ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

Πίνακας ολοκληρωμάτων συναρτήσεων μιας νεταβλητής:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \qquad a \neq -1 \tag{1}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \tag{2}$$

$$\int e^x dx = e^x + c \tag{3}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \qquad a > 0 \tag{4}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \tag{5}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \tag{6}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \tag{7}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c \tag{8}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\frac{x}{a} + c \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c \tag{11}$$

Ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \qquad c \quad constant, \tag{12}$$

$$\int \big[f(x) \pm g(x)\big] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \tag{13}$$

1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

Καλούμε **ανοικτή κυκλική ε-περιοχή ενός σημείου** $P_0 = P_0(x_0, y_0)$ στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ το σύνολο

$$\Delta(P_0, \varepsilon) = \{P \in \mathbb{R}^2 : |P_0P| < \varepsilon\},$$

όπου $P = P(x, y)$, και $|P_0P| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$
και **ανοικτή τετραγωνική ε-περιοχή ενός σημείου** P_0 το σύνολο:

$$\Delta[P_0, \varepsilon] = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < \varepsilon,\, |y - y_0| < \varepsilon\}$$

$$= \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon,\, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}.$$

Το σύνολο

$$\overline{\Delta}(P_0, \varepsilon) = \{P \in \mathbb{R}^2 :\, |P_0P| \leq \varepsilon\}$$

ονομάζεται **κλειστή κυκλική ε-περιοχή ενός σημείου** P_0.

Έστω $P_0 = P_0(x_0, y_0, z_0)$ και $P = P(x, y, z)$ είναι σημεία στον χώρο $\mathbb{R}^3$, και

$$|P_0P| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}, \quad (1)$$

τότε το σύνολο

$$B(P_0, \varepsilon) = \{P \in \mathbb{R}^3 :\, |P_0P| < \varepsilon\},$$

λέγεται **ανοικτή σφαιρική ε-περιοχή ενός σημείου** $P_0 = P_0(x_0, y_0, z_0)$ στον χώρο $\mathbb{R}^3$, το σύνολο

$$\overline{B}(P_0, \varepsilon) = \{P \in \mathbb{R}^3 :\, |P_0P| \leq \varepsilon\},$$

λέγεται **κλειστή σφαιρική ε-περιοχή ενός σημείου** P_0.

Το σύνολο

$$B[P_0, \varepsilon] = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| < \varepsilon,\, |y - y_0| < \varepsilon,\, |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

ονομάζεται **ανοικτή κυβική ε-περιοχή ενός σημείου** $P_0 = P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Ένα σύνολο V καλείται **περιοχή ενός σημείου** P_0 στον $\mathbb{R}^2$, αν περιέχει μια ανοικτή κυκλική ή τετραγωνική ε-περιοχή του σημείου P_0 και σημειώνεται με $\Delta(P_0)$ ή $\Delta[P_0]$.

Ένα σύνολο W καλείται **περιοχή ενός σημείου** P_0 στον $\mathbb{R}^3$, αν περιέχει μια ανοικτή σφαιρική ή κυβική ε-περιοχή του σημείου P_0 και σημειώνεται με $B(P_0)$ ή $B[P_0]$.

Ένα σημείο P_0 λέγεται **εσωτερικό σημείο του συνόλου** A στον $\mathbb{R}^2$ (στον $\mathbb{R}^3$), εαν υπάρχει περιοχή $\Delta(P_0)$ $\big(B(P_0)$ στον $\mathbb{R}^3\big)$ τέτοια ώστε $\Delta(P_0) \subset$

$A \quad \big(B(P_0) \subset A\big)$.

Λέμε ότι ένα **σύνολο** A **είναι ανοικτό** όταν όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά π.χ. $A = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ c < y < d\}$ ανοικτό σύνολο.

$$\text{Το σύνολο} \qquad CA = \{P \in \mathbb{R}^3 :\ P \notin A\}$$

καλείται **συμπλήρωμα του** A. Προφανώς $A \bigcap CA = \varnothing$.

Ένα σύνολο A καλείται **κλειστό**, αν το συμπλήρωμά του CA είναι ανοικτό σύνολο. Το σύνολο $B = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ είναι κλειστό.

Ένα σύνολο A καλείται **συναφές (συνεκτικό)**, εαν δυο οποιαδήποτε σημεία του μπορούν να συνδεθούν με μια πολυγωνική γραμμή, η οποία εξ ολοκλήρου να ανήκει στο A.

Ένα συναφές και ανοικτό σύνολο ονομάζεται **τόπος**.

Ένα συναφές και κλειστό σύνολο λέγεται **κλειστός τόπος ή χωρίο**.

Έστω ότι $f : A \to \mathbb{R}$, $\quad A \subset \mathbb{R}^2$, τα σημεία $\quad P_0, P \in A$, όπου A πεδίο ορισμού της f και $P = P(x,y)$, $P_0 = P_0(x_0,y_0)$. Τότε **η συνάρτηση** f λέγεται **συνεχής στο σημείο** $P_0(x_0,y_0)$ εάν:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Έστω ότι $f : A \to \mathbb{R}$, $\quad A \subset \mathbb{R}^3$, τα σημεία $\quad P_0, P \in A$, όπου A πεδίο ορισμού της f και $P = P(x,y,z)$, $P_0 = P_0(x_0,y_0,z_0)$. Τότε $f(x,y,z)$ σύντομα συμβολίζεται με $f(P)$ και $f(x_0,y_0,z_0)$ με $f(P_0)$.
Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **συνεχής στο σημείο** P_0 εάν:

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **συνεχής σε μια περιοχή** D, εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο της D και γράφουμε $f(x,y,z) \in C(D)$.

1.1. ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ.

Ορισμός 1. Όταν παραγωγίζουμε π.χ. τη συνάρτηση $u = f(x,y,z)$ ως προς τη μεταβλητή x, τότε όλες οι άλλες μεταβλητές θεωρούνται σταθερές, η παράγωγος αυτή ονομάζεται **μερική παράγωγος της συνάρτησης** $u = f(x,y,z)$ **ως**

προς x, συμβολίζεται με $\frac{\partial u}{\partial x}$, ή u'_x, ή u_x, ή $\frac{\partial f}{\partial x}$, ή f'_x, ή $f'_x(x,y,z)$ και ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = u'_x = f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x},$$

εφόσον ηπάρχει αυτό το όριο.

Ορισμός 2. Η **μερική παράγωγος της συνάρτησης** $u = f(x,y,z)$ **ως προς** y, συμβολίζεται με $\frac{\partial u}{\partial y}$, ή u'_y, ή u_y, ή $\frac{\partial f}{\partial y}$, ή f'_y, ή $f'_y(x,y,z)$ και ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = u'_y = f_y(x,y,z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y},$$

εφόσον ηπάρχει αυτό το όριο.

Ορισμός 3. Η **μερική παράγωγος της συνάρτησης** $u = f(x,y,z)$ **ως προς** z ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = u'_z = f_z(x,y,z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z},$$

εφόσον ηπάρχει αυτό το όριο.

Ορισμός 4. Η συνάρτηση $f(x)$ λέγεται **συνεχώς παραγωγίσιμη** στο διάστημα (a,b) αν $f(x)$ και $f'(x)$ είναι συνεχείς στο (a,b) και τότε γράφουμε $f(x) \in C^1(a,b)$.

Ορισμός 5. Η συνάρτηση $f(x)$ λέγεται **δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη** στο διάστημα (a,b) αν $f(x)$, $f'(x)$ και $f''(x)$ είναι συνεχείς στο (a,b) και τότε γράφουμε $f(x) \in C^2(a,b)$.

Ορισμός 6. Η συνάρτηση $f(x,y)$ λέγεται **συνεχώς διαφορίσιμη** στον τόπο $D \subset R^2$ αν $f(x,y)$, $f'_x(x,y)$ και $f'_y(x,y)$ είναι συνεχείς στον D και τότε γράφουμε $f(x,y) \in C^1(D)$.

1.1.1. Κανόνες υπολογισμού των μερικών παραγώγων

Οι κανόνες υπολογισμού των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων πολλών ανεξάρτητων μεταβλητών είναι ίδιοι με εκείνους που χρησιμοποιούμε για τις συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, δηλαδή:

$$\left(f(x,y) \pm g(x,y)\right)'_x = \left(f(x,y)\right)'_x \pm \big(g(x,y)\big)'_x = f'_x(x,y) \pm g'_x(x,y), \qquad (14)$$

$$\big(Cf(x,y)\big)'_x = C\big(f(x,y)\big)'_x = Cf'_x(x,y), \tag{15}$$

όπου C είναι αυθαίρετη σταθερά,

$$\big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big)'_x = f'_x(x,y)g(x,y) + f(x,y)g'_x(x,y), \tag{16}$$

$$\left(\frac{(f(x,y)}{g(x,y)}\right)'_x = \frac{f'_x(x,y)g(x,y) - f(x,y)g'_x(x,y)}{g^2(x,y)}. \tag{17}$$

1.1.2. Πίνακας μερικών παραγώγων βασικών συναρτήσεων

$$\big(f^a(x,y)\big)'_x = af^{a-1}(x,y)f'_x(x,y), \qquad a \quad \text{είναι σταθερά}, \tag{18}$$

$$\big(e^{f(x,y)}\big)'_x = f'_x(x,y)e^{f(x,y)}, \tag{19}$$

$$\big(a^{f(x,y)}\big)'_x = a^{f(x,y)}f'_x(x,y)\ln a, \qquad a>0 \tag{20}$$

$$\big(\ln f(x,y)\big)'_x = \frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)}, \tag{21}$$

$$(\log_a f(x,y))'_x = \frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)\ln a}\,, \qquad a>0, \tag{22}$$

$$\big(\sin f(x,y)\big)'_x = f'_x(x,y)\cos f(x,y), \tag{23}$$

$$\big(\cos f(x,y)\big)'_x = -f'_x(x,y)\sin f(x,y), \tag{24}$$

$$\big(\tan f(x,y)\big)'_x = \frac{f'_x(x,y)}{\cos^2 f(x,y)}, \tag{25}$$

$$\big(\cot f(x,y)\big)'_x = -\frac{f'_x(x,y)}{\sin^2 f(x,y)}. \tag{26}$$

Χρήσιμοι τύποι

$$\mathbf{f^a(x,y) = [f(x,y)]^a},$$

$$\mathbf{f(x,y) = [f(x,y)]^1},$$

$$\sqrt[n]{f^m(x,y)} = \mathbf{f}^{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}}(x,y) = [\mathbf{f(x,y)}]^{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}}.$$

Άσκηση 1:

$$(x^3+y^4)'_x = (x^3)'_x + (y^4)'_x = 3x^2 + 0 = 3x^2,$$

$$(x^3-y^4)'_y = (x^3)'_y - (y^4)'_y = 0 - 4y^3 = -4y^3,$$

Άσκηση 2:

$$\left(\sin x\sqrt{y^6\cos\frac{2}{y^9}}\right)'_x = \sqrt{y^6\cos\frac{2}{y^9}}\;(\sin x)'_x = \sqrt{y^6\cos\frac{2}{y^9}}\;\cos x,$$

Άσκηση 3:

$$\left(xy^7\right)'_y = x(y^7)'_y = x7y^6 = 7xy^6.$$

Άσκηση 4:

$$\left(\frac{\sin xy}{e^{x^2y^4}}\right)'_x = \frac{(\sin xy)'_x\, e^{x^2y^4} - \sin xy\, \left(e^{x^2y^4}\right)'_x}{\left(e^{x^2y^4}\right)^2} = \frac{(xy)'_x \cos xy\, e^{x^2y^4} - \sin xy\, e^{x^2y^4}(x^2y^4)'_x}{e^{2x^2y^4}}$$

$$= \frac{y\cos xy\, e^{x^2y^4} - \sin xy\, e^{x^2y^4} 2xy^4}{e^{2x^2y^4}} = \frac{e^{x^2y^4}[y\cos xy - 2xy^4 \sin xy]}{(e^{x^2y^4})^2}$$

$$= \frac{y\cos xy - 2xy^4\sin xy}{e^{x^2y^4}}.$$

1.1.3. Μερικές παράγωγοι ανωτέρων τάξεων

Η μερική παράγωγος $\frac{\partial z}{\partial x}$ μιας συνάρτησης $z = f(x,y)$ μπορεί με τη σειρά της να παραγωγιστεί ως προς x και ως προς y, οπότε θα δώσει τις μερικές παραγώγους 2-ας τάξης

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

και

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

όπου η συνάρτηση $z = f(x,y)$ πρώτα παραγωγίζεται ως προς x και μετά ως προς y. Ομοίως

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{xy} = \left(z'_y\right)'_x,$$

όπου η συνάρτηση $z = f(x,y)$ πρώτα παραγωγίζεται ως προς y και μετά ως προς x.

Αναλόγως εισάγουμε τις παραγώγους 3-ης τάξης:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = f'''_{xy^2} = (f''_{y^2})'_x,$$

όπου πρώτα παραγωγίζουμε 2 φορές ως προς y και μετα ως προς x, και την παράγωγο

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right),$$

όπου πρώτα παραγωγίζουμε ως προς z, μετά ως προς y και στο τέλος ως προς x.

Θεώρημα 1.
Αν η συνάρτηση $z = f(x,y)$ *και οι μερικές της παράγωγοι μέχρι δευτέρας τάξης είναι συνεχείς στον τόπο* $D \subset R^2$, *τότε η σειρά παραγώγησης μπορεί να εναλλαγεί, δηλαδή*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad \forall (x,y) \in D.$$

Άσκηση 1:

$$(x^3y^4e^z)''_{yx} = \big((x^3y^4e^z)'_x\big)'_y = \big((x^3)'_x y^4 e^z\big)'_y = (3x^2y^4e^z)'_y$$
$$= 3x^2e^z(y^4)'_y = 3x^2e^z 4y^3 = 12x^2y^3e^z.$$

Άσκηση 2:

$$(x^3y^4e^z)''_{zy} = \big((x^3y^4e^z)'_y\big)'_z = \big((y^4)'_y\, x^3e^z\big)'_z = (4y^3x^3e^z)'_z$$
$$= 4y^3x^3(e^z)'_z = 4y^3x^3e^z.$$

Άσκηση 3: Έστω $f(x,y) = x^{20}y^7 + \sqrt{x\cos(x^6+e^x)}$.
Να βρεθεί $f''_{yx}(x,y)$. *Λύση:* Λόγω του Θεωρήματος 1, έχουμε:

$$f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y) = \big(f'_y(x,y)\big)'_x = \left(\left(x^{20}y^7 + \sqrt{x\cos(x^6+e^x)}\right)'_y\right)'_x$$

$$= \left(\big(x^{20}y^7\big)'_y + \left(\sqrt{x\cos(x^6+e^x)}\right)'_y\right)'_x = (7y^6x^{20}+0)'_x = 7y^6(x^{20})'_x = 7y^6 20x^{19} = 140y^6x^{19}.$$

1.1.4. Κανόνας αλυσίδας

Ι. Εαν η $f(x,y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους f'_x, f'_y και οι $x = x(t)$ και $y = y(t)$ είναι παραγωγίσιμες ως προς t, τότε η $f\big(x(t),y(t)\big) \overset{def}{=} u(t)$ είναι παραγωγίσιμη ως προς t και ισχύει:

$$\frac{du}{dt} = f'_x\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t) + f'_y\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t). \tag{27}$$

ΙΙ. Έστω ότι η $f(x,y,z)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους f'_x, f'_y, f'_z και οι $x = x(t,s)$, $y = y(t,s)$, $z = z(t,s)$ είναι παραγωγίσιμες ως προς t και s, τότε η $f\big(x(t,s),y(t,s),z(t,s)\big) \overset{def}{=} u(t,s)$ είναι παραγωγίσιμη ως προς t και s και ισχύει:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}, \tag{28}$$
$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s} \tag{29}$$

Άσκηση 1: Έστω

$$u = f(x,y) = x^2 + y^2, \quad x = t^2, \quad y = t^3 \Rightarrow u = f(x,y) = u(t).$$

Τότε από τον τύπο (27) συνεπάγεται

$$u'(t) = f'_x(x,y)x'(t) + f'_y(x,y)y'(t)$$

$$= (x^2+y^2)'_x(t^2)' + (x^2+y^2)'_y(t^3)' = [(x^2)'_x + (y^2)'_x]2t + [(x^2)'_y + (y^2)'_y]3t^2$$

$$= (2x+0)2t + (0+2y)3t^2 = 4xt + 6yt^2.$$

Άσκηση 2: Έστω

$$u = f(x,y) = 3\sin xy^2, \quad x = t^4, \quad y = t^2 \Rightarrow u = f(x,y) = u(t).$$

Τότε από τον τύπο (27) συνεπάγεται

$$u'(t) = f'_x(x,y)x'(t) + f'_y(x,y)y'(t)$$

$$= (3\sin xy^2)'_x(t^4)' + (3\sin xy^2)'_y(t^2)' = 3(xy^2)'_x \cos xy^2\, 4t^3 + 3(xy^2)'_y \cos xy^2\, 2t$$

$$= 12t^3\, y^2(x)'_x \cos xy^2 + 6tx(y^2)'_y \cos xy^2 = 12t^3\, y^2 \cos xy^2 + 6tx2y \cos xy^2$$

$$12t^3\, y^2 \cos xy^2 + 12txy \cos xy^2$$

Άσκηση 3: Έστω

$$u = f(x,y,z) = x^2+y^3+z^4, \quad x = t\cos s, \quad y = t\sin s, \quad z = t^2 \Rightarrow u = f(x,y,z) = u(t,s).$$

Τότε από τον τύπο (28) συνεπάγεται

$$u'_t(t,s) = f'_x(x,y,z)x'_t(t,s) + f'_y(x,y,z)y'_t(t,s) + f'_z(x,y,z)z'_t(t,s)$$

$$= (x^2+y^3+z^4)'_x(t\cos s)'_t + (x^2+y^3+z^4)'_y(t\sin s)_t + (x^2+y^3+z^4)'_z(t^2)'_t$$

$$= [(x^2)'_x+(y^3+z^4)'_x](t)'_t\cos s + [(x^2+z^4)'_y+(y^3)'_y](t)'_t\sin s + [(x^2+y^3)'_z+(z^4)'_z](2t)$$

$$= (2x+0)\cos s + (0+3y^2)\sin s + 2t(0+4z^3) = 2x\cos s + 3y^2\sin s + 8tz^3.$$

Άσκηση 4:
Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$z = \sin xy$$

επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$z''_{xx} + z''_{yy} + (x^2+y^2)z = 0. \tag{30}$$

Λύση: Από την $z = \sin xy \Rightarrow z'_x = (\sin xy)'_x = (xy)'_x \cos xy = y \cos xy \Rightarrow$ $z''_{xx} = (z'_x)'_x = (y \cos xy)'_x = y(\cos xy)'_x = -y(xy)'_x \sin xy = -y \cdot y(x)'_x \sin xy =$ $-y^2 \cdot 1 \sin xy = -y^2 \sin xy$,
$z'_y = (\sin xy)'_y = (xy)'_y \cos xy = x(y)'_y \cos xy = x \cdot 1 \cos xy = x \cos xy \Rightarrow$
$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (x \cos xy)'_y = x(\cos xy)'_y = -x(xy)'_y \sin xy = -x^2 \sin xy$.
Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (30) λαμβάνουμε:

$$-y^2 \sin xy + (-x^2 \sin xy) + (x^2+y^2) \sin xy = -(y^2+x^2) \sin xy + (x^2+y^2) \sin xy = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Άρα η $z = \sin xy$ επαληθεύει την (30), δηλαδή είναι μια λύση της.

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$\left(\frac{3}{x}\right)' = 3\left(\frac{1}{x}\right)' = 3(x^{-1})' = 3 \cdot (-1)x^{-1-1} = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}.$$

Άσκηση 5:

Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = e^{\frac{3y-2x}{xy}}$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$2x^2 z'_x + 3y^2 z'_y = 0. \tag{31}$$

Λύση:

$$z = e^{\frac{3y-2x}{xy}} = e^{\frac{3y}{xy} - \frac{2x}{xy}} = e^{\frac{3}{x} - \frac{2}{y}} \Rightarrow$$

$$z'_x = \left(e^{\frac{3}{x} - \frac{2}{y}}\right)'_x = e^{\frac{3}{x} - \frac{2}{y}} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{y}\right)'_x = e^{\frac{3}{x} - \frac{2}{y}} \cdot \left(-\frac{3}{x^2} - 0\right) = -e^{\frac{3}{x} - \frac{2}{y}} \cdot \frac{3}{x^2}.$$

$$z'_y = \left(e^{\frac{3}{x} - \frac{2}{y}}\right)'_y = e^{\frac{3}{x} - \frac{2}{y}} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{y}\right)'_y = e^{\frac{3}{x} - \frac{2}{y}} \cdot \left(0 + \frac{2}{y^2}\right) = e^{\frac{3}{x} - \frac{2}{y}} \cdot \frac{2}{y^2}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (31) λαμβάνουμε:

$$2x^2\Big(-e^{\frac{3}{x} - \frac{2}{y}} \cdot \frac{3}{x^2}\Big) + 3y^2 \cdot e^{\frac{3}{x} - \frac{2}{y}} \cdot \frac{2}{y^2} = -6e^{\frac{3}{x} - \frac{2}{y}} + 6e^{\frac{3}{x} - \frac{2}{y}} = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Άρα η $z = e^{\frac{3y-2x}{xy}}$ επαληθεύει την (31) δηλαδή είναι μια λύση της.

Άσκηση 6:

Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$z = \ln \sqrt{x^2+y^2} \tag{32}$$

επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$xz'_x + yz'_y = 1. \tag{33}$$

Λύση: από (32) χρησιμοποιώνταστους τους τύπους

$$\sqrt[n]{f^m(x,y)} = \mathbf{f}^{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = [\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})]^{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}}, \quad x^2+y^2 = (x^2+y^2)^1,$$

$$\ln \mathbf{f^a(x,y)} = \mathbf{a} \ln \mathbf{f(x,y)}, \qquad (\ln \mathbf{f(x,y)})'_{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{f'_x(x,y)}}{\mathbf{f(x,y)}},$$

βρίσκουμε

$$z'_x = \left(\ln \sqrt{x^2+y^2}\right)'_x = \left(\ln(x^2+y^2)^{1/2}\right)'_x = \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+y^2)\right)'_x = \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)'_x}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(2x+0)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}, \tag{34}$$
$$z'_y = \left(\ln \sqrt{x^2+y^2}\right)'_y = \left(\ln(x^2+y^2)^{1/2}\right)'_y = \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+y^2)\right)'_y = \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)'_y}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(0+2y)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}. \tag{35}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές (34) και (35) στην (33), λαμβάνουμε:

$$x\,\frac{x}{x^2+y^2} + y\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 \quad \Rightarrow 1 = 1.$$

Άρα η (32) επαληθεύει την (33), δηλαδή είναι μια λύση της.

Άσκηση 7:

Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \tag{36}$$

επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$xz'_x + yz'_y = z. \tag{37}$$

Άσκηση 8:

Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = \cos\frac{x}{y}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$yz'_y + xz'_x = 0.$$

Άσκηση 9:

Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$z = e^{\frac{x+y}{x}}$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$z'_x + yz''_{yy} = 0.$$

Άσκηση 10:

Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$z = \sin\frac{y^3}{x}$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$3xz'_x + yz'_y = 0.$$

1.1.5. Μερική παράγωγος πλεγμένης συνάρτησης.

Λέμε ότι η εξίσωση $F(x,y,z)=0$ ορίζει σε πλεγμένη μορφη μια συνάρτηση $z=f(x,y)$ στον τόπο $\Delta\subseteq\mathbb{R}^2$, όταν για κάθε $(x,y)\in\Delta$ ισχύει $F\big(x,y,f(x,y)\big)=0$. Οι μερικές παράγωγοι z'_x, z'_y βρίσκονται από τους τύπους:

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\qquad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{38}$$

Ασκηση 1.

Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$e^{yz}+y^2=xz \qquad (*).$$

Λύση: Επειδή η εξίσωση (*) δε λύνεται ως προς z, θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (38) για την παράγωγο της πλεγμένης συνάρτησης που ορίζεται από την εξίσωση $F(x,y,z)=0$. Από την (*) $\Rightarrow$

$$F(x,y,z)=e^{yz}+y^2-xz,\Rightarrow$$

$$F'_x=(e^{yz}+y^2-xz)'_x=(e^{yz}+y^2)'_x-(xz)'_x=0-z(x)'_x=-z,$$

$$F'_y=(e^{yz}+y^2-xz)'_y=(e^{yz})'_y+(y^2)'_y-(xz)'_y=e^{yz}(yz)'_y+2y-0=e^{yz}z(y)'_y+2y-0=ze^{yz}+2y,$$

$$F'_z=(e^{yz}+y^2-xz)'_z=(e^{yz})'_z+(y^2)'_z-(xz)'_z=e^{yz}(yz)'_z+0-x(z)'_z=e^{yz}y(z)'_z+0-x(z)'_z=ye^{yz}-x\Rightarrow$$

$$z'_x=-\frac{-z}{ye^{yz}-x}=\frac{z}{ye^{yz}-x},\qquad z'_y=-\frac{ze^{yz}+2y}{ye^{yz}-x}.$$

Ασκηση 2.

Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+8yz=20. \qquad (*)$$

Λύση: από την (*) βρίσκουμε

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+8yz-20,\Rightarrow$$

$$F'_x=(x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+8yz-20)'_x=(x^2+2xy+4xz)'_x+(y^2+z^2+8yz-20)'_x$$
$$=2x+2y(x)'_x+4z(x)'_x+0=2x+2y+4z,$$

$$F'_y=(x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+8yz-20)'_y=(y^2+2xy+8yz)'_y+(x^2+z^2+4xz-20)'_y$$
$$=2y+2x(y)'_y+8z(y)'_y+0=2y+2x+8z,$$

$$F'_z=(x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+8yz-20)'_z=(z^2+4xz+8yz)'_z+(x^2+y^2+2xy-20)'_z$$
$$=2z+4x(z)'_z+8y(z)'_z+0=2z+4x+8y \quad\Rightarrow$$

$$z'_x = -\frac{2x+2y+4z}{2z+4x+8y}, \qquad z'_y = -\frac{2y+2x+8z}{2z+4x+8y}.$$

Ασκηση 3.

Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$x + 3y + 2z = \ln z. \qquad (*)$$

Λύση: από την (*) βρίσκουμε

$$F(x,y,z) = x + 3y + 2z - \ln z, \Rightarrow$$

$$F'_x = (x+3y+2z-\ln z)'_x = (x)'_x + (3y+2z-\ln z)'_x = 1+0 = 1,$$

$$F'_y = (x+3y+2z-\ln z)'_y = (3y)'_y + (x+2z-\ln z)'_y = 3+0 = 3,$$

$$F'_z = (x+3y+2z-\ln z)'_z = (2z-\ln z)'_z + (x+3y)'_z = 2 - \frac{1}{z} + 0 = \frac{2z-1}{z},$$

$$z'_x = -\frac{1}{\frac{2z-1}{z}} = -\frac{z}{2z-1}, \qquad z'_y = -\frac{3}{\frac{2z-1}{z}} = -\frac{3z}{2z-1}.$$

Ασκηση 4.

Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$\cos x - xy^3 + 4z^2 = e^z. \qquad (*)$$

Λύση: από την (*) βρίσκουμε

$$F(x,y,z) = \cos x - xy^3 + 4z^2 - e^z \ \Rightarrow$$

$$F'_x = (\cos x - xy^3 + 4z^2 - e^z)'_x = (\cos x)'_x - (xy^3)'_x + (4z^2 - e^z)'_x$$
$$= -\sin x - y^3(x)'_x + 0 = -\sin x - y^3,$$

$$F'_y = (\cos x - xy^3 + 4z^2 - e^z)'_y = (\cos x)'_y - (xy^3)'_y + (4z^2 - e^z)'_y$$
$$= 0 - x(y^3)'_y + 0 = -x3y^2 = -3xy^2,$$

$$F'_z = (\cos x - xy^3 + 4z^2 - e^z)'_z = (\cos x)'_z - (xy^3)'_z + (4z^2)'_z - (e^z)'_z$$
$$= 0 - 0 + 8z - e^z = 8z - e^z,$$

$$z'_x = -\frac{-\sin x - y^3}{8z - e^z} = \frac{\sin x + y^3}{8z - e^z}, \qquad z'_y = -\frac{-3xy^2}{8z - e^z} = \frac{3xy^2}{8z - e^z}.$$

Ασκηση 5. (για σπίτι)

Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$3x + y^2 - z = \sin z. \qquad (*)$$

Ασκηση 6. (για σπίτι)

Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$5xz^7 - 2y^4 = e^{3z}. \qquad (*)$$

6. Ανάπτυγμα Taylor-Mac Laurin.

