

herakleidon  
experienceinvisualarts

# Τέχνη & Μαθηματικά



ΜΟΥΣΕΙΟ  
Ηρακλειδών®  
ΤΕΧΝΗ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Μια παράλληλη περιήγηση στα Μαθηματικά της Τέχνης και την Τέχνη των Μαθηματικών

### Σχεδιασμός

Άρης Μαυρομμάτης  
Αποστόλης Παπανικολάου

### Συνεργασία - Παρουσίαση

Ναταλία Κωτσάνη  
Γιώργος Μαυρομμάτης  
Αριστοτέλης Παναγιωτόπουλος

### Αριθμός μαθητών

έως 75 άτομα ανά δώρο

### Ώρες Λειτουργίας

9:00 - 11:00 & 11:00 - 13:00

### Διάρκεια Προγράμματος

2 ώρες

### Κόστος συμμετοχής

2.50€ ανά μαθητή · συνοδοί &  
εκπαιδευτικοί δωρεάν

Μια πορεία αναζήτησης της σχέσης Τέχνης και Μαθηματικών, μέσα από την αλληλεπίδραση με έργα Τέχνης και διαδραστικά εκθέματα. Αναζητούνται τα σημεία όπου συναντώνται και αλληλοεπηρεάζονται οι δυο αυτοί τομείς της ανθρώπινης σκέψης και έκφρασης, με έμφαση στη γεωμετρική περίοδο της Ελληνικής τέχνης, στη σχέση Μαθηματικών και Μουσικής (Πυθαγόρεια κλίμακα), στην κλασική τέχνη (Παρθενών – Αναλογίες – Χρυσή Τομή), στη γραμμική προοπτική (Αναγέννηση), στη Γεωμετρία της μοντέρνας τέχνης (Κυβισμός, Κονστρουκτιβισμός, Bauhauss) και τέλος στη σύγχρονη λεγόμενη «μαθηματική τέχνη» των μορφοκλασματικών (fractals). Με αφορμή κατάλληλα επιλεγμένα έργα των Μ. C. Escher και V. Vasarely αλλά και άλλων καλλιτεχνών, οι μαθητές εισάγονται αβίαστα στη φύση και κυρίως στη φιλοσοφία σημαντικών μαθηματικών εννοιών.

# Πρόγραμμα Λυκείου

Το πρόγραμμα «Τέχνη και Μαθηματικά»® για το λύκειο, αποτελείται από τρία διδακτικά μέρη, δύο εκ των οποίων είναι κοινά για τους μαθητές όλων των τάξεων (Μέρη Α' & Β') και από ένα ειδικό μέρος (Μέρος Γ'), το οποίο είναι κατάλληλα προσαρμοσμένο στις γνωστικές δυνατότητες κάθε τάξης. Στο τέλος, οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα έντυπο αξιολόγησης.

# Περιγραφή

## Μέρος Α': Γενικό – Εισαγωγικό

*διάρκεια: 15 λεπτά*

Παράλληλη περιήγηση με προβολή κατάλληλου οπτικοακουστικού υλικού, στην ιστορία αφενός της Τέχνης και αφετέρου των Μαθηματικών, επικεντρωμένη σε τρεις βασικές περιόδους:

**(Π1) Αρχαία Ελληνική και κλασική Τέχνη:** σύνδεση με τα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά.

**(Π2) Αραβικός πολιτισμός και Αναγέννηση:** σύνδεση με τις αντίστοιχες μαθηματικές και επιστημονικές κατακτήσεις.

**(Π3) Μοντέρνα Τέχνη:** σύνδεση με τις αντίστοιχες μαθηματικές και επιστημονικές κατακτήσεις.

## Μέρος Β': Επίσκεψη των δύο εκθεσιακών χώρων του μουσείου

*διάρκεια: 30 λεπτά*

Περιήγηση στην τρέχουσα έκθεση του Μουσείου Ηρακλειδών. Μέχρι τέλη Ιανουαρίου 2011 εκτίθενται έργα του Sol Lewitt, κατόπιν θα γίνει αντικατάσταση με έργα των M. C. Escher και V. Vasarely.

