



ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ - ΒΟΛΟΣ

25^ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Υπό την αιγίδα του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Η Μαθηματική Εκπαίδευση και η σύνθετη
πραγματικότητα του 21^{ου} αιώνα

21 - 22 - 23

ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

ΚΤΙΡΙΟ ΠΑΠΑΣΤΡΑΤΟΥ



ΜΕ ΔΙΕΘΝΗ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ

Πρακτικά

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περιεχόμενα		4
Χαιρετισμός προέδρου Ε.Μ.Ε. και της Κεντρικής Οργανωτικής Επιτροπής		10
Χαιρετισμός Προέδρου Επιστημονικής Επιτροπής		13
Χαιρετισμός Προέδρου Τοπικής Οργανωτικής Επιτροπής		15
Φραγκίσκου Καλαβίση	Η Μαθηματική Εκπαίδευση στην πολυπλοκότητα του σήμερα.	17
Σπυλιανός Νεγρεπόντης	Η παράλογη αποδοκτική δύναμη των Μαθηματικών και η παράλογη αποτελεσματικότητα της της Φυσικής Επιστήμης	25
Didier Nordon	Complication, complexité	51
Didier Nordon Απόδοση: Σόνια Καρούση	ΠΕΡΙΠΛΟΚΟΤΗΤΑ (COMPLICATION), ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ (COMPLEXITY)	55
Paul Ernest	What does the new philosophy of mathematics mean for mathematics education?	60
Paul Ernest απόδοση: Χαρούλα Σταθοπούλου	Ποια είναι η σημασία της της φιλοσοφίας των μαθηματικών για τη μαθηματική εκπαίδευση;	92
Άννα Χρονάκη	Βλέμματα, Ομιλίες και Σιωπές: Όψεις της 'επικοινωνίας' στο πλαίσιο της έρευνας στη διδακτική των μαθηματικών 1^ο Συνεδρία	130
Ανδρέας Αρβανιτογεώργος, Νικολίνα Καβαλιεράτου	Ανάκτηση πληροφοριών από το διαδίκτυο με χρήσιμ. μεθόδων γραμμικής άλγεβρας	173
Βασίλης Τσίτσας, Χαρούλα Σταθοπούλου Μιχάλης Γρ. Βόσκογλου	Hacking της Μαθηματικές έννοιες	185
Κυριακή Τσιόικα	Συλλογισμός δια της μελέτης περιπτώσεων: μια ημίσηχη θεωρία για την επίλυση προβλημάτων και τη μάθηση της Π.Υ και της ανθρώπου	200
Κυριακή Τσιόικα	Νέες τεχνολογίες στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, Η χρήση του μαθηματικού πακέτου Mathematics στη διαδικασία απόδειξης στην έρευνα και διδασκαλία ανώτερων μαθηματικών	212
Έλενα Βλάχου, Αθανάσιος Φυλάκης	Κριτήρια επιλογής γνωστικών θεμάτων στα Μαθηματικά της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης με νέες τεχνολογίες.	225

Βλέμματα, Ομιλίες και Σιωπές:
*Όψεις της 'επικοινωνίας' στο πλαίσιο της έρευνας για τη
διδασκτική των μαθηματικών*

Άννα Χρονάκη
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια
chronaki@uth.gr
Παιδαγωγικό Τμήμα Προσχολικής Εκπαίδευσης
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Περίληψη

Το παρόν κείμενο χαρτογραφεί την έρευνα γύρω από την 'επικοινωνία' στα σχολικά μαθηματικά γύρω από τρεις συνομιλούντες άξονες. Ο πρώτος άξονας αφορά στην προσέγγιση της επικοινωνίας ως αναπαράσταση, ο δεύτερος ως κοινωνική αλληλεπίδραση και ο τρίτος ως κοινωνική πρακτική. Στόχος είναι αυτή η χαρτογράφηση να αποτελέσει εργαλείο τόσο για την οργάνωση μιας εκτενούς βιβλιογραφίας, όσο και για την βαθύτερη κατανόηση των πολλαπλών όψεων της 'επικοινωνίας' στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Παρόλο που το κείμενο αυτό δεν φιλοδοξεί να εξαντλήσει το σύνθετο θέμα της 'επικοινωνίας' στα σχολικά μαθηματικά, μπορεί να διαμεσολαβήσει για μια κριτική ανάγνωση θεωρητικών και μεθοδολογικών επιλογών και, ως εκ τούτου, να εντοπίσει ανοιχτά ερωτήματα και να θέσει νέους προβληματισμούς. Τέλος, η σύνδεση απτών των αξόνων με μεταφορές όπως: βλέμματα, ομιλίες και σιωπές στοχεύει να εστιάσει όχι μόνο στην εμπιστευσιμότητα θεωρητικών τοποθετήσεων αλλά στην αμυσότητα της βιώμενης εμπειρίας.

Εισαγωγή

Επικοινωνώ σημαίνει μοιράζομαι. Η λέξη 'επικοινωνώ' σηματοδοτεί μια ανάγκη τόσο παλιά και τόσο πολυδιάστατη όσο η ίδια η ανθρωπότητα. Ετυμολογικά ο αγγλικός όρος communication που χρησιμοποιούμε για την επικοινωνία, έχει τις ρίζες του στο λατινικό ρήμα communicare το οποίο, σε ελεύθερη απόδοση, σημαίνει κοινοποιώ, χορηγώ, ανταλλά-

σω, συνδέω, συναναστρέφομαι, ή κοινωνιό με την έννοια της συμμετοχής σε μια κοινότητα.

Ωστόσο, η λέξη 'επικοινωνία' σε πολλά σύγχρονα λεξικά θεμελιώνεται στη βίαση όρων όπως 'ανταλλαγή', 'μεταφορά' ή 'μετάδοση' πληροφοριών. Για παράδειγμα, η Εγκυκλοπαίδεια Britannica ορίζει την επικοινωνία ως *"...την ανταλλαγή νοημάτων μεταξύ ατόμων μέσω ενός κοινού συστήματος συμβόλων"* (όπ. αν. στο Sfard και Kieran, 2001, σελ. 46-47). Η Anna Sfard, υπερασπιζόμενη την ιδιαίτερη σημασία της επικοινωνίας στο πλαίσιο κατασκευής μαθηματικών νοημάτων, διαφωνεί με τη χρήση τόσο υπεραπλουστευμένων ορισμών. Εξηγεί δε, ότι η συμβολική έννοια της 'ανταλλαγής' σημασιοδοτεί ότι τα μαθηματικά με τη μορφή ιδεών ή πληροφοριών μπορούν να αντικειμενοποιηθούν και να γίνουν αντιληπτά ως μεταφορά γνώσης από το ένα άτομο στο άλλο αβίαστα, ανώδυνα και αναλοίωτα. Υιοθετώντας την άποψη σύμφωνα με την οποία η παραγωγή και ερμηνεία μαθηματικών νοημάτων δεν είναι ατομική αλλά μια σύνθετη ιστορική, πολιτισμική και κοινωνική υπόθεση, η Sfard υποστηρίζει ότι η ανάγκη για την κοινοποίηση μαθηματικής γνώσης αποτελεί μια από κοινού προσπάθεια επικοινωνίας στη βάση της οποίας η κατασκευή μαθηματικών νοημάτων συνεισφέρει εργαλειακά (βλ. Sfard, 2000, 2001; Sfard & Kieran, 2001).

Σύμφωνα με την Anna Sfard (2008), η μαθηματική σκέψη αποτελεί μορφή 'επικοινωνίας' και στο πρόσφατο βιβλίο της με τίτλο: 'Σκέψη ως Επικοινωνία' μας προκαλεί να επανεξετάσουμε: κυρίαρχες απόψεις για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Βασισμένη σε θεωρήσεις των Vygotsky και Wittgenstein, επανεξετάζει γνωστικές και επιστημολογικές προσεγγίσεις προβληματοποιώντας τον στερεότυπο διαχωρισμό σκέψης-επικοινωνίας. Θέτει ερωτήματα όπως: Είναι αυτό που επικοινωνούμε στα μαθηματικά αντικείμενο σκέψης το οποίο επιτελείται ατομικά από το υποκείμενο και προηγείται κάθε επικοινωνιακής πράξης -όπως μοιάζει να προτείνουν τόσο οι συμπεριφοριστές όσο και οι γνωστικοί ψυχολόγοι; Ή, αντίθετα, πρόκειται για μια διαλογική και συμμετοχική διαδικασία κλαισιοθετημένη στις λογοθετικές πρακτικές (discourses) μιας κοινότη-

τας; Η ίδια, προτείνοντας τον όρο *επικοινωνιογνωστικός* (communicativism), αποτολμιά την εισήγηση μιας προσέγγισης η οποία θεωρεί την συλλογική επικοινωνία και την γνωστική δεξιότητα ως αλληλένδετος όψεις του ίδιου φαινομένου. Κατά συνέπεια, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η ίδια η επικοινωνία συνδέεται και παράλληλα αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της 'κουλτούρας' μιας σχολικής τάξης (βλ. Mercer, 1995, Edwards & Mercer, 1987). Ο σύνθετος όρος 'κουλτούρα' σύμφωνα με τον Stuart Hall (1997/2002) αφορά κύρια τη δημιουργία 'κοινών νοημάτων' (shared meanings). Η κουλτούρα δεν είναι απλά και μόνο γνώση για μια σειρά από 'πράγματα' (π.χ. επιστήμες, καλές τέχνες, παράδοση κλπ) μιας κοινότητας, αλλά αντίθετα αφορά τους τρόπους παραγωγής νοήματος γύρω από αυτά.

Πρόσφατα, παρατηρούμε μια πειστική έμφαση για την ανάπτυξη επικοινωνιακών δεξιοτήτων στο πλαίσιο της αναμόρφωσης των αναλυτικών προγραμμάτων, τα οποία αντανακλούν στόχους της Κοινωνίας της Πληροφορίας. Έτσι, τα 'νέα' αναλυτικά προγράμματα για τα μαθηματικά τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση μοιάζει να επιβάλλουν την ενεργό επικοινωνία μεταξύ των εμπλεκομένων στη μάθηση (εκπαιδευτικών, μαθητών, περιεχομένου, απτών, έντυπων και ψηφιακών μέσων και εργαλείων). Πίσω από τις γενικότερες τάσεις αναμόρφωσης σχολικών εγχειριδίων και παιδαγωγικού υλικού εδράζει η πεποίθηση ότι η ποιότητα της επικοινωνίας που αναπτύσσεται σε επίπεδο προφορικού ή γραπτού λόγου επηρεάζει την ποιότητα διδασκαλίας και μάθησης στα μαθηματικά (Cobb & Bauersfeld, 1995; Lambert & Cobb, 1998; Pitie, 1998). Η θέση αυτή μας επιτρέπει να ισχυριστούμε ότι το 'να κάνει' κανείς μαθηματικά είναι συνώνυμο με το να διαβάζει, να μιλάει και να γράφει μαθηματικά –με άλλα λόγια να 'επικοινωνεί' μαθηματικά. Παρ'όλα αυτά, το έργο της ανάπτυξης αυτών των ικανοτήτων συνεχίζει να είναι θολό και να προκαλεί την καθημερινή ισορροπία της σχολικής τάξης των μαθηματικών (Niss, 1999).

Το ερευνητικό ενδιαφέρον για την κατανόηση και εννοιολόγηση του τι είναι τελικά η επικοινωνία στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης

δεν είναι νέο. Οι Nerida Ellerton και Philip Clarkson (1996) εντοπίζουν το ενδιαφέρον αυτό στα κείμενα του Bryne πριν από πενήντα περίπου χρόνια. Εκεί συναντάμε τις πρώτες αναφορές σε πτυχές της χρήσης γλώσσας στο πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών. Ο Bryne υποστήριξε ότι: *«...τα λόγια είναι κρίκοι στην αλυσίδα της επικοινωνίας και σύμβολα των μαθηματικών εννοιών»*. Το 1972, ο Aίκεν παρουσιάζει μια εργασία η οποία εστιάζει στο λόγο που αναπτύσσεται στο μάθημα των μαθηματικών, και το 1979, οι Austin και Howson παρουσίασαν ένα πρώτο θεωρητικό πλαίσιο για την αξιολόγηση της επικοινωνίας όπως αυτή διαμορφώνεται στη σχολική τάξη των μαθηματικών. Στο πλαίσιο αυτό είχαν ληφθεί υπόψη βασικοί παράγοντες όπως το γλωσσικό επίπεδο των παιδιών, η κουλτούρα των συμμετεχόντων, καθώς και οι δεξιότητες τους για επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση ιδεών (όπ. αν. στο Ellerton & Clarkson, 1996, σ. 987).

Σε πρόσφατες μετα-αναλύσεις ερευνών που αφορούν ζητήματα γλώσσας και επικοινωνίας στα μαθηματικά, παρατηρείται μια στροφή από την αντίληψη ότι, *πρώτον* η επικοινωνία στα μαθηματικά σχετίζεται μόνο με την χρήση του μαθηματικού ιδιώματος (δηλ. με εξειδικευμένο λεξιλόγιο, ορολογία, συμβολισμό και αλγορίθμους), και *δεύτερον* ότι το μαθηματικό ιδίωμα υιοτάσσεται παθητικά στη 'φυσική' γλώσσα όπως είχε υποστηριχθεί, νωρίτερα, από τους Austin και Howson (Morgan, 2000, Sfard, 2001). Οι ερευνητές σήμερα δίνουν περισσότερη έμφαση στη γλώσσα-σε-χρήση (language-in-use) παρά στη 'σωστή' χρήση της μαθηματικής γλώσσας. Για παράδειγμα, σύγχρονες μελέτες επικεντρώνονται στην μικρο-ανάλυση των διαλόγων που αναπτύσσονται μεταξύ δασκάλων-μαθητών στο πλαίσιο μαθημάτων. Ωστόσο, η Anna Sfard επισημαίνει ότι ενώ *«...οι παλιές δομές έχουν κλονισθεί, [...] νέες βάσεις δεν είναι ακόμη πλήρως διαμορφωμένες»* (2001, σελ.3). Αδυναμίες διαπιστώνονται τόσο στα εννοιολογικά εργαλεία όσο και στα μεθοδολογικά πλαίσια που υποστηρίζουν την έρευνα για την επικοινωνία στα μαθηματικά. Την ίδια στιγμή όμως γίνεται παραδεκτό ότι η αντιμετώπιση αυτού του τύπου των αναγκών απαιτεί χρόνο και συλλογική προσπάθεια.

