

Το παρόν βιβλίο προσφέρει μια αξιόπιστη και συγχρονη επισκόπηση της πιο βασικής σειράς ερευνών σχετικά με την κατανόηση των μαθηματικών από τα παιδιά. Οι συγγραφείς, επίσης, παρουσιάζουν σημαντική καινούργια έρευνα σχετικά με την κατανόηση του αριθμού, της μέτρησης, των αριθμητικών πράξεων και των κλασμάτων από τα παιδιά, μέσα και έξω από το σχολείο.

Το κεντρικό θέμα του βιβλίου είναι η ύπαρξη κορίσμων συνθηκών στη μάθηση των μαθηματικών από τα παιδιά. Πρώτον, τα παιδιά πρέπει να αντιμετωπίσουν τα συμβατικά μαθηματικά συστήματα. Δεύτερον, αλλά εξίσου σημαντικό, πρέπει να είναι σε θέση να αναπαραστήσουν τη μαθηματική γνώση με τέτοιον τρόπο ώστε να λύουν προβλήματα. Το βιβλίο, επίσης, συζητά πώς οι μαθηματικές δραστηριότητες και η γνώση περιλαμβάνουν πολλά περισσότερα από αυτά που συνηθώς θεωρούνται Μαθηματικά στο αναλυτικό πρόγραμμα του σχολείου. Προσφατές έρευνες δείχνουν εμφανώς πώς τα παιδιά μπορούν να είναι αποτελεσματικά σε μαθηματικές δραστηριότητες έξω από το σχολείο, ενώ αποτυγχάνουν σε παρόμοιες δραστηριότητες στη σχολική τάξη.

Μέσα από αυτά τα δύο θεμελιώδη ζητήματα, οι συγγραφείς ενώνουν συζητήσεις σχετικά με τη μάθηση των συμβατικών μαθηματικών και την επιτυχή χρήση των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή. Παράλληλα, τονίζουν νέους και καλύτερους τρόπους για την ανάλυση των ικανοτήτων των παιδιών και την προώθηση της μάθησης στο σχολείο.

«Πρόκειται για εξαιρετικά ευανάγνωστο βιβλίο το οποίο αποτελεί σημαντικό βήμα στο να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά προβλήματα [...]. Εξαιρετικά πλήρες, με φρέσκιες ιδέες, διαύγεια και ευρύ περιεχόμενο τόσο όσον αφορά την εφευρετικότητα των παιδιών όσο και για τα Μαθηματικά ως βασικό στοιχείο ζωής, αυτό το βιβλίο αποτελεί βασικό εγχειρίδιο για όλους όσους ενδιαφέρονται για τα παιδιά και για τα Μαθηματικά ή για τη γενική φύση της σκέψης των παιδιών». —Professor Jacqueline Goodnow, Macquarie University.

Η TEREZINHA NUNES είναι καθηγήτρια στο Department of Educational Studies στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης.

Ο PETER BRYANT είναι ομότιμος καθηγητής του Department of Experimental Psychology στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης.

TEREZINHA NUNES  
PETER BRYANT

## ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ ΚΑΝΟΥΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ  
ΣΟΦΙΑ ΛΕΙΒΑΔΟΠΟΥΛΟΥ  
ΓΕΩΡΓΙΑ ΣΑΡΗΓΙΑΝΝΙΔΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ - ΕΙΣΑΓΩΓΗ  
ΔΕΣΠΟΙΝΑ ΔΕΣΛΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ  
ΣΤΕΛΛΑ ΒΟΣΝΙΑΔΟΥ