## Μέρος Γ': Παρουσίαση ειδικού θέματος στις αίθουσες διαλόγου και αλληλεπίδρασης

*διάρκεια: 60 λεπτά*

Ο διάλογος με αφορμή επιλεγμένα έργα τέχνης, πολυμεσικό υλικό και αλληλεπιδραστικά εκθέματα, επικεντρώνεται σε μία συγκεκριμένη για κάθε τάξη θεματική ενότητα. Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή των προτεινόμενων θεματικών ενοτήτων του ειδικού μέρους για κάθε τάξη, από τις οποίες μπορούν να επιλέξουν οι εκπαιδευτικοί.

## Μέρος Δ': Ανατροφοδότηση - Αξιολόγηση

*διάρκεια: 15 λεπτά*

Συμπλήρωση εντύπου αξιολόγησης με ανώνυμη και ελεύθερη καταγραφή παρατηρήσεων και εντυπώσεων για το πρόγραμμα.

Σκοπός του εκπαιδευτικού προγράμματος «Τέχνη και Μαθηματικά» είναι να αποτελέσει συμπλήρωμα της διδασκόμενης ύλης των Μαθηματικών, στην κατεύθυνση της κοινά επιθυμητής από όλους τους ερευνητές της Διδακτικής, «διαθεματικότητας», διασυνδέοντας τα Μαθηματικά με την Ιστορία της Επιστήμης και της Τέχνης, τη Φιλοσοφία και τα κλασικά γράμματα.

## Ειδικό Μέρος



Όσον αφορά στο ειδικό μέρος (Μέρος Γ') του προγράμματος του λυκείου, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να επιλέξουν μία από τις παρακάτω εννιά θεματικές ενότητες:

- I. Οι οφθαλμαπάτες της τέχνης & τα παράδοξα της λογικής
- II. Μουσική και μαθηματικά
- III. Οι διαστάσεις του χώρου & η προοπτική
- IV. Μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες «επί τάπητος»
- V. Μετασχηματισμοί, συμμετρίες & γεωμετρικά μοτίβα
- VI. Ο θαυμαστός κόσμος των *fractals*
- VII. Κανονικά πολύγωνα & πολύεδρα – Πλακοστρώσεις
- VIII. Λόγος, αναλογία, χρυσή τομή
- IX. Το άπειρο & το όριο στην τέχνη & τα μαθηματικά

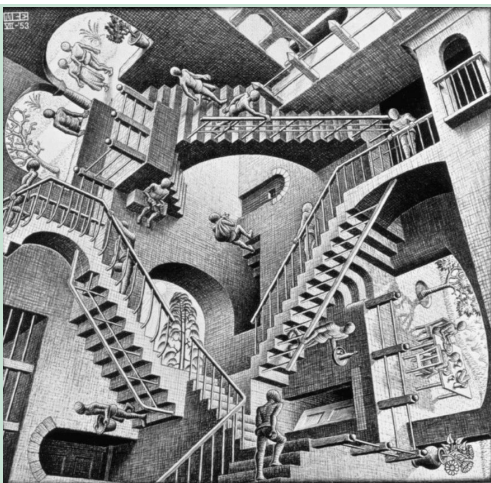
Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή των παραπάνω θεματικών εννοιών.

# I. Οι οφθαλμαπάτες της τέχνης & τα παράδοξα της λογικής

Στόχος της ενότητας αυτής είναι η δημιουργία αμφισβήτησης στην εμπιστοσύνη προς τις αισθήσεις και συνειδητοποίησης της ανάγκης να χρησιμοποιηθεί η λογική - μαθηματική σκέψη για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων, μέσω της παρατήρησης πινάκων που εμπεριέχουν οφθαλμαπάτες και αμφισημίες οι οποίες οδηγούν σε αβεβαιότητες και αντιφάσεις. Στόχος επίσης είναι μια περιήγηση των μαθητών στα διάφορα παράδοξα, που κατά καιρούς απασχόλησαν μαθηματικούς, φιλοσόφους και καλλιτέχνες, καθώς και η συνεισφορά τους στην εξέλιξη της ανθρώπινης σκέψης. Πώς οι καλλιτέχνες της *op art* πειραματίζονται με την ανθρώπινη πλάνη; Ποιος είναι ο ρόλος της λογικής - μαθηματικής σκέψης στην αντιμετώπιση των παραδόξων;

Πιο συγκεκριμένα, μέσα από διάλογο, ομαδικά παιχνίδια, ζωγραφικούς πίνακες και κατάλληλα σχεδιασμένη προβολή, οι μαθητές:

- Προσδιορίζουν το ρόλο της ψευδαίσθησης και της αμφισημίας στα έργα του V. Vasarely (αμφισημία της ισομετρικής προβολής, φαινόμενο του κύβου του Necker), στην προσπάθεια παρακίνησης των θεατών να αποκτήσουν ενεργή συμμετοχή απέναντι στα έργα της *op art*.
- Αναζητούν το ρόλο της απόδειξης ως μοναδικό μέσο εύρεσης της αλήθειας, μακριά από κάθε ψευδαίσθηση και οφθαλμαπάτη.
- Εμπλέκονται σε «παιχνίδια διαστάσεων» μέσα από αδύνατα σχήματα των μαθηματικών, μερικά από τα οποία απεικονίζονται στην τέχνη του M.C. Escher.
- Παρακινούνται να αντιμετωπίσουν το παράδοξο του δρομέα, εμπλέκονται στους προβληματισμούς του Ζήνωνα καθώς και σε άλλα λογικά και συνολοθεωρητικά παράδοξα.
- Εισάγονται στην έννοια της αυτοαναφοράς μέσα από γλωσσικά παιχνίδια και τους πίνακες του M.C. Escher.
- Καλούνται να προσδιορίσουν το ρόλο της γλώσσας στη δημιουργία παραδόξων.
- Κατασκευάζουν την κορδέλα του Möbius και συζητούν τους προβληματισμούς που ανακύπτουν από αυτήν.



Ποιος είναι ο ρόλος της μαθηματικής σκέψης στην αντιμετώπιση των λογικών και συνολοθεωρητικών παραδόξων; Ποιοι είναι οι νόμοι που διέπουν την ανθρώπινη αντίληψη;

Η δραστηριότητα αυτή είναι κατάλληλη για μαθητές Α΄, Β΄ & Γ΄ Λυκείου

## II. Μουσική και Μαθηματικά



Πώς οι μαθηματικές αναλογίες εμπλέκονται στην αντίληψη του ρυθμού; Ποιες είναι οι μαθηματικές σχέσεις που διέπουν την Πυθαγόρεια αρμονία;

Η δραστηριότητα αυτή είναι κατάλληλη για μαθητές Α΄, Β΄ & Γ΄ Λυκείου

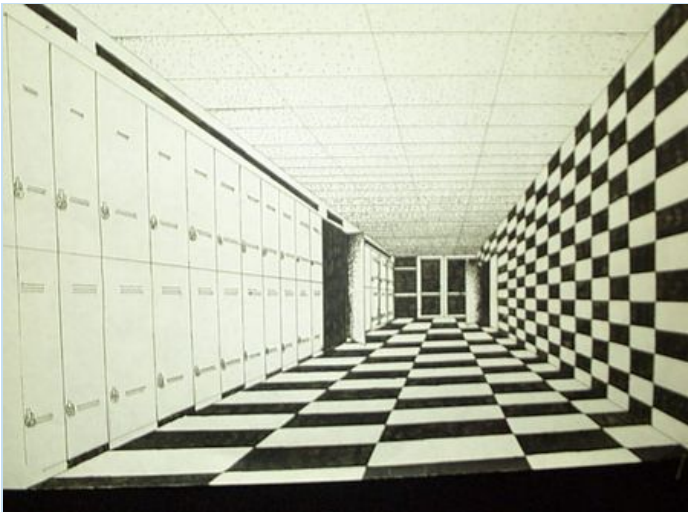
Στόχος της ενότητας αυτής είναι οι μαθητές να αναπτύξουν μαθηματικές και παράλληλα μουσικές δεξιότητες μέσα από μουσικά παιχνίδια, πειραματισμό με μουσικά όργανα και ακρόαση κομματιών της κλασικής αλλά και της σύγχρονης μουσικής δημιουργίας (jazz, ethnic, blues, rock). Οι μαθητές παρακινούνται να πειραματιστούν με τον ήχο, τη μουσική και τα συναισθήματα που αυτή δημιουργεί, καθώς αλλάζουν οι συνθήκες παραγωγής του, να απελευθερώσουν τη δημιουργική τους ικανότητα και να ανακαλύψουν ότι η τέχνη της μουσικής αποτελεί ένα μέσο έκφρασης και μια γλώσσα επικοινωνίας μεταξύ των ανθρώπων διαφορετικών πολιτισμών και εθνικοτήτων.