Στόχος, λοιπόν, εδώ είναι να γίνει μια προσπάθεια χαρτογράφησης των θεωρητικών και μεθοδολογικών προσεγγίσεων που αποπειρούνται τη μελέτη της επικοινωνίας στο πλαίσιο των μαθηματικών σε σχολικές δραστηριότητες. Η προσπάθεια αυτή πραγματώνεται γύρω από τρεις αλληλένδετους άξονες: ο πρώτος άξονας αφορά στην προσέγγιση της επικοινωνίας ως *αναπαράσταση*, ο δεύτερος ως *κοινωνική αλληλεπίδραση* και ο τρίτος ως *κοινωνική πρακτική*. Οι τρεις αυτοί άξονες συζητούνται αναλυτικά στις παρακάτω ενότητες.

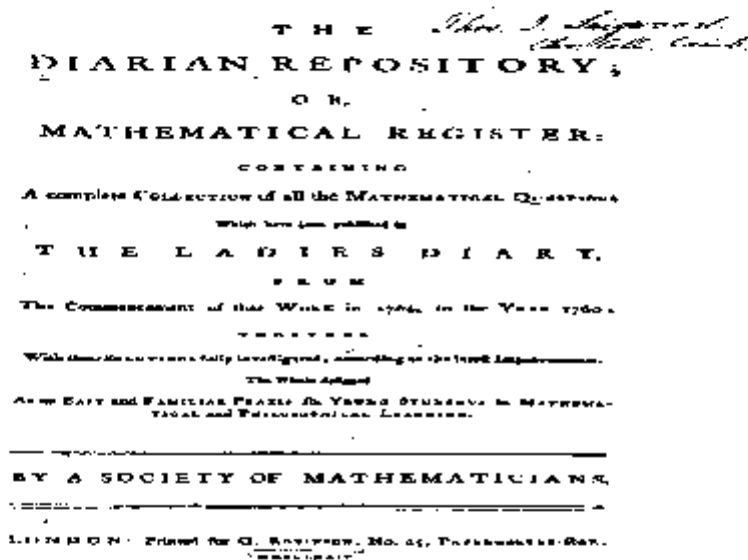
Βλέμματα: η επικοινωνία ως αναπαράσταση

Δεν θα ήταν υπερβολή ο ισχυρισμός ότι τα μαθηματικά τα ίδια αποτελούν ταυτόχρονα τα αναπαραστατικά μέσα, αλλά και τις διαδικασίες αναπαράστασης καταστάσεων και φαινομένων της πραγματικότητας με στόχο την παρατήρηση και την διατύπωση των μεταξύ τους σχέσεων. Για παράδειγμα, τα γνωστά αριθμητικά σύμβολα 0, 1, 2, ..., 9 αναπαριστούν συγκεκριμένες οντότητες (δηλ. τα 10 ψηφία) αλλά και σχέσεις μεταξύ αυτών των οντοτήτων (δηλ. το δεκαδικό σύστημα). Έτσι επιτρέπουν, από την μια μεριά, την οργάνωση μιας πραγματικότητας σε πολλούς τομείς της καθημερινής ζωής (π.χ. αγοραπωλησίες, μέτρηση κλπ), και από την άλλη, την ανάπτυξη ενός συνόλου θεωριών για το τι είναι αριθμός. Η όψη της επικοινωνίας στα σχολικά μαθηματικά ως *αναπαράσταση* στοχεύει να δημιουργήσει άμεσους συσχετισμούς με το μαθηματικό ιδίωμα και παράλληλα να επιλύσει ζητήματα που αφορούν την έκφραση, την ανάγνωση και την μετάφραση μέσω και μεταξύ αναπαραστάσεων. Σ' αυτή την ενότητα θα αποπειραθούμε να ανοίξουμε αυτή την ιδιαίτερα σύνθετη συζήτηση έχοντας κατά νου τη δυναμική σχέση μεταξύ αναπαράστασης, επικοινωνίας και πραγματικότητας.

Μαθηματικό ιδίωμα και αναπαραστάσεις

Η επικοινωνία στα μαθηματικά ως επιστήμης αλλά και στα μαθηματικά ως σχολικής δραστηριότητας, στηρίζεται στην κατανόηση, χρήση και παραγωγή του μαθηματικού ιδιώματος ή ύφους (mathematical register). Στη γλωσσολογία με τον όρο ιδίωμα, γλωσσική ποικιλία ή καταστασιακό ύφος (register) αναφερόμαστε στο υποσύνολο μιας γλώσσας με

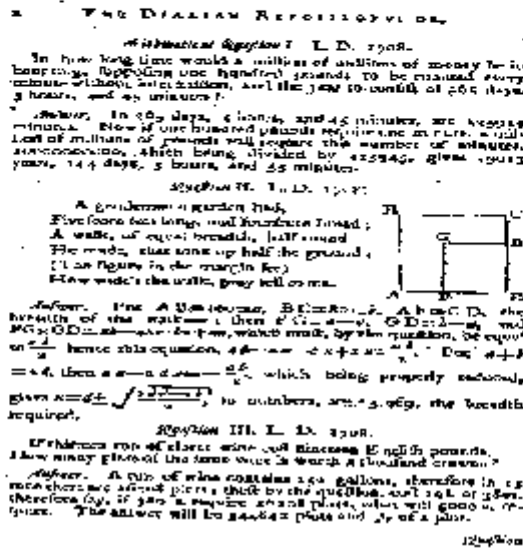
συγκεκριμένο στόχο και ακροατήριο. Η έννοια του ιδιώματος έχει αναλυθεί από τον Martin Halday (1964) στη βάση τριών χαρακτηριστικών; το πεδίο (field) αναφοράς, τους ρόλους (tenor) που επιτελούν οι συμμετέχοντες και στις σχέσεις μεταξύ τους, και τους τρόπους (mode) επικοινωνίας. Κατ' επέκταση, το μαθηματικό ιδίωμα περιλαμβάνει όχι μόνο τα μαθηματικά σύμβολα, τους αλγορίθμους και τους κανόνες, αλλά ταυτόχρονα όλο το κοινωνικο-σημειωτικό πλαίσιο που παράγει, αναπαράγει και διαχέει μαθηματική γνώση και δεξιότητες.



Εικόνα 1. *Ladies' Diary: 1704-1760: Ημερολόγιο των Κυριών*
(εξώφυλλο)

Η έμφαση για τη δημόσια κατανόηση και χρήση του μαθηματικού ιδιώματος γίνεται εμφανής από πολύ νωρίς. Για παράδειγμα, παρατηρούμε σε έκδοση του *Ημερολόγιου των Κυριών* (The Ladies' Diary), στις αρχές του 18^{ου} αιώνα και συγκεκριμένα κατά το έτος 1706, η οποία μάλιστα φέρει τον τίτλο 'Μαθηματικό Ιδίωμα' (βλ. εικόνα 1), την προσπάθεια της Εταιρείας των Μαθηματικών (Society of Mathematicians) στην Αγγλία να φέρει το ευρύτερο κοινό σε επαφή με μια ολοκληρωμένη συλλογή μαθηματικών προβλημάτων. Μέσω αυτής τη συλλογής οι κυρίες

της εποχής μπορούσαν να ψυχαγωγηθούν και παράλληλα να εντρυφήσουν στα άδητα του μαθηματικού συλλογισμού).



Εικόνα 2. Ladies' Diary: 1704-1760 (εικόνα επευφύλλου)

Στο Ημερολόγιο των Κυριών, όπως φαίνεται από το παράδειγμα επευφύλλου στην εικόνα 2, κυριαρχούν συγκεκριμένοι τρόποι (modes) όπως η συμβολική γλώσσα και οι αφαιρετικές αναπαραστάσεις, οι οποίοι αποτελούν έκφραση της 'τυπικής' μαθηματικής γλώσσας. Αντίθετα, ο πίνακας του Hendrik van Balen στην εικόνα 3, με θέμα 'Αυτοί που Μετρούν' (The Measurers) ο οποίος βρίσκεται στο Μουσείο Ιστορίας των Επιστημών στην Οξφόρδη, αποτελεί φυσική αναπαράσταση της μέτρησης ως κοινωνικής πρακτικής. Τα ποικίλα όργανα μέτρησης ή οι μέθοδοι μέτρησης δεν παρουσιάζονται από-πλαισιωμένα, αλλά αντίθετα στόχος στόχος της αναπαράστασης αυτής είναι να τονιστεί η περίπλοκη σχέση της 'μέτρησης' με πτυχές φαινομένων της πραγματικότητας όπου η ίδια διαμεσολαβεί ποικίλες δράσεις.



Εικόνα 3. Αυτοί που Μετρούν: Hendrick van Balen, *Museum of the History of Science, Oxford* (οπ. αν. στο Pimm, 1995, σελ.136)

Σήμερα, δυνητικά, οι σύγχρονοι μαθηματικοί έχουν πρόσβαση σε πληθώρα απτών και ψηφιακών μέσων και εργαλείων. Παρά το γεγονός ότι οι υπολογιστές καθώς και τα κατάλληλα λογισμικά συνεχίζουν να μην είναι ευρέως προσβάσιμα δε μπορούμε να αγνοήσουμε το γεγονός ότι η ανάπτυξη συγκεκριμένων εκπαιδευτικών λογισμικών όπως περιβάλλοντα συμβολικής έκφρασης, προγραμματισμού και μοντελοποίησης (π.χ. logo, lego/logo, modelus), περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας (π.χ. cabri, GSP, geogebra), περιβάλλοντα διαχείρισης δεδομένων (π.χ. excel, tabletop, Function Probe) τείνουν να μετασχηματίζουν το περιβάλλον μάθησης και διδασκαλίας προσφέροντας επιπλέον δυνατότητες σε διαδικασίες επικοινωνίας στα μαθηματικά.

Οι δυνατότητες αυτές δεν περιλαμβάνουν μόνο την οπτική αναπαράσταση μαθηματικών εννοιών (Dubinsky & Tall, 1994), αλλά και την σύνδεση μεταξύ πολλαπλών αναπαραστάσεων (Kissano, 2002), το δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων (Laborde, 1993), την ενεργή κατασκευή της μαθηματικής γνώσης μέσω συμβολικής έκφρασης και προγραμματισμού (Hoyles & Sutherland, 1989), την επαλήθευση και δοκιμή μαθηματικών υποθέσεων (Andersen, 2003, Mudaly, 2004). Ωστόσο, η τεχνολογία δεν είναι ένας παράγοντας που εμπλουτίζει (ή παρεμποδίζει) από μόνη της τη μάθηση. Το αποτέλεσμα της χρήσης της τεχνολογί-

ας δεν εξαρτάται μόνο από το είδος του υλικού ή του λογισμικού, αλλά και από το ρόλο που διαδραματίζει η τεχνολογία σε συνάρτηση με το ρόλο του εκπαιδευτικού και των μαθητών στο πλαίσιο τάξης. Υπ' αυτή την έννοια πιο συμβατικές τεχνολογίες, όπως ο προφορικός λόγος και η γραφή, δεν αντικαθίστανται από την ψηφιακή τεχνολογία αλλά δρουν διαλογικά παράγοντας επικοινωνιακές διαδικασίες οι οποίες άλλοτε ενισχύουν και άλλοτε προκαλούν εγκαθιδρυμένες συνήθειες και νόρμες στην κουλτούρα μιας τάξης μαθηματικών (Chirovaki, 2000a, 2000b).

Ζητήματα αναπαράστασης: έκφραση, ανάγνωση, μετάφραση

Συζητώντας την προσέγγιση της επικοινωνίας στα σχολικά μαθηματικά ως *αναπαράσταση* θα πρέπει να διακρίνουμε ανάμεσα σε τρία αλληλένδετα ζητήματα τα οποία χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης: *πρώτον*, την έκφραση μαθηματικών ιδεών μέσω αναπαραστάσεων, *δεύτερον*, την ανάγνωση συγκεκριμένων αναπαραστάσεων, και *τρίτον*, τη μετάφραση (ή τη μετασορά γνώσης) μεταξύ πολλαπλών αναπαραστάσεων.

Στο πλαίσιο σύγχρονων θεωριών μάθησης είναι ευρέως παραδεκτό ότι η δική μας πρόσβαση στη σκέψη τόσο των μικρών παιδιών όσο και των ενηλίκων γίνεται μέσω των αναπαραστάσεων που μπορούν να δημιουργήσουν στη βάση συγκεκριμένων έργων ή δραστηριοτήτων. Οι αναπαραστάσεις αυτές μπορεί να είναι λεκτικές, συμβολικές ή εικονικές και συνήθως εκφράζουν μερικές και συχνά υποκειμενικές κατανοήσεις του φαινομένου υπό συζήτηση. Για παράδειγμα, ο Martin Hughes (1986), η Marit Johnsen-Hoines (1987), και πιο πρόσφατα η Maullry Worthington μαζί με την Elizabeth Carruthers (2003) περιγράφουν πως ακόμη και πολύ μικρά παιδιά μπορούν να εκφράσουν με διάφορους τρόπους την κατανόηση του αριθμού και απλών αριθμητικών πράξεων χρησιμοποιώντας διάφορες εικονικές ή συμβολικές αναπαραστάσεις.



Εικόνα 4. Γλυπτά με ράβδους του Leonardo Da Vinci σε κολλέγιο Μαθηματικών (<http://math.smith.edu/center/node/26>)

Η αναπαράσταση μιας μαθηματικής ιδέας υπό τη στιγμή που αποτυπώνεται οπτικά ή λεκτικά σε κάποιο μέσο επιζητεί θεατές ή/και αναγνώστες. Στην εικόνα 4, φοιτήτριες ενός κολλεγίου Μαθηματικών στην Αμερική αναπαριστούν μαθηματικές έννοιες με τις ράβδους του Da Vinci (βλ. <http://math.smith.edu/center/node/26>). Σύντομα όμως γίνεται κατανοητό ότι η διαδικασία ανάγνωσης οπτικών αναπαραστάσεων δεν είναι εύκολη και απλή υπόθεση. Πως θα μπορούσε κάποιος να συνδέσει τα γλυπτά της εικόνας 6 με συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες; Τι είδους δεξιότητες ή ποιο πλαίσιο δράσης επιτρέπει στους θεατές να 'βλέπουν' τα γλυπτά αυτά ως μαθηματικά αντικείμενα; Η δεξιότητα να βλέπει κανείς τα μαθηματικά που 'κρύβονται' σε αναπαραστάσεις συνδέεται όχι μόνο με πρότερη γνώση των συγκεκριμένων μαθηματικών που εμπλέκονται στην αναπαράσταση, αλλά και με τη κατανόηση του πλαισίου των λογοθετικών πρακτικών όπου εντάσσεται η κατασκευή και η ερμηνεία συγκεκριμένων αναπαραστάσεων. Είναι σημαντικό να έχουμε κατά νου ότι η δεξιότητα ανάγνωσης των μαθηματικών που ενσωματώνονται σε αναπαραστάσεις εντάσσεται κύρια στο πολιτισμικό πλαίσιο μέσω του οποίου οι αναγνώστες αποδίδουν νοήματα και κατανοούν τον κόσμο γύρω τους (Saxe, 1991).

