



Ένα απλό μοντέλο αυτοκάθαρσης μιας ρυπασμένης λίμνης

Ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι βιομηχανικά αναπτυγμένες χώρες είναι η ρύπανση του νερού. Ένα ποτάμι μπορεί να αυτοκαθαριστεί σχετικά γρήγορα αφού σταματήσει η ρύπανσή του. Το ίδιο όμως δεν μπορεί να συμβεί με τις λίμνες όπου η απορρύπανσή των με φυσικό τρόπο μπορεί να διαρκέσει πολλά χρόνια. Ο καθαρισμός του νερού με άλλα μέσα είναι πολύ ακριβός.

Ένα απλό μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει τη ρύπανση μιας λίμνης κατασκευάστηκε αρχικά από τον R. H. Railey (1967) και περιγράφεται στο βιβλίο του E. A. Bender (1978). Το μοντέλο βασίζεται στις εξής παραδοχές:

- Το ισοζύγιο εισροών και εκροών της λίμνης είναι σχεδόν μηδενικό
- Το νερό που εισέρχεται στη λίμνη αναμινύεται με το νερό της λίμνης τέλεια ώστε η κατανομή των ρύπων στη λίμνη να είναι ομοιόμορφη.
- Οι ρύποι δεν απομακρύνονται από τη λίμνη με άλλο τρόπο (σήψη, καθίζηση, κατακράτηση, βιολογική ή μηχανική επεξεργασία) παρά μόνο μέσω της εκροής.

Κάτω από αυτές τι παραδοχές, η διαφορά στην συνολική συγκέντρωση της ρύπανσης στο χρονικό διάστημα Δt είναι:

$$\Delta(Vy(t)) = (x(t)-y(t))r\Delta t, \quad 6.1$$

όπου

V (m^3) ό όγκος του νερού της λίμνης (παραμένει σταθερός),
 $y(t)$ η συγκέντρωση της ρύπανσης της λίμνης,
 $x(t)$ η συγκέντρωση της ρύπανσης των εισροών στη λίμνη,
 r (lt/sec) ο ρυθμός ροής (σταθερά),
 t (έτη) ο χρόνος

Αν διαιρέσουμε την (6.1) με το Δt και αφήσουμε το Δt να τείνει στο μηδέν (ορισμός της παραγώγου), παίρνουμε την εξής διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{r}{V} (x(t)-y(t)). \quad (6.2)$$

Αν αποφασίσουμε να καθαρίσουμε την λίμνη με φυσικό τρόπο θα πρέπει να σταματήσουμε την εισροή ρυπασμένου νερού. Σε αυτή την περίπτωση $x(t) = 0$ και η διαφορική εξίσωση απλοποιείται ως εξής

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{r}{V} y(t). \quad (6.3)$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η συγκέντρωση της ρύπανσης της λίμνης είναι

$$y(0) = y_0. \quad (6.4)$$

Το πρόβλημα (6.3)-(6.4) είναι ένα αρχικό πρόβλημα τιμών το οποίο μπορεί να λυθεί αναλυτικά πολύ εύκολα είτε με απευθείας ολοκλήρωση ή με τη χρήση ενός προγράμματος όπως το Maxima, MATLAB, κλπ. Η λύση αυτού είναι

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{r}{V}t}. \quad (6.5)$$

Για να βρούμε το χρόνο t_c που απαιτείται ώστε να μειώσουμε τη ρύπανση στο ποσοστό $c\%$, δουλεύουμε ως εξής

$$\frac{y(t_c)}{y_0} = \frac{c}{100},$$

και μετά την αντικατάσταση

$$e^{-\frac{r}{V}t_c} = \frac{c}{100}.$$

Λογαριθμίζουμε και έχουμε

$$\ln(e^{-\frac{r}{V}t_c}) = -\frac{r}{V}t_c = \ln\left(\frac{c}{100}\right), \quad (6.6)$$

δηλαδή,

$$t_c = -\ln\left(\frac{c}{100}\right) \frac{V}{r}.$$

Άσκηση:

Ο R. H. Rainey (1967) μελέτησε την ρύπανση για τις Great Lakes στα σύνορα των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής και του Καναδά, βλέπε Σχήμα 1. Τα δεδομένα για τρεις από αυτές τις λίμνες δίνονται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Όγκος και ρυθμός ροής τριών λιμνών

	Erie	Michigan	Superior
$V (m^3)$	458×10^9	4871×10^9	12221×10^9
$r (lt/sec)$	5550720	5012640	2067360

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία να υπολογιστεί ο χρόνος t_c που απαιτείται για τη μείωση της ρύπανσης στα ποσοστά όπως στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2: Χρόνος απορρύπανσης σε χρόνια

	50%	20%	10%	5%
Erie	1,8	4,2	6,02	7,8
Michigan	21,36			
Superior	129,93			

Να παρασταθεί γραφικά η καμπύλη απορρύπανσης για κάθε μια από τις τρεις λίμνες.



Σχήμα 1. Great Lakes