



Εισαγωγή

Πολλά φαινόμενα και διαδικασίες στην οικολογία περιγράφονται με μαθηματικές εξισώσεις για την προσομοίωσή των και την εξαγωγή συμπερασμάτων. Γενικά, η μαθηματική μοντελοποίηση αποτελεί πολύτιμο και αναπόσπαστο μέρος της οικολογίας. Δεν κοστίζει, σε αντίθεση με τα πειράματα που είναι ακριβά, παρέχει τη δυνατότητα μελέτης σε σχέση με διάφορες παραμέτρους και σε μερικές περιπτώσεις είναι ο μόνος τρόπος μελέτης.

Σκοπός της παρούσας διάλεξης είναι μια εισαγωγή στη χρήση μερικών απλών μαθηματικών μοντέλων για την μελέτη ενός πληθυσμού ενός οικοσυστήματος.

Βασικές Έννοιες

Εισαγωγή στα Μαθηματικά και Λογισμικά Μαθηματικών (Computer Algebra Systems - CAS).

Στη μελέτη του πληθυσμού ενός είδους σε ένα οικοσύστημα, συνήθως, συμβολίζουμε:

$N(t)$ ή N	το μέγεθος του πληθυσμού τη χρονική στιγμή t ,
N_0	το μέγεθος του πληθυσμού τη χρονική στιγμή $t = 0$,
r	τον εγγενή ρυθμό αύξησης του πληθυσμού (σταθερά),
K	την περιβαλλοντική χωρητικότητα, δηλαδή μια σταθερά που σχετίζεται με τη δυνατότητα αύξησης του πληθυσμού με βάση τους διαθέσιμους πόρους και τον ανταγωνισμό,
E	το ρυθμό συγκομιδής (θετική σταθερά) σε περίπτωση σοδειάς, και
$\frac{dN}{dt}$	τον ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού.

Το Εκθετικό Μοντέλο (Thomas Malthus 1798)

Βασίζεται στην υπόθεση ότι ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού είναι ανάλογος της τρέχουσας τιμής του πληθυσμού, δηλαδή στη Διαφορική Εξίσωση

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad t > 0, \quad (1)$$

και στην αρχική συνθήκη

$$N(0) = N_0. \quad (2)$$

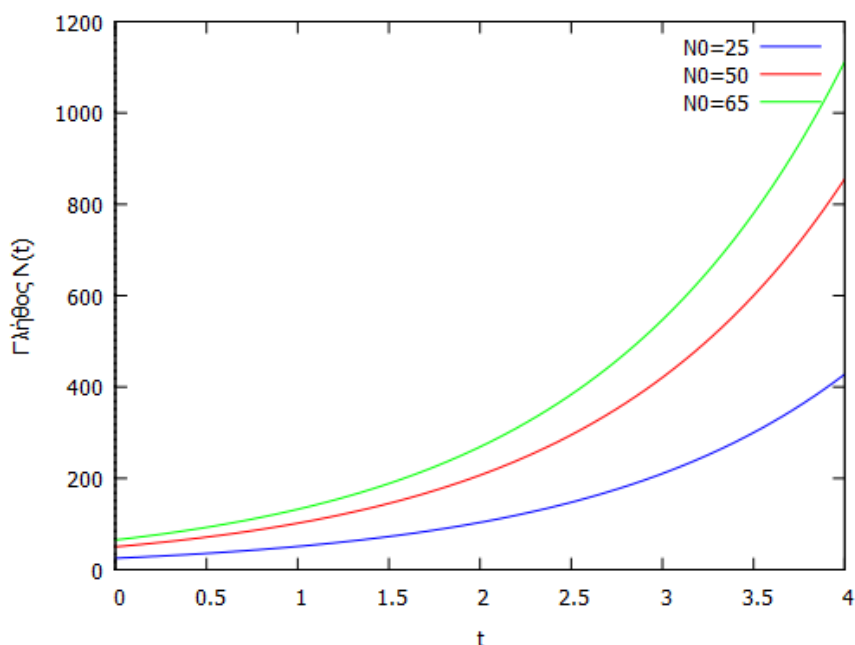
Το πρόβλημα (1), (2) είναι στα μαθηματικά γνωστό ως πρόβλημα αρχικών τιμών και το οποίο μπορεί να λυθεί εύκολα. Η λύση του είναι

$$N = N_0 e^{rt}, \quad (3)$$

όπου e^t είναι η εκθετική συνάρτηση και για αυτό και το μοντέλο είναι γνωστό ως το *Εκθετικό Μοντέλο*.

