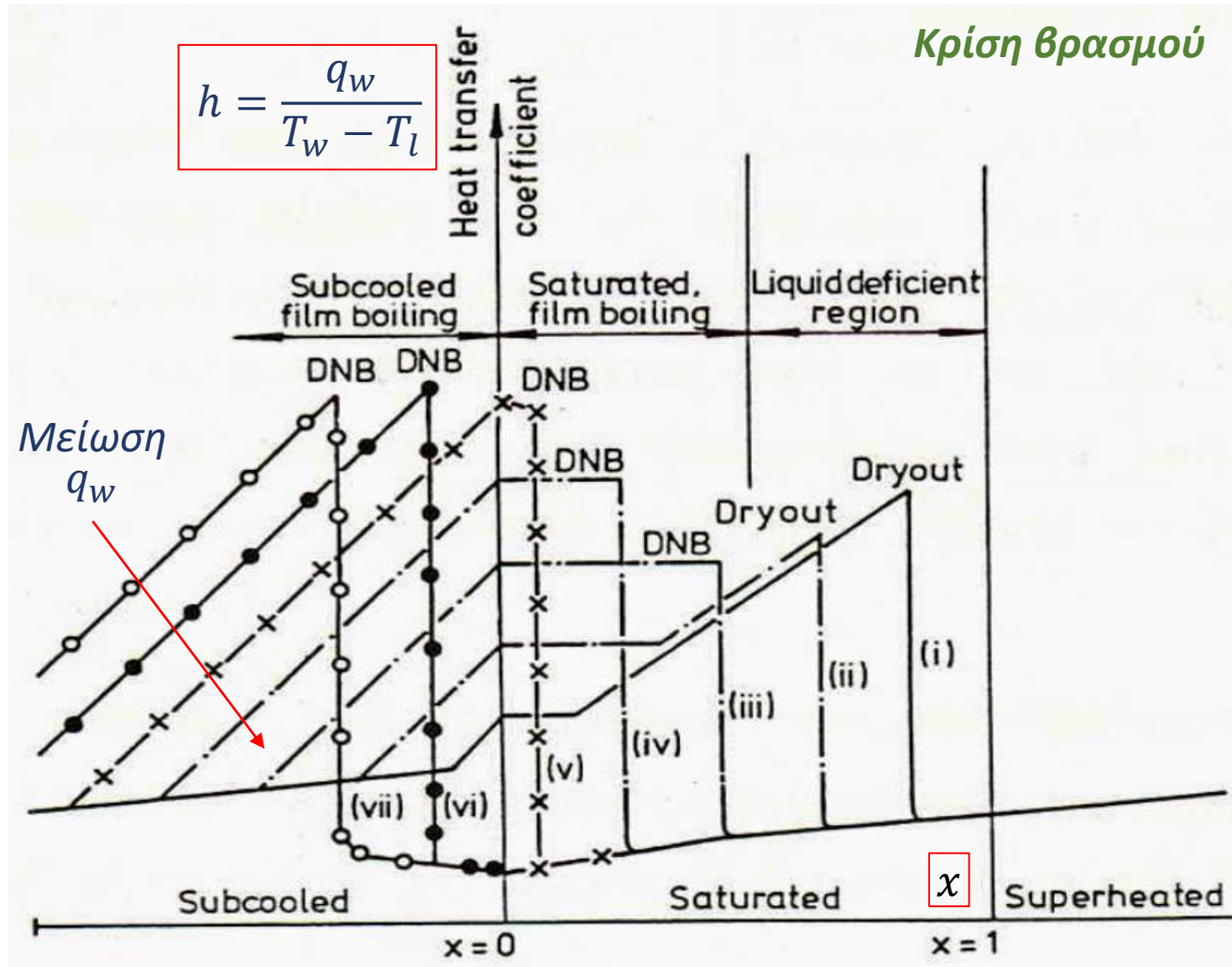
$$p_d = p_D + \Delta p_{g,2\Phi} + \Delta p_{f,2\Phi} + \Delta p_{a,2\Phi} \Rightarrow p_d - p_D = \Delta p_2 = \Delta p_{g,2\Phi} + \Delta p_{f,2\Phi} + \Delta p_{a,2\Phi}$$



Κρίση Βρασμού ροής-κρίσιμη θερμορροή (CHF)

Στο στάσιμο βρασμό:

$$q_{cr} = 0,149 \lambda \rho_v^{1/2} [\sigma g (\rho_l - \rho_v)]^{1/4} = q_{cr}(p_{sat})$$



Στο βρασμό ροής:

Δύο μηχανισμοί κρίσης βρασμού:

- Σε χαμηλές ποιότητες: σχηματισμός στρώματος ατμού (DNB)
- Σε υψηλές ποιότητες: ξήρανση υγρού υμένα (Dryout)

CHF:
$$q_{cr} = q_{cr}(p_{sat}, G, x)$$

Πίνακες κρίσιμης θερμορροής για νερό σε αγωγό με $D=8$ mm (Groeneveld et al 2006)

Εξάρτηση από διάμετρο αγωγού

$$\frac{q_{cr}(D)}{q_{cr}(8\text{mm})} = \left(\frac{8}{D}\right)^{0,5}, \quad D \leq 25 \text{ mm}$$

Εξάρτηση από ιδιότητες ρευστού

$$\frac{\rho_l}{\rho_v}, \frac{G}{\sqrt{\rho_l \sigma / D}}, \frac{q_{cr}}{G \lambda} \Rightarrow p_{sat}, G, q_{cr}$$