Ο David Pimm (1995) ανασκοπεί διάφορα μέσα αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή και τον πειραματισμό με τις γεωμετρικές, μαθηματικές, αλγεβρικές, έννοιες, όπως: αναδιπλούμενο χαρτί, αφίσες, διαγράμματα, άβρακες, αριθμομηχανές, πλακίδια, γεωπίνακες, ξυλάκια Cuisenaire, υλικό Dienes κ.α. Η συνεχώς αυξανόμενη παρουσία εξειδικευμένων εκπαιδευτικών μέσων όπως χειραπτικά υλικά και εκπαιδευτικά λογισμικά έχει στόχο να διευκολύνει την επικοινωνία της μαθηματικής γνώσης. Όμως οι Paul Cobb, Elna Yackel και Terry Wood (1992) σε μια λεπτομερή έρευνα στη βάση διδακτικών πειραμάτων εξηγούν πως τα αναπαραστατικά μέσα (π.χ. υλικό Dienes) βασίζονται κύρια στις υποκειμενικές ερμηνείες των συμμετεχόντων. Ο Labiowicz (1985) επίσης είχε καταλήξει σε παρόμοια συμπεράσματα, εξηγώντας ότι πολλοί μαθητές της τρίτης τάξης δημοτικού βλέπουν το 600, όταν κοιτάζουν τα τουβλάκια Dienes σε διάταξη 10x10x10 -τα οποία αναπαριστούν κανονικά το 1000. Κι αυτό γιατί δεν υπολογίζουν τα τουβλάκια που υπάρχουν ενδιάμεσα. Ως αποτέλεσμα, οι μαθητές αρχικά δε βλέπουν απαραίτητα τις έννοιες που εμείς θέλουμε να τους οδηγήσουμε να δουν. Σύμφωνα με τους Cobb, Yackel και Wood (1992) η απλή επαφή με αναπαραστάσεις δεν αρκεί για να ανακαλύψουν οι μαθητές μαθηματικά. Η επίλυση των ασαφειών των μαθηματικών εννοιών που μεταφέρονται μέσω της φυσικής γλώσσας ή των συμβολικών συστημάτων δε σχετίζεται πάντα με την ακριβή χρήση της λεκτικής ή οπτικής, στατικής ή δυναμικής αναπαράστασης. Στην πραγματικότητα, όλα τα μέσα αναπαράστασης φαίνεται ότι άλλοτε περιορίζουν και άλλοτε διευρύνουν τις δυνατότητες του ατόμου για την κατανόηση της έννοιας. Η Janet Ainley (2000) μελετώντας τη διαφάνεια των γραφημάτων τονίζει ότι το νόημά τους σε πολλές περιπτώσεις δεν γίνεται εύκολα αντιληπτό από μαθητές. Μάλιστα παρατηρεί ότι, μερικές φορές, αντί να διευκολύνουν την κατανόηση της έννοιας, δημιουργούν σύγχυση ή ακόμη εμποδίζουν τη μάθηση.

Ο Gerard Vergnaud κατανοεί το πρόβλημα της ανάγνωσης μαθηματικών σε αναπαραστάσεις ως ένα διαδραστικό μεταφραστικό παιχνίδι μεταξύ τριών οντοτήτων: της αναφοράς, του σημαϊνόμενου και του σημαϊνοντος. Η αναφορά είναι ο πραγματικός κόσμος με τον οποίο πρέπει να

έρθει σε επαφή ο μαθητής και να ενεργήσει πάνω σ' αυτόν. Το σημαίνον συνδέεται με το γνωστικό πεδίο των εσωτερικών αναπαραστάσεων όπου ο μαθητής αναγνωρίζει σταθερές, καταλήγει σε συμπεράσματα, δρά και κάνει προβλέψεις. Το σημανόμενο είναι το συμβολικό σύστημα, όπως η φυσική και μαθηματική γλώσσα, που χρησιμοποιεί ο μαθητής για να επικοινωνήσει τα μαθηματικά νοήματα που κατασκευάζει ως εσωτερικές αναπαραστάσεις (Vergnaud, 1987, σ. 229).

Σε πρόσφατες συζητήσεις μεταξύ θεωρητικών από τη σκοπιά της πλαισιοθετημένης νόησης (Lave, 1988), των κοινωνιολόγων της μαθηματικής εκπαίδευσης (Dowling, 1998) και των μεταδομιστών της κριτικής ψυχολογίας (Walkerdine, 1988), προκύπτει ότι η ερμηνεία της μαθηματικής πληροφορίας σε ποικίλα πλαίσια βασίζεται στη λανθασμένη υπόθεση ότι η *'μετάβαση'* ή *'μεταφορά'* (*transfer*) ανάμεσα στα διάφορα πλαίσια (ή πρακτικές) γίνεται χωρίς πρόβλημα. Ο όρος *'μετάβαση'* αναφέρεται στη χρήση της μαθηματικής γνώσης και των δεξιοτήτων από μια κατάσταση σε άλλη (π.χ., η εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης στην καθημερινή δραστηριότητα, η προσαρμογή θεμάτων εκτός σχολείου σε παιδαγωγικές πρακτικές). Ο Paul Dowling (1998), αναλύει την υιοθέτηση *'ρεαλιστικών'* δραστηριοτήτων στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Μεγάλης Βρετανίας, κι εξηγεί τον τρόπο με τον οποίο μια τέτοια πρακτική μπορεί να οδηγήσει στη μυθοποίηση της εικόνας του αντικείμενου των μαθηματικών ως μιας ισχυρής παγκόσμιας γλώσσας.

Η Jean Lave (1988), υιοθετώντας μια ριζοσπαστική θέση, υποστηρίζει ότι η μετάβαση γνώσης σε πλαίσια εντός και εκτός σχολικών πρακτικών είναι εξ' ορισμού προβληματική και υποστηρίζει ότι κάτι τέτοιο αποτελεί ουτοπικό εγχείρημα (σημ. το θέμα αυτό συζητείται αναλυτικότερα στα παρακάτω). Ο Jeff Evans (1999) διαπιστώνει ότι η μετάβαση της μάθησης σε διαφορετικές καταστάσεις δεν είναι αδύνατη, αλλά είναι προβληματική. Ωστόσο, βασιζόμενος στη Valerie Walkerdine (1988), ισχυρίζεται ότι είναι δυνατό να χτίσουμε γέφυρες μεταξύ πλαισίων (ή πρακτικών) μέσω της αναζήτησης των σχέσεων που υπάρχουν και των διαφόρων μορφών λόγου που εμπλέκονται και συμμετέχουν στη κατα-

σκευή 'ενοιολογικών αλυσίδων' (Evans, 1999, σ. 30).

Η επικοινωνία ως αναπαράσταση έχει συγκεντρώσει, και συνεχίζει να συγκεντρώνει, το αμείωτο ενδιαφέρον τόσο στη χρήση ολόένα και περισσότερο αισθητικά και γνωσιακά κατάλληλου υλικού, όσο και στο σχεδιασμό μαθησιακών περιβαλλόντων στη βάση αναπαραστάσεων. Όμως, η ανάγκη ερμηνείας της δυσκολίας να 'δούμε' τα μαθηματικά σε συγκεκριμένες στατικές ή δυναμικές αναπαραστάσεις, αλλά και η δυσκολία της μετάβασης γνώσης μεταξύ αναπαραστατικών μέσων μας οδηγεί στην επιμέρους ανάγκη να διευρύνουμε τον τρόπο που νοηματοδοτούμε την ίδια την επικοινωνία.

Ομιλίες: η επικοινωνία ως 'κοινωνική' αλληλεπίδραση

Η ανάπτυξη και η κατασκευή μαθηματικών νοημάτων επιτελείται στο πλαίσιο οργανωμένων καταστάσεων οι οποίες εμπλέκουν τη δράση και την αλληλεπίδραση τόσο μεταξύ υποκειμένων όσο και μεταξύ υποκειμένων και εργαλείων. Έτσι, παράλληλα με την προσέγγιση της επικοινωνίας ως έκφρασης μέσω αναπαραστάσεων (όπως εξετάσαμε στην προηγούμενη ενότητα), η μελέτη της επικοινωνίας διευρύνεται στη βάση της οργάνωσης των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων. Η εστίαση αυτή υποστηρίζει την προβληματοποίηση μια σειράς ερωτημάτων, όπως: Πώς τα άτομα κατασκευάζουν μαθηματική γνώση καθώς δρουν και αλληλεπιδρούν σε ομάδες μαζί ή χωρίς τον εκπαιδευτικό στο κοινωνικό περιβάλλον της σχολικής τάξης; Ποια είναι η επιρροή των ειδικών ή των συμμαθητών στη διαδικασία κατασκευής μαθηματικών νοημάτων; Τι είδους κανόνες και νόρμες συμπεριφοράς χαρακτηρίζουν αυτές τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις και πως αυτές αλλάζουν ή διαφοροποιούνται;

Αν και η θεώρηση του 'κοινωνικού' αποτελεί τις τελευταίες δεκαετίες μια αναμφίβολα σημαντική εστίαση, η συσχέτιση μεταξύ κοινωνικής αλληλεπίδρασης, επικοινωνίας και μάθησης αποτελεί αντικείμενο διαφορετικών προσεγγίσεων (βλ. de Abreu, 2000, Sierpinska, 1998, Cobb & Bauersfeld, 1995). Εδώ, θα παρουσιάσουμε εν συντομία τρία κύρια ε-

ρευνητικά ρεύματα (όπως τάσεις που συντάσσονται με επικοδομιστικές, αλληλεπιδραστικές και κοινωνικο-πολιτισμικές προοπτικές) τα οποία έχουν επηρεάσει την έρευνα στη διάσταση της επικοινωνίας ως 'συμμετοχή' ή ως 'αλληλεπίδραση'.

Κοινωνική αλληλεπίδραση και γνωστική ανάπτυξη

Η ερευνητική ομάδα της Anne-Nelly Perret-Clermont στη Γενεύη εκφράζει μια ανανεωμένη θεώρηση της μάθησης για τα μαθηματικά, γνωστή και ως νέο-Πιαζετιανή. Οι ερευνητές αυτοί υποστηρίζουν, βασισμένοι στο έργο του Piaget, ότι «...η κοινωνική αλληλεπίδραση είναι αναγκαία για την ανάπτυξη της λογικής, της στοχαστικότητας και της αυτοαντίληψης» (όπ. αν. στο Cobb & Bauersfeld, 1995, p. 6). Έτσι η μελέτη των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων αποτελεί το κύριο μέλημα του ερευνητικού τους προγράμματος με στόχο τη μελέτη γνωστικών διαδικασιών μάθησης στα μαθηματικά. Σε αντίθεση με τον Vygotsky που υποστήριξε την υπεροχή του κοινωνικού έναντι του ατομικού παράγοντα, η ομάδα της Γενεύης θεωρεί ότι η διαπροσωπική αλληλεπίδραση αποτελεί απλά το ερέθισμα που προκαλεί γνωστική σύγκρουση και που τελικά οδηγεί το άτομο στην αναδιοργάνωση των γνωστικών δομών σκέψης. Στο πλαίσιο της ερμηνείας τους οι μαθητευόμενοι προσπαθώντας να επιλύσουν αυτές τις γνωστικές συγκρούσεις, αντιλαμβάνονται βαθύτερα τις δράσεις σε επιμέρους έργα και κατασκευάζουν όλο και πιο εκλεπτυσμένα νοητικά σχήματα (Perret-Clermont, 1991).

Η ερμηνεία αυτή μοιάζει να δανείζεται στοιχεία από τη θεώρηση του ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού (von Glasersfeld, 1995) όπου η μάθηση νοηματοδοτείται ως μια συνεχής διαδικασία 'αυτο-οργάνωσης'. Σύμφωνα με τον Ernst von Glasersfeld, κύριο εκπρόσωπο αυτού του ρεύματος, η αλληλεπίδραση με άλλους συντελεί στην οργάνωση και αναδιοργάνωση της ατομικής δράσης και όχι στην ανέγερση μιας αντικειμενικής αλήθειας ή θέσης προς την αλήθεια. Η αλήθεια (μέσω χρήσης της γλώσσας) είναι πάντα υποκειμενική και συνδέεται με την αποτελεσματική ή βιώσιμη οργάνωση της δραστηριότητας του καθενός (von Glasersfeld, 1995). Έτσι, λοιπόν, η επικοινωνία θεμελιώνεται ως μια πε-

ρίπλοκη διαδικασία αμοιβαίας προσαρμογής όπου τα άτομα τείνουν να διαπραγματεύονται έννοιες τροποποιώντας συνεχώς τις ερμηνείες που αποδίδουν σε επιμέρους νοήματα.

Οι παραπάνω απόψεις μοιάζει να βρίσκουν γόνιμο έδαφος στο πρόγραμμα μιας σειράς ερευνητικών μελετών τις οποίες ηγείται η ομάδα ερευνητών στο Πανεπιστήμιο του *Purdue* αποτελούμενοι μεταξύ άλλων από τους Paul Cobb, Grayson Wheatley, Terry Wood και Erna Yackel. Η επικοινωνία αποτελεί τον πυρήνα για την τεκμηρίωση μιας θεώρησης για τη διαδικασία μάθησης των μαθηματικών ως αναζήτηση (Cobb, 1991, p. 13). Και' επέκταση η διδασκαλία των μαθηματικών ως αναζήτηση (*inquiry mathematics teaching*) χαρακτηρίζεται από ειδικούς επικοινωνιακούς κανόνες οι οποίοι ενθαρρύνουν την ενεργή οικοδόμηση και διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος από τους συμμετέχοντες μαθητές και μαθήτριες (βλ. Cobb, 1995 για μια εκτενή μελέτη). Μεθοδολογικά, ως μονάδα ανάλυσης, οι ερευνητές χρησιμοποιούν την εργασία των μαθητών σε μικρές ομάδες όπου ο/η εκπαιδευτικός παρεμβαίνει, ανατροφοδοτεί και εννοχοποιεί τη μαθησιακή διαδικασία. Βασική θέση των θεωρητικών τους τοποθετήσεων αποτελεί η άποψη ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών ή μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικών δημιουργεί ευκαιρίες για διαπραγμάτευση εννοιών και ανάπτυξη κοινών αντιλήψεων για την κατασκευή μαθηματικών νοημάτων (Cobb, 1995).