GUTENBERG ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ



ΚΚ 9571035

ISBN 978-960-01-1122-7



9 789600 111224

Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ  
ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΕΞΕΤΑΣΑΜΕ ΤΙΣ ΟΥΣΙΩΔΕΙΣ ΚΑΙ ΤΙΣ απαραίτητες πλευρές της απαρίθμησης. Υπάρχουν και άλλες πλευρές του αριθμητικού συστήματός μας, όμως, οι οποίες δεν είναι μόνιμες, χρειάστηκε αρκετός χρόνος για να ανακαλυφθούν, και δεν είναι διεθνείς. Η δομή βάσης είναι το καλύτερο παράδειγμα. Αναφέραμε συνοπτικά ότι οι Oksarmin των Παπούα στη Νέα Γουινέα χρησιμοποιούσαν, μέχρι πρόσφατα, μόνο ένα αριθμητικό σύστημα, το οποίο δεν ήταν ένα σύστημα βάσης· χρησιμοποιούσαν την ονομασία μερών του σώματος, για να δηλώσουν αριθμούς. Ένα τέτοιο αριθμητικό σύστημα μπορεί να το δει κανείς ως μια περίεργη παραδοξότητα, καθώς δεν έχει τίποτε κοινό με τη δομή της δεκαδικής βάσης, η οποία κυριαρχεί στον υπόλοιπο κόσμο. Αλλά ο τρόπος απαρίθμησης των Oksarmin μας υπενθυμίζει σωστά ότι το δεκαδικό σύστημα είναι μία επινόηση η οποία δεν μπορεί να θεωρείται δεδομένη και η οποία έχει περάσει από γενεά σε γενεά. Δεν υπάρχει λογική ερμηνεία γιατί θα πρέπει να τεμαχίσουμε τους

αριθμούς μας σε δεκάδες και όχι σε τριάδες ή οκτάδες ή δεκαεξάδες, και τίποτα δεν μας αναγκάζει να χρησιμοποιούμε ένα σύστημα βάσης, αν και έχει αποδειχθεί πως είναι πολύ χρήσιμο να ενεργούμε έτσι.

Ακόμη και μεταξύ των αριθμητικών συστημάτων τα οποία βασίζονται στο δεκαδικό σύστημα, υπάρχουν σημαντικές διαφοροποιήσεις στον τρόπο που η δομή αναπαρίσταται στις διάφορες γλώσσες. Σε κάποιες, όπως τα ιαπωνικά, η σχέση ανάμεσα στις λέξεις για τους αριθμούς με διαφορετική αξία είναι εντελώς διαφανής. Η λέξη για τον αριθμό 12, όπως δείχνει ο Πίνακας 3.1, είναι αντίστοιχη με το 'δέκα-δύο'. Από τη στιγμή που γνωρίζεις

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1 Μαθαίνοντας να απαριθμώ στα ιαπωνικά

|                |                  |                    |                     |
|----------------|------------------|--------------------|---------------------|
| 1 <i>ichi</i>  | 10 <i>ju</i>     | 20 <i>niju</i>     | 30 <i>sanju</i>     |
| 2 <i>ni</i>    | 11 <i>juichi</i> | 21 <i>nijuichi</i> | 31 <i>sanjuichi</i> |
| 3 <i>san</i>   | 12 <i>juni</i>   | 22 <i>nijuni</i>   |                     |
| 4 <i>shi</i>   | 13 <i>jusan</i>  | 23 <i>nijusan</i>  |                     |
| 5 <i>go</i>    |                  |                    |                     |
| 6 <i>roku</i>  |                  |                    |                     |
| 7 <i>sichi</i> |                  |                    |                     |
| 8 <i>hachi</i> |                  |                    |                     |
| 9 <i>ku</i>    |                  |                    |                     |

την ιαπωνική λέξη για το 2, το 3 και το 10 μπορείς να δημιουργήσεις τις λέξεις για το 12, το 20, το 23 και το 32. Αυτό δεν συμβαίνει πάντα στην αγγλική και τη γαλλική γλώσσα. Όταν οι ιάπωνες εκφέρουν το 'δέκα-δύο' για το 12, εμείς λέμε 'twelve' και οι γάλλοι λένε 'douze'. Οι ιαπωνικές λέξεις για το 20 και το 30 είναι αντίστοιχες με το 'δύο-δέκα' και το 'τρία-δέκα'. Οι αγγλικές λέξεις γι' αυτούς τους αριθμούς είναι 'twenty' και 'thirty', και οι γαλλικές 'vingt' και 'trente'. Οι ιάπωνες δομούν τους αριθμούς

πάνω από το 10, χρησιμοποιώντας συνδυασμούς των λέξεων για τις δεκάδες και τις μονάδες. Σε ορισμένες περιπτώσεις κάνουμε κι εμείς, και οι Γάλλοι, τέτοιους συνδυασμούς, αλλά όχι πάντοτε.