Pressure	Mass Flux	CHF [kW m ⁻²]																							
[kPa]	[kg m ⁻² s ⁻¹]	<i>CHF look-up tables Groeneveld et al (2006)</i>																							
5000	1500	14030	11668	9617	8115	7597	7296	7024	6470	5710	5375	4875	4438	4167	3795	3357	2941	2531	2290	914	592	393	200	0	
5000	2000	15633	12936	10401	8530	7889	7408	6946	6107	5170	4836	4340	3913	3599	3257	2909	2412	1979	1182	638	354	188	130	0	
5000	2500	17335	14268	11308	8887	7972	7432	6712	5661	4880	4445	4017	3662	3295	2876	2689	1915	955	651	447	195	99	51	0	
5000	3000	18794	15433	12150	9231	8180	7463	6490	5427	4718	4265	3857	3476	3104	2578	2283	1429	708	533	405	179	73	41	0	
5000	3500	19936	16374	12894	9768	8306	7477	6368	5026	4484	3984	3644	3312	2932	2394	1781	1164	910	706	513	290	103	42	0	
5000	4000	20949	17217	13569	9991	8683	7658	6295	4783	4200	3584	3367	3140	2745	2274	1402	1188	1060	922	593	320	111	44	0	
5000	4500	21962	18016	14114	10137	9063	7837	6323	4905	4130	3522	3305	3023	2672	2065	1424	1245	1128	1046	649	346	117	46	0	
5000	5000	22867	18766	14525	10880	9540	8183	6486	5030	4103	3487	3287	3017	2684	2024	1455	1329	1224	1112	695	362	124	51	0	
5000	5500	23661	19456	15309	11569	10048	8548	6741	5245	4051	3480	3299	3060	2672	2047	1628	1480	1351	1176	743	379	135	57	0	
5000	6000	24391	20103	15958	12239	10650	8921	7328	5430	4008	3507	3314	3079	2696	2057	1747	1598	1449	1240	793	405	152	67	0	
5000	6500	25098	20718	16511	12734	10892	9511	7643	5637	4183	3523	3357	3128	2771	2258	1947	1783	1549	1314	855	437	172	78	0	
5000	7000	25860	21312	16907	13189	11608	9908	7949	5781	4373	3553	3386	3182	2857	2430	2136	1893	1639	1396	926	482	197	91	0	
5000	7500	26597	21982	17360	13563	11914	10298	8281	6006	4572	3786	3444	3201	2944	2603	2250	1988	1716	1466	990	512	211	98	0	
5000	8000	27254	22428	17865	13912	12316	10851	8676	6217	4805	4010	3629	3362	3178	2817	2409	2068	1783	1533	1052	543	225	105	0	
	X→	-0.50	-0.40	-0.30	-0.20	-0.15	-0.10	-0.05	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1	
7000	0	5445	5059	4676	4323	4139	3937	3677	3322	2696	2256	1848	1479	1243	1036	891	778	692	621	525	389	267	209	0	
7000	50	5919	5536	5191	4863	4698	4520	4306	3998	3399	2986	2624	2264	2042	1859	1712	1588	1477	1366	1151	1010	473	325	0	
7000	100	6912	6301	5871	5584	5462	5261	5095	4849	4271	3776	3499	3290	3142	3034	2906	2850	2651	2486	2123	1673	1205	768	0	
7000	300	7445	6709	6259	6020	5914	5761	5662	5495	5182	4752	4464	4070	3764	3611	3417	3250	3028	2738	2286	1994	1408	869	0	
7000	500	7842	6895	6435	6188	5996	5931	5818	5672	5408	4922	4521	4196	3989	3812	3602	3459	3221	2905	2482	1985	1547	869	0	
7000	750	9129	7841	6867	6263	6154	5998	5895	5776	5430	4987	4538	4131	3918	3709	3464	3327	3118	2770	2312	1904	1400	742	0	
7000	1000	10186	8774	7390	6532	6313	6276	6162	5864	5366	4920	4399	3935	3723	3447	3112	2884	2713	2432	2085	1767	1506	341	0	
7000	1500	11920	10072	8460	7262	6915	6647	6308	5729	5059	4561	4039	3612	3279	2991	2698	2490	2264	1991	1591	599	372	318	191	0
7000	2000	13294	11209	9172	7557	7279	6769	6187	5327	4570	4020	3552	3174	2864	2566	2353	1919	1406	793	483	267	197	134	0	
7000	2500	14680	12245	9774	7920	7382	6765	5895	4977	4178	3639	3207	2867	2552	2211	1941	1487	813	521	342	177	103	58	0	
7000	3000	15871	13214	10463	8259	7522	6778	5785	4761	3971	3366	3014	2640	2333	2111	1685	951	493	429	307	157	77	43	0	
7000	3500	16889	14072	11223	8783	7711	6972	5738	4518	3739	3127	2816	2482	2188	1798	1357	851	631	531	388	221	96	41	0	
7000	4000	17783	14824	11868	9277	8077	7118	5593	4226	3539	2855	2616	2362	2104	1710	1251	957	789	681	444	255	99	44	0	
7000	4500	18619	15498	12439	9619	8281	7208	5381	4156	3422	2650	2472	2268	2057	1647	1239	1006	867	779	487	266	102	45	0	
7000	5000	19434	16132	12870	10084	8686	7415	5486	4350	3409	2611	2486	2251	2040	1619	1279	1052	950	854	526	277	106	47	0	
7000	5500	20138	16733	13579	10563	9272	7844	6153	4649	3405	2688	2460	2325	2076	1662	1397	1217	1065	933	576	298	115	52	0	
7000	6000	20703	17309	14047	11354	9947	8657	6697	4756	3417	2725	2487	2353	2087	1697	1476	1339	1184	1018	637	327	131	60	0	
7000	6500	21284	17855	14610	11951	10355	9156	7135	4905	3437	2733	2525	2442	2241	1938	1688	1515	1303	1103	702	360	149	69	0	
7000	7000	21889	18357	15013	12260	10817	9456	7309	4949	3504	2872	2648	2499	2348	2094	1852	1615	1393	1182	771	401	170	80	0	
7000	7500	22505	18841	15385	12539	11244	9779	7455	5004	3629	3017	2792	2596	2488	2263	2039	1776	1504	1264	838	433	182	86	0	
7000	8000	23064	19305	15794	12917	11519	10059	7792	5163	3777	3222	3120	3063	2927	2605	2282	1893	1592	1345	904	463	193	91	0	

Μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία

Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία

Characterization	Wavelength, λ
Cosmic rays	< 0.3 pm
Gamma rays	0.3-100 pm
X rays	0.01-30 nm
Ultraviolet light	3-400 nm
Visible light	0.4-0.7 μm
Near infrared radiation	0.7-30 μm
Far infrared radiation	30-1000 μm
Millimeter waves	1-10 mm
Microwaves	10-300 mm
Shortwave radio & TV	300 mm-100 m
Longwave radio	100 m-30 km

Αλληλεπίδραση ακτινοβολίας με στερεό

$\alpha_\lambda, \rho_\lambda, \tau_\lambda$: μονοχρωματικοί βαθμοί απορρόφησης, ανάκλασης και διαπέρασης

$$\alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda = 1$$

Μέλαν σώμα (μαύρη επιφάνεια)

$$\alpha_{\lambda,b} = \alpha_b = 1$$

$E_b, E_{b,\lambda}$: ολική και μονοχρωματική εκπεμπόμενη ισχύς[=]J/m² επιφάνειας

Κατανομή Planck

$$E_{b,\lambda}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 [\exp(C_2/\lambda T) - 1]}$$

$$C_1 = 2\pi h c^2$$

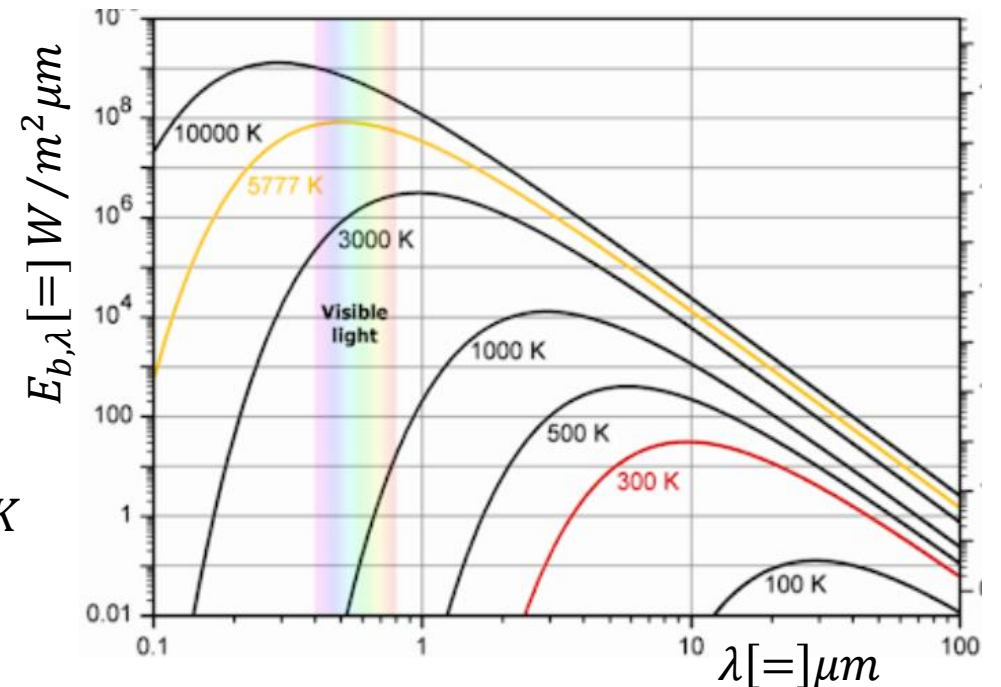
$$C_2 = hc/k_B$$

Νόμος Stefan-Boltzmann

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{b,\lambda}(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4$$

Νόμος Wien

$$E_{b,\lambda}(\lambda, T) = \max \Rightarrow (\lambda T)_{max} = 2898 \mu\text{m K}$$



Σχέση εκπομπής και απορρόφησης

Βαθμός εκπομπής

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{b,\lambda}}$$

Γενική συμπεριφορά

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon'_\lambda(\lambda, \varphi, \theta, T)$$

Η εκπεμπόμενη (όπως και η απορροφούμενη και ανακλώμενη) ισχύς εξαρτώνται και από την κατεύθυνση

Ημισφαιρικός βαθμός εκπομπής

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T)$$

Ολικός βαθμός εκπομπής

$$\varepsilon(T) = \frac{\int_0^\infty E_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty E_{b,\lambda} d\lambda} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_{b,\lambda} d\lambda}{\sigma T^4}$$

Τέχνασμα υπολογισμών

$$\frac{\int_0^\lambda E_{b,\lambda} d\lambda}{\sigma T^4} = \int_0^{\lambda T} \frac{C_1/\sigma}{(\lambda T)^5 [\exp(C_2/\lambda T) - 1]} d(\lambda T)$$

NOMΟΣ KIRCHHOFF

$$\alpha'_\lambda(\lambda, \varphi, \theta, T) = \varepsilon'_\lambda(\lambda, \varphi, \theta, T)$$

Διάχυτη επιφάνεια (ή ακτινοβολία)

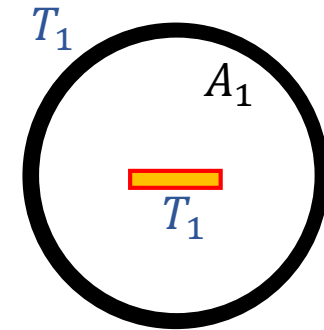
$$\alpha_\lambda(\lambda, T) = \varepsilon_\lambda(\lambda, T)$$

Γκριζα και διάχυτη επιφάνεια (ή ακτινοβολία*)