Στο πλαίσιο αυτών των μελετών εισάγεται ο όρος 'κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες' (*sociomathematical norms*), ο οποίος περιγράφει το σύνολο αξιών, κανόνων και συνθηκών διεξαγωγής της μαθηματικής δραστηριότητας στη σχολική τάξη. Για παράδειγμα, οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες προσπαθούν να απαντήσουν ερωτήματα όπως: Τι θεωρείται αξιωματική ή εκλεπτυσμένη μαθηματική λύση; Ποιοί μπορεί να ειδοθούν ως αποδεκτοί τρόποι ομιλίας, γραφής και αλληλεπίδρασης στο πλαίσιο μαθηματικών έργων; Το ενδιαφέρον των ερευνητών εστιάζει στο πως οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες δημιουργούνται και σταθεροποιούνται στην τάξη των μαθηματικών και πως τελικά προωθούν τη μάθηση. Το έργο τους οδήγησε στην ανάπτυξη της έννοιας της αναστοχα-

στικής πρακτικής λόγου (*reflective discourse*) στις τάξεις των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, οι Paul Cobb, Kay McClain και Joy Whitenack γράφουν ότι μέσω αυτής της αναστοχαστικής πρακτικής "... η μαθηματική δραστηριότητα έχει αντικειμενοποιηθεί και αποτελεί σαφές θέμα συζήτησης" (1997, π. 258). Ο Paul Cobb, συνοψίζοντας τα ερευνητικά αποτελέσματα της ομάδας, υποστηρίζει ότι η αναστοχαστική πρακτική που ενθαρρύνει η προσέγγιση της διδασκαλίας των μαθηματικών ως *αναζήτηση* συνδέεται άρρηκτα με την ανάπτυξη κατάλληλων σημειογραφικών μορφών λόγου. Ο ίδιος λέει: "...[σ]ε γενικές γραμμές, βρήκαμε ότι η ανάπτυξη λόγου στην τάξη και η ανάπτυξη τρόπων συμβολισμού και σημειογραφίας λειτουργούν συνεργατικά και δεν ξεχωρίζουν" (όπ. αν. στο Sfard κ.α., 1999, σελ. 47).

Οι παραπάνω προσεγγίσεις, παρόλο που ξεκινούν με υπόβαθρο την Πιαζετιανή θεωρία, δέχονται επιρροές και από άλλες θεωρητικές σχολές με τις οποίες διατηρούν σχέσεις συνεργασίας, ανταλλαγής ιδεών και ανάπτυξης κοινών θεωρήσεων. Για παράδειγμα, πρόσφατες εξελίξεις τόσο στην ομάδα της Γενεύης, γνωστή για την ψυχο-κοινωνική προσέγγιση που ακολουθεί (de Abreu, 2000, σελ. 2), εμπεριέχουν τη σύμπλευση παραδοσιακών ψυχολογικών μεθόδων με ανθρωπολογικές και καταδεικνύουν έντονο ενδιαφέρον για τη βαθύτερη διερεύνηση ποικίλων 'κοινωνικών' διαστάσεων στη μάθηση. Στόχος τους είναι να μελετηθεί πως το μακρο- και το μικρο-κοινωνικό πλαίσιο αλληλεπιδρούν και επηρεάζουν τη μάθηση των μαθητών μέσω «...της ανάκλησης της κοινωνικής εμπειρίας με συμβολικά μέσα» (de Abreu, 2000, π. 13). Επίσης, θα πρέπει να αναφερθούμε στη συνεργασία της ομάδας του Purdue με την ομάδα του Bielefeld με βασικούς εκπροσώπους τον Heinrich Bauersfeld, τον Goltz Krummheuer και τον Jorg Voigt. Κοινός στόχος είναι η σύμπλευση με ταξί ψυχολογικής και αλληλεπιδραστικής ανάλυσης για την ερμηνεία της καιασκευής μαθηματικών νοημάτων στο πλαίσιο της μικρο-κουλτούρας της σχολικής τάξης των μαθηματικών (Cobb & Bauersfeld, 1995).

Κοινότητα τάξης μαθηματικών και κοινωνικές αλληλεπιδράσεις

Η εκτίμηση που ακολουθεί η ερευνητική ομάδα του Πανεπιστημίου Bielefeld της Γερμανίας θεωρεί την επικοινωνία ως διαδικασία άλλοτε ηχηρών και άλλοτε σιωπηρών διαπραγματεύσεων. Οι διαπραγματεύσεις αυτές λαμβάνουν χώρα ως περίπλοκες μετακαλήσεις νοημάτων, οι οποίες επιτελούνται πολλές φορές έξω από το πεδίο αντίληψης των συμμετεχόντων (βλ. Krumphauer and Voigt, 1991; Cobb & Bauersfeld, 1995). Έτσι, η μελέτη της επικοινωνίας λαμβάνει ως σημείο αναφοράς την τοπική μικρο-κουλτούρα της τάξης. Συννοώντας τη θεωρητική τους τοποθέτηση, οι Krumphauer και Voigt (1991) υποστηρίζουν ότι: *‘...[κ]ατά τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών, οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί ερμηνεύουν τα παιδαγωγικά αντικείμενα και τις διαδικασίες στη βάση των υποκειμενικών εμπειριών μέσα από ποικίλες μορφές (frames)’* (σελ. 18, ελεύθερη μετάφραση). Η έννοια της ‘μορφής’ (frame) αναφέρεται σε συνήθη ερμηνευτικά μοτίβα τα οποία διαμορφώνονται κατάλληλα και παράγουν ένα πεδίο εργασίας κατά τη διαδικασία της ανάπτυξης κατανόησης. Η πιθανότητα σύγκρουσης εκμηδενίζεται ή μειώνεται λόγω της ισχύος της ρουτίνας αυτών των μορφών οι οποίες δημιουργούν μοτίβα κοινωνικής αλληλεπίδρασης. Ευρύτερος στόχος αυτής της ερευνητικής προσέγγισης είναι η ανθρωπολογική περιγραφή των μοτίβων αλληλεπίδρασης μεταξύ συμμετεχόντων στην τάξη των μαθηματικών και όχι η υπαγόρευση για το πώς αυτές οι αλληλεπιδράσεις θα έπρεπε δυνητικά να οργανωθούν. Η ανίχνευση κατάλληλων αλληλεπιδράσεων που προωθούν συγκεκριμένες μορφές επικοινωνίας αφορά, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, το ερευνητικό πρόγραμμα τόσο της ομάδας της Γενεύης όσο και της ομάδας του Purdue.

Ο ρόλος της επικοινωνίας θεωρείται κεντρικός για την κατάκτηση της μαθηματικής γλώσσας καθώς και του μαθηματικού ιδιώματος. Η Anna Sierpínska εξηγεί ότι για το ρεύμα της αλληλεπιδραστικής (interactionist) προσέγγισης η επικοινωνία δεν νοηματοδοτείται ως μεταβατική. Η ίδια υποστηρίζει ότι *‘...[τ]α νοήματα δεν βρίσκονται μέσα στο κεφάλι των υποκειμένων και δε μεταφέρονται από το ένα άτομο στο άλλο. Οι άνθρωποι δε χρειάζεται να εννοούν αυτό που λένε, αλλά αυτό που λένε σίγουρα σημαίνει κάτι όχι μόνο στους άλλους, αλλά κάτι για τη δική τους*

κοινοσύρα. (1998, σ. 52). Συγκεκριμένα, ο Heinrich Bauersfeld (1995) εννοιολογεί την επικοινωνία ως μια σειρά 'παιχνιδιών γλώσσας' (language games) που αφορούν συγκεκριμένα την τάξη των μαθηματικών, και χαρακτηρίζουν γενικότερα τη δεξιότητα σε αυτό που ονομάζει τεχνική της 'ποίησης λόγου' (linguaging). Εμπνέεται από τον Ludwig Wittgenstein, ο οποίος γράφει ότι "...ο όρος 'παιχνίδι γλώσσας' έχει στόχο να δώσει έμφαση στο γεγονός ότι η ομιλούσα γλώσσα είναι μέρος της δραστηριότητας ή μια μορφής ζωής" (οπ. Αν. στο Bauersfeld, 1995, σ. 279). Επιπροσθέτως ο όρος 'ποίηση λόγου' (linguaging) προτιμείται αντί του όρου 'χρήση γλώσσας' (language-in-use) και τεκμηριώνεται στη βάση του ότι δίδει έμφαση στη σχέση μεταξύ παιχνιδιών γλώσσας, μικροκοινοσύρας τάξης και των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών κάθε ατόμου.

Οι διαδικασίες ομιλίας, γραφής, σχεδίασης και κατασκευής θεωρούνται ως επίκτητες δεξιότητες των 'παιχνιδιών γλώσσας' και της 'ποίησης λόγου' (linguaging) οι οποίες επιτελούνται από εκπαιδευτικούς και μαθητές στην προσπάθειά τους να διαπραγματευτούν νοήματα και σύμβολα της μαθηματικής δραστηριότητας. Η διαδικασία της 'διαπραγμάτευσης' οδηγεί στη δημιουργία νοημάτων τα οποία -παρόλο που μπορεί να υπάρχουν λεπτές διαφοροποιήσεις- συμφωνούμε ότι είναι κοινώς αποδεκτά (taken-as-shared). Ως παραδείγματα ενθάρρυνσης μιας πολυδιάστατης και ανοικτής 'ποίησης λόγου' (linguaging) προτείνεται οι εκπαιδευτικοί να επιλέγουν αντίστοιχα ανοικτές δραστηριότητες, δημόσιες συζητήσεις, παρουσιάσεις των τρόπων σκέψης και των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων καθώς και μύηση σε διαδικασίες που απαιτούν πολλές μορφές επιχειρηματολογίας από κοιλί νορίς.

Η συνεισφορά αυτής της ομάδας έγκειται κύρια στη διαμόρφωση μιας αναλυτικής εθνογραφίας της άτυπης επιχειρηματολογίας (Krumphauer, 1995, Voigt, 1995). Ο Krumphauer συγκεκριμένα, κάνει κριτική στην προσέγγιση της επιχειρηματολογία υπό το πρίσμα μιας Αριστοτελικής ρητορικής, και εστιάζει σε μορφές επιχειρηματολογίας που προσφέρονται σε μια τάξη μαθηματικών όπως η επεξήγηση, η τεκμηρίωση, η δικαιολόγηση, η παραδειγματοποίηση και η παράθεση αναλογιών.

Ο Voigt, από την άλλη μεριά, έχει εστιάσει στην καταγραφή της ανάλυσης των μοτίβων κοινωνικής αλληλεπίδρασης όπως αυτές αναπτύσσονται σε μια τυπική σχολική τάξη μαθηματικών. Ο ίδιος εξηγεί ότι η επικοινωνία και συγκεκριμένα η 'διαπραγμάτευση' νοημάτων είναι μια ευαίσθητη διαδικασία η οποία ενέχει πάντα τον κίνδυνο αποδιοργάνωσης. Ισχυρίζεται δε ότι τα μοτίβα κοινωνικής αλληλεπίδρασης λειτουργούν με στόχο την ελαχιστοποίηση αυτού του ρίσκου. Συγκρίνοντας δύο διαφορετικά τέτοια μοτίβα, το συμπερασματικό (*elicitation patter*) και το μοτίβο συζήτησης (*discussion pattern*), ο Voigt (1985) εξηγεί ότι στο πρώτο οι μαθητευόμενοι συνεισφέρουν με μια αιδάντηση και μια λύση σε ένα πρόβλημα το οποίο θέτει ο εκπαιδευτικός. Ο εκπαιδευτικός στη συνέχεια αξιολογεί και οδηγεί τον μαθητευόμενο προς μια συγκεκριμένη επιχειρηματολογία, λύση ή αιδάντηση. Στο μοτίβο συζήτησης, ο εκπαιδευτικός ρωτάει τους μαθητές του πως έφτασαν στη λύση και στη συνέχεια συνεισφέρει και ο ίδιος με επιπλέον ερωτήσεις, ανατροσοδότηση και κρίσεις.

Συμπλέοντας με τον Voigt, η Terry Wood (1995) συζητά το μοτίβο χωνί (*funnel pattern*) και το μοτίβο εστίασης (*focus pattern*). Στο μοτίβο χωνί, ο/η εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί σειρά καθοδηγητικών ερωτήσεων οι οποίες εστιάζουν στις απορίες των παιδιών μέχρις ότου να απαντήσουν ή να λύσουν το πρόβλημα. Σε αντίθεση, στο μοτίβο εστίασης ο ρόλος του/ης εκπαιδευτού είναι να υποδειξει τα κριτικά εκείνα σημεία του προβλήματος, να αποφύγει να πει την απάντηση, να δείξει τη διαδρομή επίλυσης ή να δώσει τη συνολική αποτίμηση της όλης διαδικασίας. Τόσο ο Voigt όσο και η Wood μοιάζει να προτείνουν τα μοτίβα 'συζήτησης' και 'εστίασης' ως τα πλέον κατάλληλα για την οργάνωση συγκεκριμένων κοινωνικών κανόνων οι οποίοι χαρακτηρίζουν μεθόδους όπως η διδασκαλία των μαθηματικών ως αναζήτηση (βλ. Cobb & Bauersfeld, 1995).