Χρήσιμοι τύποι

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}(x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}(x-x_0)^3 f'''(x_0) + ...$$

όπου για $x_0 = 0$ έχουμε τη σειρά Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + ...$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot ... \cdot (n-1)n,$$

$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, ...$$

Θέτουμε $\displaystyle \Big(x\frac{\partial\cdot}{\partial x} + y\frac{\partial\cdot}{\partial y}\Big)f(x,y) \stackrel{def}{=} x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$

$$\Big(x\frac{\partial\cdot}{\partial x} + y\frac{\partial\cdot}{\partial y}\Big)^2 f(x,y) \stackrel{def}{=} x^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2},$$

$$\Big(x\frac{\partial\cdot}{\partial x} + y\frac{\partial\cdot}{\partial y}\Big)^3 f(x,y) \stackrel{def}{=} ...$$

όπου

$$\left(\frac{\partial\cdot}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2\cdot}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial\cdot}{\partial x}\cdot\frac{\partial\cdot}{\partial y} = \frac{\partial^2\cdot}{\partial y\partial x}.$$

Η ανάπτυξη της $f(x,y)$ κατά **Taylor** σε μια περιοχή του σημείου (x_0, y_0) είναι:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\Big(l\frac{\partial\cdot}{\partial x} + k\frac{\partial\cdot}{\partial y}\Big)f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\Big(l\frac{\partial\cdot}{\partial x} + k\frac{\partial\cdot}{\partial y}\Big)^2 f(x_0,y_0) \\
&\quad + \frac{1}{3!}\Big(l\frac{\partial\cdot}{\partial x} + k\frac{\partial\cdot}{\partial y}\Big)^3 f(x_0,y_0) + ... \\
&= f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[(x-x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right] \\
&+ \frac{1}{2!}\Big[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x} + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Big] \\
&+ \frac{1}{3!}\left(l\frac{\partial\cdot}{\partial x} + k\frac{\partial\cdot}{\partial y}\right)^3 f(x_0,y_0) + ... \qquad (39)
\end{aligned}$$

όπου $l = x - x_0, \quad k = y - y_0$.
Η ανάπτυξη της $f(x,y)$ κατά **Mac Laurin** σε μια περιοχή του $(0,0)$, δηλαδή για $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, είναι:

$$f(x,y) = f(0,0) + \Big(x\frac{\partial\cdot}{\partial x} + y\frac{\partial\cdot}{\partial y}\Big)f(0,0) + \frac{1}{2!}\Big(x\frac{\partial\cdot}{\partial x} + y\frac{\partial\cdot}{\partial y}\Big)^2 f(0,0) \qquad (40)$$
$$+ \frac{1}{3!}\Big(x\frac{\partial\cdot}{\partial x} + y\frac{\partial\cdot}{\partial y}\Big)^3 f(0,0) + ...$$

Κανόνας του Sarrus για ορίζουσα

$$\text{Για} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \det A = |A| = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (41)$$

Ανάπτυγμα κατά Laplace για ορίζουσα

$$\text{Για} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (42)$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}\big(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\big) - a_{12}\big(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\big) + a_{13}\big(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\big)$$

2 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ορισμός 1. Λέμε **βαθμωτό πεδίο** τη βαθμωτή συνάρτηση $f(x,y,z)$ ή $f(x,y)$ όπου
$f : R^3 \to R$ ή $f : R^2 \to R$.

Ορισμός 2. Λέμε **διανυσματικό πεδίο** τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{F} = (P,Q,R) : R^3 \to R^3$, δηλαδή:

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} \qquad (43)$$

ή $\vec{F} = (P,Q) : R^2 \to R^2$, δηλαδή: $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$.

Ορισμός 3. Το διάνυσμα

$$\nabla = \overrightarrow{\nabla} \stackrel{def}{=} \Big(\frac{\partial \cdot}{\partial x}, \frac{\partial \cdot}{\partial y}, \frac{\partial \cdot}{\partial z}\Big) = \vec{i}\frac{\partial \cdot}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \cdot}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \cdot}{\partial z}$$

ονομάζεται **τελεστής ανάδελτα (Hamilton)**.

Ορισμός 4. Έστω ότι η $f(x, y, z)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους. Η διανυσματική συνάρτηση

$$grad\, f = \nabla f \stackrel{def}{=} \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big) = (f'_x, f'_y, f'_z) \tag{44}$$

λέγεται **κλίση (gradient)** της $f(x, y, z)$.

Ορισμός 5. Μια συνάρτηση $f(x, y, z)$ που έχει την ιδιότητα η κλίση της να δίνει το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ δηλαδή

$$\nabla f = \vec{F},$$

ονομάζεται **συνάρτηση δυναμικού**.

Έστω ότι $P_0 = P_0(x_0, y_0, z_0)$ είναι ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια $F(x, y, z) = 0$

Ορισμός 6. Το διάνυσμα

$$grad\, F(P_0) = (\nabla F)_{|_{P_0}} = \big(F'_x(P_0), F'_y(P_0), F'_z(P_0)\big) \tag{45}$$

είναι **κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια** $F(x, y, z) = 0$ στο σημείο P_0.

Ορισμός 7. Η **εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο** P_0 της επιφάνειας $F(x, y, z) = 0$ είναι

$$F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0. \tag{46}$$

Ορισμός 8. Η **εξίσωση κάθετης στην επιφάνεια ευθείας στο σημείο** P_0 είναι

$$\frac{x - x_0}{F'_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(P_0)}. \tag{47}$$

Άσκηση Βρείτε τις εξισώσεις του εφαπτόμενου επιπέδου και την εξίσωση κάθετης ευθείας της σφαίρας

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \tag{48}$$

στο σημείο $P_0(1,2,2)$.
Λύση: Από το σημείο $P_0(1,2,2)$ και την (48) έχουμε $x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad z_0 = 2$ και

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9.$$

Τότε

$$F'_x(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 9)'_x = 2x + 0 = 2x,$$

$$F'_x(P_0) = F'_x(x_0,y_0,z_0) = 2x_0 = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$F'_y(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 9)'_y = 0 + 2y + 0 = 0 + 2y + 0 = 2y,$$

$$F'_y(P_0) = F'_y(x_0,y_0,z_0) = 2y_0 = 2 \cdot 2 = 4,$$

$$F'_z(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 9)'_z = 0 + 0 + 2z - 0 = 2z,$$

$$F'_z(P_0) = F'_z(x_0,y_0,z_0) = 2z_0 = 2 \cdot 2 = 4.$$

Αντικαθηστόντας τις παραπάνω τιμές

$$F'_x(P_0) = 2, \quad F'_y(P_0) = 4, \quad F'_z(P_0) = 4$$

και $x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad z_0 = 2$ στην (46) λαμβάνουμε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου

$$2(x-1) + 4(y-2) + 4(z-2) = 0,$$

$$2x + 4y + 4z - 18 = 0,$$

$$x + 2y + 2z - 9 = 0.$$

Αντικαθηστόντας τις παραπάνω τιμές στην (47) λαμβάνουμε την εξίσωση της κάθετης ευθείας

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{4}.$$

Άλυτες Ασκήσεις: Βρείτε τις εξισώσεις του εφαπτόμενου επιπέδου και την εξίσωση κάθετης ευθείας κάθε επιφάνιας στο δεδομένο σημείο

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 14, \quad P_0 = P_0(1,-2,3)$,
2. $x^2 + 2z^2 = 3y^2, \quad P_0 = P_0(2,-2,-2)$,
3. $2x^2 + 2xy + y^2 + z + 1 = 0, \quad P_0 = P_0(1,-2,-3)$.

Ορισμός 9. Για το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k},$$

όπου P, Q, R έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους $1-$ης τάξης, η διανυσματική συνάρτηση (τελεστής):

$$rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}(R'_y - Q'_z) - \vec{j}(R'_x - P'_z) + \vec{k}(Q'_x - P'_y) \tag{49}$$

λέγεται **περιστροφή ή στροβιλισμός (rotation)**.

Ορισμός 10. Η βαθμωτή συνάρτηση

$$\mathrm{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} \overset{def}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = P'_x + Q'_y + R'_z \tag{50}$$

λέγεται **απόκλιση (divergence)** του διανυσματικού πεδίου $\vec{F} = (P, Q, R)$.

Ορισμός 11. Ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ λέγεται **σωληνοειδές ή λαπλασιανό στο** D όταν για κάθε σημείο $M \in D$ ισχύει

$$div\vec{F} = 0.$$

Άσκηση 2. Βρείτε την περιστροφή και την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2y\vec{i} + yz\vec{j} + z\vec{k} \tag{51}$$

Λύση: Από την (43) και (51) $\Rightarrow$

$$P(x,y,z) = x^2y, \quad Q(x,y,z) = yz, \quad R(x,y,z) = z \Rightarrow$$

$$P'_x = (x^2y)'_x = 2xy, \quad P'_y = (x^2y)'_y = x^2, \quad P'_z = (x^2y)'_z = 0,$$

$$Q'_x = (yz)'_x = 0, \quad Q'_y = (yz)'_y = z, \quad Q'_z = (yz)'_z = y,$$

$$R'_x = (z)'_x = 0, \quad R'_y = (z)'_y = 0, \quad R'_z = (z)'_z = 1.$$

Τότε από τους τύπους (49) , (50) $\Rightarrow$

$$rot\,\vec{F} = \vec{i}(R'_y - Q'_z) - \vec{j}(R'_x - P'_z) + \vec{k}(Q'_x - P'_y)$$

$$= \vec{i}(0 - y) - \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(0 - x^2) = -\vec{i}y - \vec{k}x^2$$

και

$$\text{div}\vec{F} = P'_x + Q'_y + R'_z = 2xy + z + 1.$$

Ορισμός 12. Ο τελεστής

$$\triangle = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

λέγεται **τελεστής του Laplace** και η εξίσωση $\triangle f = 0$ ή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \tag{52}$$

διαφορική εξίσωση του Laplace στο $\mathbb{R}^3$(Εξίσωση διάδοσης κύματος).
Η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{53}$$

λέγεται **διαφορική εξίσωση του Laplace** στο $\mathbb{R}^2$.
Μια συνάρτηση που επαληθεύει την εξίσωση Laplace λέγεται **αρμονική.**

Άσκηση 1. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \tag{54}$$

επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση Laplace (53), δηλαδή είναι αρμονική.

Λύση: Άπο την 54) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= \left(\ln(x^2+y^2)\right)'_x = \frac{(x^2+y^2)'_x}{x^2+y^2} = \frac{2x+0}{x^2+y^2} = \frac{2x}{x^2+y^2},\\
f''_{xx}(x,y) &= (f'_x)'_x = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{(2x)'_x(x^2+y^2) - 2x(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \frac{2(x^2+y^2) - 2x(2x+0)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2},\\
f''_{xx}(x,y) &= \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned} \tag{55}$$

Επειδή

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2) = \ln(y^2+x^2) = f(y,x)$$

η συνάρτηση $f(x, y)$ από την (54) είναι σημμετρική ως προς μεταβλητές x και y, τότε αλλάζοντεας θέσεις των μεταβλητών x και y στην (55) θα βρούμε

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{2x^2-2y^2}{(y^2+x^2)^2}. \tag{56}$$

Αντικαθηστόντας τις τιμές από τις εξισώσεις (55), (56) στην (53) θα λάβουμε

$$f''_{xx}(x,y) + f''_{yy}(x,y) = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2 - 2y^2}{(y^2+x^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2 + 2x^2 - 2y^2}{(y^2+x^2)^2} = 0.$$

Άρα η συνάρτηση $f(x,y)$ από την (54) είναι αρμονική.

Άλυτες Ασκήσεις:

Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x,y,z)$ ικανοποιούν την εξίσωση Laplace στο χώρο $\mathbb{R}^3$: $\quad f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} = 0$

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2,$

2. $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}},$

3. $f(x,y,z) = e^{3x+4y}\cos 5z,$

4. $f(x,y,z) = \cos 3x \cos 4y \sinh 5z.$

Ορισμός 13. Η παράγωγος της βαθμωτής συνάρτησης $f(x,y,z) = f(P)$ στο σημείο $P_0 = P_0(x_0,y_0,z_0)$ **κατά κατεύθυνση του διανύσματος** $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ συμβολίζεται και υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} D_{\vec{c}_0} f =& \frac{df}{d\vec{c}_0} \overset{def}{=} (\nabla f)|_{P_0} \cdot \vec{c}_0 = f'_x(P_0)\cos\alpha + f'_y(P_0)\cos\beta + f'_z(P_0)\cos\gamma \qquad (57) \\ =& f'_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + f'_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma \end{aligned}$$

όπου

$$\vec{c}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του διανύσματος $\vec{c}$, τα σινημίτονα $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ λέγονται **συνημίτονα κατεύθυνσης** και

$$\cos\alpha = \frac{c_1}{|c|}, \quad \cos\beta = \frac{c_2}{|c|}, \quad \cos\gamma = \frac{c_3}{|c|}, \quad |c| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}. \qquad (58)$$

Άσκηση 1. *Βρείτε την παράγωγο της* $f(x,y,z) = e^{x+y^2+z^3}$ *στο σημείο* $P_0(-4,2,0)$ *κατά κατεύθυνση του διανύσματος* $\vec{c} = (2,-2,1)$.

Λύση: Έχουμε $c_1 = 2, \quad c_2 = -2, \quad c_3 = 1,$ και

$$\begin{aligned}
&f'_x(x,y,z) = \left(e^{x+y^2+z^3}\right)'_x = e^{x+y^2+z^3}(x+y^2+z^3)'_x \\
&= e^{x+y^2+z^3}[(x)'_x + (y^2+z^3)'_x] = e^{x+y^2+z^3}(1+0) = e^{x+y^2+z^3}, \\
&f'_y(x,y,z) = \left(e^{x+y^2+z^3}\right)'_y = e^{x+y^2+z^3}(x+y^2+z^3)'_y = 2ye^{x+y^2+z^3}, \\
&f'_z(x,y,z) = \left(e^{x+y^2+z^3}\right)'_z = e^{x+y^2+z^3}(x+y^2+z^3)'_z = 3z^2e^{x+y^2+z^3}, \\
&|\vec{c}| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = 3.
\end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{gathered}
f'_x(P_0) = f'_x(-4,2,0) = e^{-4+2^2+0^3} = e^0 = 1, \\
f'_y(P_0) = f'_y(-4,2,0) = 2\cdot 2e^{-4+2^2+0^3} = 4e^0 = 4, \\
f'_z(P_0) = f'_z(-4,2,0) = 3\cdot 0^2\, e^{-4+2^2+0^3} = 0, \\
\cos\alpha = \frac{c_1}{|c|} = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{c_2}{|c|} = \frac{-2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{c_3}{|c|} = \frac{1}{3}.
\end{gathered}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στον τύπο (57) βρίσκουμε

$$\frac{df}{d\vec{c}_0} = \frac{2}{3} + 4\cdot\left(\frac{-2}{3}\right) + 0\cdot\frac{1}{3} = -2.$$

Άσκηση 2. *Βρείτε την παράγωγο της* $f(x,y,z) = x^2+2y^3z+3z^4$ *στο σημείο* $P_0(2,1,3)$ *κατά κατεύθυνση του διανύσματος* $\vec{c} = (-4,2,4)$.
Λύση: Έχουμε $c_1 = -4, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 4,$ και

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y,z) &= (x^2+2y^3z+3z^4)'_x = (x^2)'_x + (2y^3z+3z^4)'_x = 2x+0 = 2x, \\
f'_y(x,y,z) &= (x^2+2y^3z+3z^4)'_y = (x^2)'_y + (2y^3z)'_y + (3z^4)'_y \\
&= 0 + 2z(y^3)'_y + 0 = 2z\cdot 3y^2 = 6y^2z, \\
f'_z(x,y,z) &= (x^2+2y^3z+3z^4)'_z = (x^2)'_z + (2y^3z)'_z + (3z^4)'_z \\
&= 0 + 2y^3(z)'_z + 3\cdot(z^4)'_z = 2y^3 + 3\cdot 4z^3 = 2y^3+12z^3, \\
|\vec{c}| &= \sqrt{(-4)^2+2^2+4^2} = \sqrt{36} = 6.
\end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y,z) &= 2x, \\
f'_y(x,y,z) &= 6y^2z, \\
f'_z(x,y,z) &= 2y^3+12z^3.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{gathered}
f'_x(P_0) = f'_x(2,1,3) = 2\cdot 2 = 4, \\
f'_y(P_0) = f'_y(2,1,3) = 6\cdot 1^2\cdot 3 = 18,
\end{gathered}$$

$$f'_z(P_0) = f'_z(2,1,3) = 2\cdot 1^3 + 12\cdot 3^3 = 110,$$
$$\cos\alpha = \frac{c_1}{|c|} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{c_2}{|c|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{c_3}{|c|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στον τύπο (57) βρίσκουμε

$$\frac{df}{d\vec{c}_0} = 4\cdot\frac{-2}{3} + 18\cdot\frac{1}{3} + 110\cdot\frac{2}{3} = \frac{230}{3}.$$

Άλυτες Ασκήσεις: *Βρείτε την παράγωγο των επόμενων συναρτήσεων στο δεδομένο σημείο κατά κατεύθυνση του δεδομένου διανύσματος*

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + xy - z, \quad P_0 = P_0(3,1,2), \quad \vec{c} = (2,-2,1),$
2. $f(x,y,z) = xy^2z, \quad P_0 = P_0(2,1,3), \quad \vec{c} = (3,-4,0),$
3. $f(x,y,z) = 2x^2 + 2xy + y^2 + z + 1 = 0, \quad P_0 = P_0(1,-2,-3), \quad \vec{c} = (2,-4,4).$

Ορισμός 14. Ολικά διαφορικά 1-ης και 2-ας τάξης της συνάρτησης $f(x,y)$

$$df(x) = f'(x)dx,$$
$$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy,$$
$$d^2f(x,y) = d(df(x,y)) = f''_{xx}(x,y)dx^2 + 2f''_{yx}(x,y)dydx + f''_{yy}(x,y)dy^2,$$

όπου

$$dx^2 = (dx)^2, \quad dy^2 = (dy)^2.$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Άσκηση

Έστω $f(x,y) = x^3 + 3y^2$. Τότε

$$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy = (x^3+3y^2)'_x dx + (x^3+3y^2)'_y dy = [(x^3)'_x + (3y^2)'_x]dx$$
$$+[(x^3)'_y + (3y^2)'_y]dy = (3x^2+0)dx + (0+3\cdot 2y)dy = 3x^2dx + 6ydy.$$

Ορισμός 15. Τα ολικά διαφορικά 1-ης και 2-ας τάξης της συνάρτησης $f(x,y,z)$ υπολογίζονται ως εξής:

$$df(x,y,z) = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz, \tag{59}$$
$$d^2f(x,y,z) = f''_{xx}(x,y,z)dx^2 + f''_{yy}(x,y,z)dy^2 + f''_{zz}(x,y,z)dz^2 \tag{60}$$
$$+\,2f''_{yx}(x,y,z)dxdy + 2f''_{zx}(x,y,z)dxdz + 2f''_{zy}(x,y,z)dydz.$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

Άσκηση
Έστω $f(x,y,z)=x^2+\sin y+2z^3$. Τότε

$$f'_x=f'_x(x,y,z)=(x^2+\sin y+2z^3)'_x=2x+0+0=2x,$$

$$f'_y=f'_y(x,y,z)=(x^2+\sin y+2z^3)'_y=0+\cos y+0=\cos y,$$

$$f'_z=f'_z(x,y,z)=(x^2+\sin y+2z^3)'_z=0+0+(2z^3)'_z=2\cdot 3z^2=6z^2,$$

$$f''_{xx}=(f'_x)'_x=(2x)'_x=2,\quad f''_{yy}=(f'_y)'_y=(\cos y)'_y=-\sin y,\quad f''_{zz}=(f'_z)'_z=(6z^2)'_z=12z,$$

$$f''_{yx}=(f'_x)'_y=(2x)'_y=0,\quad f''_{zy}=(f'_y)'_z=(\cos y)'_z=0,\quad f''_{zx}=(f'_x)'_z=(2x)'_z=0,$$

$$d^2f(x,y,z)=2dx^2+(-siny)dy^2+12zdz^2+2\cdot 0dydx+2\cdot 0dydz+2\cdot 0dzdx$$
$$=2dx^2-siny\,dy^2+12zdz^2.$$

3 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ (Τ.Α.) συναρτήσεων δυο ανεξάρτητων μεταβλητών

Εάν η συνάρτηση $z=f(x,y)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σ΄ ένα τόπο D, τότε τα ακρότατα της μπορούν να υπάρξουν μόνο σε :
(ι) συνοριακά σημεία του τόπου D,
(ιι) εσωτερικά σημεία , όπου $f'_x(x,y)=0$, $f'_y(x,y)=0$,
(ιιι) σημεία , όπου η $f'_x(x,y)$ ή η $f'_y(x,y)$ δεν υπάρχουν.

Έστω ότι η $z=f(x,y)$ είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση σ΄ ένα τόπο D. Για να βρούμε τα Τ.Α. της $z=f(x,y)$ στα εσωτερικά σημεία κανουμε τα εξής βήματα:
Βήμα 1^o Παραγωγίζουμε την $z=f(x,y)$ ως προς x και y, και λύνουμε το σύστημα:

$$f'_x(x,y)=0,\quad f'_y(x,y)=0.$$

Οι λύσεις του συστήματος (x_0,y_0) λέγονται *κρίσιμα σημεία* και είναι σημεία πιθανών ακροτάτων .
Βήμα 2^o Υπολογίζουμε τη συνάρτηση

$$\triangle(x,y)=f''_{xx}(x,y)\cdot f''_{yy}(x,y)-[f''_{xy}(x,y)]^2$$

Βήμα 3^o Διακρινουμε τις εξής περιπτώσεις:
1. $\triangle(x_0,y_0)>0$ και $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$: τότε στο (x_0,y_0) έχουμε

$$T.E.=f(x_0,y_0).$$

2. $\triangle(x_0,y_0)>0$ και $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$: τότε στο (x_0,y_0) έχουμε

$$T.M. = f(x_0, y_0).$$

3. $\triangle(x_0, y_0) < 0:$ τότε το σημείο λέγεται αυχενικό (σαγματικό), δηλαδή

δεν έχει Τ.Α.

4. $\triangle(x_0, y_0) = 0:$ τότε δεν μπορούμε να πούμε αν υπάρχει ή όχι Τ.Α. στο σημείο αυτό.

$$(f^a(x,y))'_x = af^{a-1}(x,y)f'_x(x,y)$$

$$(f^a(x))'_x = af^{a-1}(x)f'_x(x)$$

$$\left((x-1)^2\right)'_x = 2(x-1)^{2-1}(x-1)'_x = 2(x-1)\cdot 1 = 2(x-1).$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \quad \vec{b} = (b_1, b_2), \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\phi$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\phi$$

Άσκηση 1. *Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης*

$$f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2. \tag{61}$$

Λύση : Από την (61)$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \left((x-1)^2 + 2y^2\right)'_x = \left((x-1)^2\right)'_x + (2y^2)'_x \qquad (62)\\ &= 2(x-1)(x-1)'_x + 0 = 2(x-1)\cdot 1 = 2(x-1), \end{aligned}$$

$$f'_y(x,y) = \left((x-1)^2 + 2y^2\right)'_y = \left((x-1)^2\right)'_y + (2y^2)'_y = 0 + 2\cdot 2y = 4y, \tag{63}$$

Έτσι έχουμε ένα σύστημα

$$\begin{aligned} 2(x-1) &= 0,\\ 4y &= 0, \end{aligned}$$

οπότε η λύση είναι $\;x = 1, \quad y = 0.$

Άρα έχουμε ένα κρίσιμο σημείο $\quad (x_0, y_0) = (1, 0).$
Τότε, χρησιμοποιώντας (62), (63) βρίσκουμε

$$f''_{xx}(x,y) = \left(f'_x(x,y)\right)'_x = (2(x-1))'_x = 2(x-1)'_x = 2,$$

$$f''_{yy}(x,y) = \left(f'_y(x,y)\right)'_y = (4y)'_y = 4,$$

$$f''_{xy}(x,y) = \left(f'_x(x,y)\right)'_y = (2(x-1))'_y = 0.$$

Επομένως

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = f''_{xx}(1, 0) = 2,$$

$$f''_{yy}(x_0, y_0) = f''_{yy}(1, 0) = 4.$$
$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{xy}(1, 0) = 0.$$

Τότε

$$\begin{aligned}\triangle(x_0, y_0) &= f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 \\ &= \triangle(1, 0) = f''_{xx}(1, 0) \cdot f''_{yy}(1, 0) - [f''_{xy}(1, 0)]^2 \\ &= 2 \cdot 4 - 0^2 = 8 > 0.\end{aligned}$$

Επειδή $\triangle(x_0, y_0) > 0$ και $f''_{xx}(x_0, y_0) = f''_{xx}(1, 0) = 2 > 0$, τότε στο $(x_0, y_0) = (1, 0)$ έχουμε

$$T.E. = f(1, 0) \overset{(61)}{=} (1-1)^2 + 2 \cdot 0^2 = 0.$$

Άσκηση 2. *Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης*

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - 4y + 7. \tag{64}$$

Λύση : Από την (64)⇒

$$f'_x(x, y) = (x^2 + xy + y^2 + x - 4y + 7)'_x = (x^2)'_x + (xy)'_x + (y^2 - 4y + 7)'_x + (x)'_x$$
$$= 2x + y(x)'_x + 0 + 1 = 2x + y + 1, \tag{65}$$
$$f'_y(x, y) = (x^2 + xy + y^2 + x - 4y + 7)'_y = (x^2 + x + 7)'_y + (y^2)'_y + (xy)'_y - (4y)'_y$$
$$= 0 + 2y + x(y)'_y - 4(y)'_y = 2y + x \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 2y + x - 4. \tag{66}$$

Έτσι έχουμε ένα σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + y + 1 = 0, \\ 2y + x - 4 = 0, \end{aligned}$$

οπότε λίνουμε τη δεύτερη εξίσωση ως προς x και αντικαθυστούμε στην πρώτη

$$\begin{aligned} &x = 4 - 2y, \quad 2(4 - 2y) + y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3y = -9, \quad \Rightarrow \\ &y = 3, \quad x = 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2, \quad \Rightarrow \quad x = -2,\, y = 3. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε ένα κρίσιμο σημείο $(x_0, y_0) = (-2, 3)$.
Τότε, χρησιμοποιώντας (65), (66) θα λάβουμε

$$f''_{xx}(x, y) = \big(f'_x(x, y)\big)'_x = (2x + y + 1)'_x = 2 + 0 = 2,$$
$$f''_{yy}(x, y) = \big(f'_y(x, y)\big)'_y = (2y + x - 4)'_y = 2 + 0 = 2,$$
$$f''_{xy}(x, y) = \big(f'_x(x, y)\big)'_y = (2x + y + 1)'_y = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Επομένως

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = f''_{xx}(-2, 3) = 2,$$
$$f''_{yy}(x_0, y_0) = f''_{yy}(-2, 3) = 2.$$
$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{xy}(-2, 3) = 1.$$

Τότε

$$\triangle(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2$$
$$= \triangle(-2, 3) = f''_{xx}(-2, 3) \cdot f''_{yy}(-2, 3) - [f''_{xy}(-2, 3)]^2$$
$$= 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0.$$

Επειδή $\triangle(x_0, y_0) > 0$ και $f''_{xx}(x_0, y_0) = 2 > 0$, τότε στο $(x_0, y_0) = (-2, 3)$ έχουμε

Τ.Ε.$=f(-2, 3) \overset{(64)}{=} (-2)^2 + (-2) \cdot 3 + 3^2 + (-2) - 4 \cdot 3 + 7 = 0.$

Άσκηση 3. *Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης*

$$f(x, y) = 2x^2 + y^3 + 16x - 12y - 7. \tag{67}$$

Λύση : Από την (67)⇒

$$f'_x(x, y) = (2x^2 + y^3 + 16x - 12y - 7)'_x = 4x + 16 = 0 \Rightarrow \qquad x = -4, \tag{68}$$

$$f'_y(x, y) = (2x^2 + y^3 + 16x - 12y - 7)'_y = 3y^2 - 12 = 0 \Rightarrow \qquad y^2 = 4 \Rightarrow \qquad y = \pm 2. \tag{69}$$