Μέσα από βιωματικές δραστηριότητες, δημιουργικά παιχνίδια, μουσικά παραδείγματα και κατάλληλα επιλεγμένο οπτικοακουστικό υλικό:

- Εμπλέκονται σε βιωματικές δραστηριότητες μέσα από τις οποίες αναγνωρίζουν τα βασικά χαρακτηριστικά του ήχου: ένταση, οξύτητα, χροιά και διάρκεια.
- Ανακαλύπτουν τη συμμετρία και την κανονικότητα που δημιουργεί μουσικούς ήχους, σε αντίθεση με την ασυμμετρία του θορύβου.
- Κατανοούν την ημιτονοειδή μορφή των απλών μουσικών ήχων με τη βοήθεια αλληλεπιδραστικού εκθέματος.
- Ανακαλύπτουν την έννοια του ρυθμού και την οργάνωση του χρόνου στη μουσική, ενώ παράλληλα αναζητούν μαθηματικές αναλογίες στα ρυθμικά μοτίβα που καλούνται να δημιουργήσουν ή να αναπαράγουν μέσα από ομαδικά παιχνίδια με κρουστά.
- Πειραματίζονται με το μονόχορδο του Πυθαγόρα και μέσα από τη διαφωνία ή τη συμφωνία των μουσικών συνηχήσεων που δημιουργούν, οδηγούνται στην αναζήτηση των μαθηματικών σχέσεων που διέπουν την αρμονία.
- Κατασκευάζουν τη μείζονα κλίμακα και εξασκούνται στην αναγνώριση των μουσικών διαστημάτων από τα οποία αποτελείται.
- Μέσα από παιχνίδια ρόλων φτιάχνουν τα δικά τους μουσικά κομμάτια συνδέοντας ρυθμούς με μελωδίες και παρατηρούν τις ακουστικές εντυπώσεις των δημιουργιών τους.

### III. Οι διαστάσεις του χώρου & η προοπτική

Στόχος της ενότητας αυτής, είναι η ανάδειξη της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στον τρισδιάστατο κόσμο που μας περιβάλλει, και εκείνου που αποτυπώνεται στη δισδιάστατη επιφάνεια ενός ζωγραφικού πίνακα. Η ανάδειξη της σχέσης αυτής είναι σημαντική αφού, ίσως όσο καμιά άλλη, έφερε τόσο κοντά την καλλιτεχνική δημιουργία με την μαθηματική αυστηρότητα, οδηγώντας αφενός μεν την Τέχνη της ζωγραφικής στην Αναγέννηση και αφετέρου τα Μαθηματικά στην ανάδειξη νέων γεωμετριών, διαφορετικών της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

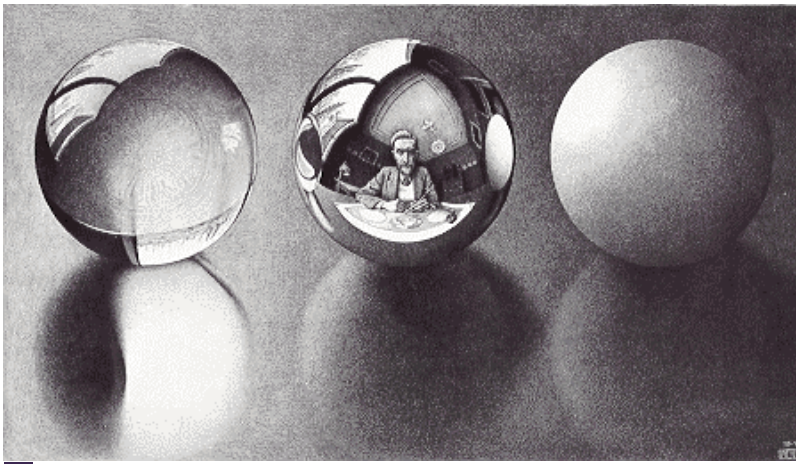


Ένα ταξίδι σε  
κόσμους  
διαφορετικών  
διαστάσεων για την  
αναζήτηση των  
μυστικών της  
προοπτικής που  
κρύβουν οι πίνακες  
της αναγέννησης...