Η μάθηση ως κοινωνική διαδικασία

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα οι θεωρητικοί της αλληλεπιδραστικής (interactionist) προσέγγισης προτείνουν ότι η μαθηματική δραστηριότητα, το αναλυτικό πρόγραμμα και η μικροκουλτούρα της σχολικής τάξης των μαθηματικών ενάγονται αλληλεπιδραστικά εκ των

ενόντων στο πλαίσιο διαπραγματεύσεων. Έτσι, η κουλτούρα της μαθηματικής δραστηριότητας νοηματοδοτείται στο πλαίσιο των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων σ' ένα κλειστό σύστημα σχολικής τάξης. Η κοινωνικοπολιτισμική προσέγγιση έρχεται σε ρίζη με αυτή την αντίληψη και υποστηρίζει αντίθετα ότι η ευρύτερη ιστορική, κοινωνική και πολιτισμική διάσταση της μαθηματικής γνώσης έχει πρωταρχική σημασία τόσο γι' αυτό που μαθαίνεται όσο και για τον τρόπο που μαθαίνεται (see de Abreu, 2000; Lerman, 2000). Η θέση αυτή απορρέει άμεσα από τη βασική υποστήριξη του Vygotsky ότι η ανάπτυξη γνώσης εξελίσσεται από το δια-προσωπικό στο ενδοπροσωπικό (Vygotsky, 1978, 1986; Wertsch, 1985). Συγκεκριμένα, ο Vygotsky αναφέρει: *«...[κ]άθε λειτουργία που αφορά στην πολιτισμική ανάπτυξη του παιδιού εμφανίζεται διπλά, ή σε δύο πεδία. Πρώτα εμφανίζεται στο κοινωνικό πεδίο και κατόπιν στο ψυχολογικό. Πρώτα εμφανίζεται μεταξύ ατόμων ως δια-προσωπική κατηγορία και κατόπιν μέσα στο ίδιο το παιδί ως ενδο-ψυχολογική κατηγορία (οπ.αν. Wertsch & Stone, 1985, σελ. 164).*

Η επικοινωνία πραγματώνεται στο πλαίσιο ενός σύνθετου δικτύου κοινωνικών αλληλεπιδράσεων και θεωρείται μια σημαντική οδός τόσο για την ανάπτυξη γνώσης όσο και για την ανάπτυξη συνείδησης για τη γνώση αυτή. Ο Alexei Leont'ev (1981) υποστήριζε ότι η σκέψη αναπτύσσεται μέσω δραστηριοτήτων οι οποίες έχουν πρακτική και αντικειμενική στόχευση. Θεωρητικές έννοιες όπως πολιτισμικά εργαλεία, διαμεσολάβηση, ζώνη επικείμενης ανάπτυξης αποτελούν αναλυτικές κατηγορίες για την ερμηνεία της ανάπτυξης της σκέψης του παιδιού ως ιστορικό, πολιτισμικό και κοινωνικό φαινόμενο στο πλαίσιο διδακτικών και μαθησιακών πρακτικών.

Η φύση των πολιτισμικών εργαλείων μπορεί να περιλαμβάνει υλικές ή νοητικές οντότητες οι οποίες έχουν απτή, χειραπτική, αφηγηματική, ψηφιακή ή ακόμη και πολυτροπική μορφή. Τα εργαλεία αυτά μπορούν να μετατραπούν σε γνωστικά ή ψυχολογικά εργαλεία στο βαθμό που υποστηρίζουν ή επιτελούν συγκεκριμένο γνωστικό έργο και συνεισφέρουν σε διαδικασίες ανάπτυξης γνώσης. Για παράδειγμα το δεκαδικό σύστημα

ή οι αλγόριθμοι αριθμητικών πράξεων γίνονται ψυχολογικά εργαλεία καθώς η χρήση τους αποφορτίζει τη μνήμη από τεράστιο όγκο έργου το οποίο διαφορετικά θα έπρεπε να εκτελέσουμε για να εκπονήσουμε πράξεις με μεγάλους αριθμούς. Ο διαμεσολαβητικός ρόλος αυτών των εργαλείων έχει αναλυθεί σε καταστάσεις που αφορούν στη διδασκαλία και μάθηση επιμέρους θεματικών στα σχολικά μαθηματικά όπως είναι η σχεδίαση προοπτικών (Bartolimpi-Bussi, 1996) ή η διερεύνηση και παρατήρηση της κίνησης των γεωμετρικών μετασχηματισμών σε μοτίβα ισλαμικής και μοντέρνας τέχνης (Chitroaki, 1998). Πολιτισμικά εργαλεία όπως φωτογραφίες, μέθοδοι σχεδίασης καλλιτεχνών και αρχιτεκτόνων, όργανα σχεδίασης, ιστορικά σημειώματα, προσωπικά βιώματα και παρατηρήσεις, αντικείμενα που βοηθούν ποικίλες αναπαραστάσεις, οργάνωση πληροφορίας σε διάφορες ταξινομήσεις αναπλαισιώνονται ως 'εργαλεία' στα χέρια εκπαιδευτικών και μαθητών. Ο μετασχηματισμός τους σε 'γνωστικά' ή 'ψυχολογικά' εργαλεία προϋποθέτει ότι υπηρετούν διαμεσολαβητικές πρακτικές για την ανάπτυξη μαθηματικής γνώσης. Η σημειωτική διαμεσολάβηση αυτών των εργαλείων γίνεται κατανοητή και ενσωματώνεται στην τάξη με πολλαπλούς τρόπους δηλώνοντας τη συνέχεια του ιστορικού χρόνου. Για παράδειγμα, ένα εργαλείο το οποίο αναπτύχθηκε σε άλλο χρονικό πλαίσιο (π.χ. όργανα μέτρησης, μέθοδοι υπολογισμού) και με διαφορετικό στόχο έρχεται να υποστηρίξει νέα προβλήματα (π.χ. η μέθοδος του Ερατοσθένη για τη μέτρηση της ακτίνας της γης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σήμερα για να φωτίσει διαφορετικές πτυχές αυτής της διαδικασίας).

Η ζώνη επικείμενης ανάπτυξης προτάθηκε από τον Vygotsky κατά τη δεκαετία του 1930 ως μέσο για τη διερεύνηση του δυναμικού της στοχευμένης διδασκαλίας σε οργανωμένους παιδαγωγικές πρακτικές. Ορίζεται ως: *...η απόσταση μεταξύ του πραγματικού αναπτυξιακού επιπέδου όπως καθορίζεται από τον ίδιο το μαθητή χωρίς παρέμβαση και από το επίπεδο της δυναμικής του ανάπτυξης όπως αυτό διαμορφώνεται μετά από παρέμβαση και καθοδήγηση του γνωστικά ωριμότερου άλλου* (Vygotsky, 1978, σελ. 86). Εδώ ο ρόλος του γνωστικά ωριμότερου άλλου ή του έμπειρου καθοδηγητή παίζει καθοριστικό ρόλο στο πλαίσιο επικοινωνίας

που αναπτύσσεται μεταξύ των εμπλεκομένων. Οι προβληματισμοί που απορρέουν από αυτή την εννοιολόγηση αφορούν πρωταρχικά στη σχέση μεταξύ ετερο-ρύθμισης και αυτό-ρύθμισης της μαθησιακής διαδικασίας. Με άλλα λόγια, στη βάση ποιών διαδικασιών το άτομο από ετερο-ρυθμιζόμενο μέσω γνωστικά ωριμότερων άλλων αναπτύσσεται σε αυτό-ρυθμιζόμενο ελέγχοντας αυτόνομα τη δική του διαδικασία μάθησης; Τι ρόλο παίζουν τόσο η ανατροφοδότηση όσο και η 'σκαλωσιά' σ' αυτή τη διαδικασία (Bruner, 1985); Πως ένας ενήλικας και ένα παιδί που ξεκινούν με διαφορετικές εστιάσεις στο πλαίσιο της επικοινωνίας τους καταλήγουν να αλληλεπιδρούν και να συνεννοούνται (Hundeide, 1985); Και ακόμη πως η ζώνη επικείμενης ανάπτυξης μετατρέπεται σε μηχανισμό όπου μοιάζει να συναντιούνται ιστορικές, κοινωνικές, πολιτισμικές και γνωσιακές διαστάσεις της μάθησης (Cole, 1985).

Όπως ισχυρίζεται ο Benjamin Lee, ο Vygotsky έχει υποστηρίξει ότι η ανάπτυξη ανώτερων μορφών σκέψης απαιτεί από το παιδί να *'...διαφοροποιηθεί ανάμεσα σε επίπεδα γενίκευσης και επικοινωνίας στο τρόπο χρήσης γλώσσας'* και ότι *'...η επικοινωνία και η γενίκευση συνδέονται άρρηκτα ως διαδικασίες διαμόρφωσης επιστημονικών εννοιών και σκέψης'* (Lee, 1985, σελ. 7). Μεθοδολογικά, η χρήση γλώσσας, η χρήση εργαλείων, τα κίνητρα, η δράση και οι επιμέρους χειρισμοί αποτελούν κεντρικές έννοιες για την επικοινωνία και την αλληλεπίδραση καθώς υποστηρίζουν την εις βάθος διερεύνηση της ίδιας της δραστηριότητας. Σύμφωνα με την Nadia Douek (2005) οι εκπαιδευτικοί έχουν να παίξουν ένα ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στη διαμεσολάβηση, οργάνωση και ενορχήστρωση της δραστηριότητας των παιδιών με στόχο τη διευκόλυνση της επιχειρηματολογίας η οποία, εν συνεχεία, θα υποστηρίξει τη διαδικασία νοηματοδότησης μαθηματικών εννοιών. Η επιχειρηματολογία αποτελεί μια συγκεκριμένη μορφή ανάπτυξης επικοινωνίας η οποία απαιτεί από τη μια μεριά έναν *'ακροατή που αντιτίθεται'* και ο οποίος πρέπει να πειστεί, και από την άλλη την ανάπτυξη συνειδητότητας για το είδος γνώσης που επιζητείται καθώς και τη θέση της στο εμπλεκομένων δίκτυο εννοιών. Μια σειρά από πρακτικές προτείνονται όπως ατομική προφορική επιχειρηματολογία μαζί με τον εκπαιδευτικό, συλλογική συζήτηση τάξης με

την βοήθεια του/ης εκπαιδευτικού, καθώς και ατομική γραπτή επιχειρηματολογία.

Η ενασχόληση με την επιχειρηματολογία δυνητικά συνδέεται και με διαδικασίες άτυπης και τυπικής απόδειξης. Αυτή είναι η εστίαση στην έρευνα της Inger Wistedt και του Gudrun Brattström (2005) οι οποίοι προβληματοποιούν την επικοινωνία στην τάξη και διερευνούν τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της συζήτησης μεταξύ μαθητών καθώς και τη συνεργασία σε ομάδες με στόχο την ανάπτυξη δεξιοτήτων διαισθητικής απόδειξης στο πλαίσιο διερεύνησης μη-αλγεβρικών δραστηριοτήτων. Υποστηρίζουν ότι η ενεργή συμμετοχή από μόνη της δεν διασφαλίζει ότι όλοι οι εκπαιδευτικοί θα κατανοήσουν την πολιτισμική και γνωστική χροιά των δραστηριοτήτων τους. Οι Wistedt και Brattström υποστηρίζουν ότι μια τέτοια μορφής γνώση βασίζεται αναπόφευκτα σ' ένα μεταθεωρητικό επίπεδο γνώσης που επιτρέπει στους μαθητές να αποκτούν πρόσβαση σε πρακτικές που τους ενθαρρύνουν να κατανοούν και ταυτόχρονα να αλλάζουν άποψη για το τι αποτελεί μαθηματική γνώση σε συγκεκριμένους τομείς. Παρατηρώντας νέο-εισαχθέντες φοιτητές σε μια καινοτόμα πρακτική της μαθηματικής δραστηριότητας (π.χ. η προώθηση νέων μη-τυπικών τρόπων απόδειξης) διαπιστώνουν ότι δεν έχουν εύκολη πρόσβαση σε επίπεδα επικοινωνίας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μη μπορούν να δουν σε πλαίσιο τις δικές τους πρακτικές, να μη μπορούν να επιλύσουν συγκρούσεις, ή να μη μπορούν να κατανοήσουν το νόημα συγκεκριμένων δραστηριοτήτων. Επομένως, οι ίδιοι τονίζουν ότι πρέπει να δοθεί έμφαση στο σημαντικό ρόλο των εμπειριών μελών τα οποία αλληλεπιδρώντας με τους σπουδαστές μπορούν να προκαλέσουν πρώτες ειδικσίες, αλλά και να ενθαρρύνουν εναλλακτικούς τρόπους απόδειξης όπως η γεωμετρική.

Αν και η Solomon (1989) συμφωνεί ότι η κοινωνική αλληλεπίδραση μπορεί να ενθαρρύνει την πρόκληση γνωστικών συγκρούσεων, όπως είδαμε νωρίτερα, υποστηρίζει ότι οι συνεισφορές των μαθητών ως λύσεις και απαντήσεις δεν είναι πάντα συμβατές με τα 'δεδομένα' μαθηματικά και τις πρακτικές της ευρύτερης κοινότητας. Αντ' αυτού, η Solomon

συμφωνώντας με την Valerie Walkerdine (1988), υποστηρίζει ότι αυτό που θεωρείται μαθηματική δραστηριότητα (π.χ πρόβλημα και διαδικασία λύσης) είναι βαθιά κοινωνικό. Η μελέτη του 'κοινωνικού' συμπεριλαμβανομένου της γλώσσας και της επικοινωνίας παίζει δευτερεύοντα ρόλο σε σπουδές αυτού του είδους (Lerman, 2000). Η εστίαση παραμένει στην ανίχνευση των χαρακτηριστικών ενός πλαισίου το οποίο εστιάζει στις γνωστικές διαδικασίες εκείνες που προωθούν την κατασκευή μαθηματικών νοημάτων όπως τα αναγνωρίζει το κυρίαρχο μαθηματικό βλέμμα. Έτσι οι ενυπάρχουσες ιεραρχίες τόσο της αναπαράστασης μαθηματικών εννοιών όσο και της οργάνωσης κοινωνικών αλληλεπιδράσεων στη σχολική τάξη ενισχύονται.