Άρα έχουμε δυο κρίσιμα σημεία $(x_1, y_1) = (-4, -2)$ και $(x_2, y_2) = (-4, 2)$. Πρέπει να μελετήσουμε ξεχωριστά για Τοπικά Ακρότατα (Τ.Α.) σε αυτά τα δυο σημεία. Χρησιμοποιώντας (68), (69) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= \big(f'_x(x, y)\big)'_x = (4x + 16)'_x = 4, \\ f''_{yy}(x, y) &= \big(f'_y(x, y)\big)'_y = (3y^2 - 12)'_y = 3 \cdot 2y - 0 = 6y, \\ f''_{xy}(x, y) &= \big(f'_x(x, y)\big)'_y = (4x + 16)'_y = 0. \end{aligned} \tag{70}$$

Επομένως

$$f''_{xx}(x_1, y_1) = f''_{xx}(x_2, y_2) = 4,$$
$$f''_{xy}(x_1, y_1) = f''_{xy}(x_2, y_2) = 0,$$

και από την (70) λαμβάνουμε

$$f''_{yy}(x, y) = 6y, \quad \Rightarrow \quad f''_{yy}(x_1, y_1) = 6y_1, \quad f''_{yy}(x_2, y_2) = 6y_2,$$

$$f''_{yy}(x_1, y_1) = f''_{yy}(-4, -2) = 6(-2) = -12,$$
$$f''_{yy}(x_2, y_2) = f''_{yy}(-4, 2) = 6 \cdot 2 = 12.$$

Τότε
$$\triangle(x_1, y_1) = f''_{xx}(x_1, y_1) \cdot f''_{yy}(x_1, y_1) - [f''_{xy}(x_1, y_1)]^2$$
$$= \triangle(-4, -2) = f''_{xx}(-4, -2) \cdot f''_{yy}(-4, -2) - [f''_{xy}(-4, -2)]^2 = 4 \cdot (-12) - 0^2 = -48 < 0 \Rightarrow$$

το σημείο $(x_1, y_1) = (-4, -2)$ είναι αυχενικό. Αναλόγως μελετάμε το σημείο $(x_2, y_2) = (-4, 2)$:

$$\triangle(x_2, y_2) = f''_{xx}(x_2, y_2) \cdot f''_{yy}(x_2, y_2) - [f''_{xy}(x_2, y_2)]^2$$
$$= \triangle(-4, 2) = f''_{xx}(-4, 2) \cdot f''_{yy}(-4, 2) - [f''_{xy}(-4, 2)]^2 = 4 \cdot 12 - 0^2 = 48 > 0 \Rightarrow$$

στο $(x_2, y_2) = (-4, 2)$ έχουμε

$$T.E. = f(-4, 2) \stackrel{(67)}{=} 2(-4)^2 + 2^3 + 16(-4) - 12 \cdot 2 - 7 = -55,$$

επειδή $f''_{xx}(x_2, y_2) = f''_{xx}(-4, 2) = 4 > 0.$

Άλυτες Ασκήσεις

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy.$
2. $f(x, y) = 6x^2 + y^2 - 4xy + 20y + 1 = 0$
3. $f(x, y) = 2y^2 - 7x + x^2 - xy + 1.$
4. $f(x, y) = 4(x - 3)^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2.$
5. $f(x, y) = 3y^2 + y(11 - x) + x^2 + 1.$
6. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy.$
7. $f(x, y) = xy(6 - x - 3y).$
8. $f(x, y) = (y + 3)^2 + 4x^2.$
9. $f(x, y) = y^2 - x^3 + 2y + 27x + 1.$
10. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy.$
11. $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad x, y > 0.$

ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ (Τ.Α.) ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

συναρτήσεων δυο ανεξάρτητων μεταβλητών

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$z = f(x,y) \qquad \text{υπό συνθήκη} \qquad g(x,y) = 0.$$

1. Έστω η εξίσωση $g(x,y) = 0$ μπορεί να λυθεί ως προς y, δηλαδή έστω $y = \phi(x)$ είναι η λύση της $g(x,y) = 0$. Τότε το πρόβλημα εύρεσης των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης $z = f(x,y)$ ανάγεται στην εύρεση των συνηθισμένων τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης μιας ανεξάρτητης μεταβλητής

$$z = F_1(x), \quad \text{όπου} \quad F_1(x) = f(x, \phi(x)).$$

2. Έστω η εξίσωση $g(x,y) = 0$ μπορεί να λυθεί ως προς x, δηλαδή έστω $x = \psi(y)$ είναι η λύση της $g(x,y) = 0$. Τότε το πρόβλημα εύρεσης των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης $z = f(x,y)$ ανάγεται στην εύρεση των συνηθισμένων τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης μιας ανεξάρτητης μεταβλητής

$$z = F_2(y), \quad \text{όπου} \quad F_2(y) = f(\psi(y), y).$$

Άσκηση 1. *Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης*

$$z = f(x,y) = xy \qquad \text{υπό συνθήκη} \qquad x + y = 1. \tag{71}$$

Λύση : Από την (71) βρίσκουμε $y = 1 - x$, και αντικαθυστόντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$z = F_1(x) = x(1-x). \qquad \text{Τότε} \quad z = x(1-x), \tag{72}$$

$$z'_x = (x(1-x))'_x = (x - x^2)'_x = 1 - 2x = 0 \quad \Rightarrow 2x = 1 \quad \Rightarrow \tag{73}$$

το σημείο $x = 1/2$ είναι το κρίσιμο. Από την (73) βρίσκουμε

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (1-2x)'_x = -2.$$

Επειδή $z''_{xx} = -2 < 0$, τότε στο $x = 1/2$ έχουμε $T.M.$ που βρίσκεται από την (72)

$$T.M. = F_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$x_0 = \frac{1}{2},\, y_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

είναι το κρίσημο σημείο της $z = f(x,y) = xy$.

Υπολογισμός τοπικών ακροτάτων συνάρτησης δυο ανεξάρτητων μεταβλητών με συνάρτηση Lagrange

Το πρόβλημα εύρεσης των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$$z = f(x, y) \qquad \text{υπό συνθήκη} \qquad g(x, y) = 0,$$

ανάγεται στην εύρεση των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης Lagrange

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y), \tag{74}$$

όπου λ είναι σταθερός συντελεστής του Lagrange.

Βήμα 1. Παραγωγίζουμε την (74) ως προς x και y και από το σύστημα τριών εξισώσεων

$$L'_x(x, y) = 0, \quad L'_y(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0$$

βρίσκουμε τα κρίσημα σημεία x_0, y_0 και το λ_0.

Βήμα 2. Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους δευτέρας τάξης και το ολικό διαφορικό 2-ας τάξης:

$$L''_{xx}(x, y),\, L''_{yy}(x, y),\, L''_{xy}(x, y),$$

$$d^2L(x, y) = L''_{xx}(x, y)dx^2 + 2L''_{xy}(x, y)dxdy + L''_{yy}(x, y)dy^2. \tag{75}$$

Βήμα 3. Από την (75) για $x = x_0,\, y = y_0,\, \lambda = \lambda_0$ βρίσκουμε

$$d^2L(x_0, y_0) = L''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2L''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + L''_{yy}(x_0, y_0)dy^2.$$

1. Αν $d^2L(x_0, y_0) < 0$, καθώς $|dx| + |dy| \neq 0$, τότε στο κρίσημο σημείο (x_0, y_0) έχουμε

$$T.M. = f(x_0, y_0), \qquad \text{ή} \quad T.M. = L(x_0, y_0).$$

2. Αν $d^2L(x_0, y_0) > 0$, καθώς $|dx| + |dy| \neq 0$, τότε στο κρίσημο σημείο (x_0, y_0) έχουμε

$$T.E. = f(x_0, y_0), \qquad \text{ή} \quad T.E. = L(x_0, y_0).$$

3. Αν $d^2L(x_0, y_0) = 0$, τότε η μέθοδος αυτή δεν εφαρμόζεται.

Παρατήρηση 1.
Σε κάποιες ασκήσεις για να βρούμε το πρόσημο του $d^2L(x_0, y_0)$ πρέπει να χρεισημοποιήσουμε μια απο τις σχέσης

$$dg(x,y) = g'_x(x,y)dx + g'_y(x,y)dy = 0 \quad \Rightarrow \tag{76}$$
$$dg(x_0,y_0) = g'_x(x_0,y_0)dx + g'_y(x_0,y_0)dy = 0. \tag{77}$$

$$(f^a(x))' = af^{a-1}(x)f'(x),$$
$$dx^2 = (dx)^2, \quad dy^2 = (dy)^2.$$

Άσκηση

$$z = \frac{1}{x^2+y^2-1} \quad \Rightarrow$$
$$z'_x = \left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)'_x = \left((x^2+y^2-1)^{-1}\right)'_x$$
$$= -1(x^2+y^2-1)^{-1-1}(x^2+y^2-1)'_x = -(x^2+y^2-1)^{-2}(2x+0) = -2x(x^2+y^2-1)^{-2} \Rightarrow$$
$$z'_x = -2x(x^2+y^2-1)^{-2} \Rightarrow$$
$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(-2x(x^2+y^2-1)^{-2}\right)'_x = -2\left(x(x^2+y^2-1)^{-2}\right)'_x$$
$$= -2\left[(x)'_x(x^2+y^2-1)^{-2} + x\left((x^2+y^2-1)^{-2}\right)'_x\right] =$$
$$-2\left[1\cdot(x^2+y^2-1)^{-2} + x(-2)(x^2+y^2-1)^{-2-1}(x^2+y^2-1)'_x\right]$$
$$= -2\left[(x^2+y^2-1)^{-2} - 2x(x^2+y^2-1)^{-3}(2x+0)\right]$$
$$= -2\left[(x^2+y^2-1)^{-2} - 4x(x^2+y^2-1)^{-3}\right] \quad \Rightarrow$$
$$z''_{xx} = -2\left[(x^2+y^2-1)^{-2} - 4x(x^2+y^2-1)^{-3}\right] \quad \Rightarrow$$
$$z''_{yy} = -2\left[(x^2+y^2-1)^{-2} - 4y(x^2+y^2-1)^{-3}\right],$$

λόγω της συμμετρίας της συνάρτησης $z = \frac{1}{x^2+y^2-1}$.

Άσκηση 1. *Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης*

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \text{υπό συνθήκη} \qquad x - y = 2. \tag{78}$$

Λύση : Από την (78) έχουμε $g(x,y) = x - y - 2$, και από την (74) βρίσκουμε

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x-y-2). \qquad \text{Τότε} \tag{79}$$

$$L'_x(x,y) = (x^2+y^2+\lambda(x-y-2))'_x = (x^2+y^2)'_x + \lambda(x-y-2)'_x$$
$$= 2x + 0 + \lambda(1-0) = 2x + \lambda, \tag{80}$$

$$L'_y(x,y) = (x^2+y^2+\lambda(x-y-2))'_y = (x^2+y^2)'_y + \lambda(x-y-2)'_y$$
$$= 0 + 2y + \lambda(0-1-0) = 2y - \lambda. \qquad (81)$$

Λύνουμε το σύστημα

$$2x+\lambda = 0, \quad 2y-\lambda = 0, \quad x-y = 2,$$

$$\text{οπότε} \quad \lambda = -2x, \quad 2y-\lambda = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2y-(-2x) = 0, \quad \Rightarrow \quad 2(y+x) = 0, \quad \Rightarrow \quad y+x = 0, \quad \Rightarrow y = -x.$$

Αντικαθιστώντας $y = -x$ στην εξίσωση $x-y = 2$, βρίσκουμε

$$x-(-x) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2x = 2, \quad \Rightarrow x = 1.$$

Από τις $y = -x$ και $\lambda = -2x \quad \Rightarrow \quad y = -1, \quad \lambda = -2.$ Τότε έχουμε ένα κρίσημο σημείο

$$x_0 = 1, \quad y_0 = -1 \quad \lambda = -2.$$

Από τις (80), (81) συνεπάγεται

$$L''_{xx}(x,y) = (L'_x)'_x = (2x+\lambda)'_x = 2,$$
$$L''_{yy}(x,y) = (L'_y)'_y = (2y-\lambda)'_y = 2,$$
$$L''_{xy}(x,y) = (L'_x)'_y = (2x+\lambda)'_y = 0.$$

Τότε από την σχέση (75) λαμβάνουμε

$$d^2L(x,y) = 2dx^2 + 2\cdot 0dxdy + 2dy^2 = 2(dx^2+dy^2) > 0 \quad \Rightarrow \quad d^2L(x_0,y_0) > 0. \qquad (82)$$

Άρα στο σημείο $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ χρεισημοποιώντας την (78) έχουμε

$$T.E. = f(x_0,y_0) = f(1,-1) = 1^2 + (-1)^2 = 2.$$

Άσκηση 2. *Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης*

$$z = f(x,y) = xy \qquad \text{υπό σηνθήκη} \qquad x+y = 1. \qquad (83)$$

Λύση : Από την (83) έχουμε $g(x,y) = x+y-1$, και από την (74) βρίσκουμε

$$L(x,y) = xy + \lambda(x+y-1). \qquad \text{Τότε} \qquad (84)$$

$$L'_x(x,y) = (xy+\lambda(x+y-1))'_x = (xy)'_x + \lambda(x+y-1)'_x = y+\lambda(1+0) = y+\lambda, \quad (85)$$

$$L'_y(x,y) = (xy+\lambda(x+y-1))'_y = (xy)'_y + \lambda(x+y-1)'_y = x+\lambda(0+1+0) = x+\lambda. \qquad (86)$$

Λύνουμε το σύστημα

$$y+\lambda=0, \quad x+\lambda=0, \quad x+y=1,$$

$$\text{οπότε }, \quad y=-\lambda, \quad x=-\lambda.$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στην εξίσωση $x+y=1$, βρίσκουμε

$$-\lambda+(-\lambda)=1, \quad -2\lambda=1, \quad \lambda=-\frac{1}{2}, \quad x=y=-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}, \quad \text{οπότε}$$

$$x_0=y_0=\frac{1}{2}, \quad \lambda_0=-\frac{1}{2}, \quad \text{και} \quad (x_0,y_0)=(1/2,1/2)$$

είναι το κρίσημο σημείο. Από τις (85), (86) για $\lambda_0=-\frac{1}{2}$ έχουμε

$$L''_{xx}(x,y)=(L'_x)'_x=\left(y-\frac{1}{2}\right)'_x=0,$$

$$L''_{yy}(x,y)=(L'_y)'_y=\left(x-\frac{1}{2}\right)'_y=0,$$

$$L''_{xy}(x,y)=(L'_x)'_y=\left(y-\frac{1}{2}\right)'_y=1-0=1.$$

Τότε από την σχέση (75) λαμβάνουμε

$$d^2L(x,y)=0dx^2+2dxdy+0dy^2=2dxdy \quad \Rightarrow \quad d^2L(x_0,y_0)=2dxdy. \tag{87}$$

Για να βρούμε το πρόσημο του διαφορικού $d^2L(x_0,y_0)$, χρεισημοποιόυμε την Παρατήρηση 1, πιο συγκεκριμένα τον τύπο (76)

$$\begin{aligned} dg(x,y) &= g'_x(x,y)dx+g'_y(x,y)dy=(x+y-1)'_x dx+(x+y-1)'_y dy \\ &= (1+0)dx+(0+1+0)dy=dx+dy=0 \quad \Rightarrow \quad dy=-dx. \end{aligned} \tag{88}$$

Αντικαθιστόντας $dy=-dx$ στην (87) παίρνουμε

$$d^2L(x_0,y_0)=2dx(-dx)==-2dx^2=-2(dx)^2<0.$$

Άρα από την σχέση (83) έχουμε

$$T.M.=f(x_0,y_0)=f(1/2,1/2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Άσκηση 3. *Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης*

$$z=f(x,y)=x+y \qquad \text{υπό συνθήκη} \qquad x^2+y^2=2. \tag{89}$$

Λύση : Από την (89) έχουμε $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$, και από την (74) βρίσκουμε

$$L(x,y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 2). \qquad \text{Τότε} \tag{90}$$

$$\begin{aligned} L'_x(x,y) &= (x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 2))'_x = (x+y)'_x + \lambda(x^2 + y^2 - 2)'_x \\ &= 1 + \lambda(2x + 0) = 2x\lambda + 1, \end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned} L'_y(x,y) &= (x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 2))'_y = (x+y)'_y + \lambda((x^2 + y^2 - 2))'_y \\ &= 1 + \lambda(0 + 2y) = 2\lambda y + 1. \end{aligned} \tag{92}$$

Λύνουμε το σύστημα

$$2x\lambda + 1 = 0, \quad 2y\lambda + 1 = 0, \quad x^2 + y^2 = 2,$$

$$\text{οπότε} \quad 2x\lambda = -1, \quad 2y\lambda = -1, \quad \Rightarrow$$

$$2x\lambda = 2y\lambda, \quad \Rightarrow \quad 2\lambda(x - y) = 0, \quad \Rightarrow \quad x - y = 0, \quad \Rightarrow x = y,$$

για $\lambda \neq 0$. Αντικαθιστώντας $y = x$ στην εξίσωση $x^2 + y^2 = 2$, βρίσκουμε

$$x^2 + x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 2, \quad \Rightarrow x^2 = 1 \qquad \Rightarrow x = \pm 1, \quad y = \pm 1$$

Από την $2x\lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2x}$. Τότε για

$$x = y = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2},$$

και για

$$x = y = -1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Έτσι έχουμε δυο κρίσημα σημεία

$$x_1 = y_1 = 1, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \text{και} \quad x_2 = y_2 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Από τις (91), (92) συνεπάγεται

$$L''_{xx}(x,y) = (L'_x)'_x = (2x\lambda + 1)'_x = 2\lambda,$$

$$L''_{yy}(x,y) = (L'_y)'_y = (2y\lambda + 1)'_y = 2\lambda,$$

$$L''_{xy}(x,y) = (L'_x)'_y = (2x\lambda + 1)'_y = 0.$$

Τότε από την σχέση (75) λαμβάνουμε

$$d^2L(x,y) = 2\lambda dx^2 + 2 \cdot 0 dxdy + 2\lambda dy^2 = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2. \tag{93}$$

Από την σχέση (93) για $x_1 = y_1 = 1, \quad \lambda_1 = -1/2$ συνεπάγεται

$$d^2L(x_1, y_1) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)dx^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)dy^2 = -dx^2 - dy^2 < 0,$$

και έτσι από την σχέση (89) στο (x_1, y_1) έχουμε

$$T.M. = f(x_1, y_1) = f(1, 1) = 1 + 1 = 2.$$

Από την σχέση (93) για $x_2 = y_2 = -1, \quad \lambda_2 = 1/2$ συνεπάγεται

$$d^2L(x_2, y_2) = 2\lambda_2 dx^2 + 2\lambda_2 dy^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}dx^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}dy^2 = dx^2 + dy^2 > 0.$$

και έτσι από την σχέση (89) έχουμε

$$T.E. = f(x_2, y_2) = f(-1, -1) = -1 + (-1) = -2.$$

Άλυτες Ασκήσεις *Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων* $z = f(x, y)$ *υπό συνθήκη* $g(x, y) = 0$.

Άσκηση 1. $z = f(x, y) = x^2 + y^2, \quad x + y = 1.$

Άσκηση 2. $z = f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 1, \quad x + y = 3.$

Υπολογισμός τοπικών ακροτάτων συνάρτησης τριών ανεξάρτητων μεταβλητών με συνάρτηση Lagrange

Το πρόβλημα εύρεσης των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$$u = f(x, y, z) \qquad \text{υπό συνθήκες} \qquad g_1(x, y, z) = 0, \quad g_2(x, y, z) = 0,$$

ανάγεται στην εύρεση των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης Lagrange

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z), \tag{94}$$

όπου λ_1, λ_2 είναι σταθερές συντελεστές του Lagrange.
Βήμα 1. Παραγωγίζουμε την (94) ως προς x, y και z και από το σύστημα των πέντε εξισώσεων

$$L'_x(x, y, z) = 0, \quad L'_y(x, y, z) = 0, \qquad L'_z(x, y, z) = 0, \quad g_1(x, y, z) = 0, \quad g_2(x, y, z) = 0$$

βρίσκουμε τα κρίσημα σημεία x_0, y_0, z_0 και τα $\lambda_1 = \lambda_{10}$, $\lambda_2 = \lambda_{20}$.
Βήμα 2. Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους δευτέρας τάξης και το ολικό διαφορικό 2-ας τάξης:

$$L''_{xx}(x, y, z),\ L''_{yy}(x, y, z),\ L''_{xy}(x, y, z),\ L''_{zz}(x, y, z),\ L''_{xz}(x, y, z),\ L''_{yz}(x, y, z),$$

$$d^2L(x,y,z) = L''_{xx}(x,y,z)dx^2 + 2L''_{xy}(x,y,z)dxdy + L''_{yy}(x,y,z)dy^2$$
$$+ 2L''_{xz}(x,y,z)dxdz + 2L''_{yz}(x,y,z)dydz. \qquad (95)$$

Βήμα 3. Από την (95) για $x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ \lambda_1 = \lambda_{10},\ \lambda_2 = \lambda_{20}$ βρίσκουμε

$$d^2L(x_0,y_0,z_0) = L''_{xx}(x_0,y_0,z_0)dx^2 + 2L''_{xy}(x_0,y_0,z_0)dxdy + L''_{yy}(x_0,y_0,z_0)dy^2$$
$$+2L''_{xz}(x_0,y_0,z_0)dxdz + 2L''_{yz}(x_0,y_0,z_0)dydz.$$

1. Αν $d^2L(x_0,y_0,z_0) < 0$, καθώς $|dx| + |dy| + |dz| \neq 0$, τότε στο κρίσημο σημείο (x_0,y_0,z_0) έχουμε

$$T.M. = f(x_0,y_0,z_0), \qquad \text{ή} \quad T.M. = L(x_0,y_0,z_0).$$

2. Αν $d^2L(x_0,y_0,z_0) > 0$, καθώς $|dx| + |dy| + |dz| \neq 0$, τότε στο κρίσημο σημείο (x_0,y_0,z_0) έχουμε

$$T.E. = f(x_0,y_0,z_0), \qquad \text{ή} \quad T.E. = L(x_0,y_0,z_0).$$

3. Αν $d^2L(x_0,y_0,z_0) = 0$, τότε η μέθοδος αυτή δεν εφαρμόζεται.

Παρατήρηση 2.
Σε κάποιες ασκήσεις για να βρούμε το πρόσημο του $d^2L(x_0,y_0,z_0)$ πρέπει να χρεισημοποιήσουμε μια απο τις σχέσης

$$dg(x,y,z) = g'_x(x,y,z)dx + g'_y(x,y,z)dy + g'_z(x,y,z)dz = 0 \quad \Rightarrow \qquad (96)$$
$$dg(x_0,y_0,z_0) = g'_x(x_0,y_0,z_0)dx + g'_y(x_0,y_0,z_0)dy + g'_z(x_0,y_0,z_0)dz = 0. \quad (97)$$

---

4 ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ.

Χρήσιμοι τύποι

$$\sqrt[n]{f^m(x)} = f^{\frac{m}{n}}(x) = [f(x)]^{\frac{m}{n}},$$
$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c. \qquad (*)$$

Αν η συνάρτηση $F(x)$ είναι παράγουσα της συνάρτησης $f(x)$, δηλαδή αν $F'(x) = f(x)$ τότε

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \qquad (**)$$

1. Διαδοχικά ολοκληρώματα

Ορισμός 1.
Τα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right] dx \quad \text{και} \quad \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\right] dy$$

λέγονται *Διπλά Διαδοχικά ολοκληρώματα.* Υπάρχουν κι άλλοι συμβολισμοί:

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dydx \quad \text{ή} \quad \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

1.1. Υπολογισμός Διπλών Διαδοχικών ολοκληρωμάτων τύπου

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right] dx \tag{98}$$

Στα Διπλά Διαδοχικά ολοκληρώματα τύπου (98) πρώτα ολοκληρώνουμε το εσωτερικό ολοκλήρωμα μέσα σε αγκύλες ως προς y, θεωρώντας ότι η μεταβλητή x είναι σταθερή. Μετά την ολοκλήρωση θα έχουμε ένα μονό ολοκλήρωμα ως προς x, το οποίο στη συνέχεια ολοκληρώνουμε με τα Μαθηματικά 1, δηλαδή αν η $F(x,y)$ είναι η παράγουσα της $f(x,y)$ ως προς y, δηλαδή $F_y'(x,y) = f(x,y)$ και

$$\int f(x,y)dy = F(x,y), \quad \text{τότε}$$

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = [F(x,y)]_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = F\left(x,\varphi_2(x)\right) - F\left(x,\varphi_1(x)\right) = \Psi(x),$$

και από την (98) συνεπάγεται

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right] dx = \int_a^b \Psi(x)dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 1. *Υπολογίστε το διαδοχικό διπλό ολοκλήρωμα:*

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^3y^2dy\right) dx.$$

Λύση:

$$\int_0^2 x^3y^2dy = x^3\int_0^2 y^2dy = x^3\left[\frac{y^{2+1}}{2+1}\right]_0^2 = x^3\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = x^3\left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right]$$

$$= \frac{8}{3}x^3 = \Psi(x).$$

Τότε

$$I = \int_0^1 \frac{8}{3}x^3 dx = \frac{8}{3}\int_0^1 x^3 dx = \frac{8}{3}\left[\frac{x^{3+1}}{3+1}\right]_0^1 = \frac{8}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{8}{3}\left[\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right] = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{3}.$$

Απευθείας λύση:

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 x^3 y^2 dy\right) dx = \int_0^1 x^3 \left(\int_0^2 y^2 dy\right) dx = \int_0^1 x^3 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 dx$$

$$= \int_0^1 x^3 \left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] dx = \frac{8}{3}\int_0^1 x^3 dx = \frac{8}{3}\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{8}{3}\left(\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{3}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2. *Υπολογίστε το διαδοχικό διπλό ολοκλήρωμα:*

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} 2x^5 \cos y dy\right) dx.$$

Λύση:

$$\int_0^{\pi/2} 2x^5 \cos y dy = 2x^5 \int_0^{\pi/2} \cos y dy = 2x^5 [\sin y]_0^{\pi/2} = 2x^5[\sin \pi/2 - \sin 0]$$

$$= 2x^5(1-0) = 2x^5 = \Psi(x). \qquad \text{Τότε}$$

$$I = \int_0^1 2x^5 dx = 2\int_0^1 x^5 dx = 2\left[\frac{x^{5+1}}{5+1}\right]_0^1 = 2\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^6}{6} - \frac{0^6}{6}\right] = 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3. *Υπολογίστε το διαδοχικό διπλό ολοκλήρωμα:*

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 y^4 dy\right) dx.$$

Λύση:

$$\int_0^x x^2 y^4 dy = x^2 \int_0^x y^4 dy = x^2 \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^x = x^2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{x^7}{5}. \quad \text{Τότε}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x^7}{5} dx = \frac{1}{5}\int_0^1 x^7 dx = \frac{1}{5}\left[\frac{x^8}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{5}\left(\frac{1^8}{8} - \frac{0^8}{8}\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{40}.$$

1.2. Υπολογισμός Διπλών Διαδοχικών ολοκληρωμάτων τύπου

$$\int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\right] dy \tag{99}$$

Στα Διπλά Διαδοχικά ολοκληρώματα τύπου (99) πρώτα ολοκληρώνουμε το εσωτερικό ολοκλήρωμα μέσα σε αγκύλες ως προς x, θεωρώντας ότι η μεταβλητή y είναι σταθερή. Μετά την ολοκλήρωση θα έχουμε ένα μονό ολοκλήρωμα ως προς y, το οποίο στη συνέχεια ολοκληρώνουμε με τα Μαθηματικά 1, δηλαδή αν η $\Phi(x,y)$ είναι η παράγουσα της $f(x,y)$ ως προς x, δηλαδή $\Phi'_x(x,y) = f(x,y)$ και

$$\int f(x,y)dx = \Phi(x,y), \quad \text{τότε}$$

$$\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx = [\Phi(x,y)]_{g_1(y)}^{g_2(y)} = \Phi\left(g_2(y),y\right) - \Phi\left(g_1(y),y\right) = G(y),$$

και από την (99) συνεπάγεται

$$\int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\right] dy = \int_c^d G(y)dy.$$

ΑΣΚΗΣΗ 1. *Υπολογίστε το διαδοχικό διπλό ολοκλήρωμα:*

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^1 x^3y^2dx\right) dy.$$

Λύση:

$$\int_0^1 x^3y^2dx = y^2\int_0^1 x^3dx = y^2\left[\frac{x^{3+1}}{3+1}\right]_0^1 = y^2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = y^2\left[\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right]$$

$$= \frac{y^2}{4} = G(y).$$

Τότε

$$I = \int_0^2 \frac{y^2}{4}dy = \frac{1}{4}\int_0^2 y^2dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^{2+1}}{2+1}\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3} = \frac{2}{3}.$$

Απευθείας λύση:

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 x^3y^2dx\right) dy = \int_0^2 y^2\left(\int_0^1 x^3dx\right) dy = \int_0^2 y^2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^2 y^2\left[\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right] dy = \frac{1}{4}\int_0^2 y^2dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3} = \frac{2}{3}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 x^3y^2dy\right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^1 x^3y^2dx\right) dy = \frac{2}{3},$$

δηλαδή ότι όταν όλα τα όρια στο διαδοχικό διπλό ολοκλήρωμα είναι σταθερά, τότε μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρα ολοκλήρωσης, γενικά ισχύει

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2. *Υπολογίστε το διαδοχικό ολοκλήρωμα αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης:*

$$\int_0^\pi \left(\int_x^\pi \frac{\cos y}{y} dy\right) dx.$$

Λύση: Τα όρια ολοκλήρωσης δείχνουν ότι ο τόπος D περιγράφεται με ανισότητες: $D:\ 0 \le x \le \pi, \quad x \le y \le \pi$. Τότε $D:\ 0 \le y \le \pi, \quad 0 \le x \le y$. Αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης:

$$\int_0^\pi \left(\int_x^\pi \frac{\cos y}{y} dy\right) dx = \int_0^\pi \left(\int_0^y \frac{\cos y}{y} dx\right) dy = \int_0^\pi \frac{\cos y}{y} \left(\int_0^y dx\right) dy$$
$$= \int_0^\pi \frac{\cos y}{y} [x]_0^y \, dy = \int_0^\pi \frac{\cos y}{y} [y-0] dy = \int_0^\pi \frac{\cos y}{y} y dy = \int_0^\pi \cos y dy$$
$$= [\sin y]_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0.$$

2. Δυπλά ολοκληρώματα

Ορισμός 2.
Τα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int\int_D f(x,y) dxdy \quad \text{και} \quad \int\int_D f(x,y) dydx$$

λέγονται *Δυπλά ολοκληρώματα* και υπολογίζονται με αναγωγή στα Δυπλά Διαδοχικά ολοκληρώματα τύπου (98) ή (99). Παρατηρούμε ότι

$$\int\int_D f(x,y) dxdy = \int\int_D f(x,y) dydx.$$

Υπολογισμός διπλών ολοκληρωμάτων σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Ένα σύνολο D του $\mathbb{R}^2$ λέγεται **απλό ως προς τον άξονα $\mathbf{y'y}$** $(\mathbf{x'x})$ όταν το εσωτερικό του είναι μη κενό συναφές συνολο και κάθε ευθεία L παράλληλη ως προς τον άξονα $y'y \quad (x'x)$ τέμνει το σύνορο ∂D του D το πολύ σε δυο σημεία. Το σύνολο D του $\mathbb{R}^2$ λέγεται **απλό** όταν είναι ταυτόχρονα απλό ως προς $y'y$ και $x'x$.