Γιατί η επινόηση των αριθμητικών συστημάτων βάσης υπήρξε τόσο επιτυχής; Η απάντηση είναι ότι τα πλεονεκτήματα της δομής βάσης και, ως εκ τούτου, και του δικού μας δεκαδικού συστήματος, είναι πράγματι σημαντικά. Απλά γιατί η δομή δίνει τη δυνατότητα σε αυτόν που μαθαίνει να παράγει τα ονόματα των αριθμών, και όχι να τα απομνημονεύει παπαγαλιστί. Πρέπει να θυμόμαστε μόνο λίγες αριθμητικές λέξεις. Τις υπόλοιπες μπορούμε να τις παράγουμε μόνοι μας. Ας σκεφτούμε τι σημαίνει να απαριθμεί κανείς, ας πούμε, 1.000 αντικείμενα. Σημαίνει ότι θα πρέπει να έχει τη δυνατότητα να αρθρώσει 1.000 λέξεις, πάντα με την ίδια σειρά. Αυτό θα ήταν ένα επίπονο έργο για την ανθρώπινη μνήμη, εάν, στην πορεία της ιστορίας, οι πολιτισμοί δεν είχαν εφεύρει λύσεις γι' αυτό το πρόβλημα της μνήμης. Τα περισσότερα αριθμητικά συστήματα είναι οργανωμένα με τέτοιο τρόπο, ώστε το να πει κανείς τις αριθμητικές λέξεις σε μία σταθερή σειρά γίνεται ένα σχετικά απλό έργο. Όταν καταλάβουμε τη λογική ενός αριθμητικού συστήματος, μπορούμε να παράγουμε αριθμούς τους οποίους δεν έχουμε ακούσει πριν. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα στα διαφανή ομαλά συστήματα, όπως είναι το ιαπωνικό, αλλά από τη στιγμή που κάποιος κατακτήσει τις μη ομαλές -teen λέξεις και τις λέξεις για τις δεκάδες στα αγγλικά, αυτό επαληθεύεται και για το δικό μας σύστημα.

Μπορούμε εύκολα να το επιβεβαιώσουμε και όταν ακόμη δεν ξέρουμε πώς να απαριθμούμε στα ιαπωνικά. Στον Πίνακα 3.1 υπάρχουν μερικοί αριθμοί στα ιαπωνικά, 19 αριθμητικές λέξεις. Εάν τις μελετήσουμε προσεκτικά, θα καταλάβουμε πώς οι αριθμητικές λέξεις σχηματίζονται στα ιαπωνικά και, από αυτά τα 19 παραδείγματα, θα είμαστε σε θέση να δημιουργήσουμε όλες τις αριθμητικές λέξεις έως το 99.

Ένα δεύτερο πλεονέκτημα είναι ότι η δομή βάσης μπορεί επίσης να χρησιμεύσει για την οργάνωση ενός συστήματος σημειογραφίας. Όταν χρησιμοποιούμε τη θεσιακή αξία για να γράψουμε τους αριθμούς, το ψηφίο στα δεξιά δείχνει τις μονάδες, το ψηφίο ακριβώς στα αριστερά του δείχνει τις δεκάδες, κ.ο.κ. Με άλλα λόγια, η ίδια δομή που χρησιμοποιείται στην απαρίθμηση γίνεται η πηγή οργάνωσης της γραφής των αριθμών.

Ένα τρίτο πλεονέκτημα είναι ότι οι υπολογισμοί αποκτούν οικονομία και αποτελεσματικότητα όταν βασίζονται στη σημειογραφία. Ας αναλογιστούμε απλά τη διαφορά ανάμεσα στην πρόσθεση, για παράδειγμα, αριθμών γραμμένων στην Ινδο-αραβική σημειογραφία που χρησιμοποιούμε και την εκτέλεση της ίδιας πράξης όταν οι αριθμοί είναι γραμμένοι με Λατινικούς αριθμούς. Όταν διευθετούμε τους αριθμούς με θεσιακή αξία σε στήλες, μπορούμε απλά να εργαστούμε σε κάθε στήλη διαδοχικά. Το γεγονός αυτό μας απαλλάσσει από απαιτήσεις μνήμης – ή όπως λέει ο Hatano (υπό έκδοση), βοηθάει να ‘ξεφορτώσουμε’ ένα μέρος της προσπάθειας υπολογισμού των γραπτών συμβόλων. Δεν δεχόμαστε μια τέτοια υποστήριξη από τη Λατινική σημειογραφία.