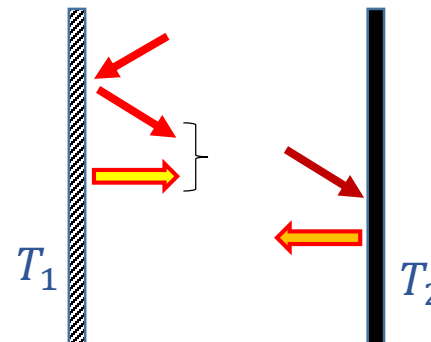
$$\alpha(T) = \varepsilon(T) \quad \text{*γκρίζα ακτινοβολία} \sim E_{b,\lambda}(T)$$

Θερμική ισορροπία μικρής επιφάνειας σε μαύρη κοιλότητα

$$(\varepsilon_1 E_{b1}) A_1 = (\alpha_1 E_{b1}) A_1 \Rightarrow \varepsilon_1(T_1) = \alpha_1(T_1)$$



Θερμική ισορροπία επιφανειών που ακτινοβολούν



$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \varepsilon_1 E_{b1} + (1 - \alpha_1) E_{b2} \\ q_2 &= E_{b2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1-2} = \varepsilon_1 E_{b1} - \alpha_1 E_{b2}$$

$$T_1 = T_2 = T \Rightarrow \varepsilon_1(T) = \alpha_1(T)$$

Απορρόφηση φασματικά ανομοιόμορφων επιφανειών

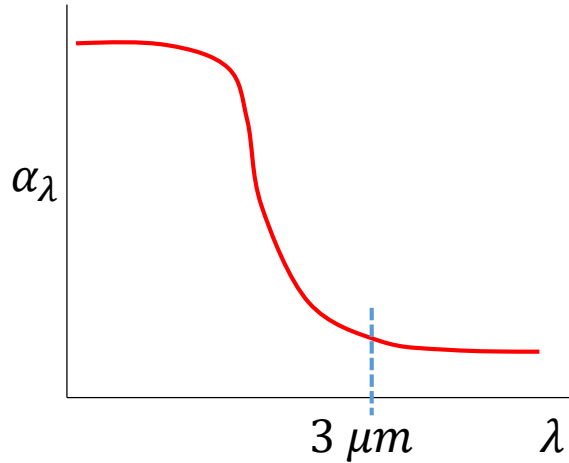
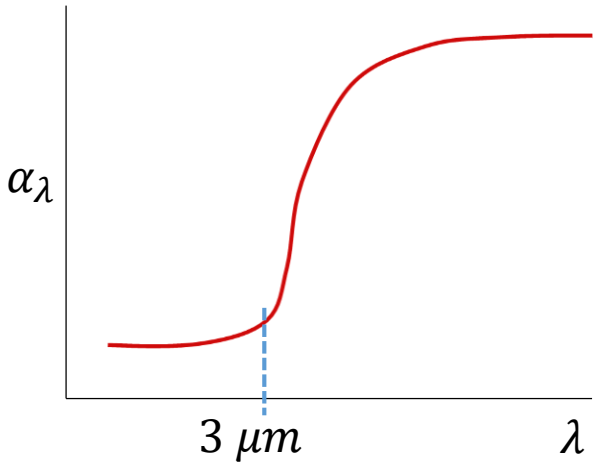
Ηλιακός ανακλαστήρας

Ηλιακός απορροφητήρας

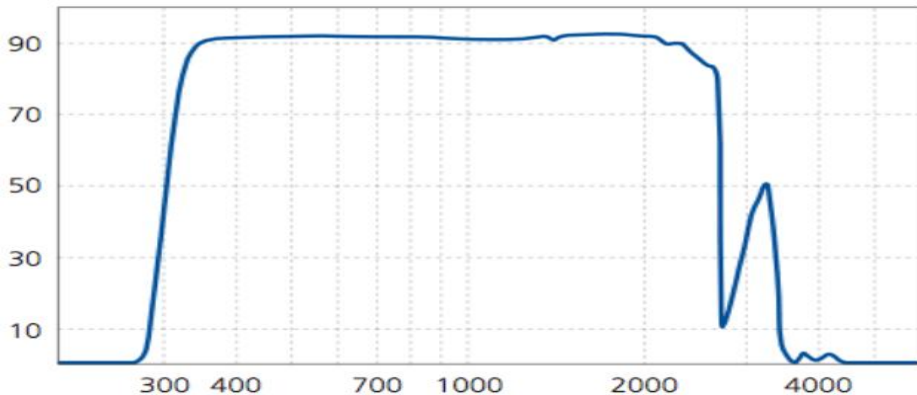
$G, G_{\lambda}(\lambda)$: ολική και μονοχρωματική έκθεση επιφάνειας

$$G_{\lambda}(\lambda) = G_{\lambda,abs}(\lambda) + G_{\lambda,refl}(\lambda) + G_{\lambda,trans}(\lambda)$$