Θεώρημα Fubini

I. Έστω ότι ο τόπος D είναι απλός ως προς $y'y$ και δίνεται ως εξής:

$$D = \{(x,y) \in R^2 : a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}, \tag{100}$$

όπου $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$. Τότε

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right] dx. \tag{101}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.1. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\int\int_D x^2 ydxdy, \qquad \text{όπου} \quad D: x \in [0,1], \quad 0 \leq y \leq 2x.$$

Λύση: Ο τόπος D είναι απλός ως προς $y'y$ και τότε

$$\int\int_D x^2 ydxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} x^2 ydy\right) dx.$$

Πρώτα ολοκληρώνουμε μέσα σε παρενθέσεις ως προς y, θεωρώντας ότι η μεταβλητή x είναι σταθερή. Τότε και το x^2 είναι σταθερό και βγαίνει έξω απ το ολοκλήρωμα, δηλαδή:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2x} x^2 ydy\right) dx = \int_0^1 x^2 \left(\int_0^{2x} ydy\right) dx = \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \left[y^2\right]_0^{2x} dx =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \left[(2x)^2 - 0^2\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 4x^2 dx = \frac{4}{2}\int_0^1 x^4 dx = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}[1^5 - 0^5] = \frac{2}{5}.$$

Θεώρημα Fubini

II. Όταν ο τόπος D είναι απλός ως προς $x'x$ και δίνεται ως εξής:

$$D = \{(x,y) \in R^2 : c \leq y \leq d, \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}, \tag{102}$$

όπου $g_1(y), g_2(y)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[c,d]$. Τότε

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \Big[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\Big] dy. \tag{103}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.2 Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\int\int_D e^{y^2} \cos x dxdy, \qquad \text{όπου} \quad D: x \in [0,\pi], \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Λύση: Ο τόπος D είναι απλός ως προς $x'x$ επειδή $0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \pi$, και τότε

$$\int\int_D x^2 y dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} e^{y^2} \cos x dx \right) dy.$$

Πρώτα ολοκληρώνουμε μέσα σε παρενθέσεις ως προς x, θεωρώντας ότι η μεταβλητή y είναι σταθερή. Τότε και το e^{y^2} είναι σταθερό και βγαίνει έξω απ το ολοκλήρωμα, δηλαδή:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\pi} e^{y^2} \cos x dx \right) dy = \int_0^1 e^{y^2} \left(\int_0^{\pi} \cos x dx \right) dy$$

$$\int_0^1 e^{y^2} [\sin x]_0^{\pi} dy = \int_0^1 e^{y^2} (\sin \pi - \sin 0) dy = \int_0^1 e^{y^2} (0 - 0) dy = 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.3 *Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα, αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης*

$$\int_0^1 \left[\int_{2y}^2 \cos(x^2) dx \right] dy. \qquad (**)$$

Λύση: από $(**) \Rightarrow$

$$0 \leq y \leq 1, \quad 2y \leq x \leq 2 \quad \Rightarrow y = 0,\, y = 1,\, x = 2y,\, x = 2, \Rightarrow\, y = \frac{1}{2}x.$$

Από την γραφική παράσταση φαίνεται ότι

$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}x.$$

Τότε

$$\int_0^1 \left[\int_{2y}^2 \cos(x^2) dx \right] dy = \int_0^2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}x} \cos(x^2) dy \right] dx = \int_0^2 \cos x^2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}x} dy \right] dx$$

$$= \int_0^2 \cos x^2 [y]_0^{\frac{1}{2}x} dx = \int_0^2 (\cos x^2) \left(\frac{1}{2}x - 0 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos x^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 (\cos x^2) 2x dx = \frac{1}{4} \int_0^2 (\cos x^2) dx^2 = \frac{1}{4} [\sin x^2]_0^2 = \frac{1}{4} [\sin 2^2 - \sin 0^2] = \frac{1}{4} \sin 4.$$

$$df(x) = f'(x) dx \,\Rightarrow\, dx^2 = (x^2)' dx = 2x dx,$$

$$\int \cos t dt = \sin t$$

Ιδιότητες των διπλών ολοκληρωμάτων:

Αν υπάρχουν $\int\int_D f(x,y)dxdy$ και $\int\int_D g(x,y)dxdy$, τότε

$$1. \quad \int\int_D cf(x,y)dxdy = c\int\int_D f(x,y)dxdy \qquad \text{για} \quad c \quad constant, \tag{104}$$

$$2. \quad \int\int_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \int\int_D f(x,y)dxdy \pm \int\int_D g(x,y)dxdy, \tag{105}$$

$$3. \quad \Big|\int\int_D f(x,y)dxdy\Big| \leq \int\int_D |f(x,y)|dxdy. \tag{106}$$

Αν $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, τότε

$$4. \quad \int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{D_2} f(x,y)dxdy, \tag{107}$$

Αν $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in D$, τότε

$$5. \quad \int\int_D f(x,y)dxdy \geq 0, \tag{108}$$

Αν $f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$, τότε

$$6. \quad \int\int_D f(x,y)dxdy \leq \int\int_D g(x,y)dxdy, \tag{109}$$

Αν $m \leq f(x,y) \leq M \quad \forall (x,y) \in D$, τότε

$$7. \quad Em \leq \int\int_D f(x,y)dxdy \leq EM, \tag{110}$$

όπου $E = \int\int_D dxdy$ είναι το εμβαδο της D.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: βρείτε τα όρια των παρακάτω διπλών ολοκληρωμάτων μετατρέποντάς τα στα διαδοχικά τύπου

$$\int\left[\int f(x,y)dy\right]dx \qquad \text{ή} \qquad \int\left[\int f(x,y)dx\right]dy.$$

1. $\int\int_D f(x,y)dxdy$, όπου $D: y = x^2, \quad x = y^2$,

2. $\int\int_D f(x,y)dxdy$, όπου $D: y \leq x+1, y \leq -x+1, \quad y \geq 0$,

3. $\int\int_D f(x,y)dxdy$, όπου $D: 0 \leq x \leq 2, \quad y = x, y = 2x$,

4. $\int\int_D f(x,y)dxdy$, όπου $D: y = -x^2, \quad y = x-2$,

$$-2 \leq x \leq 1, \qquad x-2 \leq y \leq -x^2$$

Αλλαγή μεταβλητών ολοκλήρωσης.

Αντικαθιστούμε τις μεταβλητές (x, y) με νέες μεταβλητές (u, v) με τον εξής μετασχηματισμό (M): $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, όπου $(x, y) \in D$, $(u, v) \in D^*$, τότε

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D^*} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J|dudv, \tag{111}$$

αν $J \neq 0$, όπου J είναι η **Ιακωβιανή ορίζουσα** του μετασχηματισμού M: $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = x'_u y'_v - x'_v y'_u$, και $|J|$ είναι απόλυτη τιμή (μέτρο) αν η J είναι πραγματική συνάρτηση (μιγαδική συνάρτηση).

Υπολογισμός διπλών ολοκληρωμάτων σε πολικές συντεταγμένες.

Αντικαθιστούμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) με τις πολικές συντεταγμένες (r, t) μέσο του μετασχηματισμού

$$(M): \quad x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad \text{όπου} \quad (x,y) \in D, \quad (r,t) \in D^*. \tag{112}$$

$$\text{Τότε} \quad dxdy = rdrdt.$$

$$\text{Έστω ότι} \quad D^* = \{(r,t) : \alpha \leq t \leq \beta, \quad r_1(t) \leq r \leq r_2(t), \quad \text{τότε}$$

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta \left[\int_{r_1(t)}^{r_2(t)} f(r\cos t, r\sin t)rdr\right] dt, \tag{113}$$

όπου πρώτα ολοκληρώνουμε μέσα σε αγκύλες ως προς r, θεωρώντας ότι η μεταβλητή t είναι σταθερή.

Δείξτε ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα των πολικών συντεταγμένων είναι ίση με $J = r$.

Χρήσιμος τύπος:

$$x^2 + y^2 = (r\cos t)^2 + (r\sin t)^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2 \cdot 1 = r^2. \tag{$*$}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1. *Υπολογίστε σε πολικές συντεταγμένες το διπλό ολοκλήρωμα :*

$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, όπου $D: x^2 + y^2 \leq 4$.

Λύση: Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό (M) από την (112). Επειδή ο τόπος D είναι όλος ο δύσκος με κέντρο O(0,0) και ακτίνα $r = 2$, έχουμε

$0 \le t \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 2$. Εφαρμόζουμε τους τύποθς (113), (*) και έτσι έχουμε:

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 \sqrt{r^2}\, rdr\right] dt$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 r^2 dr\right] dt = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 dt = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}[r^3]_0^2\, dt$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(2^3-0^3)dt = \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} dt = \frac{8}{3}[t]_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\cdot(2\pi-0) = \frac{16\pi}{3}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2. *Υπολογίστε σε πολικές συντεταγμένες το διπλό ολοκλήρωμα*

$\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad$ όπου $D:\, x \ge 0, \quad x^2+y^2 \le 49.$

Λύση: Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό (Μ) από την (112):

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad dxdy = rdrdt.$$

Επειδή ο τόπος D είναι το δεξί μέρος του δύσκου με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα 7, έχουμε

$$-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 7.$$

Εφαρμόζουμε τους τύποθς (113), (*) και έτσι έχουμε:

$$\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^7 \frac{rdr}{\sqrt{r^2}}\right) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^7 \frac{rdr}{r}\right) dt$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^7 dr\right) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}[r]_0^7 dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(7-0)dt = 7\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = 7\,[t]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$
$$= 7\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 7\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 7\pi.$$

Χρήσιμος τύπος:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2$$

είναι εξίσωση κύκλου με ακτίνα $r = a$ και κέντρο $K(x_0, y_0)$.

ΑΣΚΗΣΗ 3. *Υπολογίστε σε πολικές συντεταγμένες το διπλό ολοκλήρωμα*

$\int\int_D \frac{dxdy,}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad$ όπου $D: \quad x^2+y^2-2x \le 0.$

Λύση: από $x^2+y^2-2x \le 0 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2 \le 1 \quad \Rightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1.$ Είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(1,0)$ και ακτίνα 1.

Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό (M) από την (112) και τον τύπο (*):

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad dxdy = rdrdt.$$

Τότε από την ανησώτητα $\quad x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \Rightarrow$

$r^2 - 2r\cos t = 0 \Rightarrow r(r - 2\cos t) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, \quad r - 2\cos t = 0 \Rightarrow r_2 = 2\cos t.$

Από την γραφική παράσταση έχουμε

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2\cos t.$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο (113) και λαμβάνουμε:

$$\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos t} \frac{rdr}{\sqrt{r^2}} \right) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos t} \frac{rdr}{r} \right) dt$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos t} dr \right) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [r]_0^{2\cos t} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\cos t - 0) dt$$
$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt = 2[\sin t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2[1 - (-1)] = 2 \cdot 2 = 4.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: βρείτε τα όρια των παρακάτω διπλών ολοκληρωμάτων μετατρέποντάς τα στα διαδοχικά τύπου:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int f(r\cos t, r\sin t) rdr \right] dt.$$

1. $\int\int_\Omega f(x,y)dxdy,$ όπου $D: \quad x, y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1,$
2. $\int\int_D f(x,y)dxdy,$ όπου $D: \quad x \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 49,$
3. $\int\int_D f(x,y)dxdy,$ όπου $D: \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 36,$
4. $\int\int_D f(x,y)dxdy,$ όπου $D: \quad x, y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \geq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 9,$
5. $\int\int_D f(x,y)dxdy,$ όπου $D: 0 \leq y \leq x, \quad x^2 + y^2 \leq 36,$
6. $\int\int_D f(x,y)dxdy,$ όπου $D: \quad 0 \leq x \leq y, \quad x^2 + y^2 \leq 25,$
7. $\int\int_D f(x,y)dxdy,$ όπου $D: y \geq x, \quad y \geq -x, \quad x^2 + y^2 \leq 16,$
8. $\int\int_D f(x,y)dxdy,$ όπου $D: x^2 + y^2 - 2y \leq 0.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1. Υπολογίστε $\int\int_D xydxdy,$ όπου $D: y = x^2, \quad x = y^2,$

2. Υπολογίστε $\int\int_D yxdxdy$, όπου $D: y \leq x+1,\, y \leq -x+1, \quad y \geq 0,$

3. Υπολογίστε $\int\int_D (x+y^2)dxdy$, όπου $D: 0 \leq x \leq 2, \quad y = x,\, y = 2x,$

4. Υπολογίστε $\int\int_D (x+y)dxdy,$ όπου $D: y = -x^2, \quad y = x-2,$

5. Υπολογίστε $\int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt[5]{x^2+y^2}dx\right] dy,$

6. Υπολογίστε $\int_0^4 \left[\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt[4]{x^2+y^2}dy\right] dx,$

7. Υπολογίστε $\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}},$ όπου $D: 0 \leq y \leq x, \quad x^2+y^2 \leq 36,$

8. Υπολογίστε $\int\int_\Omega \frac{ydxdy}{\sqrt{x^2+y^2}},$ όπου $D: \quad x, y \geq 0, \quad x^2+y^2 \leq 1,$

9. Υπολογίστε $\int\int_D \frac{xdxdy}{\sqrt{x^2+y^2}},$ όπου $D: \quad x \geq 0, \quad x^2+y^2 \leq 49,$

10. Υπολογίστε $\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$ όπου $D: \quad x, y \geq 0, \quad x^2+y^2 \leq 1,$

11. Υπολογίστε $\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}},$ όπου $D: \quad 0 \leq x \leq y, \quad x^2+y^2 \leq 25,$

12. Υπολογίστε $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ όπου $D: x^2+y^2+2y \leq 0,$

Υπολογίστε τα διπλά ολοκληρώματα, αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης

1. Υπολογίστε

$$\int_{-1}^{0} \left[\int_0^{x+1} xydy\right] dx + \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xydy\right] dx,$$

2. Υπολογίστε

$$\int_0^{\pi} \left[\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy\right] dx,$$

3. Υπολογίστε

$$\int_0^1 \left[\int_y^1 x^2 e^{xy} dx\right] dy,$$

4. Υπολογίστε

$$\int_0^8 \left[\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy}{y^4+1}\right] dx,$$

5. Υπολογίστε

$$\int_0^2 \left[\int_x^2 y^2 \sin xy dy\right] dx,$$

6. Υπολογίστε

$$\int_0^8 \left[\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy}{y^4+1}\right] dx,$$

7. Υπολογίστε

$$\int_0^1 \left[\int_{3y}^3 e^{x^2} dx\right] dy,$$

Εφαρμογές των διπλών ολοκληρωμάτων.

1. Μάζα επίπεδου σώματος D, αν είναι γνωστή η πυκνότητά του $\rho = \rho(x, y)$ σε κάθε σημείο $(x, y) \in D$:

$$M = \int\int_D \rho(x, y) dxdy,$$

2. Κέντρο βάρους $K(\bar{x}, \bar{y})$ επίπεδου σώματος D αν είναι γνωστή η πυκνότητά του $\rho = \rho(x, y)$ σε κάθε σημείο $(x, y) \in D$:

$$\bar{x} = \frac{\int\int_D x\rho(x, y)dxdy}{\int\int_D \rho(x, y)dxdy}, \qquad \bar{y} = \frac{\int\int_D y\rho(x, y)dxdy}{\int\int_D \rho(x, y)dxdy},$$

3. Ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες I_{0x}, I_{0y} και την αρχή των αξόνων I_0 επίπεδου σώματος D, αν είναι γνωστή η πυκνότητά του $\rho = \rho(x, y)$ σε κάθε σημείο $(x, y) \in D$:

$$I_{0x} = \int\int_D y^2\rho(x, y)dxdy, \qquad I_{0y} = \int\int_D x^2\rho(x, y)dxdy,$$

$$I_0 = \int\int_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy.$$

4. Εμβαδό της επιφάνειας $z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$:

$$S = \int\int_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy,$$

όπου D είναι η προβολή της επιφάνειας $z = f(x, y)$ στο επίπεδο (x, y).

Αν το επίπεδο σώμα είναι ομογενές, τότε στούς τύπους 1,2,3 θεωρούμε ότι $\rho = \rho(x, y) = 1$ για όλα τα $(x, y) \in D$.

5 ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ.

Υπολογισμός τριπλών ολοκληρωμάτων σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Θεώρημα Fubini

Ορισμός 1. Αν ένα χωρίο D δίνεται ως εξής:

$$D = \{(x,y,z) \in R^3 : \, a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \quad \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)\},$$

όπου οι συναρτήσεις $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και οι $\psi_1(x,y), \psi_2(x,y)$ είναι συνεχείς στην ορθή προβολή D_{xy} του D στο επίπεδο xy, δηλαδή

$$D_{xy} = \{(x,y) \in R^2 : \, a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

τότε το D λέγεται **xy απλό χωρίο του** R^3. Υπενθυμίζουμε ότι D_{xy} είναι ένα απλό επίπεδο χωρίο ως προς τον άξονα $y'y$.

Θεώρημα Fubini

Αν το χωρίο D είναι xy απλό χωρίο του R^3, τότε

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)dy \right] dx,$$

δηλαδή πρώτα ολοκληρώνουμε μέσα σε αγκύλες ως προς z, θεωρώντας ότι οι μεταβλητές x, y είναι σταθερές και έτσι μετατρέπουμε το τριπλό ολοκλήρωμα σε διπλό ολοκλήρωμα κάποιας συνάρτησης $F(x,y)$ με μεταβλητές x, y

Ορισμός 2. Αν ένα χωρίο D δίνεται ως εξής:

$$D = \{(x,y,z) \in R^3 : c \leq y \leq d, \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y), \quad \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)\},$$

όπου οι συναρτήσεις $g_1(y), g_2(y)$ είναι συνεχείς στο $[c,d]$ και οι $\psi_1(x,y), \psi_2(x,y)$ είναι συνεχείς στην ορθή προβολή D_{yx} του D στο επίπεδο xy, δηλαδή

$$D_{yx} = \{(x,y) \in R^2 : \, c \leq y \leq d, \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\},$$

τότε το D λέγεται **yx απλό χωρίο του** R^3. Υπενθυμίζουμε ότι D_{yx} είναι ένα απλό επίπεδο χωρίο ως προς τον άξονα $x'x$.

Θεώρημα Fubini

Αν το χωρίο D είναι yx απλό χωρίο του R^3, τότε

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d \left\{ \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dx \right\} dy$$

$$= \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} G(x,y)dx \right] dy,$$

δηλαδή πρώτα ολοκληρώνουμε μέσα σε αγκύλες ως προς z, θεωρώντας ότι οι μεταβλητές x, y είναι σταθερές και έτσι μετατρέπουμε το τριπλό ολοκλήρωμα σε διπλό ολοκλήρωμα κάποιας συνάρτησης $G(x,y)$ με μεταβλητές x, y.

Ορισμός 3. Αν ένα χωρίο D δίνεται ως εξής:

$$D = \{(x,y,z) \in R^3 : m \leq z \leq n, \quad h_1(z) \leq x \leq h_2(z), \quad q_1(x,z) \leq y \leq q_2(x,z)\},$$

όπου οι συναρτήσεις $h_1(z), h_2(z)$ είναι συνεχείς στο $[m,n]$ και οι $q_1(x,z), q_2(x,z)$ είναι συνεχείς στην ορθή προβολή D_{zx} του D στο επίπεδο xz, δηλαδή

$$D_{zx} = \{(x,z) \in R^2 : \, m \leq z \leq n, \quad h_1(z) \leq x \leq h_2(z)\},$$

τότε το D λέγεται **zx απλό χωρίο του** R^3. Υπενθυμίζουμε ότι D_{zx} είναι ένα απλό επίπεδο χωρίο ως προς τον άξονα $x'x$.

Θεώρημα Fubini

Αν το χωρίο D είναι zx απλό χωρίο του R^3, τότε

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int_m^n \Big\{ \int_{h_1(z)}^{h_2(z)} \left[\int_{q_1(x,z)}^{q_2(x,z)} f(x,y,z)dy \right] dx \Big\} dz$$

$$= \int_m^n \left[\int_{h_1(z)}^{h_2(z)} H(x,z)dx \right] dz,$$

όπου πρώτα ολοκληρώνουμε μέσα σε αγκύλες ως προς y, θεωρώντας ότι οι μεταβλητές x, z είναι σταθερές και έτσι μετατρέπουμε το τριπλό ολοκλήρωμα σε διπλό ολοκλήρωμα κάποιας συνάρτησης $H(x,z)$ με μεταβλητές x, z.

Υπάρχουν άλλοι τρεις τύποι των διαδοχικών τριπλών ολοκληρωμάτων.

Εφαρμογές των τριπλών ολοκληρωμάτων.

1. Όγκος στερεού D

$$V = \int\int\int_D dxdydz,$$

2. Μάζα στερεού D, αν είναι γνωστή η πυκνότητα $\rho = \rho(x, y, z)$ στερεού σε κάθε σημείο $(x, y, z) \in D$:

$$M = \int\int\int_D \rho(x, y, z)dxdydz,$$

3. Κέντρο βάρους $K(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ στερεού D, αν είναι γνωστή η πυκνότητα $\rho = \rho(x, y, z)$ του στερεού D σε κάθε σημείο $(x, y, z) \in D$:

$$\bar{x} = \frac{\int\int\int_D x\rho(x, y, z)dxdydz}{\int\int\int_D \rho(x, y, z)dxdydz}, \qquad \bar{y} = \frac{\int\int\int_D y\rho(x, y, z)dxdydz}{\int\int\int_D \rho(x, y, z)dxdydz},$$

$$\bar{z} = \frac{\int\int\int_D z\rho(x, y, z)dxdydz}{\int\int\int_D \rho(x, y, z)dxdydz},$$

4. Ροπές αδράνειας I_x, I_y, I_z στερεού D, αν είναι γνωστή η πυκνότητα $\rho = \rho(x, y, z)$ του στερεού D σε κάθε σημείο $(x, y, z) \in D$:

$$I_x = \int\int\int_D (y^2+z^2)\rho(x, y, z)dxdydz, \qquad I_y = \int\int\int_D (x^2+z^2)\rho(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_z = \int\int\int_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz.$$

Αν το σώμα είναι ομογενές, τότε σε όλους αυτούς τους τύπους θεωρούμε ότι $\rho = \rho(x, y, z) = 1$ για όλα τα $(x, y, z) \in D$.

ΑΣΚΗΣΗ 1. Υπολογίστε το διαδοχικό τριπλό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \left\{\int_0^x \left[\int_0^y xy^2zdz\right] dy\right\} dx$$

Λύση: Πρώτα ολοκληρώνουμε μέσα σε αγκύλες ως προς z, θεωρώντας ότι οι μεταβλητές x, y είναι σταθερές:

$$\int_0^1 \left\{\int_0^x \left[\int_0^y xy^2zdz\right] dy\right\} dx = \int_0^1 \left\{\int_0^x xy^2 \left[\int_0^y zdz\right] dy\right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{\int_0^x xy^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^y dy\right\} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\int_0^x xy^2[z^2]_0^y\, dy\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_0^x xy^2(y^2 - 0^2)dy\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\int_0^x y^4dy\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^x dx$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^1 x[y^5]_0^x\, dx = \frac{1}{10}\int_0^1 x(x^5 - 0^5)dx = \frac{1}{10}\int_0^1 x^6dx = \frac{1}{10}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{70}[x^7]_0^1 = \frac{1}{70}(1^7 - 0^7) = \frac{1}{70}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2. *Βρείτε τον όγκο του πρίσματος στο πρώτο ογδοημόριο που κόβεται από τα συντεταγμένα επίπεδα* $x=0,\ y=0,\ z=0$ και τα επίπεδα $x=2$, $y+z=1$.
Λύση: Από την $y+z=1$ βρίσκουμε $z=1-y$. Από την γραφική παράσταση φαίνεται ότι

$$D:\ 0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 1,\quad 0\le z\le 1-y.$$

Τότε

$$V=\int\int\int_D dxdydz=\int_0^2\left\{\int_0^1\left[\int_0^{1-y}dz\right]dy\right\}dx=\int_0^2\left[\int_0^1[z]_0^{1-y}dy\right]dx$$

$$=\int_0^2\left[\int_0^1(1-y-0)dy\right]dx=\int_0^2\left[\int_0^1(1-y)dy\right]dx=\int_0^2\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_0^1dx$$

$$\int_0^2\left[1-\frac{1^2}{2}-\left(0-\frac{0^2}{2}\right)\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^2dx=\frac{1}{2}[x]_0^2=\frac{1}{2}(2-0)=1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Υπολογίστε $\int_0^1\left[\int_0^{x^2}\left(\int_0^{\sqrt[4]{x+y}}4z^3dz\right)dy\right]dx.$
2. Υπολογίστε $\int_0^1\left[\int_0^{y}\left(\int_0^{y-x}yzdz\right)dx\right]dy.$
3. Υπολογίστε $\int_0^1\left[\int_0^{x}\left(\int_0^{x+y}xzdz\right)dy\right]dx.$
4. Βρείτε τον όγκο του τετραέδρου που κόβεται από το πρώτο ογδοημόριο από το επίπεδο $6x+3y+2z=6$.

Υπολογισμός τριπλών ολοκληρωμάτων σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Αντικαθιστούμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y,z) με τις κυλινδρικές συντεταγμένες (r,t,z) μέσο του μετασχηματισμού

$$(M):\quad x=r\cos t,\quad y=r\sin t,\quad z=z,\quad dxdydz=rdzdrdt,\quad (x,y,z)\in D,\quad (r,t,z)\in D^*,$$

όπου t είναι η θετική γωνία μεταξύ του άξονα $x'x$ και ακτίνας r και γενικά $t\in[0,2\pi]$. Έστω ότι

$$D^*=\{(r,t,z):\alpha\le t\le\beta,\ r_1(t)\le r\le r_2(t),\ \psi_1(r,t)\le z\le\psi_2(r,t)\},\quad \text{τότε}$$

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz=\int_\alpha^\beta\left\{\int_{r_1(t)}^{r_2(t)}\left[\int_{\psi_1(r,t)}^{\psi_2(r,t)}f(r\cos t,r\sin t,z)rdz\right]dr\right\}dt$$

Πρώτα ολοκληρώνουμε μέσα σε αγκύλες ως προς z, θεωρώντας ότι οι μεταβλητές t, r είναι σταθερές και έτσι θα καταλήξουμε σε διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες.

