

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα φυσικό φαινόμενο μπορεί να περιγραφεί με μαθηματικά. Το σύνολο των μαθηματικών εξισώσεων που χρησιμοποιούνται ονομάζεται μαθηματικό μοντέλο. Η επίλυση τέτοιων μαθηματικών προβλημάτων μπορεί να γίνει με αναλυτικές ή αριθμητικές μεθόδους. Μόνο απλά προβλήματα μπορούν να λυθούν αναλυτικά, ενώ για σύνθετα προβλήματα χρησιμοποιούνται αποκλειστικά οι αριθμητικές μέθοδοι και φυσικά οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές.

Μια αριθμητική μέθοδος είναι η διαδικασία που χρησιμοποιείται είτε για την προσέγγιση ενός μαθηματικού προβλήματος με ένα αντίστοιχο αριθμητικό πρόβλημα ή/και για την επίλυση του ίδιου του αριθμητικού προβλήματος.

Παράδειγμα:

Διαφορική εξίσωση $\rightarrow$ Αριθμητική μέθοδος $\rightarrow$ Σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \rightarrow$ Αριθμητική μέθοδος $\rightarrow$ Λύση

Κάθε αριθμητική μέθοδος περιέχει έναν αλγόριθμο. Ο αλγόριθμος είναι ένα σύνολο από καλά ορισμένες αριθμητικές και λογικές πράξεις, σε μια λογική σειρά, οι οποίες όταν εκτελεσθούν παράγουν αποτέλεσμα για το αντίστοιχο σύνολο δεδομένων.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί το άθροισμα των n πρώτων όρων της σειράς

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Παρατηρούμε την επαναληπτική σχέση

$$\text{ορος}_{(i+1)} = (-1) \frac{x^2}{(2i)(2i+1)} \text{ορος}_{(i)}$$

και έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω αλγόριθμο

Διάβασε x, n

$sum = x$

$s = x$

Για $i = 1, 2, \dots, (n-1)$

$s = ((-x^2)s)/(2i(2i+1))$

$sum = sum + s$

τέλος i

τύπωσε sum

Ο αλγόριθμος κωδικοποιείται σε πρόγραμμα χρησιμοποιώντας μια γλώσσα προγραμματισμού. Στη συνέχεια, το πρόγραμμα εκτελείται στον ηλεκτρονικό υπολογιστή και παράγει τα αποτελέσματα που είναι η λύση του προβλήματος.

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται πρώτα στην επιλογή της αριθμητικής μεθόδου και στη συνέχεια στη γραφή του προγράμματος. Σκοπός είναι να μην υπάρχει πολλαπλασιασμός των σφαλμάτων λόγω του πεπερασμένου αριθμού των δεκαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται για την παράσταση των πραγματικών αριθμών στον ηλεκτρονικό υπολογιστή και κατά συνέπεια της απώλειας σημαντικών δεκαδικών ψηφίων στη διάρκεια διαδοχικών πράξεων που μπορεί να είναι πολλές χιλιάδες.

Είναι φανερό ότι η χρήση των αριθμητικών μεθόδων απαιτεί κάποιες βασικές γνώσεις για την λειτουργία των ηλεκτρονικών υπολογιστών και την καλή γνώση μιας γλώσσας προγραμματισμού.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

Πρόβλημα: Δίνονται οι τιμές $f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ της (άγνωστης κατά τα λοιπά) πραγματικής συνάρτησης $f(x)$ στα διακεκριμένα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$ στο διάστημα $[a, b]$. Να κατασκευαστεί ένα πολυώνυμο

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

το οποίο παρεμβάλλει την $f(x)$ στα σημεία x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, δηλαδή ικανοποιεί τις σχέσεις

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Πολυώνυμο Lagrange

Θεώρημα:

Έστω $x_0, x_1, \dots, x_n$ είναι $n+1$ διακεκριμένα σημεία και έστω $f(x)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο διάστημα το οποίο περιέχει αυτά τα σημεία. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ το οποίο παρεμβάλλει την $f(x)$ στα σημεία x_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