$$\begin{array}{r} 263 \\ + 35 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{CCLXIII} \\ + \text{XXXV} \\ \hline \end{array}$$

Αλλά, για να επωφεληθούμε από το σύστημα, είναι απαραίτητο να κατανοήσουμε τη δομή του. Πρέπει να είμαστε σε θέση να καταλάβουμε πώς οι μεγαλύτεροι αριθμοί μπορεί να δημιουργηθούν από τους μικρότερους. Οποιοσδήποτε αριθμός  $n$  μπορεί να αποσυντεθεί σε δύο άλλους οι οποίοι προηγούνται στη λίστα των απόλυτων αριθμών με τρόπο, ώστε οι δύο αυτοί αριθμοί να έχουν άθροισμα ακριβώς,  $n$ . Αυτή η ιδιότητα ή η σταθερά των αριθμών είναι γνωστή ως *προσθετική σύνθεση του αριθμού*.

Η προσθετική σύνθεση του αριθμού είναι ουσιαστικής ιδιότητας των αριθμητικών συστημάτων βάσης. Οι αριθμητικές λέξεις, ακόμη και στο δικό μας μη ομαλό σύστημα, κάνουν αυτήν την προσθετική σύνθεση αρκετά σαφή. Για παράδειγμα, η κατανόηση του συστήματος βάσης σημαίνει την αντίληψη ότι το 23 μπορεί να αποσυντεθεί σε δύο δεκάδες συν τρεις μονάδες, και οι λέξεις που χρησιμοποιούνται με το ‘είκοσι’ (twenty) και το ‘τρία’ (three) τονίζουν αυτόν τον ιδιαίτερο τρόπο κατάτμησης αυτού του αριθμού.

Η προσθετική σύνθεση αποτελεί, επίσης, σημαντική ιδιότητα της ιδέας της διαδοχής στους αριθμούς. Το ‘έξι’ δεν είναι απλά μία λεκτική ονομασία μετά το ‘πέντε’. Η ακολουθία της απαρίθμησης σημαίνει ότι το 6 είναι μεγαλύτερο από το 5 και ότι το 5 είναι ένα πιθανό υποσύνολό του αλλά το 6 δεν είναι ένα πιθανό υποσύνολο του 5. Ως εκ τούτου, όταν θέλουμε να διερευνήσουμε την κατανόηση του αριθμητικού συστήματος από τα παιδιά, χρειάζεται να γνωρίζουμε πολύ περισσότερα από το εάν τα παιδιά μπορούν να εκφέρουν τις αριθμητικές λέξεις με μία σταθερή σειρά.

Θα ήταν ενδιαφέρον να γνωρίζουμε εάν τα παιδιά, τα οποία μπορούν να απαριθμούν καλά και ξέρουν ότι το 6 είναι μετά το 5, πραγματικά κατανοούν ότι το 6 μπορεί να αποσυντεθεί σε 5 συν 1. Αυτό φαίνεται προφανές σε έναν ενήλικο και πιθανά να φανταστούμε ότι συμβαίνει το ίδιο και στα παιδιά. Παρ’ όλ’ αυτά, όταν τα παιδιά απαριθμούν αντικείμενα και τα μετακινούν από την ομάδα αυτών που δεν έχουν ακόμα απαριθμήσει στην ομάδα αυτών που έχουν ήδη απαριθμήσει, υπάρχει κάποια στιγμή που έχουν πέντε αντικείμενα στην ομάδα αυτών που έχουν απαριθμήσει και προσθέτουν ένα αντικείμενο σε αυτήν ενώ λένε ‘έξι’. Όμως, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, τα παιδιά ίσως να απαριθμούν χωρίς να έχουν κατανοήσει πλήρως τη σημασία της ενέργειάς τους. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα διερευνήσουμε την κατανόηση των αριθμητικών συστημάτων από τα

παιδιά, των γραπτών και των προφορικών, και μερικές βασικές πλευρές της κατανόησης των μονάδων από τα παιδιά.