Η δραστηριότητα αυτή είναι  
κατάλληλη για μαθητές  
Α΄, Β΄ & Γ΄ Λυκείου

Ειδικότερα, μέσα από την αφήγηση, παρατήρηση ζωγραφικών πινάκων, ομαδικές δραστηριότητες και κατάλληλα σχεδιασμένη προβολή, οι μαθητές:

- Ταξιδεύουν μαζί με τους ήρωες της «Επιπεδοχώρας», του γνωστού διηγήματος του E. Abbott, σε κόσμους διαφορετικών διαστάσεων βιώνοντας την καθημερινότητα και τους προβληματισμούς των υποθετικών κατοίκων τους.
- Συλλαμβάνουν την έννοια της διάστασης καθώς, με αφετηρία τον τρισδιάστατο περιβάλλοντα χώρο, οδηγούνται στον κόσμο της Επιπεδοχώρας, της Γραμμοχώρας αλλά και στον τετραδιάστατο χωρο-χρόνο.
- Εμπλέκονται σε βιωματικά παιχνίδια επίλυσης προβλημάτων με στόχο την κατανόηση των περιορισμών της κίνησης σε λιγότερες από τρεις διαστάσεις.
- Αναζητούν την ύπαρξη κανόνων που οδηγούν στην απεικόνιση του τρισδιάστατου χώρου, πάνω στη δισδιάστατη επιφάνεια του ζωγραφικού καμβά.
- Αναζητούν το πραγματικό μαθηματικό υπόβαθρο της γραμμικής προοπτικής στους πίνακες της Αναγέννησης.
- Αναλύουν μαθηματικά τη γραμμική προοπτική με τη βοήθεια ειδικού αλληλεπιδραστικού εκθέματος (ανακατασκευής του «προοπτικογράφου» του Albrecht Dürer).
- Αναζητούν τις φιλοσοφικές προεκτάσεις της προβολής με έναυσμα το σπήλαιο του Πλάτωνα.



Ποια είναι  
τελικά η  
γεωμετρία  
που διέπει  
το σύμπαν;

Η δραστηριότητα αυτή είναι  
κατάλληλη για μαθητές  
**Α', Β' & Γ' Λυκείου**

## IV. Μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες «επί τάπητος»

Στόχος του προγράμματος αυτού είναι η εισαγωγή των μαθητών στην ποικιλία των διαφόρων γεωμετρικών θεωριών, θεωρώντας την Ευκλείδεια εκδοχή ως μια ειδική περίπτωση. Οι μαθητές με βιωματικό τρόπο εισάγονται στους κανόνες διαφορετικών, Μη-Ευκλείδειων, γεωμετρικών κόσμων με αφορμή το υπερβολικό μοντέλο του Poincaré στους πίνακες του M.C. Escher. Ανακαλύπτουν την ουσία της αξιωματικής μεθόδου και την έννοια της απόδειξης εκεί που η αλήθεια αντιβαίνει στη διαίσθηση. Ποια είναι τελικά η γεωμετρία που διέπει το σύμπαν;

Μέσα από ομαδικές - βιωματικές δραστηριότητες, ζωγραφικούς πίνακες και κατάλληλα σχεδιασμένη προβολή οι μαθητές:

- Αναζητούν την ελάχιστη διαδρομή που συνδέει δυο σημεία της υδρογείου, ώστε να προβληματιστούν με την έννοια της ευθείας στην ελλειπτική γεωμετρία και να κατανοήσουν τη γεωδαιτική γραμμή της σφαιρικής γεωμετρίας.
- Κατανοούν την 'τοπικότητα' της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη σφαιρική επιφάνεια και διαπιστώνουν ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου στην επιφάνεια μιας σφαίρας υπερβαίνει τις 180 μοίρες.
- Εξοικειώνονται με το ρόλο του κανόνα και του διαβήτη στην Ευκλείδεια Γεωμετρική κατασκευή, μέσα από απλά παραδείγματα και παιχνίδια.
- Καλούνται να πειραματιστούν με το μοντέλο της υπερβολικής Γεωμετρίας τοποθετημένο στο πάτωμα.
- Χωρίζονται σε ομάδες Ευκλείδειων και Μη-Ευκλείδειων Γεωμετρών, και επιχειρούν καθοδηγούμενοι να αποδείξουν πόσο είναι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου.
- Κατανοούν το διαφοροποιητικό ρόλο του 5<sup>ου</sup> αιτήματος του Ευκλείδη.
- Παρακινούνται να προσεγγίσουν την κάθε μαθηματική θεωρία ως ένα παιχνίδι με απλούς κανόνες, όπως το σκάκι.
- Ταξιδεύουν στους νόμους του σύμπαντος του M.C. Escher καλούμενοι να πλακοστρώσουν το Ευκλείδειο και το Υπερβολικό επίπεδο με σχήματα και σχέδια.