Απόδειξη:

Θεωρούμε

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i)$$

όπου

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

και

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Το $p_n(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ το οποίο παρεμβάλλει την $f(x)$ στα $n+1$ σημεία x_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο πολυώνυμα $p_n(x)$ και $q_n(x)$ βαθμού $\leq n$ τα οποία παρεμβάλλουν την $f(x)$ στα σημεία x_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Τότε

$$d_n(x) = p_n(x) - q_n(x)$$

είναι επίσης ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ και για αυτό μπορεί να έχει το πολύ n ρίζες. Επειδή όμως ισχύει

$$d_n(x_i) = p_n(x_i) - q_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Συνεπάγεται ότι

$$d_n(x) = 0$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ

Πρόβλημα: Να λυθεί το σύστημα των n εξισώσεων

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

το οποίο σε μορφή πινάκων γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ή σε συμπαγή μορφή

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

όπου $\mathbf{A}$ είναι ο $n \times n$ πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, $\mathbf{x}$ το διάνυσμα ($n \times 1$ πίνακας) των αγνώστων και $\mathbf{b}$ το διάνυσμα των σταθερών όρων στο δεξί μέλος.

Μέθοδος απαλοιφής Gauss

Πρωταρχικός σκοπός της μεθόδου είναι η μείωση του πίνακα $\mathbf{A}$ σε άνω τριγωνικό κάνοντας κατάλληλες πράξεις και στα δυο μέλη του συστήματος, δηλαδή τον μετασχηματισμό του αρχικού συστήματος

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

στη μορφή

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1i} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{ii} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_i \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα:

Για την λύση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1: Επιλέγουμε την γραμμή1 ως γραμμή οδηγό και το πρώτο στοιχείο της γραμμής αυτής, $a_{11} = 2$, ως στοιχείο οδηγό. Στη συνέχεια μετασχηματίζουμε την γραμμή2 και την γραμμή3 ως εξής:

$$\text{γραμμή2} = \text{γραμμή2} - m_{21} * \text{γραμμή1}, \text{ όπου } m_{21} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{γραμμή3} = \text{γραμμή3} - m_{31} * \text{γραμμή1}, \text{ όπου } m_{31} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = \frac{1}{2}$$

Έτσι, το σύστημα γίνεται

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2: Επιλέγουμε τώρα την γραμμή 2 ως γραμμή οδηγό και το στοιχείο $a_{22} = 3$ της γραμμής αυτής ως στοιχείο οδηγό. Στη συνέχεια μετασχηματίζουμε την γραμμή 3 ως εξής:

$$\text{γραμμή 3} = \text{γραμμή 3} - m_{32} * \text{γραμμή 2}, \text{ όπου } m_{32} = \frac{a_{23}}{a_{22}} = \frac{1}{3}$$

Έτσι, το σύστημα τώρα γίνεται

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Έχοντας μετασχηματίσει τον πίνακα σε άνω τριγωνικό, η λύση τους συστήματος μπορεί εύκολα να προκύψει διαδοχικά ξεκινώντας από την τελευταία εξίσωση και φθάνοντας στην πρώτη εξίσωση. Έτσι, έχουμε,

$$\text{Εξίσωση 3: } x_3 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Εξίσωση 2: } x_2 = \frac{1}{3}(7 + x_3) = \frac{5}{2}$$

$$\text{Εξίσωση 1: } x_1 = \frac{1}{2}(2 - 2x_2 - 4x_3) = -\frac{5}{2}$$

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται πίσω αντικατάσταση.