# 1. Οι σταθερές των αριθμητικών συστημάτων βάσης: οι έννοιες της μονάδας και της προσθετικής σύνθεσης

ΕΝΑ αριθμητικό σύστημα βάσης συνεπάγεται την *απαρίθμηση μονάδων διαφορετικών μεγεθών*. Στο δικό μας αριθμητικό σύστημα, για παράδειγμα, απαριθμούμε σε μονάδες, δεκάδες εκατοντάδες κ.τ.λ. Αυτές είναι μονάδες διαφορετικών μεγεθών (αναφέρονται και ως ακολουθίες) τις οποίες μπορούμε να απαριθμήσουμε μέσα σε διαφορετικές τάξεις –την τάξη των μονάδων, των χιλιάδων, των εκατομμυρίων κ.τ.λ. Επειδή χρησιμοποιούμε το δεκαδικό σύστημα, όταν έχουμε δέκα μονάδες οποιουδήποτε μεγέθους τις ομαδοποιούμε σε μονάδες του επομένου μεγέθους. Για παράδειγμα, απαριθμούμε μονάδες έως το δέκα. Δέκα μονάδες συγκροτούν μία δεκάδα και, κατόπιν, συνδυάζουμε τις δεκάδες και τις μονάδες, έως ότου έχουμε εννέα δεκάδες και εννέα μονάδες. Δέκα δεκάδες κάνουν μία εκατοντάδα και στη συνέχεια συνδυάζουμε τις εκατοντάδες, τις δεκάδες και τις μονάδες, έως ότου έχουμε εννέα εκατοντάδες, εννέα δεκάδες και εννέα μονάδες. Μία νέα τάξη μονάδων, η τάξη των χιλιάδων, στη συνέχεια εισάγεται και μπορούμε να επαναλαμβάνουμε την ίδια λογική επ’ αόριστον.

Αυτή η δομή βάσης του αριθμητικού συστήματος αντανakλάται εν μέρει μόνο στις αγγλικές αριθμητικές λέξεις. Όταν, για παράδειγμα, απαριθμούμε εκατοντάδες, λέμε καθαρά μία λέξη απαρίθμησης και το όνομα της μονάδας που απαριθμούμε: *one hundred, two hundred, three hundred* κ.τ.λ. Όμως, όταν απαριθμούμε δεκάδες δεν λέμε μία λέξη απαρίθμησης για τον αριθμό των δεκάδων και στη συνέχεια τη λέξη ‘δέκα’. Οι δεκά-

δες απαριθμούνται με διαφορετικά ονόματα όπως *ten, twenty, thirty* κ.τ.λ.

Είδαμε πως το ιαπωνικό αριθμητικό σύστημα (Πίνακας 3.1) δείχνει πολύ πιο καθαρά το γεγονός ότι απαριθμούμε διαφορετικές μονάδες, όταν χρησιμοποιούμε τις ονομασίες των δεκάδων. Όμως, το αγγλικό αριθμητικό σύστημα δεν είναι εντελώς θολό. Όταν λέμε μία δεκάδα και μία μονάδα –για παράδειγμα, *twenty-one, twenty-two* κ.τ.λ. – το σύστημα προσφέρει υποβολές για την προσθετική σύνθεση του αριθμού. Αυτές οι ονομασίες καταδεικνύουν ότι απαριθμούμε τις δεκάδες και τις μονάδες ξεχωριστά. Αυτές οι υποβολές, ωστόσο, δεν είναι τόσο σαφή όσο είναι στα ιαπωνικά ή τα κινέζικα.

Η απαρίθμηση μονάδων διαφορετικών μεγεθών δεν αφορά αποκλειστικά την απαρίθμηση αντικειμένων. Τα μετρικά συστήματα θέτουν το ίδιο πρόβλημα του μεγέθους των μονάδων. Τα χρήματα, για παράδειγμα, είναι το μέτρο για το πόσα μπορούμε να αγοράσουμε. Τα κέρματα και τα χαρτονομίσματα είναι μονάδες διαφορετικής αξίας –*1p, 2p, 5p, 10p* κ.τ.λ., – έχουν διαφορετική αξία. Όταν μετράμε πόσα χρήματα έχουμε, πρέπει να έχουμε υπόψη την αξία των κερμάτων και των χαρτονομισμάτων. Αντίστοιχα, η μέτρηση του μήκους μας εμπλέκει στο ίδιο ζήτημα του μεγέθους των μονάδων. Τα εκατοστά και τα μέτρα είναι μονάδες διαφορετικών μεγεθών. Όταν λέμε ‘ένα μέτρο και είκοσι εκατοστά’, μετράμε επίσης μονάδες διαφορετικών μεγεθών.