## V. Μετασχηματισμοί, συμμετρίες & πλακοστρώσεις

Στόχος της ενότητας αυτής είναι η ανάδειξη της θεμελιώδους έννοιας της συμμετρίας και των άλλων επίπεδων μετασχηματισμών μέσω της πρόκλησης του ωραίου που προσφέρει η παρατήρηση επιλεγμένων ζωγραφικών πινάκων. Ο πλούτος των πινάκων του M.C. Escher, του V. Vasarely αλλά και άλλων καλλιτεχνών, με παρουσία αξονικής και κεντρικής συμμετρίας, εισάγει αβίαστα τους μαθητές σε αυτές τις έννοιες, μέσα σε ένα ευχάριστο καλλιτεχνικό περιβάλλον. Παράλληλα, δίνεται η ευκαιρία να γίνει επέκταση και στους υπόλοιπους επίπεδους μετασχηματισμούς που δεν εμπεριέχονται στην σχολική ύλη, καθώς και στα αποτελέσματα της σύνθεσης (διαδοχικής επενέργειας) αυτών των μετασχηματισμών.

Πιο συγκεκριμένα, μέσα από εικαστικές προκλήσεις που δημιουργούνται από την παρατήρηση ειδικά επιλεγμένων ζωγραφικών πινάκων, το διάλογο, τα ομαδικά «παιχνίδια», και την αξιοποίηση της σύγχρονης τεχνολογίας οι μαθητές:

- Αναγνωρίζουν διαισθητικά μέσα από ένα πλήθος ειδικά επιλεγμένων ζωγραφικών πινάκων, εκείνους τους πίνακες, που κατά την εκτίμησή τους, διαθέτουν συμμετρίες ή άλλους μετασχηματισμούς.
- Διακρίνουν τα διαφορετικά είδη συμμετριών και μετασχηματισμών.
- Κατανοούν τη μαθηματική έννοια της συμμετρίας και διατυπώνουν ορισμούς.
- Αναγνωρίζουν συμμετρίες σε δοσμένα γεωμετρικά μοτίβα ζωγραφικών πινάκων.
- Κατανοούν την έννοια του γεωμετρικού μοτίβου και συμπληρώνουν – επεκτείνουν γεωμετρικά μοτίβα.
- Επιχειρούν να αναγνωρίσουν το ρόλο της συμμετρίας τόσο στην τέχνη, όσο και στα μαθηματικά.
- Κατασκευάζουν τα δικά τους γεωμετρικά μοτίβα.



«Σύμμετρον όπερ  
εκατέρου των  
άκρων απέχει.»

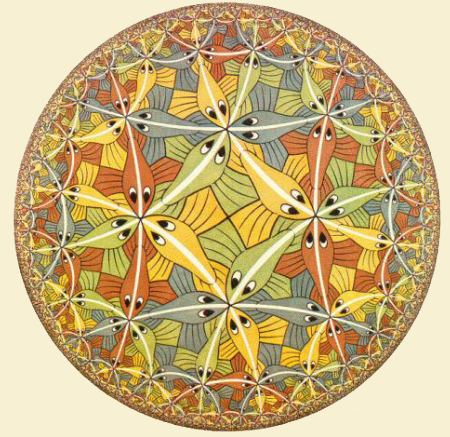
Η δραστηριότητα αυτή είναι  
κατάλληλη για μαθητές  
Α΄, Β΄ & Γ΄ Λυκείου

## VI. Ο θαυμαστός κόσμος των fractals

Στόχος του προγράμματος είναι η εξερεύνηση του κόσμου των fractals μέσα από την αναζήτηση της δομής και της αισθητικής επιλεγμένων φυσικών αντικειμένων και των νόμων που διέπουν τη γεωμετρία της φύσης. Η απλότητα των γεωμετρικών σχημάτων αντιτάσσεται στην πολυπλοκότητα του φυσικού κόσμου και της μοντέρνας τέχνης καθώς ο άνθρωπος κάνει ένα ακόμη βήμα για την αποκρυπτογράφηση των μυστικών του σύμπαντος.