Αλγόριθμος της απολοιπής Gauss:

$$\begin{array}{ll} \text{Για } k = 1, n-1 & (\text{μετρητής βημάτων}) \\ \quad \text{Για } i = k+1, n & (\text{μετρητής γραμμών}) \\ \quad \quad m_{ik} = a_{ik} / a_{kk} \\ \quad \quad \text{Για } j = k+1, n & (\text{μετρητής στηλών}) \\ \quad \quad \quad a_{ij} = a_{ij} - m_{ik} a_{kj} \\ \quad \quad \quad \text{τέλος } j \\ \quad \quad \quad b_i = b_i - m_{ik} b_k \\ \quad \quad \text{τέλος } i \\ \text{τέλος } k \end{array}$$

Αλγόριθμος της πίσω αντικατάστασης:

$$\begin{array}{ll} \text{Για } i = n, 1, -1 & (\text{μετρητής γραμμών}) \\ \quad s = 0 \\ \quad \text{Για } j = i+1, n & (\text{μετρητής στηλών}) \\ \quad \quad s = s - a_{ij} x_j \\ \quad \quad \text{τέλος } j \\ \quad \quad x_i = (b_i - s) / a_{ii} \\ \quad \text{τέλος } i \end{array}$$

Μέθοδος απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση

Η μέθοδος απαλοιφής Gauss αποτυγχάνει όταν συμβεί ένα από τα στοιχεία οδηγού να είναι μηδέν. Σε μια τέτοια περίπτωση η μέθοδος Gauss με μερική οδήγηση (αντιμετάθεση γραμμών) είναι κατάλληλη.

Παράδειγμα:

Για την επίλυση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1: Επιλέγουμε ως γραμμή οδηγό την γραμμή με το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο στην πρώτη στήλη και καθιστούμε αυτή την γραμμή πρώτη με αντιμετάθεση γραμμών. Στην προκειμένη περίπτωση δεν χρειάζεται αντιμετάθεση και για αυτό προχωράμε στην απαλοιφή των στοιχείων της πρώτης στήλης, όπως στην προηγούμενη παράγραφο:

$$\text{γραμμή}_2 = \text{γραμμή}_2 - m_{21} * \text{γραμμή}_1, \text{ όπου } m_{21} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{γραμμή}_3 = \text{γραμμή}_3 - m_{31} * \text{γραμμή}_1, \text{ όπου } m_{31} = \frac{2}{3}$$

$$\text{γραμμή}_4 = \text{γραμμή}_4 - m_{41} * \text{γραμμή}_1, \text{ όπου } m_{41} = \frac{1}{3}$$

Έτσι, το σύστημα γίνεται

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{10}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2: Επιλέγουμε ως γραμμή οδηγό την γραμμή με το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο στην δεύτερη στήλη δηλαδή την γραμμή4, την οποία φέρνουμε στη θέση της γραμμής2, ενώ την γραμμή2 την πάμε στη θέση της γραμμής4 (αντιμετάθεση γραμμών), δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{10}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια προχωράμε στην απαλοιφή των στοιχείων της δεύτερης στήλης, όπως στην προηγούμενη παράγραφο:

$$\text{γραμμή}_3 = \text{γραμμή}_3 - m_{32} * \text{γραμμή}_2, \text{ όπου } m_{32} = -\frac{4}{7}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{23}{7} \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -\frac{62}{7} \\ -4 \end{bmatrix}$$

Βήμα 3: Αντιμεταθέτουμε την γραμμή4 με την γραμμή3, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{23}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ -\frac{62}{7} \end{bmatrix}$$

και συνεχίζουμε την απαλοιφή των στοιχείων όπως συνήθως:

$$\text{γραμμή4} = \text{γραμμή4} - m_{43} * \text{γραμμή3}, \text{ όπου } m_{43} = \frac{5}{14}$$

Έτσι, το σύστημα γίνεται

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ -\frac{52}{7} \end{bmatrix}$$

Η λύση τους συστήματος μπορεί τώρα να προκύψει με την πίσω αντικατάσταση.