Σιωπές: η επικοινωνία ως κοινωνική πρακτική

Οι Shirato and Yell (2000) θεωρούν την επικοινωνία ως πρακτική αυτή καθ' αυτή -την πρακτική παραγωγής νοήματος. Τι σημαίνει όμως ο όρος 'πρακτική' και πως μπορούμε να τον προσεγγίσουμε; Θα μπορούσαμε ίσως να αναφερθούμε στην πρακτική ως δραστηριότητα η οποία είναι εμποτισμένη με δομή, νοήματα και κοινωνικές αλληλεπιδράσεις; Ή μήπως χρειαζόμαστε μια ευρύτερη προσέγγιση;

Η Valerie Walkerdine (1988, 1998) έχει υποστηρίξει τη σημαντική σχέση μεταξύ της τοποθέτησης του υποκειμένου στη πρακτική σχολικών μαθηματικών και της γνωστικής τους ανάπτυξης. Η έννοια της 'πρακτικής' αναλύεται μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα όπου ποικίλες δραστηριότητες στην τάξη συν-κατασκευάζονται από μαθητές και εκπαιδευτικούς σε ένα περίπλοκο πλαίσιο διάδρασης πολλαπλών και αντικρουόμενων πολλές φορές λογοθετικών πρακτικών. Οι πρακτικές αυτές φέρνουν, πολλές φορές, στην επιφάνεια πολιτισμικές και γλωσσολογικές αντιθέσεις. Ως συνέπεια, η διαδικασία μάθησης είναι 'συναισθηματικά φορτισμένη' και όπως ισχυρίζεται ο Jeff Evans (1999) δεν εμπλέκει μόνο ιδέες αλλά ηθικά διλήμματα, αξίες και συναισθήματα. Έτσι, η επικοινωνία είναι πλαισιοθετημένη σε ένα κατά κολύ ευρύτερο πλαίσιο το οποίο εκτείνεται πέρα από τους τοίχους της τάξης. Επικοινωνία, λοιπόν, δεν εί-

ναί μόνο αυτό που κάνουν στενά οι εκπαιδευτικοί, οι μαθητές και τα σχολικά εγχειρίδια στο πλαίσιο κοινωνικών αλληλεπιδράσεων. Επιπρόσθετα, η επικοινωνία εμποτίζεται και από τις λογοθετικές πρακτικές, τις ιδεολογίες και τις αξίες οι οποίες ενεργούν άρρητα και επηρεάζουν τις δράσεις, και τα κίνητρα των συμμετεχόντων.

Ο Etienne Wenger (1998), βασισμένος στη θεωρία της πλασιοθετημένης νόησης (situated cognition), ισχυρίζεται ότι η 'πρακτική' δηλώνει πολύ περισσότερο από μια απλή σύνδεση με τη δραστηριότητα. Η πρακτική αφορά τη δραστηριότητα σε μια κοινότητα που μοιράζεται ένα ρεπερτόριο σύνθετων δράσεων οι οποίες αντανακλούν την ιστορία της και ταυτόχρονα υποδεικνύουν το μέλλον της. Η έννοια της πρακτικής δηλώνει δράση, αλλά όχι απλώς δράση μέσα στην πρακτική ή για την πρακτική. Πρόκειται για δράση που ανατανακλά το ευρύτερο ιστορικό και κοινωνικό πλαίσιο και που τελικά δίνει δομή και νόημα σ' αυτό που κάνουμε.

Υπό αυτή την έννοια, η πρακτική έχει πάντα μια κοινωνική και ιστορική διάσταση. Έτσι η έννοια της πρακτικής συμπεριλαμβάνει τη γλώσσα, τα εργαλεία, τα ντοκουμέντα, τις εικόνες, τα σύμβολα, τους καλά καθορισμένους ρόλους, τα ειδικά κριτήρια, τις κωδικοποιημένες διαδικασίες, τους κανόνες, τις συμβάσεις, κλπ. Παράλληλα, συμπεριλαμβάνει όλες τις υπονοούμενες σχέσεις, τις άρρητες συμβάσεις, τους λεπτούς υπαινιγμούς, τους ανείπωτους κανόνες, τους αναγνωρίσιμους θεομούς, τις ιδιαίτερες αντιλήψεις, τις αρμονικές ευαισθησίες, τις ενσωματωμένες κατανοήσεις, τις υπονοούμενες υποθέσεις, και τις κοινές απόψεις για τον κόσμο (Wenger, 1998, σελ. 47). Στη βάση των παραπάνω, η επικοινωνία συζητιέται ως κοινωνική πρακτική η οποία διαμορφώνεται ως μέρος τόσο των δραστηριοτήτων όσο και των ταυτοτήτων των υποκειμένων που συμμετέχουν.

Πρακτικές μαθηματικής δραστηριότητας

Η εστίαση στα μαθηματικά και στη μαθηματική δραστηριότητα ως 'πρακτική' δεν αποτελεί νέα ιδέα στο πεδίο της φιλοσοφίας των μαθημα-

τικών. Αντίθετα, πολύ νωρίς ο Wittgenstein (1953) επεσήμανε ότι *'...[φ]υσικά, τα μαθηματικά με κάποια έννοια είναι ένας κλάδος γνώσης— αλλά επίσης είναι μια δραστηριότητα [...] είναι αυτό που οι άνθρωποι λένε ότι είναι σωστό και λάθος; και συμφωνούν στη γλώσσα που χρησιμοποιούν. Αυτό δεν είναι απλά συμφωνία στις απόψεις αλλά στη μορφή της ζωής'* (όπ.αν. στο Eanesi, 1991, σελ. 31). Με τα παραπάνω ο Wittgenstein εξηγεί ότι ενώ η επιστήμη των μαθηματικών είναι γεμάτη από ρητές ή άρρητες συμβάσεις και κανόνες που συχνά σχηματίζονται και παρουσιάζονται ως καθαρά λογικές μορφές, στην ουσία παράγονται, εκφράζονται και γίνονται αποδεκτές μέσα από κοινωνικές διαδικασίες στις επαγγελματικές κοινότητες των ίδιων των μαθηματικών τις οποίες μάλιστα αποκαλεί *'μορφή ζωής'*.

Πρόσφατα η Leone Burton και η Candia Morgan (2000) μελέτησαν τους διαφορετικούς τρόπους που οι μαθηματικοί εκφράζουν και αιτιολογούν μαθηματικούς ισχυρισμούς στα κείμενά τους. Η έρευνά τους υποστηρίζει ότι η πρακτική των μαθηματικών συνδέεται τόσο με τους τρόπους που χρησιμοποιούν το μαθηματικό ιδίωμα (σύμβολα και γλώσσα) αλλά και με τον τρόπο που αντιλαμβάνονται το ρόλο της μαθηματικής γνώσης. Η Elena Nardi (2007) σε πρόσφατη μονογραφία της καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι μαθηματικοί -όσο και η δουλειά τους- επηρεάζονται από σειρά στερεοτύπων για το τι είναι η μαθηματική δραστηριότητα. Αυτά τα στερεότυπα συμβάλουν στη διατήρηση ενός τεράστιου χάσματος μεταξύ μαθηματικών και σχολικών μαθηματικών ή ερευνητών στο χώρο της μαθηματικής παιδείας. Εγκλωβισμένοι στα στερεότυπα αυτά μοιάζει να ενστερνιζόμαστε εύκολα ένα λόγο *'διαφοράς'*. Έτσι οι πρακτικές των μαθηματικών εννοιολογούνται ως αναμφίβολα διαφορετικές σε σχέση με τις πρακτικές των σχολικών μαθηματικών ή τις πρακτικές των ερευνητών της μαθηματικής παιδείας. Και οι δύο με τη σειρά τους θεωρείται ότι *'διαφέρουν'* από τις πρακτικές της εφαρμοσμένης μαθηματικής γνώσης σε καθημερινές δραστηριότητες όπως τα ψώνια και το μαγείρεμα ή σε πεδία όπως η τεχνολογία, η επιστήμη, η μηχανολογία, η κοινωνική επιστήμη, και οι τέχνες.

Η Tamsin Meaney (2005), για παράδειγμα, συγκρίνει την επικοινωνία ανάμεσα σε μαθηματικούς και ανάμεσα σε μαθητές που εργάζονται σε συγκεκριμένα προβλήματα στο σχολείο. Υποστηρίζει ότι ενώ οι μαθηματικοί εμπλέκονται με μαθηματικές έννοιες και σύμβολα ως να είναι υπαρκτά αντικείμενα, οι μαθητές ασχολούνται με τη γραπτή εργασία τους προσπαθώντας να την αποκωδικοποιήσουν και να αποδώσουν προσανατολισμό στη δραστηριότητά τους. Γίνεται φανερό ότι ενώ για τους μαθηματικούς ο στόχος της δράσης τους είναι σαφής, για τους μαθητές στόχοι και κίνητρα δε γίνονται άμεσα κατανοητοί. Ταυτόχρονα οι εμπειρίες στη σχολική τάξη δεν διευκολύνουν πάντα τη νοηματοδότηση τόσο της μαθηματικής δραστηριότητας όσο και των κανόνων συμμετοχής. Ευθυγραμμισμένος με αυτό ο Paul Cobb επισημαίνει ότι: *"...για να βοηθήσει τους μαθητές να εξηγήσουν τις ερμηνείες στις εργασίες τους, ο δάσκαλος αυτόματα εισάγει και καθοδηγεί τη διαπραγμάτευση των κοινωνικο-μαθηματικών νορμών σχετικά με το τι μετράει ως αποδεκτή εξήγηση"* (αναφορά στη Sfard κ.α., 1999, σελ. 47). Αυτό σημαίνει ότι η νοηματοδότηση της μαθηματικής δραστηριότητας είναι άμεσα συνυφασμένη με φαινομενολογικές διαδικασίες επιτέλεσης δράσεων όπως κοινωνικές νόρμες, κανόνες και συνήθειες. Η διαπραγμάτευση, λοιπόν, της μαθηματικής δραστηριότητας μοιάζει να συνδέεται άμεσα με τη διαπραγμάτευση των κοινωνικο-μαθηματικών νόρμων της τάξης. Όμως η προβληματοποίηση του τι, τελικά, σημαίνει διαπραγμάτευση εξακολουθεί να επιζητεί διερεύνηση. Είναι σημαντικό να ξεδιπλωθούν μια σειρά από ερωτήματα, όπως: Τι είναι αυτό που διαπραγματευόμαστε όταν μιλάμε για τα μαθηματικά ή εμπλεκόμαστε σε κατασκευές μαθηματικών νοημάτων; Τι είδους σχέσεις εξουσίας διέπουν καταστάσεις διαπραγμάτευσης; Ποια είναι η θέση της μαθηματικής γνώσης στο πλαίσιο αυτής της διαπραγμάτευσης;

Οι πιθανές συσχετίσεις ανάμεσα σε πρακτικές που αφορούν στη σχολική μαθηματική γνώση και ανάμεσα σε διάφορες μορφές καθημερινών πρακτικών (π.χ. ψώνια, μικροπωλητές κ.α.) καθώς επίσης και η αναπλαισίωσή τους σε παιδαγωγικές πρακτικές όπως είναι τα βιβλία, τα σχολικά εγχειρίδια, η αξιολόγηση κ.λ.π. έχουν αναλυθεί από σειρά ερευνητών

(Cooper & Dunne, 2000, Dowling, 1998; Lave, 1988; Nunes, Schliemann & Carraher, 1993). Όλοι αναγνωρίζουν ότι παρότι τα έργα στα οποία τα υποκείμενα σε κάθε επιμέρους έρευνα καλούνται να διεκπεραιώσουν εμφανίζονται να απαιτούν παρόμοια μαθηματική δραστηριότητα, υπάρχουν σημαντικές διαφορές ανάλογα με το αν η πρακτική έχει πλαίσιο αναφοράς το σχολικό ή το καθημερινό περιβάλλον. Για παράδειγμα, η Jean Lave (1988) μελέτησε πώς οι ενήλικες χρησιμοποιούν τα μαθηματικά σε δραστηριότητες αγοράς στο σούπερ μάρκετ όπως είναι η απόφαση για την πιο συμφέρουσα τιμή σε σειρά προϊόντων. Βρέθηκε ως αποτέλεσμα αυτών των διερευνήσεων ότι οι αγοραστές σπάνια χρησιμοποιούσαν στρατηγικές που διδάσκονται στο σχολείο. Συμπερασματικά, η Lave υπογραμμίζει ότι οι πρακτικές των σχολικών μαθηματικών προσδιορίζουν ένα πολύ συγκεκριμένο πλαίσιο κοινωνικής μάθησης.

Οι Paul Dowling (1998) καθώς και οι Cooper and Dunne (2000) έδειξαν ότι η αναπλαισίωση των μαθηματικών εφαρμογών από καθημερινά σε σχολικά πλαίσια (π.χ. βιβλία ή θέματα εξετάσεων) εξασφαλίζει τη διαφοροποίηση ανάμεσα στην εσωτερική μαθηματική γνώση και στη γνώση που απαιτείται για την παραγωγή νοήματος με την εφαρμογή των μαθηματικών σε ρεαλιστικά πλαίσια. Τονίζουν δε, ότι οι μαθητές από χαμηλά κοινωνικο-οικονομικά στρώματα έχουν δυσκολίες να αναγνωρίσουν την απαιτούμενη μαθηματική όψη τέτοιων έργων και καταλήγουν να μη μπορούν να συνδέσουν πάντα τους παραγόμενους λόγους των μαθηματικών με τα ρεαλιστικά πλαίσια που συνοδεύουν τα έργα αυτά. Ακόμη οι πρακτικές των επιμέρους σχολικών αντικειμένων παίζουν ένα εξίσου σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των αντιλήψεων των συμμετεχόντων για τις ενέργειες που απαιτούνται σε μια δεδομένη δραστηριότητα. Για παράδειγμα, ο Jan Wyndham (1993) εξηγεί ότι όταν οι μαθητές κλήθηκαν να επιλύσουν ένα πρόβλημα το οποίο αναφερόταν στον υπολογισμό κόστους και στην τοποθέτηση γραμματισμών σε ένα γράμμα, έκαναν μη αναγκαίους υπολογισμούς στο μάθημα των μαθηματικών αλλά δεν έκαναν το ίδιο στο μάθημα των κοινωνικών επιστημών.