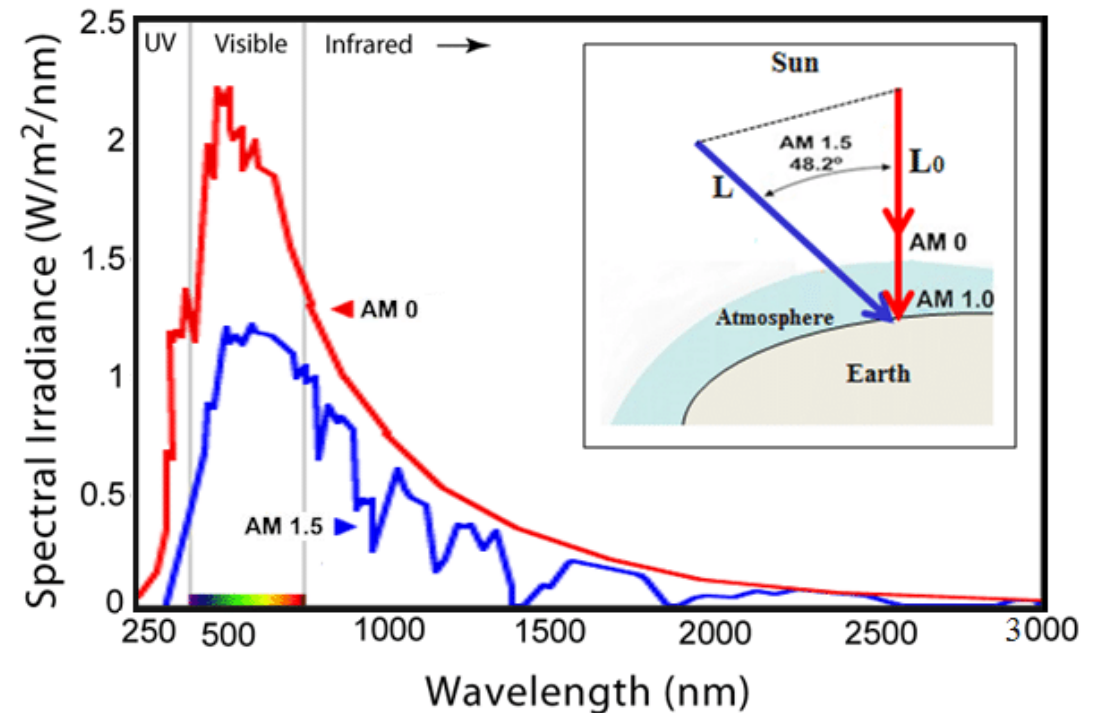
$$\alpha_{\lambda}(\lambda) = \frac{G_{\lambda,abs}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)} \Rightarrow \alpha = \frac{\int_0^{\infty} G_{\lambda,abs}(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} G_{\lambda}(\lambda) d\lambda} = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda} G_{\lambda} d\lambda}{G}$$



Διαπερατότητα γυαλιού



Ηλιακή ακτινοβολία



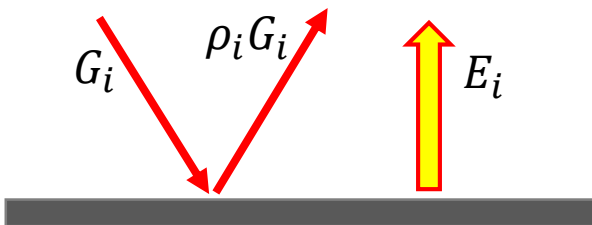
Βασικές παραδοχές

- Εναλλαγή ακτινοβολίας μεταξύ επιφανειών χωρίς επίδραση του ενδιάμεσου ρευστού
- Η ακτινοβολία είναι διάχυτη και οι επιφάνειες είναι γκρίζες
- Κάθε απλή επιφάνεια έχει ομοιόμορφη θερμοκρασία και θερμορροή (διαφορικές επιφάνειες-αριθμητική επίλυση)
- Η ακτινοβολία που φεύγει από μία επιφάνεια και προσπίπτει σε μία άλλη εξαρτάται από την απόσταση και τον σχετικό προσανατολισμό των επιφανειών
- Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά περιγράφονται από τον συντελεστή όψης F_{ij}
- Η έκθεση, G_i , της επιφάνειας A_i προέρχεται από όλες τις υπόλοιπες επιφάνειες του περιβάλλοντος

Ισοζύγιο ενέργειας σε επιφάνεια A_i

$$q_i = q_{i,εκπ} - q_{i,απορ} = E_i - \alpha_i G_i \quad \text{ή ισοδύναμα,}$$

$$q_i = q_{i,out} - q_{i,in} = (q_{i,εκπ} + q_{i,ανακλ}) - q_{i,εκθεση} = E_i + \rho_i G_i - G_i$$



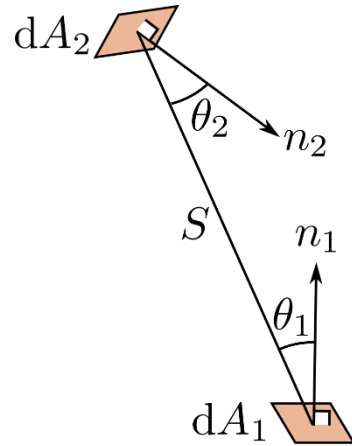
Συντελεστής όψης μεταξύ A_i και A_j

F_{ij} : το κλάσμα της ακτινοβολίας που φεύγει από την επιφάνεια A_i και προσπίπτει στην επιφάνεια A_j

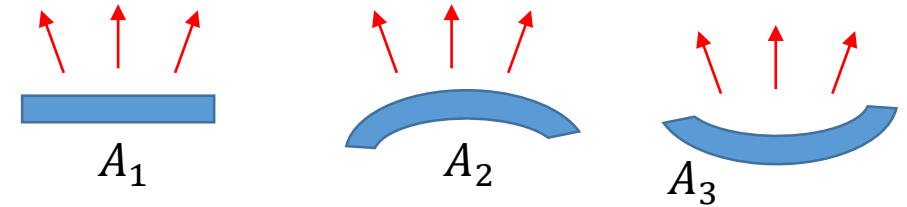
Γενικός ορισμός συντελεστή όψης

$$F_{d_1 d_2} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_2 \Rightarrow$$

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_2 dA_1$$



Παραδείγματα



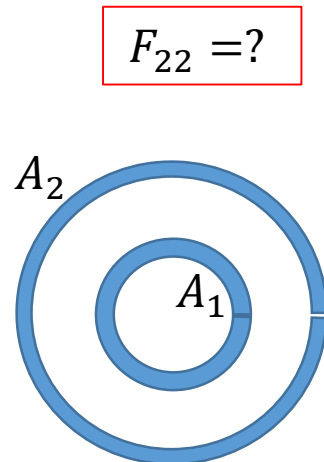
$$F_{ii} \geq 0 : F_{11} = F_{22} = 0, F_{33} > 0$$