Αλγόριθμος της απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση:

$m = 0$ (μετρητής αντιμεταθέσεων)
 Για $k = 1, n-1$ (μετρητής βημάτων-στηλών)
 $a_{\max} = a_{kk}$
 $l = k$
 Για $i = k+1, n$ (μετρητής γραμμών)
 Εάν $|a_{ik}| > |a_{\max}|$ $a_{\max} = a_{ik}$, $l = i$
 τέλος i
 Εάν $l \neq k$ τότε (αντιμετάθεση γραμμών)
 $m = m+1$
 Για $j = k, n$
 $dum = a_{kj}$
 $a_{kj} = a_{lj}$
 $a_{lj} = dum$
 τέλος j
 $dum = b_k$
 $b_k = b_l$
 $b_l = dum$
 τέλος εάν $l \neq k$
 Για $i = k+1, n$ (μετρητής γραμμών)
 $m_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$
 Για $j = k+1, n$ (μετρητής στηλών)
 $a_{ij} = a_{ij} - m_{ik} a_{kj}$
 τέλος j
 $b_i = b_i - m_{ik} b_k$
 τέλος i
 τέλος k

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Παραγωγή

Πρόβλημα: Δίνονται οι τιμές $f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ της (άγνωστης κατά τα λοιπά) πραγματικής συνάρτησης $f(x)$ στα διακεκριμένα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$, $x_{i+1} = x_i + h$, στο διάστημα $[a, b]$. Να υπολογιστούν οι πρώτης και δευτέρας τάξης παράγωγοι $f'(x)$ και $f''(x)$ στα διακεκριμένα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Πρώτη παράγωγος:

Τύπος της εμπρός διαιρεμένης διαφοράς:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

Τύπος της πίσω διαιρεμένης διαφοράς:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h}$$

Τύπος της κεντρικής διαιρεμένης διαφοράς:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

Δεύτερη παράγωγος:

Τύπος της εμπρός διαιρεμένης διαφοράς:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

Τύπος της πίσω διαιρεμένης διαφοράς:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2}$$

Τύπος της κεντρικής διαιρεμένης διαφοράς:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

Ολοκλήρωση

Πρόβλημα: Δίνονται οι τιμές $f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ της (άγνωστης κατά τα λοιπά) πραγματικής συνάρτησης $f(x)$ στα διακεκριμένα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$, $x_{i+1} = x_i + h$, στο διάστημα $[a, b]$. Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_a^b f(x) dx .$$

Απλός κανόνας του τραπεζίου:

$$I \cong \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)]$$

Σύνθετος κανόνας του τραπεζίου:

$$I \cong \frac{h}{2} \{ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \}$$

Απλός κανόνας του Simpson:

$$I \cong \frac{(b-a)}{6} [f(a) + 4 f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

Σύνθετος κανόνας του Simpson:

$$I \cong \frac{h}{3} \{ f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5,}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6,}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \} \quad (n \text{ άρτιος})$$

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Πρόβλημα: Να λυθεί η 1^η τάξης διαφορική εξίσωση

$$y' = f(x, y)$$

που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$y(x_0) = y_0$$

στο διάστημα $[x_0, x_n]$.

Η λύση ενός τέτοιου προβλήματος απαιτεί την εύρεση της αναλυτικής έκφρασης της συνάρτησης $y(x)$ που ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση καθώς και την αρχική συνθήκη. Για τα περισσότερα προβλήματα η εύρεση της αναλυτικής λύσης δεν είναι δυνατή. Σε αυτές τις περιπτώσεις λύνουμε το πρόβλημα με την βοήθεια αριθμητικών μεθόδων που σημαίνει ότι υπολογίζουμε προσεγγιστικά την τιμή της συνάρτησης $y(x)$ σε συγκεκριμένα προεπιλεγμένα σημεία.

Μέθοδος Euler

Χωρίζουμε το διάστημα $[x_0, x_n]$ σε n ισάπεχοντα διαστήματα και ορίζουμε τα $n+1$ σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$. Γράφουμε το ανάπτυγμα της $y(x)$ σε σειρά Taylor σε κάποιο $x_i, i = 0, 1, \dots, n-1$

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \frac{h^3}{3!} y'''_i + \dots$$

όπου $h = x_{i+1} - x_i$. Στη μέθοδο Euler χρησιμοποιούμε μόνο τους δυο πρώτους όρους της σειράς

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Εφαρμόζουμε διαδοχικά αυτή την σχέση για $i = 0, 1, \dots, n-1$ και σε κάθε επανάληψη αποκτούμε την προσέγγιση y_{i+1} της $y(x)$ στο x_{i+1} . Όσο πιο μικρό είναι το βήμα h τόσο πιο ακριβής είναι η προσέγγιση.