Για να κατανοήσουμε πλήρως ένα μετρικό σύστημα, πρέπει να κατανοήσουμε τις αντιστοιχίες μέσα στο ίδιο το σύστημα. Εάν έχουμε ένα κέρμα των 50p, μπορούμε να αγοράσουμε ό,τι και ο φίλος μας που έχει δύο κέρματα των 20p και ένα των 10p. Εάν κάτι έχει μήκος 1 μέτρο και 20 εκατοστά, θα μπορεί να καλυφθεί από τρία κομμάτια ταινίας, δύο των 50 εκατοστών μήκους και μία των 20 εκατοστών.

Το μέγεθος των μονάδων είναι σημαντικό και για την απα-



ρίθμηση και για την κατάταξη των ποσοτήτων. Για παράδειγμα, εάν η Kathy έχει δέκα κέρματα της 1p και η Liza έχει δέκα κέρματα των 10p, αν και έχουν τον ίδιο αριθμό κερμάτων, έχουν διαφορετικό ποσό χρημάτων. Ένα άλλο παράδειγμα της ίδιας αρχής είναι ότι, εάν μετρήσουμε μία συγκεκριμένη ποσότητα ζάχαρης με κουτάλια της σούπας και, κατόπιν, τη μετρήσουμε με κουταλάκια του τσαγιού, θα έχουμε διαφορετικό αριθμό κουταλιών: όσο μεγαλύτερο είναι το κουτάλι, τόσο μικρότερος ο αριθμός των κουταλιών.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε έρευνες που εξέτασαν την κατανόηση από τα παιδιά των μονάδων και της προσθετικής σύνθεσης κατά την απαρίθμηση ασυνεχών ποσοτήτων. Ζητήματα που σχετίζονται με τη μέτρηση συνεχών ποσοτήτων θα συζητηθούν στο Κεφάλαιο 4.

### 1.1. Η απαρίθμηση και η κατάκτηση των ιδιοτήτων του αριθμητικού συστήματος

**Ο**Ι ΣΧΕΣΕΙΣ τις οποίες μόλις επισημάνσαμε είναι ένα βασικό κομμάτι του αριθμητικού συστήματος. Κανείς δεν θα μπορούσε να κατανοήσει το δεκαδικό μας σύστημα, εάν δεν είχε αντιληφθεί και αυτές τις πραγματικότητες. Οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών εδώ και πολύ καιρό έχουν καταλάβει ότι είναι σημαντικό να κατακτήσουν τα παιδιά τη δομή του δεκαδικού συστήματος, για να το χρησιμοποιούν στους υπολογισμούς. Ωστόσο, οι ψυχολόγοι για πολύ καιρό δεν ερεύνησαν τις απαρχές των εννοιών που εμπλέκονται στην κατάκτηση αυτής της δομής. Αν και έχει πραγματοποιηθεί αρκετή δουλειά σχετικά με τη διδασκαλία της δομής και τις συνέπειές της στην ικανότητα των παιδιών να προσθέτουν και να αφαιρούν πολυψήφιους αριθμούς (βλ., για παράδειγμα, Resnick, 1982· Hall et al., 1985), λίγα είναι γνωστά για το ξεκίνημα αυτής της κατανόησης. Τώρα, αρ-

κετές μελέτες έχουν διερευνήσει την κατανόηση των μονάδων και της προσθετικής σύνθεσης από τα παιδιά σε περιστάσεις διαχείρισης χρημάτων. Θα περιγράψουμε μία σειρά ερευνών οι οποίες άρχισαν με τη δουλειά της Terezinha Nunes (T.N. Carraher, 1982, 1985) με παιδιά προσχολικής ηλικίας και αναλφάβητους ενήλικες στη Βραζιλία.