Χρήσιμος τύπος:
$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (*)$$

ΑΣΚΗΣΗ 1. *Υπολογιστε το τριπλό ολοκλήρωμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες:*

$$I = \int\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz, \text{ όπου } \quad D: z = 1-(x^2+y^2),\ z \geq 0.$$

Λύση: Υπενθυμίζουμε ότι $x^2+y^2=r^2$. Η εξίσωση $z = 1-(x^2+y^2)$ μας δίνει το ελλειπτικό παραβολοειδές με κορυφή το σημείο $K(0,0,1)$ και σε κυλινδρικές συντεταγμένες η εξίσωσή του είναι $z = 1-r^2$. Από την γραφική παράσταση έχουμε

$$D: 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1-r^2, \qquad \text{τότε}$$

$$I = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(\int_0^{1-r^2}\sqrt{r^2}rdz\right)dr\right]dt = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(\int_0^{1-r^2}r^2dz\right)dr\right]dt =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 r^2\left(\int_0^{1-r^2}dz\right)dr\right]dt = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 r^2[z]_0^{1-r^2}dr\right]dt = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 r^2(1-r^2-0)dr\right]dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1(r^2-r^4)dr\right]dt = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right]_0^1 dt = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1^3}{3}-\frac{1^5}{5}-\left(\frac{0^3}{3}-\frac{0^5}{5}\right)\right]dt$$

$$= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\int_0^{2\pi}dt = \left(\frac{5}{15}-\frac{3}{15}\right)[t]_0^{2\pi} = \frac{2}{15}(2\pi-0) = \frac{4\pi}{15}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε τον όγκο του χωρίου που ορίζεται από το επίπεδο xy και το ελλειπτικό παραβολοειδές $z = 4-x^2-y^2$.
2. Υπολογίστε $\int\int\int_D(x^2+y^2)dxdydz$, όπου το χωρίο D περιορίζεται από την επιφάνεια $z = (x^2+y^2)/2$ και το επίπεδο $z = 2$.
3. Υπολογίστε $\int\int\int_D z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, όπου $D: z = 1-(x^2+y^2),\ z \geq 0$.
4. Υπολογίστε $\int\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, όπου $D: x^2+y^2 \leq 1$, $z = x^2+y^2,\ z = 0$.

Υπολογισμός τριπλών ολοκληρωμάτων σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Αντικαθιστούμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) με τις σφαιρικές συντεταγμένες (r, t, θ) μέσω του μετασχηματισμού
(M):

$$x = r\cos t \sin\theta, \quad y = r\sin t \sin\theta, \quad z = r\cos\theta, \quad dxdydz = r^2 \sin\theta d\theta dr dt,$$

όπου γενικά

$$t \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi], \quad (x, y, z) \in D, \quad (r, t, \theta) \in D^*$$

και θ είναι η θετική γωνία μεταξύ του άξονα $z'z$ και ακτίνας r και t είναι η θετική γωνία μεταξύ του άξονα $x'x$ και προβολής της ακτίνας r στο επίπεδο (x, y). Τότε

$$\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz = \int\int\int_{D^*} f(r\cos t\sin\theta, r\sin t\sin\theta, r\cos\theta)r^2 \sin\theta d\theta dr dt.$$

Χρήσιμος τύπος:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \qquad (**)$$

Άσκηση 1. *Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα σε σφαιρικές συντεταγμένες*

$$I = \int\int\int_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz, \quad \text{όπου} \quad D: \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9.$$

Λύση: από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι

$$t \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 3], \quad \theta \in [0, \pi].$$

Τότε

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 \left(\int_0^\pi \sqrt{r^2}r^2 \sin\theta d\theta\right) dr\right] dt = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 \left(\int_0^\pi r^3 \sin\theta d\theta\right) dr\right] dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 r^3 \left(\int_0^\pi \sin\theta d\theta\right) dr\right] dt = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 r^3[-\cos\theta]_0^\pi dr\right) dt = -\int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 r^3[\cos\theta]_0^\pi dr\right) dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 r^3[\cos\pi - \cos 0]dr\right) dt = -\int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 r^3(-1-1)dr\right) dt = 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 r^3 dr\right) dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3 dt = 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{3^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) dt = 2\cdot\frac{81}{4}\int_0^{2\pi} dt = \frac{81}{2}[t]_0^{2\pi} = \frac{81}{2}(2\pi - 0) = 81\pi.$$

Άσκηση 2.
Υπολογίστε τον όγκο της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ *με ακτίνα* a.

Λύση: Εφαρμόζουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες $x = r\cos t \sin\theta, \quad y = r\sin t\sin\theta$, $z = r\cos\theta$. Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι

$$0 \le t \le 2\pi, \quad 0 \le r \le a, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Τότε

$$V = \int\int\int_D dxdydz = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^a\left(\int_0^\pi r^2\sin\theta d\theta\right)dr\right]dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^a r^2\left(\int_0^\pi \sin\theta d\theta\right)dr\right]dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^a r^2[-\cos\theta]_0^\pi dr\right]dt = -\int_0^{2\pi}\left[\int_0^a r^2[\cos\theta]_0^\pi dr\right]dt$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a r^2(\cos\pi - \cos 0)dr\right)dt = -\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a r^2(-1-1)dr\right)dt =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a r^2 dr\right)dt = 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a dt = 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{a^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right]dt$$

$$= 2\cdot\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} dt = \frac{2a^3}{3}[t]_0^{2\pi} = \frac{2a^3}{3}(2\pi - 0) = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Υπολογίστε $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\right)dy\right]dx.$
2. Υπολογίστε $\int\int\int_D \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz$, όπου $D: x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

6 ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 1-ου είδους στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$.

Υπολογίζονται με δυο τρόπους:
I. Έστω ότι η L είναι καμπύλη του επιπέδου με εξίσωση $y = \phi(x)$, $x \in [a,b]$, όπου $\phi(x)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση επί του $[a,b]$ και η $f(x,y)$ είναι συνεχής συνάρτηση επί του L. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 1-ου είδους υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f\big(x,\phi(x)\big)\sqrt{1+[\phi'(x)]^2}\,dx. \tag{114}$$

ΙΙ. Έστω ότι η καμπύλη L δίνεται σε παραμετρική μορφή με εξισώσεις: $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2]$ όπου $x(t), \quad y(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις επί του $[t_1, t_2]$ και η $f(x, y)$ είναι συνεχής συνάρτηση επί του L. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 1-ου είδους υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_L f(x, y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \tag{115}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1. Υπολογίστε:

$$I = \int_L ydl,$$

όπου L είναι το τόξο της κυβικής παραβολής $y = x^3$ που συνδέει τα σημεία $A(0, 0)$ και $B(1, 1)$.

Λύση: Χρησιμοποιούμε τον τύπο (114), όπου $\phi(x) = x^3, \quad x \in [0, 1]$. Τότε $(\phi(x))' = 3x^2$ και έτσι έχουμε

$$I = \int_L ydl = \int_0^1 x^3\sqrt{1 + [3x^2]^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x^4}\, x^3dx. \qquad (E1)$$

Θέτω $(M): \quad p = \sqrt{1 + 9x^4} \Rightarrow p^2 = 1 + 9x^4 \Rightarrow$

$d(1 + 9x^4) = dp^2 \Rightarrow (1 + 9x^4)'dx = (p^2)'dp \Rightarrow 36x^3dx = 2pdp \Rightarrow x^3dx = \dfrac{1}{18}pdp$

Αν $x = 0 \overset{(M)}{\Rightarrow} p = 1$. Αν $x = 1 \overset{(M)}{\Rightarrow} p = \sqrt{10}$.

Από την (Ε1) $\Rightarrow$

$$I = \int_1^{\sqrt{10}} p\frac{1}{18}pdp = \frac{1}{18}\int_1^{\sqrt{10}} p^2dp = \frac{1}{18}\Big[\frac{p^3}{3}\Big]_1^{\sqrt{10}} = \frac{1}{54}\big[p^3\big]_1^{\sqrt{10}} = \frac{1}{54}\big(\sqrt{10^3} - 1\big).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Υπολογίστε $\int_L \frac{y}{x} dl$, όπου L είναι το τόξο της παραβολής $y = x^2$, $x \in [0, \sqrt{2}]$.

2. Υπολογίστε $\int_L yx^2 dl$, όπου L είναι το τόξο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$.

3. Υπολογίστε $\int_L (x - y) dl$, όπου L είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $A(0,0)$ και $B(4,3)$.

4. Υπολογίστε $\int_L (x + y) dl$, όπου L είναι το τόξο του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$, $x, y \geq 0$.

5. Υπολογίστε $\int_L x^3 dl$, όπου L είναι το τόξο της κυβικής παραβολής $y = x^3$ που συνδέει τα σημεία $A(0,0)$ και $B(2,8)$.

6. Υπολογίστε $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, όπου L είναι η περιφέρεια: $x = 2(\cos t + t \sin t)$, $y = 2(\sin t - t \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

7. Υπολογίστε $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, όπου L είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $A(0,0)$ και $B(1,2)$.

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 1-ου είδους στο χώρο $\mathbb{R}^3$.

Έστω ότι η καμπύλη L δίνεται σε παραμετρική μορφή με εξισώσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ όπου $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις επί του $[t_1, t_2]$ και η $f(x, y, z)$ είναι συνεχής συνάρτηση επί του L. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 1-ου είδους υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \quad (116)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Υπολογίστε $\int_L (x + y + z) dl$, όπου L είναι η περιφέρια: $z = x^2 + y^2$, $z = 4$,

2. Υπολογίστε $\int_L \sqrt{2y^2 + z^2} dl$, όπου L είναι η περιφέρια: $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t$, $z = \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$,

3. Υπολογίστε $\int_L \sqrt{2x^2 + z^2} dl$, όπου L είναι η περιφέρια: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y = x$. (Χρησιμοποιήστε τις σφαιρικές συντεταγμέννες.)

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 2-ου είδους.

Στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ υπολογίζονται με δυο τρόπους:

I. Έστω ότι η L είναι καμπύλη του επιπέδου με εξίσωση $y = \phi(x)$, $x \in [a, b]$, όπου $\phi(x)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση επί του $[a, b]$ και $P(x, y)$, $Q(x, y)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις επί του L. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 2-ου είδους υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \left[P\big(x, \phi(x)\big) + Q\big(x, \phi(x)\big)\phi'(x)\right] dx. \tag{117}$$

II. Έστω ότι η καμπύλη L δίνεται σε παραμετρική μορφή με εξισώσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ όπου $x(t)$, $y(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις επί του $[t_1, t_2]$ και $P(x, y)$, $Q(x, y)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις επί του L. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 2-ου είδους υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \left[P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\right] dt. \tag{118}$$

Αναλόγως υπολογίζονται **στο χώρο** $\mathbb{R}^3$.

Έστω ότι η καμπύλη L δίνεται σε παραμετρική μορφή με εξισώσεις: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ όπου $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις επί του $[t_1, t_2]$ και έστω ότι $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο, όπου $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις επί του L. Τότε η καμπύλη L είναι το σύνολο των περάτων διανυσμάτων θέσεων $\vec{r} = \vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, $d\vec{r} = \big(dx(t), dy(t), dz(t)\big) = (dx, dy, dz)$ και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 2-ου είδους υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \tag{119}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\right] dt$$

ΘΕΩΡΗΜΑ του GREEN

Έστω ότι οι συναρτήσεις $P(x, y)$, $Q(x, y)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες σε απλό χωρίο D και $L = \partial D$ είναι το σύνορο του D που είναι μια κλειστή καμπύλη που περικλείει το χωρίο D. Τότε ισχύει ο τύπος του GREEN:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\int_D \Big[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\Big] dxdy,$$

όπου αριστερά το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπολογίζεται αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Το σύμβολο $\oint$ χρησιμοποιείται μόνο όταν η καμπύλη L είναι κλειστή.

ΑΣΚΗΣΗ 1. Υπολογίστε:

$$\int_L xy^2dx - x^3ydy, \quad \text{όπου}$$

L είναι το το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $A(0,0)$ και $B(2,4)$.
Λύση: Η εξίσωση ευθείας που περνάει απ τα δυο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad \text{Για} \quad A(0,0),\, B(2,4) \Rightarrow \frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{4-0} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 2x.$$

Άρα $y = \phi(x) = 2x$ όπου $x \in [0,2]$. Τώρα χρησιμοποιούμε τον τύπο (117):

$$\begin{aligned}
&\int_L xy^2dx - x^3ydy = \int_0^2 \big[x(2x)^2 - x^3(2x)(2x)'\big]dx = \int_0^2 (4x^3 - 4x^4)dx \\
&=4\int_0^2 x^3dx - 4\int_0^2 x^4dx = 4\Big[\frac{x^4}{4}\Big]_0^2 - 4\Big[\frac{x^5}{5}\Big]_0^2 \\
&=\big[x^4\big]_0^2 - \frac{4}{5}\big[x^5\big]_0^2 = (16-0) - \frac{4}{5}(32-0) = -\frac{48}{5}.
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2. Υπολογίστε:

$$\oint_L xdy + ydx,$$

όπου L είναι το τόξο της περιφέρειας $x^2+y^2=1$.
Λύση:

$$\oint_L xdy + ydx = \oint_L ydx + xdy.$$
$$P(x,y) = y, \quad Q(x,y) = x,$$
$$P'_y(x,y) = (y)'_y = 1, \quad Q'_x(x,y) = (x)'_x = 1.$$

Άρα

$$\oint_L xdy + ydx = \int\int_D (1-1)dxdy = \int\int_D 0dxdy = 0.$$

Ανεξαρτησία του Επικαμπύλιου Ολοκληρώματος Β′ είδους από το δρόμο ολοκλήρωσης

Έστω ότι οι συναρτήσεις $P(x,y)$, $Q(x,y)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες σε απλό χωρίο D και $L = \widehat{AB}$ είναι ένας δρόμος (καμπύλη) με αρχή $A(x_1,y_1)$ και πέρας $B(x_2,y_2)$, που ανήκει στο D και έστω ότι ηπάρχει μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $u(x,y)$ τέτοια ώστε το ολικό διαφορικό της

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{120}$$

$$\text{ή} \qquad Q'_x = P'_y. \tag{121}$$

Τότε ισχύει ο τύπος :

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1), \tag{122}$$

δηλαδή το Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Β′ είδους δεν εξαρτάται από το δρόμο ολοκλήρωσης L, αλλά μόνο από τα σημεία A και B.

ΑΣΚΗΣΗ 1. Υπολογίστε:

$$\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2},$$

όπου L είναι το τόξο της παραβολής $y = x^2$ που συνδέει τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,4)$.

Λύση:

$$\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2} = \int_L -\frac{ydx}{x^2} + \frac{dy}{x}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει ο τύπος (120):

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)'_x dx + \left(\frac{y}{x}\right)'_y dy = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = -\frac{ydx}{x^2} + \frac{dy}{x}.$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο (122) με

$$u(x,y) = \frac{y}{x}, \quad x_1 = 1,\, y_1 = 1, \quad x_2 = 2,\, y_2 = 4 :$$

$$\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2} = \int_L -\frac{ydx}{x^2} + \frac{dy}{x} = \frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1} = \frac{4}{2} - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Υπολογίστε $\int_L xydx + ydy$, όπου L είναι το τόξο της παραβολής $y = x^2$ που συνδέει τα σημεία $A(0,0)$ και $B(1,1)$.
2. Υπολογίστε $\int_L y^2dx + 2yxdy$, όπου L είναι το τόξο της παραβολής $y = x^2$ που συνδέει τα σημεία $A(0,0)$ και $B(2,4)$.
3. Υπολογίστε $\int_L \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$, όπου L είναι η περιφέρεια: $x^2 + y^2 = 25$.
4. Υπολογίστε $\int_L y^3dx - yxdy$, όπου L είναι το τόξο της κυβικής παραβολής $y = x^3$ που συνδέει τα σημεία $A(0,0)$ και $B(2,8)$.
5. Υπολογίστε $\int_L xy^2dx + yzdy + xzdz$, όπου L είναι η περιφέρεια: $x = 2\cos t,\, y = 2\sin t,\, z = 1$.

7 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (Δ.Ε.). ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ.

Διαφορική είναι μια εξίσωση που περιέχει μια ή περισσότερες παραγώγους ή διαφορικά. Οι Δ.Ε. λέγονται **Συνήθεις Δ.Ε.** όταν οι άγνωστες συναρτήσεις είναι μιας μεταβλητής και **Μερικές Δ.Ε.** όταν οι άγνωστες συναρτήσεις είναι πολλών μεταβλητών.

Τάξη μιας Δ.Ε. είναι η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου που εμφανίζεται στη Δ.Ε. π.χ. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ είναι Συνήθεις Δ.Ε. 1-ης τάξης, $y'' = f(x,y,y')$ είναι Συνήθεις Δ.Ε. 2-ης τάξης σε **κανονική μορφή ή λυμένη της μορφή**, $F(x,y,y',y'',y''') = 0$ είναι Συνήθεις Δ.Ε. 3-ης τάξης σε **πεπλεγμένη μορφή**.

Το γράφημα κάθε λύσης λέγεται **ολοκληρωτική καμπύλη**.

Συνήθως οι Δ.Ε. έχουν άπειρες λύσεις. Το πρόβλημα της ευρέσεως μιας λύσης της **Δ.Ε. 1-ης τάξης** $y' = f(x,y)$ που ικανοποεί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$ ονομάζεται **Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ.)**.

Για τη **Δ.Ε. 2-ας τάξης** $F(x,y,y',y'') = 0$ το **Π.Α.Τ.** περιέχει δυο αρχικές συνθήκες: $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$.

Μια συνάρτηση $y = \phi(x,c)$ όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά, λέγεται **γενική λύση (Γ.Λ.)** της Δ.Ε. $F(x,y,y') = 0$ αν η συνάρτηση αυτή επαληθεύει τη Δ.Ε. $F(x,y,y') = 0$ δηλαδή αν ισχύει $F\big(x,\phi(x,c),\phi'(x,c)\big) \equiv 0$.

Μια συνάρτηση $\Phi(x,y,c) = 0$ λέγεται **γενικό Ολοκλήρωμα (Γ.Ο.)** της Δ.Ε. $F(x,y,y') = 0$ εαν επαληθεύει αυτήν τη Δ.Ε.

Αναλόγως ορίζονται η Γ.Λ. $y = \phi(x,c_1,c_2)$ και το Γ.Ο. $\Phi(x,y,c_1,c_2) = 0$ της Δ.Ε. 2-ης τάξης $F(x,y,y',y'') = 0$, όπου c_1, c_2 δυο αυθαίρετες σταθερές.

Η λύση που προκύπτει απ τη γενική λύση για συκγεκριμένες τιμές των σταθερών ονομάζεται **μερική λύση (Μ.Λ.)**.

Μια λύση που δεν προκύπτει απ τη γενική λύση λέγεται **ιδιάζουσα λύση (Ι.Λ.)**.

Ο αριθμός $x = x_0$ είναι **ρίζα πολλαπλότητας** s του πολυωνύμου $P_n(x)$ βαθμού n αν $P_n(x) = (x - x_0)^s P_{n-s}(x)$, όπου $P_{n-s}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n - s$.

7.1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

Η Δ.Ε.

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \tag{123}$$

λέγεται διαφ. εξ. χωριζόμενων μεταβλητών και λύνεται ως εξής:
Από την (123) $\Rightarrow$

$$f_1(x)g_1(y)dx = -f_2(x)g_2(y)dy \quad \Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy \quad \Rightarrow \tag{124}$$

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy + c, \tag{125}$$

όπου μετά την ολοκλήρωση λαμβάνουμε τη Γενική Λύση ή το Γενικό Ολοκλήρωμα της Δ.Ε.

ΑΣΚΗΣΗ 1. Να βρεθεί το Γ.Ο. της Δ.Ε.

$$(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\,)dy + (\sqrt{xy} + \sqrt{y}\,)dx = 0 \tag{126}$$

Λύση : Από την (126) επειδή $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\,\sqrt{y} \Rightarrow$

$$\sqrt{x}(\sqrt{y} - 1)dy = -\sqrt{y}(\sqrt{x} + 1)dx \Rightarrow \int \frac{\sqrt{y} - 1}{\sqrt{y}}dy = -\int \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}dx$$

$$\int \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\Big)dy = -\int \Big(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\Big)dx \Rightarrow \int \big(1 - y^{-1/2}\big)dy = -\int \big(1 + x^{-1/2}\big)dx \Rightarrow$$

$$y - \frac{y^{-1/2+1}}{-1/2+1} = -x - \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + c \Rightarrow$$

$$y - \frac{y^{1/2}}{1/2} = -x - \frac{x^{1/2}}{1/2} + c \Rightarrow$$

$$y - 2\sqrt{y} = -(x + 2\sqrt{x}) + c.$$

που είναι το Γενικό Ολοκλήρωμα (Γ.Ο.) της (126).

ΑΣΚΗΣΗ 2. Να βρεθεί το Γ.Ο. της Δ.Ε.

$$ydx - \ln y dy = 0. \tag{127}$$

Λύση : Από την (127) $\Rightarrow$

$$ydx = \ln y dy \Rightarrow dx = \frac{\ln y}{y}dy \Rightarrow \int dx = \int \frac{\ln y}{y}dy \Rightarrow x = \int \frac{\ln y}{y}dy. \tag{128}$$

Με αντικατάσταση $z = \ln y$ λαμβάνουμε $dz = d(\ln y) = (\ln y)'dy = \frac{1}{y}dy = \frac{dy}{y}$ και τότε βρίσκουμε

$$\int \frac{\ln y}{y}dy = \int \ln y\,\frac{dy}{y} = \int zdz = \frac{z^2}{2} + c = \frac{(\ln y)^2}{2} + c = \frac{\ln^2 y}{2} + c.$$

Τότε από την (128) λαμβάνουμε το Γ.Ο. της Δ.Ε. (127).

$$x = \frac{\ln^2 y}{2} + c.$$

$$y' = f(ax + by + c)$$

$$z = ax + by + c \quad \Rightarrow z' = a + by'$$

ΑΣΚΗΣΗ 3. Να βρεθεί το Γ.Ο. της Δ.Ε.

$$y\,' = \cos(x - y - 1). \tag{129}$$

Λύση : Με αντικατάσταση $z = x - y - 1$ λαμβάνουμε $z' = (x - y - 1)' = 1 - y' \Rightarrow z' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - z'$.

Τότε από την (129) $\Rightarrow$

$$1 - z' = \cos z \Rightarrow z' = 1 - \cos z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \cos z \Rightarrow \frac{dz}{1 - \cos z} = dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int dx \Rightarrow x = \int \frac{dz}{1 - \cos z}. \tag{130}$$

Από τον τύπο

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \Rightarrow 1 - \cos z = 2\sin^2 \frac{z}{2}$$

και τότε Με αντικατάσταση $p = \frac{z}{2}$ βρίσκουμε

$$\int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int \frac{dz}{2\sin^2 \frac{z}{2}} = \int \frac{d\frac{z}{2}}{\sin^2 \frac{z}{2}} = \int \frac{dp}{\sin^2 p} = -\cot p + c$$

$$= -\cot \frac{z}{2} + c = -\cot \frac{x - y - 1}{2} + c.$$

Τότε από την (130) λαμβάνουμε το Γ.Ο. της Δ.Ε. (129).

$$x = -\cot \frac{x - y - 1}{2} + c.$$

Ασκήσεις.

Να βρεθούν οι γενικές λύσεις (Γ.Λ.) ή τα γενικά ολοκληρώματα των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:

1. $e^x \sin^3 y dx + (1 + e^{2x}) \cos y dy = 0$
2. $e^{1+x^2} \tan y dx - \frac{e^{2x}}{x-1} dy = 0$

3. $\frac{y}{x}dx + \frac{\ln x}{2\sqrt{y}}dy = 0$

4. $\big(1+e^x\big)yy' = e^x$

5. $e^y(y'-1) = -1$

6. $3y' + y = 1/y^2$

7. $y'(x^2y + xy) = 1$

8. $xy'\ln(y+2) = y+2$

9. $\ln(\cos y)dx + x\tan y dy = 0.$

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

10. $e^{x+y}dx + (e^y+1)dy = 0, \quad y(0) = 0$

11. $y\ln y dx + xdy = 0, \quad y(1) = 2$

12. $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1+\sin y}} + y' = 0, \quad y(\pi/4) = 0$

Χρήσιμοι τύποι

$$\ln f^a(x) = a\ln f(x), \qquad \text{για} \quad f(x) > 0, \tag{1}$$

$$e^{\ln g(x)} = g(x), \qquad \text{για} \quad g(x) > 0, \tag{2}$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \qquad \text{για} \quad a \neq -1, \tag{3}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c. \tag{4}$$

7.2 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης λέγονται οι εξισώσεις τύπου

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{131}$$

Αν οι συναρτήσεις $p(x), g(x)$ είναι συνεχείς, τότε η γενική λύση της (131) δίνεται από τον τύπο

$$y = e^{-\int p(x)dx}\Big[c + \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx\Big] \tag{132}$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

***Άσκηση* 1.** Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$xy' + 4y = x^5, \qquad \text{όπου } x \neq 0 \tag{133}$$

Λύση : Από την (133)

$$\Rightarrow \quad \frac{xy'+4y}{x} = \frac{x^5}{x} \Rightarrow y' + \frac{4}{x}y = x^4.$$

Τότε λόγω των (131) και (132) θα έχουμε αντίστοιχα $p(x) = \frac{4}{x}$, $\qquad g(x) = x^4$ και

$$\begin{aligned} y =& e^{-\int \frac{4}{x}dx}\Big(c + \int x^4 e^{\int \frac{4}{x}dx}dx\Big) = e^{-4\ln|x|}\Big(c + \int x^4 e^{4\ln|x|}dx\Big) \\ =& e^{\ln x^{-4}}\Big(c + \int x^4 e^{\ln|x|^4}dx\Big) = x^{-4}\Big(c + \int x^4 x^4 dx\Big) \\ =& x^{-4}\Big(c + \int x^8 dx\Big) = x^{-4}\Big(c + \frac{x^9}{9}\Big). \end{aligned}$$

Αρα η γενική λύση είναι

$$y = x^{-4}\Big(c + \frac{x^9}{9}\Big).$$

***Άσκηση* 2.** Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$2y' + 4y = e^{-3x} \tag{134}$$

Λύση : Από την (134)$\Rightarrow$ $\qquad y' + 2y = \frac{1}{2}e^{-3x}$ $\qquad$ Τότε λόγω των (131) και (132) θα έχουμε αντίστοιχα $\quad p(x) = 2, \qquad g(x) = \frac{1}{2}e^{-3x}$ και

$$\begin{aligned} y =& e^{-\int 2dx}\big(c + \int \frac{1}{2}e^{-3x}e^{\int 2dx}dx\big) \\ =& e^{-2x}\Big(c + \frac{1}{2}\int e^{-3x}e^{2x}dx\Big) \\ =& e^{-2x}\Big(c + \frac{1}{2}\int e^{-x}dx\Big) \\ =& e^{-2x}\Big[c + \frac{1}{2}(-e^{-x})\Big]. \end{aligned}$$

Αρα η γενική λύση είναι

$$y = e^{-2x}\Big(c - \frac{1}{2}e^{-x}\Big).$$

***Άσκηση* 3.** Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y' + y\cos x = e^{-\sin x} \tag{135}$$

Λύση : Από την (135) λόγω των (131) και (132) θα έχουμε αντίστοιχα
$p(x) = \cos x, \qquad g(x) = e^{-\sin x} \qquad$ και

$$\begin{aligned} y =& e^{-\int \cos x dx}\Big(c + \int e^{-\sin x} e^{\int \cos x dx} dx\Big) \\ =& e^{-\sin x}\Big(c + \int e^{-\sin x} e^{\sin x} dx\Big) \\ =& e^{-\sin x}\Big(c + \int 1 dx\Big) = e^{-\sin x}(c + x). \end{aligned}$$

Αρα η γενική λύση είναι

$$y = e^{-\sin x}(c + x).$$

Χρήσιμος τύπος:

$$x^a x^b = x^{a+b}, \qquad x^a x^{-b} = x^{a-b}, \qquad x^0 = 1, \qquad \int dx = x + c,$$