Το τοπικό σφάλμα αποκοπής, δηλαδή το σφάλμα σε κάθε επανάληψη, είναι της τάξης $O(h^2)$, ενώ το ολικό σφάλμα αποκοπής είναι μόλις της τάξης $O(h)$ και για αυτό η μέθοδος του Euler θα πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο με πολύ μικρό βήμα h .

Παράδειγμα:

Ο ρυθμός ψύξης ενός σωματιδίου το οποίο τοποθετείται σε ένα θάλαμο, ο οποίος διατηρείται σε σταθερή θερμοκρασία $T_a = 20^\circ \text{C}$, ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

όπου ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του σωματιδίου είναι $k = 0.1$. Το σωματίδιο έχει αρχική θερμοκρασία

$$T(0) = T_0 = 90^\circ \text{C}.$$

Να υπολογιστεί η θερμοκρασία T του σωματιδίου την χρονική στιγμή $t = 2 \text{sec}$.

Απάντηση:

Επιλέγω $h = 0.5$.

$$T_1 = T_0 + hf(t_0, T_0) = 90 + 0.5[-0.1(90 - 20)] = 86.5$$

$$T_2 = T_1 + hf(t_1, T_1) = 86.5 + 0.5[-0.1(86.5 - 20)] = 83.175$$

$$T_3 = \dots$$

$$T_4 = \dots$$

Μέθοδος Πρόβλεψης – Διόρθωσης ή Μέθοδος Heun

Στη μέθοδο Heun και για κάθε βήμα βρίσκουμε μια πρώτη τιμή χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler και στην συνέχεια διορθώνουμε

$$y_{i+1}^0 = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0))$$

Το ολικό σφάλμα αποκοπής είναι $O(h^2)$.

Μέθοδος Runge–Kutta 4^{ης} τάξης

Στη μέθοδο Runge – Kutta 4^{ης} τάξης

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

όπου

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

Το ολικό σφάλμα αποκοπής είναι της τάξης $O(h^4)$ και για αυτό αυτή η μέθοδος είναι μια από τις καλύτερες μεθόδους.

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Πρόβλημα: Το θερμοκρασιακό πεδίο κατά μήκος μιας λεπτής αμόνωτης ράβδου μήκους L ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - k(T - T_a) = 0$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$T(0) = T_0^*, \quad T(L) = T_L^*$$

Να υπολογισθεί η θερμοκρασία κατά μήκος της ράβδου.

Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών

Χωρίζουμε το διάστημα $[0, L]$ σε n ισαπέχοντα διαστήματα όπου $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ και ορίζουμε τα $n+1$ σημεία $x_0 = 0, x_1, \dots, x_n = L$. Χρησιμοποιούμε τον τύπο των κεντρικών διαιρεμένων διαφορών για την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου

$$\left. \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_i = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2}$$

και αντικαθιστούμε στη διαφορική εξίσωση. Έτσι, έχουμε

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2} - k(T_i - T_a) = 0$$

ή

$$-T_{i-1} + (2 + kh^2)T_i - T_{i+1} = kh^2 T_a.$$

Γράφοντας αυτή την σχέση για κάθε σημείο x_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$ προκύπτει το παρακάτω σύστημα $n-1$ εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} 2 + kh^2 & -1 & & \\ -1 & 2 + kh^2 & -1 & \\ \dots & & & \\ & & -1 & 2 + kh^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kh^2 T_a + T_0^* \\ kh^2 T_a \\ \dots \\ kh^2 T_a + T_L^* \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας των συντελεστών είναι συμμετρικός και τριδιαγώνιος. Τέτοια συστήματα μπορούν να λυθούν με μια γενική μέθοδο όπως, για παράδειγμα, η μέθοδος απαλοιφής Gauss αλλά καλύτερα είναι να χρησιμοποιούμε μεθόδους ειδικά για συμμετρικά και τριδιαγώνια συστήματα.