Μέσα από το διάλογο, κατάλληλα σχεδιασμένη προβολή και ομαδικές δραστηριότητες οι μαθητές:

- Αναζητούν την προέλευση της πανανθρώπινης και έμφυτης αντίληψης της αισθητικής μέσα από τα φυσικά και κοινωνικά πρότυπα.
- Περιηγούνται με τη βοήθεια ειδικού λογισμικού και αντίστοιχα βίντεο σε γνωστά fractals όπως το Mandelbrot και το τρίγωνο του Sierpinski.
- Εξοικειώνονται με την ιδέα της αυτοομοιότητας μέσα από ομαδικά παιχνίδια.
- Κατασκευάζουν τα δικά τους fractal μέσα από επαναληπτικές αλγοριθμικές διαδικασίες, τις οποίες καλούνται να κωδικοποιήσουν με ένα απλό αλφάβητο.
- Εισάγονται στην έννοια της κλασματικής διάστασης και μετρούν την κλασματική διάσταση του fractal του Sierpinski με απλές μεθόδους.
- Μαθαίνουν να αναγνωρίζουν αυτοόμοια μοτίβα στη φύση και στα έργα του M. C. Escher και αναζητούν τη σύνδεση τεχνικής και αποτελέσματος στους πίνακες του J. Pollock.



«Τα σύννεφα δεν είναι σφαίρες, τα βουνά δεν είναι κώνοι, οι ακτογραμμές δεν είναι κύκλοι και ο φλοιός των δένδρων δεν είναι λείος, ούτε η αστραπή δεν ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή.»

*The fractal geometry of nature  
Benoit Mandelbrot*

Η δραστηριότητα αυτή είναι κατάλληλη για μαθητές Α', Β' & Γ' Λυκείου

## V. Λόγος, αναλογία, χρυσή τομή

Στόχος αυτής της θεματικής ενότητας είναι ο προβληματισμός των μαθητών στον ορισμό της μαθηματικής έννοιας του λόγου και της αναλογίας, καθώς και τις φιλοσοφικές προεκτάσεις της. Μέσα από την άποψη του M.C. Escher στον πίνακα «Verbum» (λόγος) για τη δημιουργία και εξέλιξη της ζωής που απεικονίζεται στον πίνακα αυτό, διερευνάται η διασύνδεση του μαθηματικού λόγου με τις υπόλοιπες σημασίες της λέξης λόγος (αίτιο, λογική, ομιλία).



Ειδικότερα, μέσα από διάλογο, ζωγραφικούς πίνακες και σχετική προβολή, οι μαθητές:

- Εισάγονται στην έννοια της χρυσής τομής α) αλγεβρικά μέσω της παρατήρησης και καταμέτρησης των αριστερόστροφων και δεξιόστροφων ελίκων σε κουκουνάρια και ηλιάνθους και το σχηματισμό της σχετικής ακολουθίας Fibonacci β) γεωμετρικά μέσω της παρατήρησης πινάκων και αρχιτεκτονημάτων με εμφανή την παρουσία της χρυσής τομής.
- Κατασκευάζουν γεωμετρικά τη χρυσή τομή.
- Κατανοούν γιατί είναι άρρητος αριθμός και ανακαλύπτουν το συνεχές περιοδικό κλάσμα με το οποίο παριστάνεται, όντας ο πιο απλός άρρητος αριθμός.
- Γνωρίζουν και κατασκευάζουν το χρυσό τρίγωνο, το χρυσό ορθογώνιο, και το κανονικό πεντάγωνο.
- Ανακαλύπτουν τη χρήση της χρυσής τομής σε μια σειρά έργων τέχνης, εικαστικών, γλυπτών και αρχιτεκτονημάτων.