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c \tag{$*$}$$

$$d\cos 2x = (\cos 2x)' dx = -\sin 2x (2x)' dx = -2\sin 2x dx \quad \Rightarrow$$

$$d\cos 2x = -2\sin 2x dx \quad \Rightarrow \quad \sin 2x dx = -\frac{1}{2} d\cos 2x.$$

$$d\sin x = (\sin x)' dx = \cos x dx$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} = \frac{u^{-1}}{-1} = -u^{-1} = -\frac{1}{u}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

Άσκηση 4. Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y' \sin 2x = 4(y + \sin x) \qquad \text{όπου } \sin 2x \neq 0 \tag{136}$$

Λύση : Από την (136) $\Rightarrow$

$$y' \sin 2x - 4y = 4\sin x \quad \Rightarrow \quad \frac{y' \sin 2x}{\sin 2x} - \frac{4y}{\sin 2x} = \frac{4\sin x}{\sin 2x} \quad \Rightarrow$$

$$y' - \frac{4}{\sin 2x} y = \frac{4\sin x}{\sin 2x}$$

ή λόγω των $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, (131) και (132) θα έχουμε αντίστοιχα
$p(x) = \frac{-4}{\sin 2x}$, $g(x) = \frac{4\sin x}{\sin 2x} = \frac{2}{\cos x}$ και

$$\begin{aligned}
y =& e^{-\int(-\frac{4}{\sin 2x})dx}\Big(c + \int \frac{2}{\cos x}e^{\int \frac{-4}{\sin 2x}dx}dx\Big)\\
=& e^{\int \frac{4\sin 2x}{\sin^2 2x}dx}\Big(c + \int \frac{2}{\cos x}e^{-\int \frac{4\sin 2x}{\sin^2 2x}dx}dx\Big)\\
=& e^{-2\int \frac{d\cos 2x}{1-\cos^2 2x}}\Big(c + \int \frac{2}{\cos x}e^{2\int \frac{d\cos 2x}{1-\cos^2 2x}}dx\Big)\\
=& e^{-\ln\left|\frac{\cos 2x+1}{\cos 2x-1}\right|}\Big(c + \int \frac{2}{\cos x}e^{\ln\left|\frac{\cos 2x+1}{\cos 2x-1}\right|}dx\Big)\\
=& \Big|\frac{\cos 2x+1}{\cos 2x-1}\Big|^{-1}\Big(c + \int \frac{2}{\cos x}\Big|\frac{\cos 2x+1}{\cos 2x-1}\Big|dx\Big)\\
=& \Big|\frac{\cos 2x-1}{\cos 2x+1}\Big|\Big(c + \int \frac{2}{\cos x}\Big|\frac{\cos^2 x-\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}\Big|dx\Big)\\
=& \Big|\frac{-2\sin^2 x}{2\cos^2 x}\Big|\Big(c + \int \frac{2}{\cos x}\Big|\frac{2\cos^2 x}{-2\sin^2 x}\Big|dx\Big)\\
=& \tan^2 x\Big(c + 2\int \frac{\cos^2 x}{\cos x\sin^2 x}dx\Big) = \tan^2 x\Big(c + 2\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}\Big)\\
=& \tan^2 x\Big(c + 2\int \frac{d\sin x}{\sin^2 x}\Big) = \tan^2 x\Big[c + 2\int (\sin x)^{-2}d\sin x\Big] = \tan^2 x\Big[c + 2\frac{(\sin x)^{-1}}{-1}\Big]
\end{aligned}$$

Αρα η γενική λύση είναι

$$y = \Big(c - \frac{2}{\sin x}\Big)\tan^2 x.$$

Άσκηση 5. Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.:

$$y' + y\tan x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{όπου} \quad \cos x > 0 \tag{137}$$

Λύση : Από την (137) λόγω των (131) και (132) θα έχουμε αντίστοιχα
$p(x) = \tan x$, $g(x) = \frac{1}{\cos x}$ και

$$\begin{aligned}
y =& e^{-\int \tan x dx}\Big(c + \int \frac{1}{\cos x}e^{\int \tan x dx}dx\Big)\\
=& e^{-\int \frac{(-\cos x)'}{\cos x}dx}\Big(c + \int \frac{1}{\cos x}e^{\int \frac{(-\cos x)'}{\cos x}dx}dx\Big)\\
=& e^{\ln|\cos x|}\Big(c + \int \frac{1}{\cos x}e^{-\ln|\cos x|}dx\Big)\\
=& \cos x\Big(c + \int \frac{1}{\cos x}\frac{1}{\cos x}dx\Big) = \cos x(c + \tan x) = c\cos x + \sin x
\end{aligned}$$

Αρα η γενική λύση είναι

$$y = c\cos x + \sin x.$$

Άσκηση 6. Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.:

$$(y^4+2x)y\,'=y, \quad y>0. \tag{138}$$

Λύση : Από την (138) λόγω της σχέσης $y'=\frac{dy}{dx} \Rightarrow$

$$(y^4+2x)\,\frac{dy}{dx}=y \;\Rightarrow\; \frac{y^4+2x}{y}=\frac{dx}{dy} \quad\Rightarrow\quad x'(y)=\frac{y^4}{y}+\frac{2x}{y} \quad\Rightarrow$$

$$x'-\frac{2}{y}x=y^3,$$

που είναι μια γραμμική εξίσωση ως προς x με $p(y)=-\frac{2}{y}, \quad g(y)=y^3$. Εφαρμόζοντας τον τύπο (132), όπου τα x και y θα αλλάξουν θέσεις, θα λάβουμε

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int(-\frac{2}{y})dy}\left[c+\int y^3 e^{\int \frac{2}{y}dy}dy\right] \\ &= e^{-\int(-\frac{2}{y})dy}\left[c+\int y^3 e^{\int \frac{2}{y}dy}dy\right] \\ &= e^{2\int \frac{dy}{y}}\left[c+\int y^3 e^{-2\int \frac{dy}{y}}dy\right] \\ &= e^{2\ln y}\left[c+\int y^3 e^{-2\ln y}dy\right] \end{aligned}$$

$$=e^{\ln y^2}\left[c+\int y^3 e^{\ln y^{-2}}dy\right]=y^2[c+\int y^3y^{-2}]=y^2[c+\int ydy=y^2[c+\frac{y^2}{2}].$$

Άρα

$$x=y^2[c+\frac{y^2}{2}]$$

είναι το Γ.Ο.

Άλυτες Ασκήσεις: *Να βρεθούν οι γενικές λύσεις (Γ.Λ.) ή τα γενικά ολοκληρώματα των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:*

1. $y\,'+y=e^x$

2. $y\,'+2y=e^{-x}$

3. $y\,'+y\sin x=e^{-\cos x}$

4. $y' + y\cot x = 1/\sin x$

5. $xy' + 4y = \frac{\sin x}{x^3}, \quad x > 0$

6. $y' = y(e^x + \ln y)$ με αντικατάσταση $z = \ln y$

7. $y^2 y' + 1 = (x-1)e^{-y^3/3}$ με αντικατάσταση $z = e^{-y^3/3}$

8. $y' - \tan y = \frac{e^x}{\cos y}$ με αντικατάσταση $z = \cos y$

9. $y'(x + y^2) = y, \quad y > 0$

10. $y' = \frac{y}{x+y^2}, \quad y > 0$

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

11. $y' \cos^2 x = \tan x - y, \quad y(0) = 0$

Χρήσιμοι τύποι

$$\ln f^a(x) = a \ln f(x), \qquad \text{για} \quad f(x) > 0, \tag{1}$$

$$e^{\ln g(x)} = g(x), \qquad \text{για} \quad g(x) > 0, \tag{2}$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \qquad \text{για} \quad a \neq -1, \tag{3}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c. \tag{4}$$

$$(y^a(x))' = ay^{a-1}(x)y'(x), \quad y(x) = y.$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

$$\sqrt{y} = y^{1/2}, \quad \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

7.3. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BERNOULLI

Οι διαφορικές εξισώσεις (Δ.Ε.) τύπου

$$y' + p(x)y = g(x)y^m, \quad m \neq 1 \tag{139}$$

λέγονται διαφορικές εξισώσεις (Δ.Ε.) Bernoulli. Μετατρέπονται σε γραμμικές Δ.Ε. 1-ης τάξης με τον εξής τρόπο : απ την (139) $\Rightarrow$

$$y^{-m}y' + p(x)yy^{-m} = g(x)y^m y^{-m} \quad \Rightarrow$$

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = g(x) \tag{140}$$

Θέτω

$$z = y^{1-m} \Rightarrow z' = (1-m)y^{-m}y' \Rightarrow y^{-m}y' = \frac{z'}{1-m}.$$

Τότε απ την (140) $\Rightarrow$

$$\frac{z'}{1-m} + p(x)z = g(x) \Rightarrow$$

$$z' + (1-m)p(x)z = (1-m)g(x) \tag{141}$$

που είναι γραμμική Δ.Ε. 1-ης τάξης με

$$p_1(x) = (1-m)p(x), \quad g_1(x) = (1-m)g(x).$$

Έστω η γενική λύση (Γ.Λ.) της είναι η $z = \Phi(x,c)$, όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Τότε λόγω της αντικατάστασης $z = y^{1-m}$ το Γ.Ο. της (139) είναι η $y^{1-m} = \Phi(x,c)$.

Άσκηση 1.

$$(1+x^2)y' - 2xy = 4\sqrt{y(1+x^2)}. \tag{142}$$

Λύση : από την (142) $\Rightarrow$

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{4\sqrt{1+x^2}\sqrt{y}}{1+x^2} \qquad \text{ή} \qquad y^{-\frac{1}{2}}y' - \frac{2x}{1+x^2}yy^{-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\frac{4}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Rightarrow$$

$$y^{-\frac{1}{2}}y' - \frac{2x}{1+x^2}y^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{143}$$

Κάνουμε την αντικατάσταση

$$z = y^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1}y' \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' \quad \Rightarrow y^{-\frac{1}{2}}y' = 2z' \tag{144}$$

$(143) \overset{(144)}{\Rightarrow} \quad 2z' - \frac{2x}{1+x^2}z = \frac{4}{\sqrt{1+x^2}}$ ή

$$z' - \frac{x}{1+x^2}z = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \tag{145}$$

είναι γραμμική εξίσωση 1-ης τάξης ως προς z, όπου

$$p(x) = -\frac{x}{1+x^2}, \qquad g(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
z =& e^{-\int(-\frac{x}{1+x^2})dx}\Big(c + \int \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} e^{\int(-\frac{x}{1+x^2})dx} dx\Big) \\
=& e^{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx}\Big(c + 2\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx} dx\Big) \\
=& e^{\frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx}\Big(c + 2\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx} dx\Big) \\
=& e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}\Big(c + 2\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} dx\Big) \\
=& e^{\ln(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\Big(c + 2\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\ln(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}} dx\Big) \\
=& (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\Big(c + 2\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx\Big) \\
=& \sqrt{1+x^2}\Big(c + 2\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx\Big) \\
=& \sqrt{1+x^2}\Big(c + 2\int \frac{dx}{1+x^2}\Big) = \sqrt{1+x^2}\,(c + 2\arctan x).
\end{aligned}$$

Άρα

$$z = \sqrt{1+x^2}\,(c + 2\arctan x)$$

που με την (144) δίνει

$$y^{1/2} = \sqrt{1+x^2}\,(c + 2\arctan x)$$

το γενικό ολοκλήρωμα της (142). Τότε η Γ.Λ είναι

$$y = (1+x^2)(c + 2\arctan x)^2.$$

Άσκηση 2.

$$y' + y\cos x = \frac{\cos x}{y^3}. \tag{146}$$

Λύση : από την (146) $\Rightarrow$

$$y^3 y' + y^4 \cos x = \cos x. \tag{147}$$

Θέτουμε

$$z = y^4 \quad \Rightarrow z' = 4y^3 y' \quad \Rightarrow y^3 y' = \frac{1}{4} z'. \tag{148}$$

$(147)\overset{(148)}{\Rightarrow}$

$$\frac{1}{4}z' + z\cos x = \cos x \quad \Rightarrow$$
$$z' + (4\cos x)z = 4\cos x \tag{149}$$

είναι γραμμική εξίσωση 1-ης τάξης ως προς z, όπου

$$p(x) = 4\cos x, \qquad g(x) = 4\cos x.$$

Τότε

$$z = e^{-\int 4\cos x dx}\Big(c + \int 4\cos x\, e^{\int 4\cos x dx}dx) = e^{-4\sin x}\Big(c + \int 4\cos x\, e^{4\sin x}dx.\Big) \tag{$*$}$$

θέτω

$$u(x) = e^{4\sin x} \Rightarrow u'(x) = \left(e^{4\sin x}\right)' = e^{4\sin x}(4\sin x)' = 4\cos x e^{4\sin x}.$$

Άρα

$$u'(x) = 4\cos x e^{4\sin x} \quad \Rightarrow$$
$$\int 4\cos x\, e^{4\sin x}dx = \int u'(x)dx = u(x) = e^{4\sin x}.$$

Με αντικατάσταση στην (*) λαμβάνουμε

$$z = e^{-4\sin x}\left(c + e^{4\sin x}\right).$$

Τότε

$$z = ce^{-4\sin x} + 1$$

που με την (148) δίνει

$$y^4 = ce^{-4\sin x} + 1$$

το γενικό ολοκλήρωμα της (146).

Άσκηση 3. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

$$y' + \frac{2}{x}y = -x^9y^5, \qquad \text{όπου} \qquad y(-1) = 2. \tag{150}$$

Λύση : από την (150) $\Rightarrow$

$$y^{-5}y' + \frac{2}{x}yy^{-5} = -x^9y^5y^{-5} \quad \Rightarrow$$
$$y^{-5}y' + \frac{2}{x}y^{-4} = -x^9. \tag{151}$$

Κάνουμε την αντικατάσταση

$$z = y^{-4} \Rightarrow z' = -4y^{-4-1}y' = -4y^{-5}y' \quad \Rightarrow z' = -4y^{-5}y' \Rightarrow$$

$$y^{-5}y' = -\frac{1}{4}z'. \tag{152}$$

Από $(151) \overset{(152)}{\Rightarrow} \quad -\frac{1}{4}z' + \frac{2}{x}z = -x^9 \qquad$ ή

$$z' - \frac{8}{x}z = 4x^9, \tag{153}$$

που είναι γραμμική εξίσωση 1-ης τάξης ως προς z, όπου

$$p(x) = -\frac{8}{x}, \qquad g(x) = 4x^9.$$

Τότε

$$z = e^{-\int(-\frac{8}{x})dx}\Big(c + \int 4x^9 e^{\int(-\frac{8}{x})dx}dx\Big) = e^{8ln|x|}\Big(c + 4\int x^9 e^{-8ln|x|}dx\Big)$$

$$= e^{ln|x|^8}\Big(c + \int 4x^9 e^{ln|x|^{-8}}dx\Big) = |x|^8\Big(c + 4\int x^9 \frac{1}{|x|^8}dx\Big)$$

$$= x^8\Big(c + 4\int \frac{x^9}{x^8}dx\Big) = x^8\left(c + 4\int xdx\right) = x^8(c + 2x^2).$$

Άρα $\quad z = x^8(c + 2x^2), \quad$ που με την $z = y^{-4}$, δίνει

$$y^{-4} = x^8(c + 2x^2) \tag{**}$$

το γενικό ολοκλήρωμα της (150). Θα βρούμε μερικό ολοκλήρωμα, που επαληθεύει την αρχική συνθήκη $\quad y(-1) = 2.$
Αντικαθιστούμε στο γενικό ολοκλήρωμα (**) τις τιμές $\; x = -1, \quad y = 2$ και θα έχουμε

$$2^{-4} = (-1)^8[c + 2(-1)^2] \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{16} = c + 2 \quad \Rightarrow c = -\frac{31}{16},$$

που με αντικατάσταση στο (**) μας δίνει το μερικό ολοκλήρωμα

$$y^{-4} = x^8\Big(2x^2 - \frac{31}{16}\Big).$$

Άσκηση 4.

$$6y^5y' + y^6\sin x = 2\sin x. \tag{154}$$

Θέτουμε

$$z = y^6 \quad \Rightarrow z' = 6y^5 y'. \tag{155}$$

$(154) \overset{(155)}{\Rightarrow}$

$$z' + (\sin x)z = 2\sin x, \tag{156}$$

που είναι γραμμική εξίσωση 1-ης τάξης ως προς z, όπου
$p(x) = \sin x, \qquad g(x) = 2\sin x.$ Τότε

$$\begin{aligned} z =& e^{-\int \sin x dx}\Big(c + \int 2\sin x\, e^{\int \sin x dx} dx\Big) \\ =& e^{\cos x}\Big(c + 2\int \sin x\, e^{-\cos x} dx\Big) = e^{\cos x}\Big(c + 2\int e^{-\cos x}\sin x dx\Big) \\ =& e^{\cos x}\Big(c + 2\int e^{-\cos x} d(-\cos x)\Big) = e^{\cos x}\Big(c + 2e^{-\cos x}\Big). \end{aligned}$$

Άρα

$$z = e^{\cos x}(c + 2e^{-\cos x})$$

που με την (155), δίνει

$$y^6 = ce^{\cos x} + 2$$

το γενικό ολοκλήρωμα της (154).

Άσκηση 5.

$$8y' - \frac{8y}{4+x} = (4+x)^5 y^3. \tag{157}$$

Λύση : από την (157) $\Rightarrow$

$$8y^{-3}y' - \frac{8y^{-2}}{4+x} = (4+x)^5. \tag{158}$$

Θέτουμε

$$z = y^{-2} \quad \Rightarrow z' = -2y^{-3}y' \quad \Rightarrow y^{-3}y' = -\frac{1}{2}z'. \tag{159}$$

$(158) \overset{(159)}{\Rightarrow} \quad -4z' - \frac{8z}{4+x} = (4+x)^5$ ή

$$z' + \frac{2z}{4+x} = -\frac{1}{4}(4+x)^5$$

που είναι γραμμική εξίσωση 1-ης τάξης, όπου

$$p(x) = \frac{2}{4+x}, \qquad g(x) = -\frac{1}{4}(4+x)^5.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
z =& e^{-\int(\frac{2}{4+x})dx}\left[c+\int\left(-\frac{1}{4}\right)(4+x)^5 e^{2\int\frac{2}{4+x}dx}dx\right]\\
=& e^{-2\int(\frac{(4+x)'}{4+x})dx}\left[c-\frac{1}{4}\int(4+x)^5 e^{2\int\frac{(4+x)'}{4+x}dx}dx\right]\\
=& e^{-2ln|4+x|}\left[c-\frac{1}{4}\int(4+x)^5\, e^{2ln|4+x|}dx\right]\\
=& e^{ln|4+x|^{-2}}\left[c-\frac{1}{4}\int(4+x)^5\,(4+x)^2dx\right]=\\
=& (4+x)^{-2}\left[c-\frac{1}{4}\int(4+x)^7dx\right]=(4+x)^{-2}\left[c-\frac{1}{4}\frac{(4+x)^8}{8}\right].
\end{aligned}$$

Άρα

$$z=(4+x)^{-2}\Big[c-\frac{(4+x)^8}{32}\Big]$$

ή λόγω της (159)

$$y^{-2}=(4+x)^{-2}\Big[c-\frac{(4+x)^8}{32}\Big]$$

που είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (157).

Άσκηση 6.

$$xy'=2y-3xe^{x^9}y^5. \tag{160}$$

Λύση : από την (160) $\Rightarrow$

$$y^{-5}y'-\frac{2}{x}y^{-4}=-3e^{x^9}. \tag{161}$$

Θέτουμε

$$z=y^{-4}\quad\Rightarrow z'=-4y^{-5}y'\quad\Rightarrow y^{-5}y'=-\frac{1}{4}z'. \tag{162}$$

$(161)\overset{(162)}{\Rightarrow}\quad -\frac{1}{4}z'-\frac{2}{x}z=-3e^{x^9}$ ή

$$z'+\frac{8}{x}z=12e^{x^9}, \tag{163}$$

που είναι γραμμική εξίσωση 1-ης τάξης, όπου

$$p(x)=\frac{8}{x},\qquad g(x)=12e^{x^9}.$$

Τότε

$$
\begin{aligned}
z =& e^{-\int \frac{8}{x}dx}\Big(c + \int 12e^{x^9}e^{\int \frac{8}{x}dx}dx\Big)\\
=& e^{-8ln|x|}\Big(c + 12\int e^{x^9}e^{8\ln|x|}dx\Big)\\
=& e^{ln|x|^{-8}}\Big(c + 12\int e^{x^9}e^{\ln|x|^8}dx\Big)\\
=& |x|^{-8}\Big(c + \frac{12}{9}\int e^{x^9}\,9x^8dx\Big)\\
=& x^{-8}\Big(c + \frac{4}{3}\int e^{x^9}\,dx^9\Big) = x^{-8}\Big(c + \frac{4}{3}e^{x^9}\Big),
\end{aligned}
$$

επειδή για

$$u = x^9 \quad \Rightarrow \quad du = dx^9 = (x^9)'dx = 9x^8dx,$$

$$\int e^{x^9}\,9x^8dx = \int e^u du = e^u = e^{x^9}.$$

Άρα η γενική λύση της (163) είναι $z = x^{-8}\Big(c + \frac{4}{3}e^{x^9}\Big)$. Επομένως λόγω της (162)

$$y^{-4} = x^{-8}\Big(c + \frac{4}{3}e^{x^9}\Big)$$

είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (160).

Άλυτες Ασκησεις: *Να βρεθούν οι γενικές λύσεις (Γ.Λ.) ή τα γενικά ολοκληρώματα (Γ.Ο.) των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:*

1. $xy' - y = y^2\ln x, \quad x > 0$

2. $xyy' - y^2 = 2x^2, \quad x > 0$

3. $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}, \quad x > 1$

4. $x^2y' + xy = -y^2, \quad x > 0$

5. $3xy^2y' + y^3 = 2x, \quad x > 0$

6. $3xy^3y' = y^4 + x^4, \quad x > 0$

7. $(x^2 \ln y - x)y' = y, \quad x > 0$

7.4. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1-ης τάξης.

Η Δ.Ε. $y' = f(x,y)$ λέγεται ομογενής διαφορική εξίσωση 1-ης τάξης αν

$$y' = f(x,y) = F\Big(\frac{y}{x}\Big), \tag{164}$$

δηλαδή είναι συνάρτηση του λόγου $\frac{y}{x}$, ή $\frac{x}{y}$, **π.χ.**
$y' = \frac{x+y}{x} = \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{x} = F\Big(\frac{y}{x}\Big)$.
Τότε θέτουμε

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = (xz)' = x'z + xz' = z + xz' \tag{165}$$

και η Δ.Ε. $y' = F\Big(\frac{y}{x}\Big)$ ανάγεται σε Δ.Ε. χωριζόμενων μεταβλητών

$$z + xz' = F(z) \quad \Rightarrow \quad x\frac{dz}{dx} = F(z) - z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{F(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Παρατηρούμε ότι αν

$$z = \frac{y}{x}, \quad \textit{τότε} \quad \frac{1}{z} = \frac{x}{y}.$$

Άσκηση 1.
Να βρεθεί η Γ.Λ. της Δ.Ε.

$$xy^3y' = x^4 + y^4. \tag{166}$$

Λύση : Από την (166) $\Rightarrow$

$$y' = \frac{x^4 + y^4}{xy^3} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x^4}{xy^3} + \frac{y^4}{xy^3} \Rightarrow$$

$$y' = \Big(\frac{x}{y}\Big)^3 + \Big(\frac{y}{x}\Big) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\Big(\frac{y}{x}\Big)^3} + \Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{167}$$

Άρα η (167) είναι ομογενής Δ.Ε. και με το μετασχηματισμό $z = \frac{y}{x}$, $\quad y' = z + xz'$ ανάγεται σε :

$$z + xz' = \frac{1}{z^3} + z \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z^3} \Rightarrow z^3 dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$
$$\int z^3 dz = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{z^4}{4} = \ln|x| + c \Rightarrow$$
$$z^4 = 4(\ln|x| + c) \overset{z=y/x}{\Rightarrow} \Big(\frac{y}{x}\Big)^4 = \ln x^4 + c_1 \Rightarrow y^4 = x^4(\ln x^4 + c_1).$$

που είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (166), όπου $c_1 = 4c$.

Άσκηση 2.
Να βρεθεί η Γ.Λ. της Δ.Ε.

$$(x^2 - y^2)dx + xydy = 0. \tag{168}$$

Λύση : Από την (168) $\Rightarrow$

$$(x^2 - y^2)dx = -xydy \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 - y^2}{xy} = -\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad -y' = \frac{x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy} \quad \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x},$$

οπότε λόγω των σχέσεων (165) λαμβάνουμε

$$xz' + z = -\frac{1}{z} + z \quad \Rightarrow \quad x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad zdz = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\int zdz = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{z^2}{2} = \ln|x| + c \quad \Rightarrow \quad z^2 = 2(\ln|x| + c) \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2(\ln|x| + c) \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2x^2(\ln|x| + c),$$

που είναι το Γ.Ο. της Δ.Ε. (168).

Άσκηση 3.
Να βρεθεί η Γ.Λ. της Δ.Ε.

$$\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right) dx + x\cos\frac{y}{x}\, dy = 0. \tag{169}$$

Λύση : Από την (169) $\Rightarrow$

$$\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right) dx = -x\cos\frac{y}{x}\, dy \quad \Rightarrow \quad \frac{x - y\cos\frac{y}{x}}{x} = -\cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} = -\cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad -\cos\frac{y}{x}\, y' = 1 - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} \quad \Rightarrow$$

είναι ομογενής Δ.Ε. και λόγω των σχέσεων (165) λαμβάνουμε

$$-(xz' + z)\cos z = 1 - z\cos z \quad \Rightarrow \quad -x\cos zz' - z\cos z = 1 - z\cos z \quad \Rightarrow$$

$$-x\cos z\frac{dz}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos zdz = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \cos zdz = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\sin z = -\ln|x| + c \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{y}{x}\right) = -\ln|x| + c,$$

που είναι το Γ.Ο. της Δ.Ε. (169).

Άσκηση 4.
Να βρεθεί η Γ.Λ. της Δ.Ε.

$$\big(xe^{y/x} + y\big)dx - xdy = 0. \tag{170}$$

Λύση : Από την (170) $\Rightarrow$

$$\left(xe^{y/x} + y\right)dx = xdy \quad \Rightarrow \quad \frac{xe^{y/x} + y}{x} = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow$$

$$y' = \frac{xe^{y/x}}{x} + \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{y/x} + \frac{y}{x},$$

που είναι ομογενής Δ.Ε. και λόγω των σχέσεων (165) λαμβάνουμε

$$z + xz' = e^z + z \quad \Rightarrow \quad x\frac{dz}{dx} = e^z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{e^z} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{e^z}dz = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\int e^{-z}dz = \ln|x| + c \quad \Rightarrow \quad -e^{-z} = \ln|x| + c \quad \Rightarrow \quad -e^{-y/x} = \ln|x| + c,$$

που είναι το Γ.Ο. της Δ.Ε. (170).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. *Να βρεθούν οι γενικές λύσεις (Γ.Λ.) ή τα γενικά ολοκληρώματα (Γ.Ο.) των Δ.Ε.*

1. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$

2. $x^2dy + (y^2 - xy)dx = 0$

3. $(x + y)dy + (x - y)dx = 0$

4. $y' = \frac{x^5 + y^5}{xy^4}$

5. $xy' = y + x\cos\frac{y}{x}, \quad x \neq 0$

6. $xy' = y + x\cos^2\frac{y}{x}, \quad x \neq 0$

7. $xy' = y + x\sin^2\frac{y}{x}, \quad x \neq 0$

8. $(x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$

9. $xy' = y + x\cos\frac{y}{x}, \quad x \neq 0$

10. $xy'(x^2 - y^2) + y^3 = 0, \quad x \neq 0$

8 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΗΣ

Γραμμικές μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξης λέγονται οι εξισώσεις τύπου

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) \tag{171}$$

Όταν $f(x) = 0$ η εξίσωση

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = 0 \tag{172}$$

ονομάζεται **ομογενής γραμμική** Δ.Ε. δευτέρας τάξης.

Έστω ότι c_1, c_2 είναι δυο αυθαίρετες σταθερές, τότε μια συνάρτηση $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ $\big($αντιστ. $\psi(x, y, c_1, c_2) = 0\big)$ που επαληθεύει τη Δ.Ε.: $F(x, y, y', y'') = 0$, λέγεται **Γενική λύση** Γ.Λ. (αντιστ. **Γενικό Ολοκλήρωμα** Γ.Ο.) αυτής της Δ.Ε. Η λύση που προκύπτει απ τη γενική λύση για συκγεκριμένες τιμές των σταθερών ονομάζεται **μερική λύση**.