Κανόνας αμοιβαιότητας

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad (F_{ij} \neq F_{ji})$$

Κανόνας αθροίσματος

$$\sum_{i=1}^N F_{ij} = 1$$

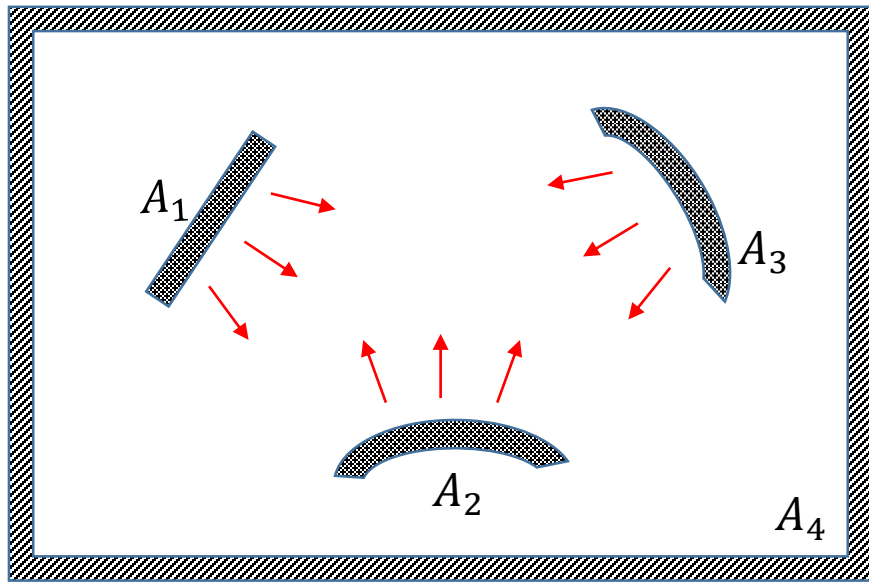


$$\left. \begin{array}{l} F_{11} + F_{12} = 1 \\ F_{11} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F_{12} = 1$$

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \Rightarrow F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$F_{21} + F_{22} = 1 \Rightarrow F_{22} = 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Εναλλαγή ακτινοβολίας μεταξύ μαύρων επιφανειών



Μαύρη επιφάνεια

$$E_i \rightarrow E_{bi} = \sigma T_i^4$$

Για κάθε επιφάνεια είναι γνωστή είτε η θερμοκρασία, T_i , είτε η θερμορροή, q_i

Θερμική απώλεια επιφάνειας i προς την j

$$Q_{i \rightarrow j} \equiv Q_{ij}, Q_{j \rightarrow i} = -Q_{i \rightarrow j} = -Q_{ij}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{ij} &= (A_i E_{bi}) F_{ij} - (A_j E_{bj}) F_{ji} \\ A_i F_{ij} &= A_j F_{ji} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_{ij} = A_i F_{ij} (E_{bi} - E_{bj})$$

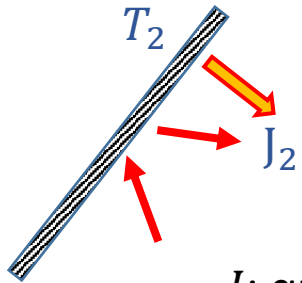
Συνολική απώλεια επιφάνειας i

$$Q_i = \sum_{j=1}^N Q_{ij} = \sum_{j=1}^N A_i F_{ij} (E_{bi} - E_{bj}) \Rightarrow$$

$$q_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} (E_{bi} - E_{bj}) = E_{bi} - \sum_{j=1}^N F_{ij} E_{bj}$$

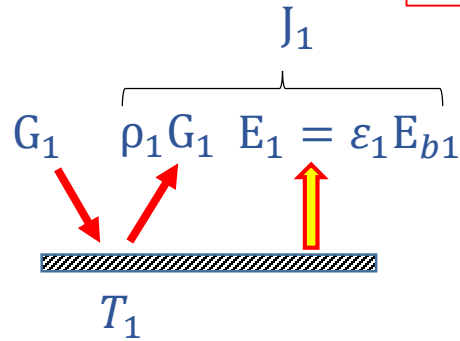
Σύστημα N γραμμικών εξισώσεων ως προς τους N άγνωστους q_i ή E_{bi}

Εναλλαγή ακτινοβολίας μεταξύ γκρίζων επιφανειών



J : ακτινοβολία που απομακρύνεται από την επιφάνεια

$$J = \rho G + \varepsilon E_b$$



Απώλειες ακτινοβολίας, Q_i , από επιφάνεια i

$$Q_i = A_i J_i - A_i G_i \Rightarrow q_i = J_i - G_i$$

$$J_i = \varepsilon_i E_{bi} + \rho_i G_i$$

$$\rho_i = 1 - \alpha_i = 1 - \varepsilon_i$$

$$\left. \begin{array}{l} J_i = \varepsilon_i E_{bi} + \rho_i G_i \\ \rho_i = 1 - \alpha_i = 1 - \varepsilon_i \end{array} \right\} \Rightarrow G_i = \frac{J_i - \varepsilon_i E_{bi}}{1 - \varepsilon_i} \Rightarrow q_i = \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} (E_{bi} - J_i)$$

Εναλλαγή ακτινοβολίας της επιφάνειας i με τις υπόλοιπες

$$Q_{ij} = (A_i J_i) F_{ij} - (A_j J_j) F_{ji}$$

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_{ij} = (A_i J_i) F_{ij} - (A_j J_j) F_{ji} \\ A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \end{array} \right\} \Rightarrow Q_{ij} = A_i F_{ij} (J_i - J_j) = -Q_{ji}$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^N Q_{ij} = \sum_{j=1}^N A_i F_{ij} (J_i - J_j) \Rightarrow q_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} (J_i - J_j)$$

Ανάλυση εναλλαγής μεταξύ γκριζων επιφανειών

Μαθηματική προσέγγιση

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \sum_{j=1}^N F_{ij}(J_i - J_j) \\ q_i &= \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} (E_{bi} - J_i) \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_{bi} = J_i + \frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \sum_{j=1}^N F_{ij}(J_i - J_j)$$