«Επειδή άπειροι το  
πλήθος αι δυνάμεις  
εφαίνοντο, πειραθῆναι  
συλλαβείν εις εν»



Η δραστηριότητα αυτή είναι  
κατάλληλη για μαθητές  
Β΄ & Γ΄ Λυκείου

## ΙΧ. Το άπειρο & το όριο στην τέχνη & τα μαθηματικά

Μερικές από τις κύριες συνιστώσες της κοινής αντίληψης για το άπειρο είναι η ιδέα του ατελεύτητου, του απεριόριστου και του ασύλληπτου, ενώ παραμένει ερωτηματικό το άπειρο του χρόνου και του χώρου. Στόχος της θεματικής αυτής ενότητας είναι η ανάδειξη της πορείας της ανθρώπινης σκέψης στην προσέγγιση της ιδέας του απείρου καθώς και του ορίου ως νοητικού εργαλείου τιθάσευσης του απείρου. Πώς οι καλλιτέχνες απεικονίζουν το άπειρο; Πώς το χειρίζονται οι μαθηματικοί;

Με έναυσμα επιλεγμένα έργα τέχνης και κατάλληλα σχεδιασμένη προβολή, οι μαθητές:

- Καλούνται να καταγράψουν τις αρχικές προϋπάρχουσες αντιλήψεις τους για το άπειρο και το όριο, με λέξεις και εικόνες που αυτοί θεωρούν ότι προσιδιάζουν σε αυτές τις έννοιες, και συγκεντρώνουν μια σειρά από καταστάσεις και φαινόμενα του κόσμου που θεωρούν ότι είναι άπειρα.
- Αναζητούν την ετυμολογία της λέξης άπειρο και όριο.
- Αναζητούν τις ιδέες του απείρου, του ορίου και του απειροστού σε πίνακες του M.C. Escher. Σε μια ομάδα πινάκων του ο Escher σμικρύνει την ίδια μορφή μέχρι τα όρια των υλικών δυνατοτήτων της γραφίδας του. Άραγε σε νοητικό επίπεδο ποιο είναι το όριο της σμίκρυνσης μια ποσότητας; Πόσο μικρότερη μπορεί να γίνει μια μικρή ποσότητα; Τι είναι το απειροστό και ποια η σχέση με το παράδοξο του Ζήνωνα;
- Παρακινούνται βιωματικά να χρησιμοποιήσουν την 1-1 αντιστοίχιση με το σύνολο των φυσικών αριθμών για την ταξινόμηση των διάφορων απειροσυνόλων.
- Διαπιστώνουν τις παράδοξες ισοπληθικότητες του συνόλου των φυσικών αριθμών με υπερσύνολα και υποσύνολά του.
- Εισάγονται στα διαγώνια επιχειρήματα του Cantor και γνωρίζουν την ισοδυναμία του συνόλου των ρητών με το σύνολο των φυσικών, καθώς και το αδύνατο της αντίστοιχης ισοδυναμίας με το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- Μέσω του παραδόξου του «δρομέα» του Ζήνωνα, εισάγονται στην ιδέα του ορίου και του απειροστού, μουσμένοι ουσιαστικά στις έννοιες της σύγκλισης ακολουθίας και σειράς.



# ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ Πίνακας

Ακολουθεί συνοπτικός πίνακας με τις θεματικές ενότητες για το λύκειο που προτάθηκαν παραπάνω και τις τάξεις στις οποίες αντιστοιχούν. Η ταξινόμηση που ακολουθεί δεν είναι υποχρεωτική καθώς, κατόπιν συνεννόησης με τους εκπαιδευτικούς, κάποια θεματική ενότητα μπορεί να παρουσιασθεί σε μαθητές διαφορετικών τάξεων από τις προτεινόμενες, ενώ μπορεί να επιλεγεί και ένας συνδυασμός τους.

Θεματικές Ενότητες	Λύκειο		
	Α΄	Β΄	Γ΄
I. Οι οφθαλμαπάτες της τέχνης & τα παράδοξα της λογικής	✓	✓	✓
II. Μουσική & μαθηματικά	✓	✓	✓
III. Οι διαστάσεις του χώρου & η προοπτική	✓	✓	✓
IV. Μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες «επί τάπητος»	✓	✓	✓
V. Μετασχηματισμοί, συμμετρίες & πλακοστρώσεις	✓	✓	✓
VI. Ο θαυμαστός κόσμος των fractals	✓	✓	✓
VII. Λόγος, αναλογία, χρυσή τομή	✓	✓	✓
VIII. Το άπειρο & το όριο στην τέχνη & στα μαθηματικά		✓	✓