



Ένα απλό μοντέλο ισοζυγίου μάζας-όγκου νερού

Ένα ισοζύγιο νερού σε ένα σύστημα, για παράδειγμα σε μια λίμνη, συναρτήσει του χρόνου t και μονάδα του χρόνου την ημέρα d μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\Delta V = \left(\sum Q_{in} + \sum Q_{gw} - \sum Q_{out} - \sum Q_{seep} + IA - EA \right) \Delta t, \quad (4.1)$$

όπου

V	όγκος νερού της λίμνης (m^3)
ΔV	αλλαγή στον όγκο νερού (m^3)
A	εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειας της λίμνης (m^2)
t	χρόνος (d)
Δt	βήμα χρόνου (d)
Q_{in}	εισροή ($m^3 \cdot d^{-1}$)
Q_{gw}	εισροή από υπόγεια νερά ($m^3 \cdot d^{-1}$)
Q_{out}	εκροή ($m^3 \cdot d^{-1}$)
Q_{seep}	εκροή σε υπόγειο υδροφορέα ($m^3 \cdot d^{-1}$)
I	ρυθμός κατακρήμνισης (βροχής) ($m \cdot d^{-1}$)
E	ρυθμός εξάτμισης ($m \cdot d^{-1}$).

Αν διαιρέσουμε την εξίσωση (4.1) με το Δt , πάρουμε το όριο $\Delta t \rightarrow 0$ και χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της παραγώγου, παίρνουμε τη Συνήθη Διαφορική Εξίσωση πρώτης τάξης

$$\frac{dV}{dt} = \sum Q_{in} + \sum Q_{gw} - \sum Q_{out} - \sum Q_{seep} + IA - EA. \quad (4.2)$$

Η εξίσωση (4.2) μπορεί εύκολα να λυθεί με απευθείας ολοκλήρωση.

Ένα μοντέλο ισοζυγίου όγκου νερού μιας λίμνης σε διάρκεια ξηρασίας

Θεωρούμε μια λίμνη με αρχικό όγκο νερού $V_0 = 1 \cdot 10^9 \cdot m^3$ κατά την περίοδο μιας παρατεταμένης ξηρασίας. Το άθροισμα εισροών παραμένει σταθερό $\sum Q_{in} = 100 \cdot m^3 \cdot s^{-1}$, ενώ το άθροισμα των εκροών ξεκινά από $\sum Q_{out} = 110 \cdot m^3 \cdot s^{-1}$ και αυξάνεται κάθε ημέρα, λόγω της εξάτμισης και αυξημένης ζήτησης, κατά $1 \cdot m^3 \cdot s^{-1}$. Υπό αυτές τις συνθήκες το μοντέλο ισοζυγίου νερού στη λίμνη περιγράφεται ως εξής

$$\Delta V = \left(\sum Q_{in} - \sum Q_{out} - EA t \right) \Delta t, \quad (4.3)$$

όπου η εκροή λόγω της εξάτμισης είναι συνάρτηση του χρόνου t (d). Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία παραπάνω, λαμβάνουμε τη Συνήθη Διαφορική Εξίσωση πρώτης τάξης

$$\frac{dV}{dt} = \sum Q_{in} - \sum Q_{out} - EA t. \quad (4.4)$$

Μετατρέποντας τα δευτερόλεπτα σε ημέρες και αντικαθιστώντας τις ποσότητες

$$\sum Q_{in} = 100 \cdot m^3 \cdot s^{-1} = 8.640.000 \cdot m^3 \cdot d^{-1},$$

$$\sum Q_{out} = 110 \cdot m^3 \cdot s^{-1} = 9.504.000 \cdot m^3 \cdot d^{-1},$$

$$EAt = (1 \cdot m^3 \cdot s^{-1})t = (86.400 \cdot m^3 \cdot d^{-1})t,$$

στην εξίσωση (4.4), λαμβάνουμε την εξίσωση

$$\frac{dV}{dt} = -(864.000 + 86.400t) \cdot m^3 \cdot d^{-1}. \quad (4.5)$$

Επίσης, έχουμε την αρχική συνθήκη

$$V(0) = 1.000.000.000 \cdot m^3. \quad (4.6)$$

Η Διαφορική Εξίσωση (4.5) και η Αρχική Συνθήκη (4.6) αποτελούν ένα Πρόβλημα Αρχικών Τιμών.

Το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (4.5)- (4.6) μπορεί να λυθεί αναλυτικά με τη χρήση λογισμικού Υπολογιστικής Άλγεβρας όπως το MATLAB, Maxima, κ.α.