Για κάθε επιφάνεια είναι γνωστή είτε η θερμοκρασία είτε η θερμορροή

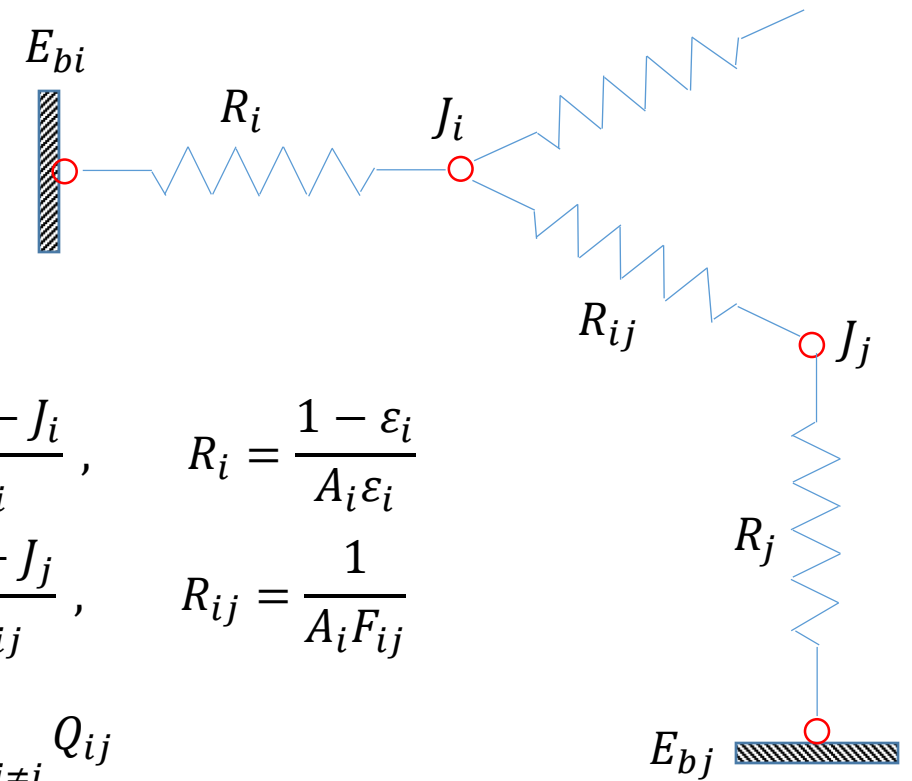
$$q_i, E_{bi} = \sigma T_i^4$$

Σύστημα N γραμμικών εξισώσεων ως προς τους N άγνωστους J_i

$$q_i = \sum_{j=1}^N F_{ij}(J_i - J_j) \quad \text{ή}$$

$$E_{bi} = J_i + \frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \sum_{j=1}^N F_{ij}(J_i - J_j)$$

Ηλεκτρικό ανάλογο

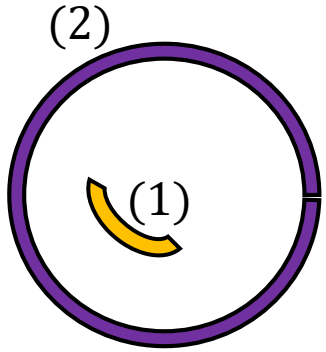


$$Q_i = \frac{E_{bi} - J_i}{R_i}, \quad R_i = \frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i}$$

$$Q_{ij} = \frac{J_i - J_j}{R_{ij}}, \quad R_{ij} = \frac{1}{A_i F_{ij}}$$

$$Q_i = \sum_{j \neq i} Q_{ij}$$

Κλειστό σύστημα δύο επιφανειών



$$Q_1 = Q_{12} = Q$$

$$Q_2 = Q_{21} = -Q$$

$$Q_1 = \frac{A_1 \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} (E_{b1} - J_1) = Q \Rightarrow E_{b1} - J_1 = Q \left(\frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} \right)$$

$$Q_{12} = A_1 F_{12} (J_1 - J_2) = Q \Rightarrow J_1 - J_2 = Q \left(\frac{1}{A_1 F_{12}} \right)$$

$$Q_2 = \frac{A_2 \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} (E_{b2} - J_2) = -Q \Rightarrow J_2 - E_{b2} = Q \left(\frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2} \right)$$

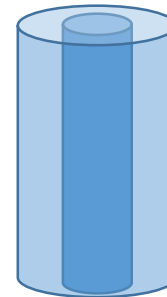
$$\Rightarrow Q = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2}}$$

Ειδικές περιπτώσεις



Παράλληλες πλάκες άπειρου μεγέθους

$$A_1 = A_2 = A, F_{12} = 1 \Rightarrow Q = \frac{A \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$



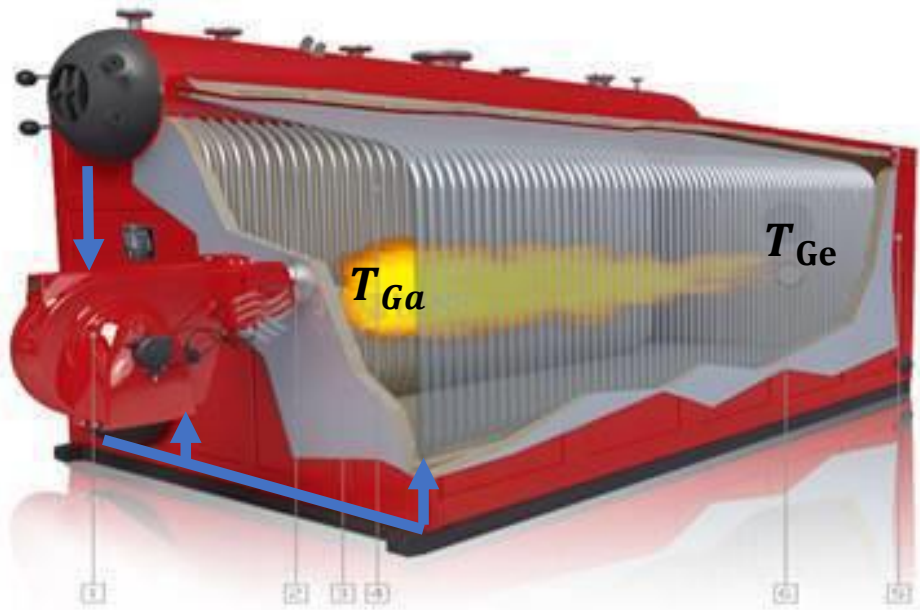
Επιμήκεις ομοαξονικοί κύλινδροι

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1}{r_2}, F_{12} = 1 \Rightarrow Q = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)}$$