Το εκθετικό μοντέλο προβλέπει ότι για $r > 0$ ο πληθυσμός θα αυξάνει γρήγορα (εκθετικά) κάθε χρονική στιγμή, όπως ακριβώς φαίνεται και στο Σχήμα 1. Αυτό είναι αλήθεια για ιδανικές συνθήκες και μικρά χρονικά διαστήματα, αλλά όχι επ' αόριστο. Στην πραγματικότητα, παράγοντες όπως ο χώρος, η τροφή και ο ανταγωνισμός θα βάλουν ένα όριο στην αύξηση του πληθυσμού.

Σχήμα 1: Εκθετικό Μοντέλο ($r = 0,71$)



Το Λογιστικό Μοντέλο (P.F. Verhulst 1838)

Βασίζεται στην παραδοχή ότι ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού εξαρτάται από τον πληθυσμό και το περιβάλλον και περιγράφεται με τη μη γραμμική Διαφορική Εξίσωση

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K} \right) N, \quad t > 0, \quad (4)$$

και την αρχική συνθήκη

$$N(0) = N_0. \quad (5)$$

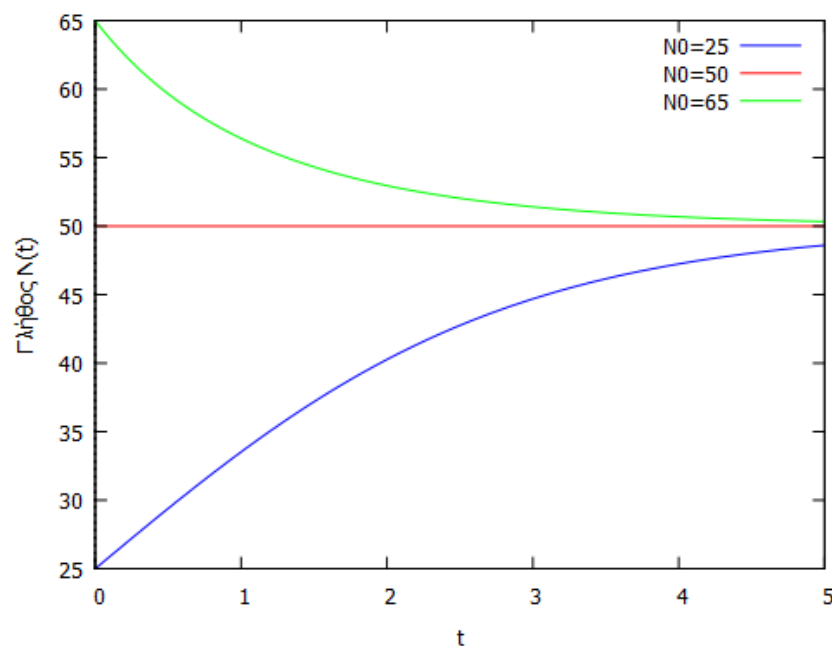
Το πρόβλημα (4), (5) είναι μη γραμμικό και άρα πιο δύσκολο να λυθεί. Η λύση του είναι

$$N = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}. \quad (6)$$

Ο Verhulst λόγω έλλειψης στατιστικών δεδομένων δεν μπόρεσε να ελέγξει την εγκυρότητα και ακρίβεια του μοντέλου. Αυτό έγινε το 1930 από R. Pearl που μελέτησε τον πληθυσμό εντόμων του είδους *Drosophila melanogaster* και λίγο αργότερα το 1935 από τον G.F. Gause για πληθυσμούς σκαθαριών του είδους *Paramecium* και *Tribolium*.

Η γραφική παράσταση της λύσης, δηλαδή της αύξησης του πληθυσμού δίνεται στο Σχήμα 2.

Σχήμα 2: Λογιστικό Μοντέλο ($r = 0,71$, $K = 50$)



Το Μοντέλο του Schaefer

Βασίζεται στην παραδοχή ότι ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού εξαρτάται από τον πληθυσμό, το περιβάλλον και τη συγκομιδή. Περιγράφεται με τη μη γραμμική Διαφορική Εξίσωση

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K} \right) N - EN, \quad t > 0, \quad (7)$$

και την αρχική συνθήκη

$$N(0) = N_0. \quad (8)$$

Ένα ανεκτό ποσό συγκομιδής που μπορούμε να παίρνουμε επ' αόριστο είναι

$$H = KE \left(1 - \frac{E}{r} \right), \quad (9)$$

το οποίο λαμβάνει τη μέγιστη τιμή

$$H_m = \frac{Kr}{4}, \quad \text{για} \quad E = \frac{r}{2}. \quad (10)$$

Εφαρμογή

Σε ένα οικοσύστημα βακαλάου σε μια περιοχή του Ειρηνικού Ωκεανού έχουν εκτιμηθεί μέσω πειραμάτων και στατιστικών μοντέλων οι σταθερές