Αν y_0 είναι η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης (172) και y_μ μια μερική λύση της (171) τότε η γενική λύση y_γ της (171) είναι:

$$y_\gamma = y_0 + y_\mu. \tag{173}$$

Αν $y_1(x)$, $y_2(x)$ είναι δυο γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (172), τότε γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \tag{174}$$

όπου c_1, c_2 είναι δυο αυθαίρετες σταθερές. Η ορίζουσα

$$W(x) = W[y_1(x), y_2(x)] = W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

λέγεται **ορίζουσα Wronsky** των συναρτήσεων $y_1(x)$, $y_2(x)$.
Δυο λύσεις της (172) λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητες** και αποτελούν **θεμελιώδες σύστημα λύσεων** όταν $W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0$.
Η ορίζουσα Wronsky ικανοποιεί τη Δ.Ε.

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0$$

όπου $p(x)$ είναι ο συντελεστής του y' στην (171).
Οι εξισώσεις τύπου (171) λύνονται με υποβιβασμό τάξης Δ.Ε. και με τη Μεθοδο Μεταβολής των Σταθερών Συντελεστών (Lagrange), που δίνονται παρακάτω.

8.1. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ.

Είναι οι εξισώσεις της μορφής

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{175}$$

όπου a_1, a_2 είναι σταθερές. Η αντίστοιχη ομογενής είναι η εξίσωση

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{176}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (176) συνεπάγεται από την (176) με αντικατάσταση $y = e^{\lambda x}$ και είναι

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{177}$$

Οι γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (176) εξαρτώνται από τις ρίζες της χ.ε. και βρίσκονται από τον Πίνακα:

Πίνακας (178)

Ρίζες της χ.ε.	Μερικές γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (176)
1. $\lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$
2. $\lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_1(x) = e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = xe^{\lambda x}$
3. $\lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 1. *Να βρεθεί η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε.*

$$y'' + 4y' - 5y = 0. \tag{179}$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (179) είναι

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4(-5) = 16 + 20 = 36,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow$$
$$\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 1.$$

Έχουμε την πρώτη περίπτωση του Πίνακα (178). Άρα

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-5x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{x}.$$

Τότε η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. (179) λόγω της (174) είναι

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{x}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2. *Να βρεθεί η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε.*

$$y'' - 2y' + y = 0. \tag{180}$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (180) είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Άρα $\lambda = 1$ είναι ρίζα πολλαπλότητας 2. Έχουμε τη δεύτερη περίπτωση του Πίνακα (178). Τότε

$$y_1 = e^{\lambda x} = e^{x}, \quad y_2 = xe^{\lambda x} = xe^{x}$$

και η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. (193) λόγω της (174) είναι

$$y_0 = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3. *Να βρεθεί η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε.*

$$y'' + 36y = 0. \tag{181}$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (181) είναι

$$\lambda^2 + 36 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -36 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-36} \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6^2(-1)} = \pm 6\sqrt{-1} = 0 \pm 6i.$$

Επειδή $\sqrt{-1} = i$. Άρα έχουμε τη τρήτη περίπτωση του Πίνακα (178), όπου $\alpha = 0, \quad \beta = 6$. Τότε

$$y_1 = e^{0x} \cos 6x = \cos 6x, \quad y_2 = e^{0x} \sin 6x = \sin 6x$$

και η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. (193) λόγω της (174) είναι

$$y_0 = c_1 \cos 6x + c_2 \sin 6x.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4. *Να βρεθεί η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε.*

$$y'' - 2y' + 2y = 0. \tag{182}$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (182) είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1, \quad b = -2, \quad c = 2 \Rightarrow$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{2i}{2} = 1 \pm i \Rightarrow$$
$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i,$$

επειδή $\sqrt{-1} = i$. Άρα έχουμε τη τρήτη περίπτωση του Πίνακα (178), όπου $\alpha = 1, \quad \beta = 1$. Τότε

$$y_1 = e^{ax} \cos bx = e^{1 \cdot x} \cos 1 \cdot x = e^x \cos x,$$

$$y_2 = e^{ax} \sin bx = e^{1 \cdot x} \sin 1 \cdot x = e^x \sin x$$

και η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. (182) λόγω της (174) είναι

$$y_0 = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x.$$

Για την εύρεση της μερικής λύσης της μη ομογενούς Δ.Ε.(175) εφαρμόζουμε τη μέθοδο Απροσδιόριστων συντελεστών. Οι Δ.Ε. τύπου (175) λύνονται και με τη Μέθοδο μεταβολής των σταθερών συντελεστών (Lagrange) .

8.1.1. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ.

Ανάλογα με τη μορφή της $f(x)$ στην Δ.Ε. (175) ψάχνουμε τη μερική λύση της: y_μ από τον παρακάτω Πίνακα (183) και μετά κάνουμε την αντικατάσταση της y_μ και των παραγώγων της στην (175) για να βρούμε τους απροσδιόριστους συντελεστές στα πολυώνυμα $\widetilde{P}_m(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + ... + A_{m-1} x + A_m$.

Πίνακας (183)

$f(x)$	Ρίζες της χ.ε. $\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_2$	y_μ Μερικές λύσεις
1. $P_m(x)$	Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα της χ.ε., $(\ \lambda \neq 0\ )$	$\widetilde{P}_m(x)$
	Ο αριθμός 0 είναι ρίζα της χ.ε. πολλαπλότητας k, $(\lambda = 0\ )$	$x^k \widetilde{P}_m(x)$
2. $P_m(x)e^{\alpha x}$	Ο αριθμός α δεν είναι ρίζα της χ.ε., $(\ \lambda \neq \alpha\ )$	$\widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
$\alpha \in \mathbb{R}$	Ο αριθμός α είναι ρίζα της χ.ε. πολλαπλότητας k, $(\lambda = \alpha\ )$	$x^k \widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
3. $P_m(x)\cos\beta x$ $+Q_n(x)\sin\beta x$	Ο αριθμός $\pm i\beta$ δεν είναι ρίζα της χ.ε., $(\ \lambda \neq \pm i\beta\ )$	$\widetilde{P}_l(x)\cos\beta x$ $+\widetilde{Q}_l(x)\sin\beta x$
$\beta \in \mathbb{R}$	Ο αριθμός $\pm i\beta$ είναι ρίζα της χ.ε., $(\lambda = \pm i\beta)$	$x[\widetilde{P}_l(x)\cos\beta x$ $+\widetilde{Q}_l(x)\sin\beta x]$
4. $[P_m(x)\cos\beta x$ $+Q_n(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$	Ο αριθμός $\alpha \pm i\beta$ δεν είναι ρίζα της χ.ε., $(\lambda \neq \alpha \pm i\beta)$	$[\widetilde{P}_l(x)\cos\beta x$ $+\widetilde{Q}_l(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	Ο αριθμός $\alpha \pm i\beta$ είναι ρίζα της χ.ε., $(\lambda = \alpha \pm i\beta)$	$x[\widetilde{P}_l(x)\cos\beta x$ $+\widetilde{Q}_l(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$

όπου $k = 1, 2,\quad P_m(x), Q_n(x),$ είναι πολυώνυμα βαθμού m, n αντίστοιχα, $l = \max(m, n)$. Η περισπωμένη πάνω από το πολυώνυμο δείχνει πως το πολυώνυμο αυτό είναι του ίδιου βαθμού αλλά με απροσδιόριστους συντελεστές π.χ. αν $P_m(x) = x^2 - 3x + 5$ ή $P_m(x) = x^2$, τότε $\widetilde{P}_m(x) = Ax^2 + Bx + C$,
αν $P_m(x) = 3x - 2$ ή $P_m(x) = x$, τότε $\widetilde{P}_m(x) = Ax + B$.

Παράδειγμα 1. Έστω $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad f(x) = x \quad \Rightarrow$
$P_m(x) = x, \quad \widetilde{P}_m(x) = Ax + B, \quad \lambda \neq 0,$

$$y_\mu = Ax + B.$$

Παράδειγμα 2. Έστω $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad f(x) = 2x^2 - 1 \quad \Rightarrow$
$P_m(x) = 2x^2 - 1, \quad \widetilde{P}_m(x) = Ax^2 + Bx + C, \quad \lambda \neq 0,$

$$y_\mu = Ax^2 + Bx + C.$$

Παράδειγμα 3. Έστω $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad f(x) = x \quad \Rightarrow$
$P_m(x) = x, \quad \widetilde{P}_m(x) = Ax + B, \quad \lambda = 0, \quad k = 1,$

$$y_\mu = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Παράδειγμα 4. Έστω $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad f(x) = e^x \quad \Rightarrow$
$a = 1, \quad P_m(x) = 1x^0 = 1, \quad m = 0, \quad \widetilde{P}_m(x) = Ax^0 = A, \quad \lambda \neq 1,$

$$y_\mu = Ae^x.$$

Παράδειγμα 5. Έστω $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 3, \quad f(x) = e^{4x} \quad \Rightarrow$
$a = 4, \quad P_m(x) = 1, \quad m = 0, \quad \widetilde{P}_m(x) = A, \quad \lambda = 4, \quad k = 1,$

$$y_\mu = Axe^{4x}.$$

Παράδειγμα 6. Έστω $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad f(x) = 1 \cdot e^x \quad \Rightarrow$
$a = 1, \quad P_m(x) = 1, \quad m = 0, \quad \widetilde{P}_m(x) = A, \quad \lambda = 1, \quad k = 2,$

$$y_\mu = Ax^2e^x.$$

Παράδειγμα 7. Έστω $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad f(x) = 1 \cdot \cos 2x + x \sin 2x \quad \Rightarrow$
$\beta = 2, \quad P_m(x) = 1, \quad Q_n(x) = x, \quad m = 0, \quad n = 1,$
$l = \max(0, 1) = 1, \quad \widetilde{P}_l(x) = Ax + B, \quad \widetilde{Q}_l(x) = Cx + D, \quad \lambda \neq \pm i\beta = \pm 2i,$

$$y_\mu = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x.$$

ΑΣΚΗΣΗ 1. *Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.*

$$y'' + 4y' - 5y = x. \tag{184}$$

Λύση: Η $f(x) = x$ και η αντίστοιχη ομογενής είναι η Δ.Ε.

$$y'' + 4y' - 5y = 0, \tag{185}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (185) είναι

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = 1.$$

Έχουμε την πρώτη περίπτωση του Πίνακα (178). Άρα

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-5x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^x.$$

Τότε η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. (185) λόγω της (174) είναι

$$y_0 = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-5x} + c_2e^x.$$

Τώρα θα βρούμε τη μερική λύση της (184). Επειδή $f(x) = P_m(x) = x$ και ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα της χ.ε. $\lambda \neq 0$, έχουμε την πρώτη περίπτωση του Πίνακα (183). Άρα

$$y_\mu = \widetilde{P}_1(x) = Ax + B \Rightarrow y'_\mu = (Ax + B)' = A, \quad y''_\mu = (A)' = 0.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (184), θα έχουμε

$$4A - 5(Ax + B) = x \Rightarrow -5Ax + (4A - 5B) = 1 \cdot x + 0.$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων:

$$x:\ -5A = 1 \quad \text{και} \quad 4A - 5B = 0 \Rightarrow A = -1/5, \quad B = -4/(25).$$

Τότε

$$y_\mu = Ax + B = -\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}$$

και η γενική λύση y_γ της (184) λόγω της (173) είναι

$$y_\gamma = y_0 + y_\mu = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{5}x - \frac{4}{25}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2. *Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.*

$$y'' - 3y' = 6x + 1. \tag{186}$$

Λύση: Η $f(x) = 6x + 1$ και η αντίστοιχη ομογενής είναι η Δ.Ε.

$$y'' - 3y' = 0. \tag{187}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (187) είναι

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3.$$

Έχουμε την πρώτη περίπτωση του Πίνακα (178). Άρα

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^0 = 1, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{3x}.$$

Τότε η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. (187) λόγω της (174) είναι

$$y_0 = c_1 + c_2 e^{3x}.$$

Επειδή $f(x) = 6x + 1 = P_1(x)$ και ο αριθμός $\lambda = 0$ είναι ρίζα της χ.ε. πολλαπλότητας $k = 1$, έχουμε την πρώτη περίπτωση του Πίνακα (183). Άρα

$$y_\mu = x\,\widetilde{P}_1(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx \quad \Rightarrow \quad y'_\mu = 2Ax + B, \quad y''_\mu = 2A.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (186), θα έχουμε

$$2A - 3(2Ax + B) = 6x + 1 \quad \Rightarrow -6Ax + (2A - 3B) = 6x + 1.$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων:

$$-6A = 6 \quad \text{και} \quad 2A - 3B = 1 \Rightarrow A = -1, \quad B = -1.$$

Τότε

$$y_\mu = Ax^2 + Bx = -x^2 - x$$

και η γενική λύση y_γ της (186) λόγω της (173) είναι

$$y_\gamma = y_0 + y_\mu = c_1 + c_2 e^{3x} - x^2 - x.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3. *Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.*

$$y'' + 2y' - 3y = 4e^x. \tag{188}$$

Λύση: Η $f(x) = 4e^x$ και η αντίστοιχη ομογενής είναι η Δ.Ε.

$$y'' + 2y' - 3y = 0. \tag{189}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (189) είναι

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1(-3) = 4 + 12 = 16 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad \lambda_2 = \frac{-2-4}{2} = -3.$$

Έχουμε την πρώτη περίπτωση του Πίνακα (178). Άρα

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-3x}.$$

Τότε η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. (189) λόγω της (174) είναι

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}.$$

Επειδή $f(x) = 4e^x = P_m(x)e^{ax}$, τότε $P_m(x) = 4x^0, m = 0, \quad a = 1$ και ο αριθμός $\lambda = a = 1$ είναι ρίζα της χ.ε. πολλαπλότητας $k = 1$, έχουμε την δεύτερη περίπτωση του Πίνακα (183), όπου $\widetilde{P}_0(x) = Ax^0 = A$. Άρα $y_\mu = x\widetilde{P}_0(x)e^x \quad \Rightarrow$

$$y_\mu = Axe^x \quad \Rightarrow$$

$$y_\mu' = (Axe^x)' = (Ax)'e^x + Ax(e^x)' = Ae^x + Axe^x = (Ax + A)e^x \quad \Rightarrow$$

$$y_\mu'' = ((Ax + A)e^x)'$$

$$= (Ax+A)'e^x + (Ax+A)(e^x)' = (A+0)e^x + (Ax+A)e^x = (Ax+A+A)e^x \quad \Rightarrow$$

$$y_\mu'' = (Ax + 2A)e^x.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (188), θα έχουμε

$$(Ax + 2A)e^x + 2(Ax + A)e^x - 3Axe^x = 4e^x.$$

Διαιρούμε τα δυο μέρη της εξίσωσης με e^x:

$$Ax + 2A + 2(Ax + A) - 3Ax = 4 \quad \Rightarrow$$

$$(A + 2A - 3A)x + 2A + 2A = 4 \quad \Rightarrow$$

$$4A = 4 \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Τότε

$$y_\mu = Axe^x = xe^x$$

και η γενική λύση y_γ της (186) λόγω της (173) είναι

$$y_\gamma = y_0 + y_\mu = c_1 + c_2e^{3x} + xe^x.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4. *Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.*

$$y'' + 2y' - 3y = \cos 3x. \tag{190}$$

Λύση: Η $f(x) = \cos 3x$ και η αντίστοιχη ομογενής είναι η Δ.Ε.

$$y'' + 2y' - 3y = 0, \tag{191}$$

που είναι όπως στην προηγούμενη Άσκηση 3. Άρα οι ρίζες της χ.ε. και η Γ.Λ. της (191) είναι

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -3,$$

$$y_0 = c_1e^x + c_2e^{-3x}.$$

Επειδή

$$f(x) = \cos 3x = 1 \cdot \cos 3x + 0 \cdot \sin 3x = P_m(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx \quad \Rightarrow$$

$$P_m(x) = x^0 = 1, \quad Q_n(x) = 0x^0,\ m = n = l = 0, \quad b = 3,$$

τότε έχουμε την τρίτη περίπτωση του Πίνακα (183), όπου $m = n = l = 0$,

$$\widetilde{P}_0(x) = Ax^0 = A, \quad \widetilde{Q}_0(x) = Bx^0 = B.$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $ib = 3i$ δεν είναι ρίζα της χ.ε. $\Rightarrow$

$$y_\mu = A\cos bx + B\sin bx = A\cos 3x + B\sin 3x \quad \Rightarrow$$

$$y'_\mu = (A\cos 3x + B\sin 3x)' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$

$$y''_\mu = (-3A\sin 3x + 3B\cos 3x)' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

Αντικαθυστούμε τις παραπάνω τιμές των y_μ, y'_μ, y''_μ στην (188) και έχουμε

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 2(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) - 3(A\cos 3x + B\sin 3x) = \cos 3x \quad \Rightarrow$$

$$(-9A + 6B - 3A)\cos 3x + (-9B - 6A - 3B)\sin 3x = \cos 3x + 0\sin 3x.$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των $\cos 3x$ και $\sin 3x$ από αριστερά και από δεξιά και λαμβάνουμε

$$\cos 3x : \; -12A + 6B = 1,$$

$$\sin 3x : \; -6A - 12B = 0 \quad \Rightarrow \quad 6A = -12B, \quad A = -2B.$$

Αντικαθυστούμε την $A = -2B$ στην εξίσωση $-12A + 6B = 1$ και έχουμε

$$-12(-2B) + 6B = 1 \quad \Rightarrow \quad 24B + 6B = 1 \quad \Rightarrow \quad 30B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = 1/30.$$

Τότε

$$A = -2B = -2 \cdot \frac{1}{30} = -\frac{2}{30} = -\frac{1}{15},$$

και

$$y_\mu = A\cos 3x + B\sin 3x = -\frac{1}{15}\cos 3x + \frac{1}{30}\sin 3x,$$

$$y(x) = y_0 + y_\mu = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \left(-\frac{1}{15}\cos 3x + \frac{1}{30}\sin 3x\right) \quad \Rightarrow$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{15}\cos 3x + \frac{1}{30}\sin 3x$$

είναι η Γ.Λ. της (188).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των Δ.Ε. με τη Μέθοδο Απροσδιόριστων συντελεστών.

1. $y'' + 2y' - 3y = 1$
2. $3y'' - 4y' + y = 5$
3. $y'' + 2y' + y = x$
4. $y'' - 2y' + y = 3x + 4$
5. $y'' - 4y' + 4y = 4x^2 + 4x + 2$
6. $y'' - 9y = 12x\, e^{3x}$
7. $y'' + 10y' + 25y = -e^{-5x}$

8. $y'' + 4y = 8\sin 2x$

9. $y'' + y = \sin x + \cos x$

10. $y'' + 36y = 2\sin 6x$

11. $y'' + 4y = \cos 2x, \qquad y(0) = y(\pi/4) = 0.$

Οι εξισώσεις τύπου (171) λύνονται με τη μέθοδο Lagrange.

8.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

*(**Lagrange**)*

Για τη μη ομογενή εξίσωση

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) \tag{192}$$

η αντίστοιχη ομογενής είναι

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = 0 \tag{193}$$

Έστω ότι $y_1(x), y_2(x)$ είναι δυο μερικές γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (193). Τότε

$$y_0 = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

είναι η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. (193).
Τη γενική λύση της (192) ψάχνουμε σε μορφή:

$$y_\gamma(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \tag{194}$$

όπου

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}dx + \widetilde{C}_1, \tag{195}$$

$$C_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}dx + \widetilde{C}_2, \tag{196}$$

όπου $W[y_1(x), y_2(x)]$ ορίζουσα Wronsky και $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΑΣΚΗΣΗ 1. *Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.*

$$y'' - 2y' + y = e^x/x^5 \tag{197}$$

Λύση: Η $f(x) = e^x/x^5$ και η αντίστοιχη ομογενής είναι η Δ.Ε.

$$y'' - 2y' + y = 0, \tag{198}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (198) είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Άρα $\lambda = 1$ είναι ρίζα πολλαπλότητας $k = 2$. Έχουμε τη δεύτερη περίπτωση του Πίνακα (178). Τότε

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x, \quad y_2 = xe^{\lambda_1 x} = xe^x$$

και η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. (193) λόγω της (174) είναι

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Η ορίζουσα Wronsky είναι

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = (x+1)e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}.$$

Από την (195) βρίσκουμε

$$C_1(x) = -\int \frac{xe^x e^x}{x^5 e^{2x}} dx + \widetilde{C}_1 = -\int \frac{dx}{x^4} + \widetilde{C}_1 \Rightarrow C_1(x) = \frac{x^{-3}}{3} + \widetilde{C}_1$$

Από την (196) βρίσκουμε

$$C_2(x) = \int \frac{e^x e^x}{x^5 e^{2x}} dx + \widetilde{C}_2 = \int \frac{dx}{x^5} + \widetilde{C}_2 \Rightarrow C_2(x) = -\frac{x^{-4}}{4} + \widetilde{C}_2.$$

Τότε η γενική λύση της (197) λόγω της (194) είναι

$$y_\gamma(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) = \Big[\frac{x^{-3}}{3} + \widetilde{C}_1\Big] e^x + \Big[-\frac{x^{-4}}{4} + \widetilde{C}_2\Big] x e^x \Rightarrow$$

$$y_\gamma(x) = \Big(\widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2\, x + \frac{x^{-3}}{12}\Big) e^x$$

ΑΣΚΗΣΗ 2. *Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.*

$$9y'' + y = \frac{1}{\cos(x/3)} \tag{199}$$

Λύση: Από την (199) $\Rightarrow$

$$y'' + \frac{1}{9} y = \frac{1}{9\cos(x/3)} \tag{200}$$

Τότε $f(x) = \frac{1}{9\cos(x/3)}$ και η αντίστοιχη ομογενής είναι η Δ.Ε.

$$y'' + \frac{1}{9} y = 0. \tag{201}$$

Η χ.ε. είναι

$$\lambda^2 + \frac{1}{9} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -\frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{-\frac{1}{9}} = \pm\sqrt{\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 (-1)} \quad \Rightarrow$$

$$\lambda = \pm\frac{1}{3}\sqrt{-1} = \pm\frac{1}{3} i = 0 \pm \frac{1}{3} i \quad \Rightarrow$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x = e^{0x}\cos\frac{x}{3} = \cos\frac{x}{3},$$

$$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{0x}\sin\frac{x}{3} = \sin\frac{x}{3} \quad \Rightarrow$$

Η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. (201) είναι

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1\cos\frac{x}{3} + c_2\sin\frac{x}{3} \quad \Rightarrow$$

Η γενική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. (200) ή (199) είναι

$$y_\gamma = C_1(x)\cos\frac{x}{3} + C_2(x)\sin\frac{x}{3}.$$

Η ορίζουσα Wronsky είναι

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\frac{x}{3} & \sin\frac{x}{3} \\ \left(\cos\frac{x}{3}\right)' & \left(\sin\frac{x}{3}\right)' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\frac{x}{3} & \sin\frac{x}{3} \\ -\left(\frac{x}{3}\right)'\sin\frac{x}{3} & \left(\frac{x}{3}\right)'\cos\frac{x}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\frac{x}{3} & \sin\frac{x}{3} \\ -\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} & \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\cos^2\frac{x}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\sin^2\frac{x}{3} = \frac{1}{3}\left(\cos^2\frac{x}{3} + \sin^2\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Από την (195) επειδή

$$d\cos\left(\frac{x}{3}\right) = -\left(\frac{x}{3}\right)'\sin\frac{x}{3}dx = -\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}dx,$$

βρίσκουμε

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{9\cos(x/3)}}{\frac{1}{3}}dx + \widetilde{C}_1 = \int\frac{-\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}dx}{\cos(x/3)} + \widetilde{C}_1$$

$$= \int\frac{d\cos\left(\frac{x}{3}\right)}{\cos(x/3)} + \widetilde{C}_1 = \ln|\cos(x/3)| + \widetilde{C}_1.$$

$$\Rightarrow \quad C_1(x) = \ln|\cos(x/3)| + \widetilde{C}_1.$$

Από την (196) βρίσκουμε

$$C_2(x) = \int\frac{\cos\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{9\cos(x/3)}}{\frac{1}{3}}dx + \widetilde{C}_2 = \int\frac{3}{9}dx + \widetilde{C}_2 = \frac{1}{3}x + \widetilde{C}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2(x) = \frac{x}{3} + \widetilde{C}_2.$$

Τότε η γενική λύση της (197) λόγω της (194) είναι

$$y_\gamma(x) = \left(\ln|\cos(x/3)| + \widetilde{C}_1\right)\cos\frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3} + \widetilde{C}_2\right)\sin\frac{x}{3}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Να βρεθούν οι Γενικές Λύσεις (Γ.Λ.) των παρακάτω Δ.Ε. με τη μέθοδο Lagrange.

1. $y'' - y' - 2y = e^{3x}$
2. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$
3. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$
4. $y'' + 4y = \tan 2x$
5. $y'' + 36y = 4\cos 6x$
6. $16y'' + y = \frac{1}{\sin(x/4)}$
7. $y'' + 25y = 2\tan 5x$
8. $y'' + y = \cot x$
9. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$

9 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ.

Γραμμικές μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές λέγονται οι εξισώσεις τύπου

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{202}$$

όπου $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ είναι σταθερές. Όταν $f(x) = 0$ η εξίσωση

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{203}$$

ονομάζεται **ομογενής γραμμική** Δ.Ε. ανώτερης τάξης.
Έστω ότι $c_1, c_2, ..., c_n$ είναι n αυθαίρετες σταθερές, τότε μια συνάρτηση $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ $\big($αντιστ. $\psi(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0\big)$ που επαληθεύει τη Δ.Ε. (202) λέγεται **Γενική λύση** Γ.Λ. (αντιστ. **Γενικό Ολοκλήρωμα** Γ.Ο.) αυτής της Δ.Ε. Ως συνήθως ορίζεται η μερική λύση .

Αν $y_1(x),\ y_2(x), ..., y_n(x)$ είναι n γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (203), τότε γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y_0 = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x), \tag{204}$$

όπου $c_1, c_2, ..., c_n$ είναι n αυθαίρετες σταθερές.
Αν y_0 είναι η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης (203) και y_μ μια μερική λύση της (202) τότε η γενική λύση y_γ της (202) είναι:

$$y_\gamma = y_0 + y_\mu. \tag{205}$$

Η ορίζουσα

$$W(x) = W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ...y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ...y_n'(x) \\ ...... & ...... & .... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ...y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

λέγεται **ορίζουσα Wronsky** των συναρτήσεων $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.
n λύσεις $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ της (203) λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητες** και αποτελούν **θεμελιώδες σύστημα λύσεων** όταν $W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)] \neq 0$.
Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (203) είναι

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ...a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει συνολικά n πραγματικές και μιγαδικές ρίζες: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.
Οι γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις $y_1, y_2, ..., y_n$ της ομογενούς Δ.Ε. (203) εξαρτώνται από τις ρίζες της χ.ε. και βρίσκονται από τον παρακάτω Πίνακα:

Πίνακας (206)

Ρίζες της χ.ε.	Μερικές γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (203)
1. $\lambda \in \mathbb{R}$ και είναι απλή ρίζα	$y = e^{\lambda x}$
2. $\lambda \in R$, είναι ρίζα πολλαπλότητας s	$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = xe^{\lambda x}, ..., y_s = x^{s-1}e^{\lambda x}$
3. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\lambda_{1,2}$ είναι ρίζα πολλαπλότητας s	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, ..., y_s = x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_{s+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{s+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x, ..., y_{2s} = x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

ΑΣΚΗΣΗ 1. *Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.*

$$y''' - 8y = 0 \tag{207}$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (207) είναι

$$\lambda^3 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2,$$

$$\lambda^2+2\lambda+4=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta=2^2-4\cdot 4=4-16=-12 \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{-12}=\sqrt{2^2\cdot 3(-1)}=2\sqrt{3(-1)}=2\sqrt{3}\sqrt{-1}=2\sqrt{3}i,$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}i}{2}=-1\pm\sqrt{3}i \quad \Rightarrow \quad \alpha=-1,\, \beta=\sqrt{3},$$

$$y_1=e^{-x}\cos\sqrt{3}x, \quad y_2=e^{-x}\sin\sqrt{3}x, \quad y_3=e^{2x}$$

$$y_0=c_1e^{-x}\cos\sqrt{3}x+c_2e^{-x}\sin\sqrt{3}x+c_3e^{2x}.$$

Για την εύρεση της μερικής λύσης της μη ομογενούς Δ.Ε.(202) εφαρμόζουμε τη μέθοδο Απροσδιόριστων συντελεστών όπως περιγράφθηκε παραπάνω στον Πίνακα (183) για Δ.Ε. 2-ας τάξης όπου η πολλαπλότητα της ρίζας $s\le n$.