Μικρό σώμα σε μεγάλη κοιλότητα

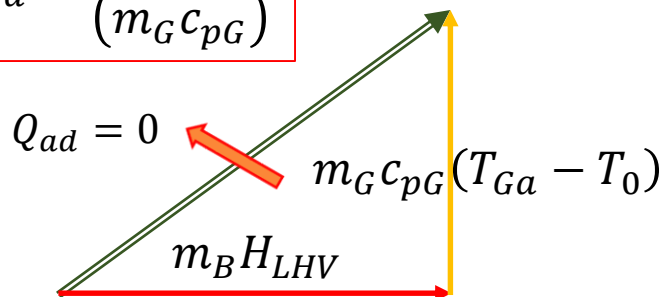
$$A_1 \ll A_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \approx 0, F_{12} = 1 \Rightarrow Q = \varepsilon_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

Ισοζύγιο ενέργειας σε χώρο καύσης



Αδιαβατική θερμοκρασία φλόγας

$$T_{Ga} = \frac{m_B H_{LHV}}{m_G c_{pG}}$$



$$m_G c_{pG} (T_{Ga} - T_0) + m_B (-H_{LHV}) = 0$$

Μέση θερμοκρασία καυσαερίων

$$T_f = \sqrt{T_{Ga} T_{Ge}} \quad T_{Ge} = ?$$

Ισοζύγιο ενέργειας στα καυσαέρια

$$Q = m_G c_{pG} (T_{Ga} - T_{Ge})$$

Μεταφορά από τη φλόγα προς τα τοιχώματα

$$Q = \frac{\sigma (T_f^4 - T_w^4)}{\frac{1 - \varepsilon_f}{\varepsilon_f A_f} + \frac{1}{A_f F_{fw}} + \frac{1 - \varepsilon_w}{\varepsilon_w A_w}} = \sigma \varepsilon A_w (T_f^4 - T_w^4) \approx \sigma \varepsilon A_w T_f^4$$

$$A_f \approx A_w, F_{fw} = 1, \varepsilon = \left(\frac{1}{\varepsilon_f} + \frac{1}{\varepsilon_w} - 1 \right)^{-1} \Rightarrow Q = \sigma \varepsilon A_w T_{Ga}^2 T_{Ge}^2$$

Σχεδιαστική σχέση

$$\left(\frac{T_{Ge}}{T_{Ga}} \right)^2 = Bo \left(1 - \frac{T_{Ge}}{T_{Ga}} \right) \quad Bo = \frac{m_G c_{p,G}}{\sigma \varepsilon A_w T_{Ga}^3}$$

$\varepsilon_f = ?$

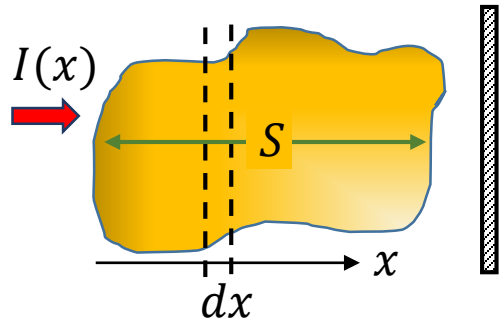
Βαθμός εκπομπής φλόγας και καυσαερίων

Θερμική ακτινοβολία

O₂, N₂, H₂O, CO₂, SO₂, αιθάλη, κωκ, τέφρα

Βαθμός απορρόφησης καυσαερίων

Χαρακτηριστική διάσταση φλόγας: $S = 3,6 \frac{V_f}{A_f}$



$I(x)$: Ένταση ακτινοβολίας

$$dI = -k_f P I(x) dx \Rightarrow I(S) = I_0 e^{-k_f P S}$$

k_f : συντελεστής απόσβεσης φλόγας

P : πίεση σε MPa

$$a_f (= \varepsilon_f) = \frac{I_0 - I(S)}{I_0} = 1 - e^{-k_f P S}$$

Πρόβλεψη βαθμού εκπομπής

$$\varepsilon_f = x_{lum}(1 - e^{-k_{lum} P S}) + (1 - x_{lum})(1 - e^{-k_{non} P S})$$

Κλάσμα φωτεινού τμήματος: $x_{lum} = 0,55$ (πετρέλαιο)

$x_{lum} = 0,10$ (φυσικό αέριο)

φωτεινό τμήμα καυσαερίων: $k_f \equiv k_{lum} = k_G r + k_s$

μη-φωτεινό τμήμα καυσαερίων: $k_f \equiv k_{non} = k_G r$

Συντελεστής απόσβεσης αερίων

$$k_G r = 10 \left[\frac{0,78 + 1,6 r_{H_2O}}{(10 P S r)^{1/2}} - 0,1 \right] \left(1 - 0,37 \frac{T_{Ge}}{1000} \right) r$$

Συντελεστής απόσβεσης αιθάλης

$$k_s = 0,3(1 - e) \left(1,6 \frac{T_{Ge}}{1000} - 0,5 \right) \left(\frac{C}{H} \right)_B$$

r : κλάσμα όγκου αερίων

T_{Ge} : θερμοκρασία[=]K

S : [=]m, P : [=]MPa

$e = \lambda - 1$: περίσσεια αέρα

C/H : κλάσμα μάζας

ΤΕΛΟΣ