Συμμετοχή, Δράση, Αντίσταση

Ωστόσο, πρέπει να τονίσουμε ότι δεν υπάρχει μια και μοναδική πρακτική στα σχολικά μαθηματικά. Διαφορετικές δράσεις, κανόνες και συνήθειες μπορεί να αναγνωριστούν όταν γίνονται συγκρίσεις μεταξύ χωρών, σχολικών κοινοτήτων, τάξεων, καθώς επίσης και στο εσωτερικό της ίδιας τάξης. Συχνά υπάρχει ένας αριθμός από παράλληλες πρακτικές τόσο μέσα στην ίδια τη σχολική τάξη όσο και ανάμεσα σε ομάδες μαθητών-πρακτικές όπου αυτό που μετράει μπορεί να είναι το χρώμα του μολυβιού ή οι τρόποι με τους οποίους οι μαθητές αντιστέκονται στο επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα (Alro & Skovsmose, 2003). Έτσι ενώ οι μαθητές μοιάζει τυπικά να εμπλέκονται στο να γίνουν μέλη μιας κοινότητας μαθητευομένων στα μαθηματικά, οι ίδιοι σχηματίζουν και μετασχηματίζουν τις ταυτότητες τους συνεχώς. Οι ταυτότητες αυτές μπορεί να ποικίλουν σε ένα φάσμα από τον καλό μαθητή, στον αδύναμο, στον 'σπασίκλα', στον αδιάφορο, ή σ' αυτόν που αντιστέκεται. Η γκάμα επιλογών εκτείνεται μεταξύ συμμετοχής, περιφερειακής συμμετοχής και μη-συμμετοχής ή αποκλεισμού. Οι τοποθετήσεις αυτές δεν είναι αυτόνομα προσδιορισμένες και συχνά αντανακλούν συγκρούσεις, αντιφάσεις και αντιθέσεις που ενυπάρχουν στον επιστημονικό, στο σχολικό λόγο και στους ευρύτερους κοινωνικο-πολιτικούς λόγους, όπως είναι η κοινωνική τάξη, η φυλή και η εθνοτική καταγωγή και στους οποίους οι μαθητές και οι μαθήτριες αναπόφευκτα ανήκουν. Έτσι η επιτυχία του υποκειμένου στα σχολικά μαθηματικά δεν είναι απλά η κατάκτηση γνωστικών δεξιοτήτων αλλά ταυτόχρονα νοηματοδοτεί την κατασκευή, διαπραγμάτευση και μετασχηματισμό ταυτοτήτων.

Η Wenda Bauchspies (2005) διεγείρει την καθημερινή ζωή των μαθητών και των μαθητριών στις τοπικές σχολικές μαθηματικές πρακτικές που προσφέρονται σε τάξεις μαθηματικών στο Togo, μια χώρα της Αφρικής. Συζητά το νόημα των μαθηματικών και την επικοινωνία στις σχολικές τάξεις για τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς που ζουν μέσα σε ένα σύνθετο σύνολο από εμπειρίες κοινωνικών συγκρούσεων ως αποτέλεσμα των μετα-αποικιακών συνεπειών της καθιέρωσης του γαλλικού εκπαιδευτικού συστήματος στην Αφρικανική κοινότητα. Η κοινωνιολογική της ανάλυση φέρνει στο προσκήνιο υπονοούμενα ρεπερτόρια

που αφορούν στην διαπραγμάτευση των νοημάτων τα οποία συνιστούν την επικοινωνία στη σχολική τάξη στο Togo. Η εκπαιδευτικός ως πρωταγωνίστρια διδάσκει 'πρακτικές αριθμητικής' ενώ οι μαθητές παίζουν ένα δευτερεύοντα, σιωπηλό ρόλο, απαντώντας κοφτά κυρίως όταν ερωτούνται. Η επιλεγμένη επιτέλεση μια 'σιωπηρής' στάσης και μιας αποκλείουσας συμπεριφοράς (π.χ. ανταλλαγή παπουτσιών) δηλώνει ότι ταυτόχρονα, οι μαθητές και οι μαθήτριες αναπτύσσουν τους δικούς τους επικοινωνιακούς κώδικες 'αντίστασης'. Για παράδειγμα, ενώ είναι σιωπηλοί προς το δάσκαλο, είναι ομιλητικοί και συνεργάσιμοι με τους συμμαθητές τους και λειτουργούν στο πλαίσιο των επικοινωνιακών κανόνων.

Πέρα από το γεγονός ότι αυτή η μελέτη φωτίζει ποικίλες πολιτικές εξουσίας στη μαθηματική εκπαίδευση στο Togo, η έρευνα της Baueh-sries μας προτρέπει να κοιτάζουμε μέσω του παραδείγματος του Togo, τις τάξεις μαθηματικών στη δική μας κοινότητα. Έτσι μπορούμε να συνειδητοποιήσουμε την 'αποικιοποίηση' των δικών μας μαθητών μέσα από την επιβολή συγκεκριμένων μαθηματικών ιδεών και αναλυτικών προγραμμάτων. Για παράδειγμα, τι σημαίνει άραγε η έλλειψη 'υψηλού επιπέδου' μαθηματικής σκέψης, η έμφαση σε δεξιότητες αποστήθισης, ή η συνεχής έμφαση σε μια πειθαρχία σώματος η οποία κύρια εξυπηρετεί την αφομοίωση μιας συγκεκριμένης πρακτικής; Τι ρόλο παίζει τελικά η σιωπή ως αντίσταση ή το μοίρασμα των παπουτσιών ως αποκλείουσα συμπεριφορά ή ως αλληλεγγύη μεταξύ των μαθητών και πως συντελούν στη κατασκευή της εικόνας του 'κατάλληλου' μαθητή και μαθήτριας; Πως νοηματοδοτείται, στο πλαίσιο αυτό, η πρακτική της αριθμητικής και των πράξεων;

Γαυτότητες υπό διαπραγμάτευση και μάθηση

Η πρακτική, και ειδικά η 'παιδαγωγική πρακτική' χρησιμοποιείται από τον Basil Bernstein ως ένας τρόπος να μιλήσουμε για τη μάθηση όχι μόνο εντός του σχολείου, αλλά να συμπεριλάβουμε μια ευρεία έννοια μάθησης η οποία επιτελείται σε ποικίλους χώρους και επαγγέλματα ή ιδιότητες όπως γιατροί ή ασθενείς, αρχιτέκτονες, μηχανικοί, νοικοκυρές,

κηπουροί και σχεδιαστές. Με αυτή την έννοια, η θεώρηση του Basil Bernstein για την πρακτική εμπλέκει τη μάθηση ως δράση, ως γίνεσθαι, και ως διαδικασία διαπραγματεύσεως νοημάτων. Συγκεκριμένα, ο ίδιος εξηγεί: *‘...η έννοια της παιδαγωγικής πρακτικής που θα χρησιμοποιήσω θα θεωρεί τις παιδαγωγικές πρακτικές ως ένα θεμελιώδες κοινωνικό πλαίσιο μέσα από το οποίο λαμβάνει χώρα η πολιτισμική αναπαραγωγή - παραγωγή’* (Bernstein, 2000, σελ. 3). Ο Bernstein προσεγγίζει την πολιτισμική αναπαραγωγή-παραγωγή (συμπεριλαμβάνοντας την κοινωνική τάξη, το φύλο και την εθνοτική καταγωγή) μέσα από τη θεώρηση των μορφών επικοινωνίας που επιτελούνται ανάμεσα σε δρώντες οι οποίοι εμπλέκονται σε συγκεκριμένες πρακτικές.

Θεωρεί τη διαδικασία αυτή ως κυρίαρχα πολιτική και ρωτάει: *‘...πως η εξουσία και ο έλεγχος μεταφράζονται σε αρχές επικοινωνίας και πως αυτές οι αρχές επικοινωνίας διαφοροποιημένες κανονικοποιούν μορφές συνείδησης σε σχέση με την αναπαραγωγή τους και τις πιθανότητες αλλαγής;* (Bernstein, 2000, σελ. 4). Ο ίδιος αναλύει την έννοια της ‘πρακτικής’ στο σχολικό πλαίσιο στη βάση του αναλυτικού προγράμματος, των παιδαγωγικών μεθόδων και των τρόπων αξιολόγησης. Συμφωνώντας με την Walkerdine, υποστηρίζει ότι η πρόσβαση των μαθητών σε αυτές τις πρακτικές επηρεάζεται όχι μόνο από τη σταθερή γνωστική ικανότητα, αλλά πρωταρχικά από το κοινωνικό και πολιτισμικό κεφάλαιο που καθορίζει τις τοποθετήσεις και θέσεις των υποκειμένων (βλ. Walkerdine, 1988).

Η έννοια της πρακτικής με τους τρόπους που εννοιολογείται από τον Etienne Wenger ή τον Basil Bernstein, μας βοηθάει να εκτιμήσουμε τη βαθιά κοινωνική, ιστορική και πολιτική φύση της επικοινωνίας και της μάθησης στην τάξη. Ο Wenger (1998) συνεχίζοντας αυτή τη γραμμή σκέψης, εξηγεί ότι η μάθηση συγκροτείται στο πλαίσιο περίπλοκων διασυνδέσεων μεταξύ διαδικασιών σχηματισμού και μετασχηματισμού ταυτοτήτων, ανάπτυξης νοημάτων, και κοινωνικών όψεων της αίσθησης του ανήκειν σε μια κοινότητα. Όσο το συστατικό της μάθησης της κοινότητας έχει να κάνει με την αίσθηση του ‘ανήκειν’ (belonging) σε μια συ-

γκεκριμένη κοινότητα, άλλο τόσο έχει να κάνει με την αίσθηση του 'γίνεσθαι' (becoming) που επιτρέπει στο δρων υποκείμενο να μετασχηματίσει ή να ενστερνιστεί πολλαπλές ταυτότητες. Ο Wenger (1998, σελ. 5) βλέπει την ταυτότητα ως *"έναν τρόπο να μιλάει κανείς για το πώς η μάθηση αλλάζει αυτό που είμαστε και δημιουργεί προσωπικές ιστορίες του 'γίνεσθαι' στο πλαίσιο των κοινοτήτων μας"* και διατυπώνει την άποψη ότι η κατασκευή ταυτότητας συνίσταται στη διαπραγμάτευση νοημάτων που απορρέουν από τις εμπειρίες ως συμμετέχοντες σε κοινότητες. Η συζήτηση για την ταυτότητα με κοινωνικούς όρους δεν συνεπάγεται άρνηση της ατομικότητας αλλά αναθεώρηση ενός καθαρού και μονοσήμαντου ορισμού του ατόμου.

Έχει υποστηριχθεί, σε πρόσφατες μελέτες με παιδιά Ρομά (βλ. Chronaki, 2003, 2005, 2008) ότι άτομα με πολιτισμική καταγωγή διαφορετική της κυρίαρχης ομάδας αντιμετωπίζουν συχνά δυσκολίες όταν έρχονται αντιμέτωπα με τον τυπικό σχολικό κώδικα στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, όταν τους ζητείται να επιλύσουν συγκεκριμένα αριθμητικά προβλήματα τα οποία απαιτούν χρήση αλγορίθμων τεσσάρων πράξεων, τα παιδιά αυτά ενώ αρχικά μοιάζει να συνηγορούν, τελικά αντιστέκονται στην ενσωμάτωση των κανόνων της πρακτικής των σχολικών μαθηματικών. Η αντίστασή τους αφορά την άρνηση για αφομοίωση ενός τύπου *μαθησιακής ταυτότητας* για τα μαθηματικά τον οποίο προωθεί ο/η εκπαιδευτικός. Έτσι, ενώ τα παιδιά αυτά ισχυρίζονται ότι 'τα μαθηματικά είναι στο αίμα τους' δεν προχωρούν στην κάλυψη ύλης και αποκλείονται από την τυπική μορφή εκπαίδευσης ως αποτυχόντες.

Η Dalene Swanson (2005) διερευνά πώς μια ομάδα από μαύρους μαθητές στη Νότια Αφρική βιώνουν τη διδασκαλία των μαθηματικών και ανακατασκευάζουν τις ταυτότητές τους ως μαθητές σε ένα νέο σχολικό πλαίσιο. Ανισό οι μαθητές, μέσα από υποτροφίες, αποκτούν πρόσβαση στη συμμετοχή σε τάξεις των μαθηματικών ενός πλούσιου, ιστορικά, λευκού σχολείου. Η μετακίνησή τους από το σπίτι στο σχολείο, σε ένα νέο περιβάλλον, σημαίνει ταυτόχρονα μια υποβάθμιση στην εκτίμηση των μαθηματικών τους ικανοτήτων. Καθώς δεν έχουν άπταιστη γνώση

της Αγγλικής γλώσσας τοποθετούνται σε ομάδα χαμηλής ικανότητας στα μαθηματικά. Ως αποτέλεσμα, οι ευκαιρίες τους για πλήρη συμμετοχή σε κεντρικές μαθηματικές δραστηριότητες περιορίζονται, και οι ταυτότητές τους θεωρούνται ως ελλειμματικές ή προβληματικές. Με αυτή την περιγραφή συμφωνεί και ο Khuzwayo προσθέτοντας ότι έτσι όχι μόνο εκφράζεται αλλά νομιμοποιείται η κυρίαρχη άποψη για τους μαύρους μαθητές στο εκπαιδευτικό σύστημα της μετα-απαρτχάντ περιόδου στη Νότια Αφρική (Khuzwayo, 1999).

Ο παράγοντας των σχολικών μαθηματικών και ο ρόλος του ευρύτερου κοινωνικού και πολιτισμικού πλαισίου ως ρυθμιστικών παραγόντων για την νομιμοποίηση του τι σημαίνει αντικειμενικότητα στο σχολικό λόγο είναι βασικοί σ' αυτή τη συζήτηση. Μέσα από τα παραπάνω παραδείγματα είναι εύλογο να ισχυριστούμε ότι ο κύριος λόγος για τον οποίο παιδιά με καταγωγή από μειονοτικές ομάδες παραμένουν σε μειονεκτική θέση, είναι η έλλειψη επίγνωσης για το επικοινωνιακό χάσμα που δημιουργείται μεταξύ εκπαιδευτικών, μαθητών και παιδαγωγικής πρακτικής. Συχνά οι μαθητές δεν κατανοούν τι πρέπει να κάνουν σε συγκεκριμένες εργασίες ή τεστ, ή δεν ξέρουν πως ακριβώς πρέπει να συμπεριφερθούν ή να μιλήσουν και ως συνέπεια δε μπορούν να παράξουν μια επιτυχή απάντηση. Ο κύριος λόγος δεν βρίσκεται στην ικανότητα των μαθητών να χειριστούν τη γλώσσα, το μαθηματικό ιδίωμα, ή/και τα αναπαραστατικά μέσα αλλά στο πως ο παιδαγωγικός λόγος επικοινωνείται στο σύνθετο πλαίσιο χρήσης μαθηματικών δραστηριοτήτων, υλικών, θεμάτων σε τεστ καθώς και σε πιο λεπτούς κανόνες για τη συμμετοχή στην πρακτική της τάξης.