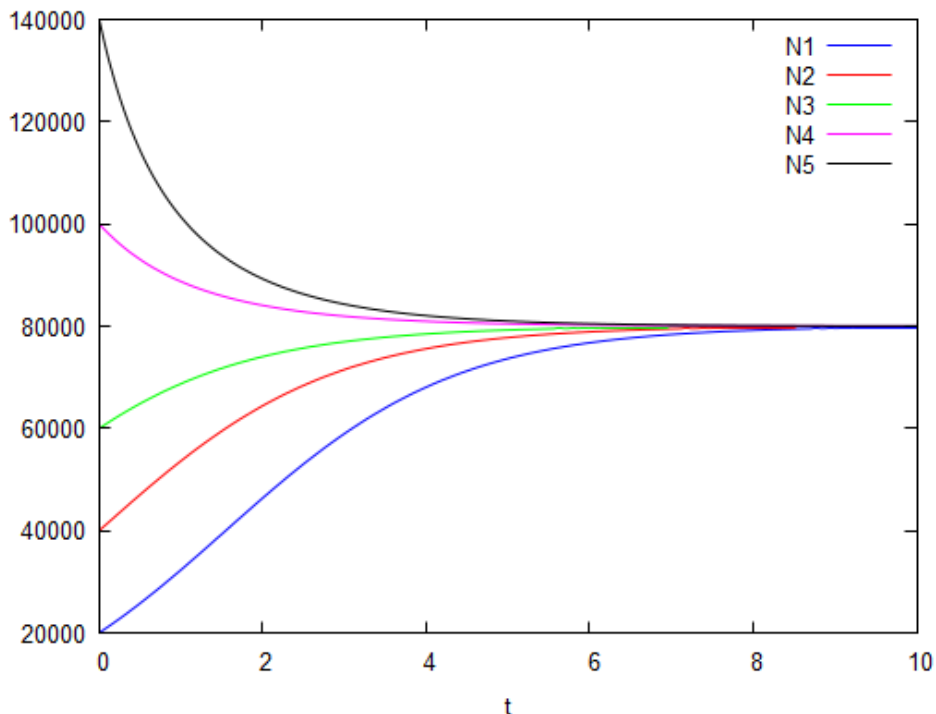
$$r = 0,71/\text{έτος},$$

$$K = 80.000 \text{ τόνοι}.$$

Να εκτιμηθεί η ποσότητα του βακαλάου σε τόνους σε βάθος 10 ετών όταν υποθέσουμε ότι η αρχική ποσότητα ($t = 0$) είναι:

1. 20.000 τόνοι,
2. 40.000 τόνοι,
3. 60.000 τόνοι,
4. 100.000 τόνοι,
5. 140.000 τόνοι.

Εισάγουμε τα παραπάνω δεδομένα στο λογισμικό Maxima και παίρνουμε το εξής γράφημα:



Στο γράφημα αποτυπώνεται το γεγονός ότι ο πληθυσμός του βακαλάου μπορεί να αυξάνει μέχρι το όριο που ορίζεται από την σταθερά K , που είναι ο μέγιστος πληθυσμός που μπορεί να συντηρήσει το συγκεκριμένο οικοσύστημα. Στην περίπτωση που κατά τη χρονική $t = 0$ ο πληθυσμός του βακαλάου είναι μεγαλύτερος από την σταθερά K , τότε ο πληθυσμός θα μειωθεί σταδιακά μέχρι και το όριο K .

Επίσης, αν η αρχική ποσότητα βακαλάου είναι 25.000 τόνοι να βρεθεί η βιομάζα του βακαλάου 2 χρόνια μετά. Έχουμε

$$N = N(2) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-2r}} \cong 52.227 \text{ τόνοι}.$$

Ακόμη, να βρεθεί η στιγμή που η βιομάζα του βακαλάου θα είναι $N = 75.000$ τόνοι. Λύνουμε την

$$N = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}},$$

ως προς t και λαμβάνουμε

$$t = -\frac{1}{r} \ln \frac{N_0(K - N)}{N(K - N_0)}.$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε

$$t = -\frac{1}{0,71} \ln \frac{25.000(80.000 - 75.000)}{75.000(80.000 - 25.000)} \cong 4,92 \text{ έτη.}$$

Τέλος, να βρεθεί η μέγιστη ανεκτή συγκομιδή ανά έτος. Έχουμε

$$H_m = \frac{Kr}{4} = \frac{80.000 \times 0,71}{4} = 14.200 \text{ τόνοι.}$$

Βιβλιογραφία – Πόροι

Πληθυσμιακά μοντέλα για οικοσυστήματα:

1. Clark, C. W., *Mathematical Bioeconomics: The Mathematics of Conservation*, 3rd ed., Wiley, New Jersey, 2010.

Μαθηματικά:

1. Boyce, W. E., Diprima, R. C., *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1999.

Ελεύθερο Λογισμικό για υπολογισμούς και γραφήματα:

1. <https://maxima.sourceforge.io/>