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2. τεξτιτ Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'''-y''+y'-y=2x+3, \tag{208}$$

Λύση: Η $f(x)=2x+3$ και η αντίστοιχη ομογενής είναι η Δ.Ε.

$$y'''-y''+y'-y=0, \tag{209}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (209) είναι

$$\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2(\lambda-1)+\lambda-1=0 \quad \Rightarrow$$

$(\lambda-1)(\lambda^2+1)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=1$ ή $\lambda^2=-1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2,3}=\pm i=0\pm 1i$. Έχουμε την πρώτη και την τρίτη περίπτωση του Πίνακα (206) όπου $\alpha=0$, $\beta=1$. Άρα

$$y_1=e^{\lambda_1 x}=e^x, \quad y_2=e^{\alpha x}\cos\beta x=\cos x,\; y_3=e^{\alpha x}\sin\beta x=\sin x.$$

Τότε η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. (209) λόγω της (204) είναι

$$y_0=c_1e^x+c_2\cos x+c_3\sin x.$$

Τώρα θα βρούμε τη μερική λύση της (208). Επειδή $f(x)=2x+3$ και ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα της χ.ε., έχουμε την πρώτη περίπτωση του Πίνακα (183). Άρα

$$y_\mu=Ax+B\Rightarrow y'_\mu=A, \quad y''_\mu=y'''_\mu=0.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (208), θα έχουμε

$$A-(Ax+B)=2x+3 \quad \Rightarrow \quad -Ax+(A-B)=2x+3.$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων:

$$x:\ -A=2, \quad A-B=3 \quad \Rightarrow \quad A=-2, \quad B=-5.$$

Τότε $y_\mu=-2x-5$ και η γενική λύση y_γ της (208) λόγω της (205) είναι

$$y_\gamma=y_0+y_\mu=c_1e^x+c_2\cos x+c_3\sin x-2x-5.$$

Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των παρακάτω Δ.Ε..

1. $y'''-2y''-y'+2y=4x+2$
2. $y'''-3y''+2y'=e^{2x}$
3. $y'''-y'=\cos x$
4. $y^{(4)}-y=5$
5. $y'''-8y=7e^x$
6. $y'''-3y''+3y'-y=8$

10 ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΤΑΞΗΣ Δ.Ε.

Δ.Ε. της μορφής

$$y^{(n)}=f(x) \tag{210}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχει τη γενική λύση (Γ.Λ.):

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+...+c_{n-1}x+c_n \tag{211}$$

όπου $c_1,c_2,...,c_n$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΆΣΚΗΣΗ 1. Βρείτε τη Γ.Λ. της Δ.Ε.
$y''=x$
Λύση: Έχουμε $n=2$, $f(x)=x \Rightarrow f(t)=t$. Από τον τύπο (211) βρίσκουμε τη Γ.Λ.

$$\begin{aligned} y=&\frac{1}{(2-1)!}\int_0^x (x-t)tdt+c_1x+c_2=\int_0^x (xt-t^2)dt+c_1x+c_2\\ &=x\int_0^x tdt-\int_0^x t^2dt+c_1x+c_2=\Big[x\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\Big]_0^x+c_1x+c_2\\ &=x\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-(x\cdot 0-0)+c_1x+c_2=\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{3}+c_1x+c_2=\frac{x^3}{6}+c_1x+c_2\end{aligned}$$

Άρα $\quad y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2 \quad$ είναι η Γ.Λ. της δεδομένης Δ.Ε.

Δ.Ε. της μορφής

$$F\big(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\big) = 0. \tag{212}$$

Λύση: Θέτουμε $y^{(k)} = z \Rightarrow y^{(k+1)} = z' \Rightarrow y^{(k+2)} = z'' \Rightarrow ... y^{(n)} = z^{(n-k)}$. Αντικαθιστούμε στην (212) τις τιμές αυτές και έχουμε Δ.Ε. $(n-k)$ τάξης δηλαδή:

$$F\big(x, z, z', , ..., z^{(n-k)}\big) = 0. \tag{213}$$

Έστω ότι το Γ.Ο. της (213) είναι

$$\Phi(x, z, c_1, c_2, ..., c_{n-k}) = 0.$$

Τότε λόγω της $\; y^{(k)} = z \;$ το Γ.Ο. της (212) βρίσκεται από τη Δ.Ε. k-ης τάξης:

$$\Phi\big(x, y^{(k)}, c_1, c_2, ..., c_{n-k}\big) = 0.$$

ΆΣΚΗΣΗ 2. Βρείτε τη Γ.Λ. της Δ.Ε.

$$y''' - \frac{1}{x} y'' = 0 \tag{214}$$

Λύση: Θέτουμε $y'' = z \Rightarrow y''' = z'$. Αντικαθιστούμε στην (214) τις τιμές αυτές και έχουμε

$$z' - \frac{1}{x} z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$
$$\ln|z| = \ln|x| + \ln \widetilde{c}_1 \Rightarrow \ln|z| = \ln|x|\widetilde{c}_1 \Rightarrow |z| = |x|\widetilde{c}_1 \Rightarrow z = c_1 x,$$

όπου $\; c_1 = \pm\widetilde{c}_1$. Τότε λόγω της $\; y'' = z \Rightarrow$

$$y'' = c_1 x \Rightarrow \int y''(x) dx = c_1 \int x dx \Rightarrow y'(x) = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \Rightarrow$$

$$\int y'(x) dx = \int \left(c_1 \frac{x^2}{2} + c_2\right) dx \Rightarrow y(x) = c_1 \cdot \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + c_2 x + c_3 \Rightarrow$$

$$y(x) = c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 x + c_3.$$

Θέτοντας $\; \bar{c}_1 = \frac{c_1}{6} \;$ λαμβάνουμε:

$$y = \bar{c}_1 x^3 + c_2 x + c_3.$$

που είναι η Γ.Λ. της (214).

ΆΣΚΗΣΗ 3. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y'' + 2x(y')^2 = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \tag{215}$$

Λύση: Θέτουμε $y' = z(x) \Rightarrow y'' = z'$. Αντικαθιστούμε στην (215) τις τιμές αυτές και έχουμε:

$$z' = -2xz^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2xz^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = -2xdx \Rightarrow \int \frac{dz}{z^2} = -2\int xdx \Rightarrow$$

$$\frac{z^{-2+1}}{-2+1} = -2\cdot\frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow -z^{-1} = -x^2 + c_1 \Rightarrow \frac{1}{z} = x^2 - c_1 \Rightarrow$$

$$z = \frac{1}{x^2 - c_1} \Rightarrow z(0) = y'(0) = \frac{1}{0^2 - c_1} = 1 \Rightarrow -\frac{1}{c_1} = 1 \Rightarrow c_1 = -1 \Rightarrow$$

$$z = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow \int y'(x)dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx \Rightarrow$$

$$y(x) = \arctan x + c_2 \Rightarrow y(0) = \arctan 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \Rightarrow$$

$$y(x) = \arctan x + 1$$

είναι η μερική λύση του Π.Α.Τ. (215).

Δ.Ε. της μορφής

$$F\big(y, y', y'', ..., y'''\big) = 0. \tag{216}$$

Λύση: Θέτουμε

$$y' = y'(x) = p = p(y) = p(y(x)) \Rightarrow$$

$$y''(x) = p'(y)y'(x) = p'(y)p = p'p,$$

όπου $p' = \frac{dp}{dy} = p'(y) \Rightarrow$

$$y'''(x) = \big(p'(y)p\big)'_x = \left(p'(y)\right)'_x p + p'(y)\left(p(y)\right)'_x$$

$$= p''_{yy}y'(x)p + p'(y)p'(y)y'(x) = p''p^2 + (p')^2p.$$

Έτσι έχουμε:

$$y' = p, \quad y'' = p'p, \quad y''' = p''p^2 + (p')^2p. \tag{217}$$

Αντικαθιστούμε στην (216) τις τιμές αυτές και έχουμε Δ.Ε. 2-ας τάξης δηλαδή:

$$F_1(y, p, p', p'') = 0. \tag{218}$$

όπου y είναι ανεξάρτητη μεταβλητή και p εξαρτημένη. Έστω ότι το Γ.Ο. της (218) είναι

$$\Phi(y, p, c_1, c_2) = 0.$$

Τότε λόγω της $y' = p$ το Γ.Ο. της (216) βρίσκεται από τη Δ.Ε. 1-ης τάξης:

$$\Phi(y, y', c_1, c_2) = 0.$$

ΆΣΚΗΣΗ 4. Βρείτε τη Γ.Λ. ή το Γ.Ο. της Δ.Ε.

$$y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0 \tag{219}$$

Λύση: Θέτουμε $y' = p = p(y) \Rightarrow y'' = p'(y)y' = p'p$. Αντικαθιστούμε στην (219) τις τιμές αυτές και έχουμε:

$$p'p(2y+3) - 2p^2 = 0 \Rightarrow p[p'(2y+3) - 2p] = 0 \Rightarrow$$

α. $\quad p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = c$ είναι μια λύση της (219).

β. $\quad p'(2y+3) - 2p = 0 \Rightarrow (2y+3)\frac{dp}{dy} = 2p \Rightarrow$

$$\frac{dp}{p} = \frac{2}{2y+3}dy \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{2}{2y+3}dy \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{(2y+3)'}{2y+3}dy \Rightarrow$$

$$\ln|p| = \ln|2y+3| + \ln \hat{c}_1 \Rightarrow \ln|p| = \ln|2y+3|\hat{c}_1 \Rightarrow |p| = |2y+3|\hat{c}_1 \Rightarrow$$

$$p = c_1(2y+3) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1(2y+3) \Rightarrow \frac{dy}{2y+3} = c_1 dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{2y+3} = \int c_1 dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2dy}{2y+3} = c_1 x + c_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{(2y+3)'}{2y+3}dy = c_1 x + c_2,$$

όπου $c_1 = \pm\hat{c}_1$. Άρα το Γ.Ο. της (219) είναι

$$\frac{1}{2}\ln|2y+3| = c_1 x + c_2.$$

Ασκήσεις.

Να βρεθούν οι γενικές λύσεις (Γ.Λ.) ή τα Γενικά Ολοκληρώματα (Γ.Ο.) των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:

1. $y'' + \frac{2}{x}y' = \frac{1}{x}$
2. $yy'' - (y')^2 = y'$
3. $yy'' + (y')^2 = y'$
4. $yy'' - (y')^2 - (y')^3 = 0,$

Να λυθούν τα Π.Α.Τ.

5. $yy'' - (y')^2 = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
6. $(y - y')y'' + (y')^2 = 0, \qquad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 1$
7. $y'' + yy' = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{2}$
8. $yy'' + 2(y')^2 = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

11 ΠΛΗΡΕΙΣ (ΑΚΡΙΒΕΙΣ) ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η διαφορική εξίσωση τύπου

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{220}$$

ονομάζεται πλήρης (ακριβής), αν και μόνο αν ισχύει η ταυτότητα

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \qquad \text{ή} \qquad P'_y = Q'_x \tag{221}$$

και το γενικό ολοκλήρωμα της (220) βρίσκεται απο τον τύπο

$$\int P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = c \tag{222}$$

ή από τον τύπο

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int Q(x_0,y)dy = c \tag{223}$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά και τις τιμές x_0, y_0 διαλέγουμε έτσι ώστε να υπάρχουν τα ολοκληρώματα στους τύπους (222),(223), που στη γενική περίπτωση είναι γενικευμένα ολοκληρώματα.
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στο ολοκλήρωμα $\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$ θεωρούμε ότι η x- είναι σταθερή και στο ολοκλήρωμα $\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx$ την y- θεωρούμε σταθερή.

Άσκηση 1. *Να βρεθεί η γενική λύση ή το γενικό ολοκλήρωμα της Δ.Ε.:*

$$(x^2 - y^2)dx + (y^3 - 2yx)dy = 0 \tag{224}$$

Λύση: Από την (220) και (224) $\Rightarrow$

$$P(x,y) = x^2 - y^2, \qquad Q(x,y) = y^3 - 2yx \tag{225}$$

Τότε $P'_y = (x^2 - y^2)'_y = 0 - 2y = -2y, \qquad Q'_x = (y^3 - 2yx)'_x = 0 - 2y = -2y.$ Αρα η (224) είναι πλήρης. Από την (225) $\Rightarrow \qquad P(x,y_0) = x^2 - y_0^2.$ Θέτουμε

$y_0 = 0$. Τότε $P(x, y_0) = x^2$ και από τον τύπο (222) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\int x^2 dx + \int_0^y (y^3 - 2yx)dy = c,\\
&\frac{x^3}{3} + \int_0^y y^3 dy - 2x\int_0^y y dy = c,\\
&\frac{x^3}{3} + \Big[\frac{y^4}{4}\Big]_0^y - 2x\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^y = c,\\
&\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}(y^4 - 0^4) - x(y^2 - 0^2) = c,\\
&\frac{x^3}{3} + \frac{y^4}{4} - xy^2 = c
\end{aligned}$$

που είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (224).

Άσκηση 2. *Να βρεθεί η γενική λύση ή το γενικό ολοκλήρωμα της Δ.Ε.:*

$$y' = \frac{2x + ye^{xy}}{4y - xe^{xy}} \tag{226}$$

Λύση: Από την (226) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{2x + ye^{xy}}{4y - xe^{xy}} \;\Rightarrow\\
(4y - xe^{xy})dy &- (2x + ye^{xy})dx = 0.
\end{aligned}$$

Τότε

$$P(x, y) = -(2x + ye^{xy}), \qquad Q(x, y) = (4y - xe^{xy}) \tag{227}$$

και

$$\begin{aligned}
P'_y &= \Big(-(2x + ye^{xy})\Big)'_y = (-2x)'_y - (ye^{xy})'_y\\
&= 0 - [(y)'_y e^{xy} + y\,(e^{xy})'_y] = -[1e^{xy} + y(xy)'_y e^{xy}] = -(1 + yx)e^{xy},\\
Q'_x &= (4y - xe^{xy})'_x = (4y)'_x - (xe^{xy})'_x = 0 - [(x)'_x e^{xy} + x\,(e^{xy})'_x] =\\
&= -[1e^{xy} + x(xy)'_x e^{xy}] = -[1 + xy(x)'_x]e^{xy} = -(1 + xy)e^{xy}.
\end{aligned}$$

Αρα η (226) είναι πλήρης. Από την (227) $\Rightarrow$ $P(x, y_0) = -(2x + y_0 e^{xy_0})$. Θέτουμε $y_0 = 0$. Τότε $P(x, y_0) = -(2x + 0e^0) = -2x$ και από τον τύπο

$(222) \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\int(-2x)dx+\int_0^y(4y-xe^{xy})dy=c,\\
&-2\frac{x^2}{2}+4\int_0^y ydy-\int_0^y e^{xy}xdy=c,\\
&-x^2+4\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^y-\int_0^y e^{xy}d(xy)=c,\\
&-x^2+2\Big[y^2\Big]_0^y-\Big[e^{xy}\Big]_0^y=c,\\
&-x^2+2(y^2-0^2)-(e^{xy}-e^{x0})=c,\\
&-x^2+2y^2-e^{xy}+1=c.
\end{aligned}
$$

που είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (226).

Άσκηση 3. *Να βρεθεί η γενική λύση ή το γενικό ολοκλήρωμα της Δ.Ε.:*

$$[\sin y+(5-y)\cos x]dx+[(4+x)\cos y-\sin x]dy=0. \tag{228}$$

Λύση: Από την $(228) \Rightarrow$

$$P(x,y)=\sin y+(5-y)\cos x,\qquad Q(x,y)=(4+x)\cos y-\sin x \tag{229}$$

και $\quad P'_y=\Big(\sin y+(5-y)\cos x\Big)'_y=\cos y+\cos x(5-y)'_y=\cos y-\cos x,$

$$Q'_x=\Big((4+x)\cos y-\sin x\Big)'_x=(4+x)'_x\cos y-\cos x=\cos y-\cos x.$$

Αρα η (228) είναι πλήρης. Από την $(229) \Rightarrow$ $Q(x_0,y)=(4+x_0)\cos y-\sin x_0$. Θέτουμε $x_0=0$. Τότε $Q(x_0,y)=4\cos y$ και από τον τύπο (223) $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^x[\sin y+(5-y)\cos x]dx+\int 4\cos ydy=c,\\
&\int_0^x\sin ydx+\int_0^x(5-y)\cos xdx+4\int\cos ydy=c,\\
&\sin y\int_0^x dx+(5-y)\int_0^x\cos xdx+4\sin y=c,\\
&\sin y\Big[x\Big]_0^x+(5-y)\Big[\sin x\Big]_0^x+4\sin y=c,\\
&(x-0)\sin y+(5-y)(\sin x-\sin 0)+4\sin y=c,\\
&x\sin y+(5-y)\sin x+4\sin y=c
\end{aligned}
$$

που είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (228).

Άσκηση 4. *Να βρεθεί η γενική λύση ή το γενικό ολοκλήρωμα της Δ.Ε.:*

$$2x(x+e^y)dx + e^y(y+x^2)dy = 0. \tag{230}$$

Λύση: Από την (230) $\Rightarrow$

$$P(x,y) = 2x(x+e^y), \qquad Q(x,y) = e^y(y+x^2) \tag{231}$$

και $P'_y = 2xe^y$, $\quad Q'_x = 2xe^y$. Αρα η (230) είναι πλήρης. Από την (231) $\Rightarrow$ $Q(x_0,y) = e^y(y+x_0^2)$. Θέτουμε $x_0 = 0$. Τότε $Q(x_0,y) = e^y y$ και από τον τύπο (223) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\int_0^x 2x(x+e^y)dx + \int e^y y dy = c,\\
&2\int_0^x x^2 dx + 2e^y \int_0^x x dx + \int y\Big(e^y\Big)' dy = c,\\
&2\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^x + 2e^y\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^x + ye^y - \int e^y dy = c,\\
&\frac{2}{3}x^3 + e^y x^2 + ye^y - e^y = c
\end{aligned}$$

είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (230).

Άσκηση 5. *Να βρεθεί η γενική λύση ή το γενικό ολοκλήρωμα της Δ.Ε.:*

$$\Big(x - \frac{y}{x^2}\Big)dx + \Big(y + \frac{1}{x}\Big)dy = 0. \tag{232}$$

Λύση: Από την (232) $\Rightarrow$

$$P(x,y) = x - \frac{y}{x^2}, \quad Q(x,y) = y + \frac{1}{x} \tag{233}$$

και $P'_y = -\frac{1}{x^2}$, $\quad Q'_x = -\frac{1}{x^2}$. Αρα η (232) είναι πλήρης. Από την (233) $\Rightarrow$ $P(x,y_0) = x - \frac{y_0}{x^2}$. Θέτουμε $y_0 = 0$. Τότε $P(x,y_0) = x$ και από τον τύπο (222) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\int x dx + \int_0^y \Big(y + \frac{1}{x}\Big)dy = c,\\
&\frac{x^2}{2} + \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^y + \frac{1}{x}\Big[y\Big]_0^y = c,\\
&\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{x} = c
\end{aligned}$$

είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (232).

Άσκηση 6. *Να βρεθεί η γενική λύση ή το γενικό ολοκλήρωμα της Δ.Ε.:*

$$y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}. \tag{234}$$

Λύση: Από την (234) $\Rightarrow$

$$\left(2 + ye^{xy}\right)dx + (-2y + xe^{xy})dy = 0.$$

Τότε

$$P(x,y) = 2 + ye^{xy}, \quad Q(x,y) = -2y + xe^{xy} \tag{235}$$

και

$$P'_y = e^{xy} + xye^{xy}, \quad Q'_x = e^{xy} + xye^{xy}.$$

Αρα η (234) είναι πλήρης. Από την (235) $\Rightarrow$ $Q(x_0, y) = -2y + x_0 e^{x_0 y}$. Θέτουμε $x_0 = 0$. Τότε $Q(x_0, y) = -2y + 0e^0 = -2y$ και από τον τύπο (223) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \left(2 + ye^{xy}\right)dx + \int (-2y)dy = c,\\
&\int_0^x 2dx + \int_0^x e^{xy} d(xy) - 2\frac{y^2}{2} = c,\\
&\Big[2x\Big]_0^x + \Big[e^{xy}\Big]_0^x - y^2 = c,\\
&2x + e^{xy} - e^0 - y^2 = c \quad \Rightarrow 2x + e^{xy} - 1 - y^2 = c
\end{aligned}$$

είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (234).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Να βρεθούν οι γενικές λύσεις (Γ.Λ.) ή τα γενικά ολοκληρώματα (Γ.Ο.) των Δ.Ε.

1. $ydx + (x - y^2)dy = 0$

2. $(x + 2y)dx + 2xdy = 0$

3. $(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy - y)dy = 0$

4. $(2xe^y + e^x)dx + (x^2 + 1)e^y dy = 0$

5. $(x+\sqrt{y^2+1})dx - \left(y - \frac{xy}{\sqrt{y^2+1}}\right)dy = 0$

6. $\left(e^x + \ln y + \frac{y}{x}\right)dx + \left(\frac{x}{y} + \ln x + \sin y\right)dy = 0$

7. $(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$

8. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right)dx + (\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x)dy = 0$

9. $\frac{\sqrt{y}}{x}\,dx + \frac{\ln x}{2\sqrt{y}}\,dy = 0$

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

10. $\left(2xye^{x^2} + \ln y\right)dx + \left(e^{x^2} + \frac{x}{y}\right)dy = 0, \quad y(0) = 1$

11. $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0, \quad y(0) = 0$

12 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ Δ.Ε. ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ.

Έστω ότι $f(t)$, $g(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες, $x = x(t)$, $y = y(t)$ είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Λύνουμε το επόμενο σύστημα με τη **μέθοδο Απαλοιφής**:

$$\begin{cases} x' = ax + by + f(t) & (1) \\ y' = cx + dy + g(t) & (2) \end{cases}$$

Λύση: από την (1) $\Rightarrow$

$$y = \frac{1}{b}[x' - ax - f(t)] \qquad (3) \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{b}[x'' - ax' - f'(t)] \qquad (4)$$

Από την (2) λόγω των (4) και (3) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{b}[x'' - ax' - f'(t)] = cx + d \cdot \frac{1}{b}[x' - ax - f(t)] + g(t).$$

Μετά την απλοποίηση θα λάβουμε Δ.Ε. ως προς μεταβλητή x 2-ας τάξης με σταθερούς συντελεστές:

$$kx'' + lx' + mx = h(t).$$

Έστω ότι η γενική λύση της είναι η $x = x(t, c_1, c_2)$ όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές, τότε $x' = x'(t, c_1, c_2)$ και από την (3) βρίσκουμε

$$y = \frac{1}{b}[x'(t, c_1, c_2) - ax(t, c_1, c_2) - f(t)].$$

Το ζεύγος

$$x = x(t, c_1, c_2), \qquad y = \frac{1}{b}[x'(t, c_1, c_2) - ax(t, c_1, c_2) - f(t)]$$

είναι η γενική λύση του συστήματος (1),(2).

Άσκηση 1. *Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος:*

$$\begin{cases} x' = 2x + y, & (1.1) \\ y' = x + 2y. & (1.2) \end{cases}$$

Λύση: από την (1.1) $\Rightarrow$

$$y = x' - 2x \qquad (1.3) \Rightarrow$$

$$y' = x'' - 2x' \qquad (1.4)$$

Από την (1.2) λόγω των (1.4) και (1.3) $\Rightarrow$

$$x'' - 2x' = x + 2(x' - 2x) \Rightarrow$$

$$x'' - 4x' + 3x = 0 \qquad (1.5).$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (1.5) είναι

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Τότε η (1.5) έχει δυο γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις

$$x_1 = e^{\lambda_1 t} = e^t, \quad x_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{3t}$$

και τη γενική λύση:

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 e^t + c_2 e^{3t} \qquad (1.6)$$

Από την (1.6) $\Rightarrow$

$$x' = c_1 e^t + 3c_2 e^{3t} \qquad (1.7)$$

Από την (1.3) λόγω των (1.6), (1.7) $\quad \Rightarrow$

$$y = c_1 e^t + 3c_2 e^{3t} - 2(c_1 e^t + c_2 e^{3t}) = -c_1 e^t + c_2 e^{3t}.$$

Τότε το ζεύγος

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{3t}, \qquad y = -c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$

είναι η γενική λύση του συστήματος (1.1), (1.2).

Άσκηση 2. *Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος:*

$$\begin{cases} x' = x + y, & (2.1) \\ y' = x - y. & (2.2) \end{cases}$$

Λύση: από την (2.1) $\Rightarrow$

$$y = x' - x \qquad (2.3) \Rightarrow$$

$$y' = x'' - x' \qquad (2.4)$$

Από την (2.2) λόγω των (2.4) και (2.3) $\Rightarrow$

$$x'' - x' = x - (x' - x) \Rightarrow \quad x'' - x' = x - x' + x \Rightarrow$$

$$x'' - 2x = 0 \qquad (2.5).$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (2.5) είναι

$$\lambda^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{2}.$$

Τότε η (2.5) έχει δυο γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις $x_1 = e^{\sqrt{2}t}$, $x_2 = e^{-\sqrt{2}t}$ και τη γενική λύση:

$$x = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} \qquad (2.6)$$

Από την (2.6) $\Rightarrow$

$$x' = c_1\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} - c_2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} \qquad (2.7)$$

Από την (2.3) λόγω των (2.6), (2.7) $\quad \Rightarrow$

$$y = c_1\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} - c_2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} - \left(c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}\right)$$

$$= c_1\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} - c_1 e^{\sqrt{2}t} - c_2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} - c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

$$= \left(\sqrt{2}-1\right) c_1 e^{\sqrt{2}t} - \left(\sqrt{2}+1\right) c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

Τότε το ζεύγος

$$x = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t},$$

$$y = \left(\sqrt{2}-1\right) c_1 e^{\sqrt{2}t} - \left(\sqrt{2}+1\right) c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

είναι η γενική λύση του συστήματος (2.1), (2.2).

Άσκηση 3. *Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):*

$$\begin{cases} x' = 2y, & & (3.1) \\ y' = 2x, \qquad x(0) = 2, \quad y(0) = 2. & & (3.2) \end{cases}$$

Λύση: από την (3.1) $\Rightarrow$

$$y = \frac{1}{2}x', \qquad (3.3) \ \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2}x''. \qquad (3.4)$$

Από την (3.2) λόγω της (3.4) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}x'' = 2x \ \Rightarrow \quad x'' = 4x \ \Rightarrow$$

$$x'' - 4x = 0. \qquad (3.5)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (3.5) είναι

$$\lambda^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{4} \quad \Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2.$$

Τότε η (3.5) έχει δυο γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις $x_1 = e^{2t}$, $x_2 = e^{-2t}$ και τη γενική λύση:

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}. \qquad (3.6)$$

Από την (3.6) $\Rightarrow$

$$x'(t) = 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t}. \qquad (3.7)$$

Από την (3.3) λόγω της (3.7) $\quad \Rightarrow$

$$y = \frac{1}{2}\left(2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t}\right) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-2t}.$$

Τότε, λόγω της (3.6), το ζεύγος

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}, \qquad (3.8)$$

$$y(t) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-2t} \tag{3.9}$$

είναι η γενική λύση του συστήματος (3.1), (3.2). Από (3.8), (3.9) λόγω της (3.2) $\Rightarrow$

$$x(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = 2 \quad \Rightarrow c_1 + c_2 = 2,$$
$$y(0) = c_1 e^0 - c_2 e^0 = 2 \quad \Rightarrow c_1 - c_2 = 2.$$

Από την πρόσθεση αυτων των δυο εξισώσεων $\Rightarrow$

$$2c_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2.$$

Τότε από την πρώτη εξίσωση του παραπάνω συστήματος $\Rightarrow$ $c_2 = 0$. Αντικαθυστώντας τις τιμές $c_1 = 2$, $c_2 = 0$ στις εξισώσεις (3.8), (3.9), λαμβάνουμε τη μοναδική λύση του Π.Α.Τ (3.1), (3.2)

$$x(t) = 2e^{2t}, \quad y(t) = 2e^{2t}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Βρείτε τις γενικές λύσεις των παρακάτω συστημάτων:

1. $\begin{cases} x' = x - 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 12x - 5y, \\ y' = 5x + 12y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x - y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = x - 2y + \sin t, \\ y' = x - y + \cos t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = x - 4y, \\ 4y' = -25x + 4y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = y + \cos t, \\ y' = -x. \end{cases}$

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

8. $\begin{cases} x' = y + t \\ y' = x + e^t, \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y, \qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x, \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 1. \end{cases}$