Συμπερασματικά

Η επικοινωνία στην τάξη των μαθηματικών είναι μέρος της ιστορίας και της μελλοντικής τροχιάς της μαθηματικής εκπαίδευσης σε όλες τις διαστάσεις περιεχομένου, διδακτικής και αξιολόγησης. Οι τρεις παραπάνω άξονες αποτολμών, από διαφορετικές σκοπιές ο καθένας να ερμηνεύσουν πως η επικοινωνία στις τάξεις των μαθηματικών επηρεάζεται από το ευρύτερο κοινωνικό πλαίσιο, και με ποιο τρόπο τέτοιες επιρροές

γίνονται αντιληπτές από τους συμμετέχοντες (δασκάλους/ες και μαθητές/ριες) στις πρακτικές των σχολικών μαθηματικών. Οι εξηγήσεις τους μας οδηγούν να προβληματιστούμε κυρίως για υποθέσεις για το τι είναι τελικά η επικοινωνία στις τάξεις των μαθηματικών, με τι μοιάζει, πώς αναπτύσσεται και ποιους εξυπηρετεί. Η σύνδεση αυτών των αξόνων με τους μεταφορικούς προσδιορισμούς που κουβαλούν οι λέξεις *βιέμματα*, *ομιλίες* και *σιωπές* στοχεύει να κοτιάσει όχι τόσο στην ακρίβεια μιας θεωρητικής τοποθέτησης αλλά στην αμεσότητα της βιωμένης εμπειρίας.

Συμπερασματικά, πρέπει να τονίσουμε ότι γίνεται όλο και πιο επιτακτική η ανάγκη να επαναπροσεγγίσουμε το γεγονός ότι η κατασκευή και η διαπραγμάτευση μαθηματικών νοημάτων, καθώς και οι συμμετρικές σχέσεις μεταξύ μαθητών και μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικών δεν μπορούν να ειπωθούν απλουστευτικά ως οι κύριες νόρμες επικοινωνίας και μάθησης στην τάξη. Αντίθετα, οι ρόλοι που αναλαμβάνουν εκπαιδευτικοί, μαθητές και προγράμματα σπουδών καθιστούν πολιτικές εξουσίας και τεχνολογίες ελέγχου. Χρειάζεται, λοιπόν, μια βαθύτερη κατανόηση των πολιτικών του πλαισίου πρακτικής των σχολικών μαθηματικών, συμπεριλαμβάνοντας την ανίχνευση ζητημάτων όπως: πώς προωθούνται και ενθαρρύνονται κυρίως απόψεις για τη μαθηματική γνώση και την επαναπλαισίωσή της; πώς κατασκευάζονται, διατηρούνται ή μετασχηματίζονται ταυτότητες για τα μαθηματικά; ποιά είναι η ιδέα για την παιδαγωγική πρακτική στην τάξη των μαθηματικών; τίνας τα ενδιαφέροντα υπηρετεί μια τέτοια πρακτική; και με ποιο τρόπο μια τέτοια ιδέα γίνεται αντιληπτή; Όλες αυτές οι διαστάσεις παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στο πώς η φύση της επικοινωνίας στην τάξη αναπτύσσεται και εξελίσσεται.

Συνεπώς, η οργάνωση διαδικασιών επικοινωνίας και μάθησης στις τάξεις των μαθηματικών απαιτεί κάτι παραπάνω από μια απλή επιλογή κατάλληλων αναπαραστατικών μέσων ή/και από μια απλή ενορχήστρωση κοινωνικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ υποκειμένων. Επιπρόσθετα, απαιτεί την ενασχόληση με την επικοινωνία ως μια ολιστική διαδικασία που εμπλέκει το σχηματισμό και το μετασχηματισμό ταυτοτήτων, τη συμμετοχή σε κοινότητες πρακτικής και ακόμη τη συνείδηση της ιστορι-

κότητας και της κοινωνικο-πολιτικής διάστασης των επιμέρους πρακτικών στις οποίες εμπλέκονται τα σχολικά μαθηματικά. Καθώς οι *σιωπές* της καθημερινότητας στις τάξεις των μαθηματικών έχουν ξεκινήσει να αποκτούν φωνή, αυτή η διάσταση μοιάζει να υπόσχεται ένα ενδιαφέρον μονοπάτι τόσο για την πρακτική της μαθηματικής εκπαίδευσης όσο και για την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών.

Αναφορές

- Ainley, J. (2000). Exploring the transparency of graphs and graphing. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Vol. 2 pp. 9-16.
- Alro, H., & Skovsmose, O. (2003). *Dialogue and learning in mathematics education: intention, reflection, critique*. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
- Bartolini-Bussi, M. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school, *Educational studies in mathematics* 31, pp. 11-41.
- Bauchspies, W. (2005). Sharing Shoes and Counting Years: Mathematics, Colonialization and Communication. In A. Chronaki & I. Christiansen (eds). *Challenging Perspectives on Mathematics Classroom Communication*. IAP press. (pp.237-260)
- Bauersfeld, H. (1995). "Language Games" in the mathematics classroom: Their function and their effects, in P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Erlbaum
- Bernstein, B. (1990). *Class codes and control*. (Vol. IV). The structuring of pedagogic discourse. London, UK: Routledge.
- Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control & identity*, UK: Rowman & Littlefield.
- Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Bruner, J. (1985). Vygotsky: A historical and conceptual perspective, in J.V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives*, Cambridge, UK: Cambridge University press pp. 21-34.
- Burton, L. & Morgan, C. (2000) Mathematicians' writing. *Journal for Research in Mathematics Education* 31(4), 429-453.
- Castells, M. (1996) *The information age: Economy, society and culture: (Vol. 1) the Rise of the Network Society*. Oxford, UK: Blackwell.
- Castells, M., Flecha R., Freire, P., Giroux, H.A., Maccdo, D. & Willis, P. (1999) *Critical education in the new information age*. UK: Rowman & Littlefield
- Chronaki, A. (1998) Exploring the socio-cultural aspects of maths teaching: Using "tools" in creating a maths learning culture. O. Björkqvist (Ed.), *Mathematics teaching from a constructivist point of view*. pp. 61-85. Finland: Ebo Academi University Publications.
- Chronaki, A. (2000a). Teaching maths through theme-based resources: Pedagogic style, "theme" and "maths" in lessons. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 141-163.
- Chronaki, A. (2000b) Computers in classrooms: Learners and teachers in new roles. B. Moon, M. Ben-Peretz & S. Brown (Eds.), *Routledge Companion to Education* pp. 558-572. London, UK: Routledge.
- Chronaki, A. 2003. Developing Mathematical Learning as Mastering New Tools and Entering New Discourses: some thoughts on a very complex process. Paper presented in the *EARLI (European Association of Research in Learning and Instruction)*. August 2003, Padova, Italy.
- Chronaki, A. 2005. Learning about 'learning identities' in the school arithmetic practice: The experience of two young minority Gypsy girls in the Greek context of education. *European Journal of Psychology of Education: Special Issue on "The Social Mediation of Learning in Multiethnic Classrooms"* Vol. XX, no 1, 61-74.
- Chronaki, A. 2008. Teaching experiment, the act of performance and dialogicality. In M. Pourkos (Ed.), *Perspectives and limits of dialogism in Mikhail Bakhtin: Conference proceedings*.

- Cobb, P. 1991. Reconstructing elementary school mathematics. Focus on Learning Problems in Mathematics 13(2), 3–32.
- Cobb, P. 1995. Mathematical learning and small-group interaction: Four case studies, in P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* pp. 25–130. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Eds.). 1995. *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Cobb, P., McClain, K. & Whitenack, J. 1997. Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education* 8(3), 258–277.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. 1992. A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education* 23(1), 2–33.
- Cole, M. (1985). The zone of proximal development: When culture and cognition create each other. J.V. Wertsch (Ed.), *Culture, Communication, and Cognition: Vygotskian Perspectives*. pp. 146–161. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Cooper, B. and Dunne, M. (2000). *Assessing children's mathematical knowledge: social class, sex and problem solving*. UK: Open University Press.
- de Abreu, G., Bishop, A. J. & Presmeg, N.C. (Eds.). (2001). *Transitions Between Contexts of Mathematical Practices*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Dowling, P. (1998). *The sociology of mathematics education: Mathematical myths/pedagogic texts*. London, UK: Falmer.
- Dubinsky, E. & Tall, D. (1994). Advanced mathematical thinking and the computer. Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* pp. 231–243. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Edwards, M. & Mercer, N. (1987). *Common knowledge: The development of understanding in the classroom*. London, UK: Methuen.
- Ellerton, N.F. & Clarkson, P.C. (1996). *Language factors in mathematics*

- teaching and learning. A.J. Bishop, K. Clements, C., Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* pp. 987-1034. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ernest, P. (1991) *The Philosophy of mathematics education: Studies in mathematics education*, London, UK: Falmer.
- Evans, J. (1999). Building bridges: Reflections on the problem of transfer of learning in mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 39, 23-44.
- Hoyles, C. & Sutherland, R. (1989) *Logo mathematics in the classroom*. London, UK: Routledge.
- Hughes, M. (1986). *Children & Number: Difficulties in Learning Mathematics*. UK: Blackwell.
- Hundeide, K. (1985). The tacit background of children's judgements, J.V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives* pp. 323-347. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education, C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* pp.27-32. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Khuzwayo, H.B. (1999). *Selected views and critical perspectives: An account of mathematics education in South Africa from 1948 to 1994* Unpublished doctoral dissertation, Aalborg University, Denmark.
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation, P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* pp. 229-270. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Krummheuer, G. & Voigt, J. (1991). Interaktionsanalysen von mathematikunterricht: Ein überblick über einige bielefelder arbeiten, Maier, H. & Voigt, J. (Eds.), *Interpretative unterrichtsforschung. untersuchungen zum mathematikunterricht* 17 pp. 13-32. Köln, Germany: Aulis Verlag Deubner & Co.
- Labinowicz, E. (1985). *Learning from Children*. Menlo Park, CA: Addison Wesley.

- Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry, in C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: mathematics education and technology*, pp. 48–60. Springer-Verlag, Germany: NATO ASI Series.
- Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Lee, B. (1985). Intellectual origins of Vygotsky's semiotic analysis, J.V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives* pp. 66–94. Cambridge, UK: Cambridge University press.
- Leont'ev, A.N. (1981). The problem of activity in psychology, J.V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in soviet psychology* pp. 37–71. Armonk, NY: Sharpe.
- Lerman, S. (2000). Some problems of socio-cultural research in mathematics teaching and learning. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 8(3), 55–72.
- Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* pp. 33–40. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Meaney, T. (2005). Mathematics as Text. In A. Chronaki & I. Christiansen (eds), *Challenging Perspectives on Mathematics Classroom Communication*. IAP press (pp. 109-140)
- Mellin-Olsen, S. (1987). *The role of thinking tools in mathematics education*. Southampton, UK: CIEAEM, University of Southampton.
- Mercer, N. (1995). *The guided construction of knowledge: Talk among teachers and learners. multilingual matters*. England: Clevedon.
- Nardi, E. (2007) *Amongst Mathematicians: Teaching and learning mathematics at university level*. USA: Springer
- Niss, M. (1999). Kompetencer og Uddannelsesheskrivelse. *Uddannelse*, No. 9, 21–29.

- Perret-Clermont, A.N., Perret, J.F., & Bell, N. (1991). The social construction of meaning and the cognitive activity in elementary school children, L.B.
- Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. London, UK: Routledge.
- Saxe, G. (1991). *Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Sfard, A. (1996). On acquisition metaphor and participation metaphor for mathematics learning, C. Alsina, J.M. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pirez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected Lectures* pp. 397-411. SAEM "THALES." Spain: Sevilla.
- Sfard, A. (2001). Review of [Communicating to learn or learning to communicate? *Mathematics education in quest for new answers to old questions*]. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik/International Reviews on Mathematical education* 33(1), 1-9.
- Sfard, A. & Kiran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture and Activity*, 8(1), 42-76.
- Sfard, A., Neshet, P., Streefland, L., Cobb, P. & Mason, J. (1999). Learning mathematics through conversation: Is it as good as they say?, *For the Learning of Mathematics*, 18(1), 41-51.
- Shirato, T. & Yell, S. (2000). *Communication and culture: An introduction*. London, UK: Sage Publications.
- Sierpiska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. H. Steinbring, M. Bartolini-Bussi, & A. Sierpiska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* pp. 30-63. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Solomon, Y. (1989). *The practice of mathematics*. London, UK: Routledge.
- Steinbring, H. (2000). Mathematics as language: Epistemological particularities of mathematical signs in social communication, Barton, B., (Ed.), *Communication and language in mathematics education:*

- The pre-conference publication of working group 9, ICME 9, MEU Series no. 2, pp. 81–92. New Zealand: University of Auckland.
- Swanson D. (2005). School Mathematics: Discourse and the Politics of Context. In A. Chronaki & L. Christiansen (eds). *Challenging Perspectives on Mathematics Classroom Communication*. IAP press. (pp.261-294)
- Vergnaud, G. (1987). Conclusion, in C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* pp. 227–232. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms, P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* pp. 163–202. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte, Texte zur Didaktik der Mathematik*, Heidelberg, Germany: Verlag.
- Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*, M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman (Eds.), Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotsky, L.S. (1986). *Thought and Language*, (A. Kozulin, Ed. and trans.), Cambridge, MA: MIT press.
- Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality*. London, UK: Routledge.
- Walkerdine, V. (1998). *Counting girls out: girls and mathematics*. London, UK: Falmer.
- Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. New York: Cambridge University Press.
- Wertsch, J.V. (Ed.) (1985) *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Wertsch, J.V. & Stone, C.A. (1985). The concept of internalization in Vygotsky's account of the genesis of higher mental functions. J.V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives* pp. 162–182. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

- Wistedt and Brattstrom (2005). Understanding Mathematical Induction in a Cooperative Setting: Merits and Limitations of Classroom Communication. In A. Chronaki & I. Christiansen (eds). *Challenging Perspectives on Mathematics Classroom Communication*. IAP press. (pp.173-203)
- Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical Investigations*. Oxford: Basil Blackwell.
- Wood, T. (1995). An emerging practice of teaching, P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* pp. 203-229. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Worthington, M. & Carruthers, F. (2003). *Children's mathematics: Making marks, making meaning*. Paul Chapman, London, UK.
- Wyndhamn, J. (1993). *Problem-solving revisited: On school mathematics as a situated practice*, doctoral dissertation, Linköping Studies in Arts and Science, no. 98, Linköping University, Sweden.
- Zack, V. (1999). Everyday and mathematical language in children's argumentation about proof, L. Burton (Ed.), [Special Issues]. *The culture of the mathematics classroom*. *Educational Review* 51(2), 129-146.