Τα παιδιά στη Βραζιλία, όπως τα παιδιά στη Βρετανία, γνωρίζουν ένα αριθμητικό σύστημα με βάση το δέκα. Η απαρίθμηση στα πορτογαλικά είναι σχεδόν σαν την απαρίθμηση στα αγγλικά: η δεκαδική δομή του συστήματος δεν αναδύεται ξεκάθαρα στις αξίες των teens (για παράδειγμα, 11=onze, 12=doze) ούτε στις ονομασίες των δεκάδων (10=dez, 20=vinte, 30=trinta, 40=quarenta, και όλες οι άλλες δεκάδες τελειώνουν σε -enta). Όμως, ο συνδυασμός των δεκάδων και των μονάδων καταγράφεται στις αριθμητικές λέξεις (21=vinte e um, 22=vinte e dois κ.τ.λ.). Έτσι, στο πορτογαλικό προφορικό αριθμητικό σύστημα οι υποβολές αναφορικά με τις μονάδες διαφορετικών αξιών και με την προσθετική σύνθεση δεν είναι εντελώς σαφείς.

Ο στόχος της πρώτης έρευνας ήταν να διαπιστώσουμε κατά πόσο τα παιδιά χρειάζονται την επίσημη διδασκαλία για τις δεκάδες προτού κατανοήσουν το σύστημα. Ο Alexander Luria (1969), ένας ρώσος ψυχολόγος, υπέθεσε ότι οι άνθρωποι φθάνουν να κατανοούν τη δεκαδική δομή μόνον όταν έχουν διδαχθεί τη γραφή των αριθμών. Ισχυρίστηκε ότι οι άνθρωποι θα μπορούσαν να αρθρώσουν την ακολουθία των αριθμών, χωρίς να κατανοούν τη σημασία τους, αλλά ότι η χωρική διάταξη των γραπτών αριθμών αποτελεί ισχυρή, απαραίτητη ένδειξη για το τι σημαίνουν. Στο γραπτό αριθμητικό σύστημα, κάθε ψηφίο αντιπροσωπεύει μία μονάδα διαφορετικού μεγέθους –για παράδειγμα, στον αριθμό 675 το 6 δείχνει τον αριθμό των εκατοντάδων, το 7 δείχνει τον αριθμό των δεκάδων και το 5 τον αριθμό των μονάδων. Έτσι, υπέθεσε ότι το γραπτό σύστημα θα ήταν

το κλειδί στην κατανόηση του νοήματος του αριθμητικού συστήματος.

Η απόδειξη του Luria για το πόσο σημαντικό ήταν το γραπτό σύστημα στηρίχθηκε στις παρατηρήσεις του ότι οι ασθενείς με εγκεφαλικές βλάβες, οι οποίοι δεν μπορούσαν να γράψουν αριθμούς πάνω από το 100, παρουσίαζαν επίσης δυσκολία στο συνδυασμό μονάδων στην πρόσθεση και την αφαίρεση. Για παράδειγμα, όταν προσθέτουμε 38 και 57 πρέπει να συγκροτήσουμε τις μονάδες σε μία νέα δεκάδα: οι ασθενείς του Luria παρουσίαζαν ιδιαίτερη δυσκολία με αυτά τα προβλήματα. Αυτό τον οδήγησε να υποθέσει ότι φθάνουμε στην κατανόηση της δομής του αριθμητικού συστήματος μέσω της μάθησης της γραφής των αριθμών.

Οι παρατηρήσεις του Luria είναι ασφαλώς σημαντικές, αλλά το συμπέρασμά του αναφορικά με τις δύο αλληλένδετες δυσκολίες, τη γραφή αριθμών και το συνδυασμό μονάδων διαφορετικών μεγεθών, δεν είναι η μόνη πιθανή ερμηνεία των ευρημάτων του. Οι ασθενείς αυτοί ίσως να μην μπορούσαν να γράψουν αριθμούς εξαιτίας του ότι δεν ήταν σε θέση να συνδυάσουν μονάδες διαφορετικού μεγέθους, και όχι το αντίθετο. Η σύνδεση ανάμεσα στις δύο δυσκολίες είναι ενδιαφέρουσα, αλλά δεν είναι ακόμη ξεκάθαρο ποια είναι η αιτία και ποιο το αποτέλεσμα.

Ένας άλλος τρόπος να εξετάσουμε αυτή τη σύνδεση είναι να μελετήσουμε μικρά παιδιά και αναλφάβητους ενήλικες οι οποίοι δεν έχουν διδαχθεί να γράφουν και να διαβάζουν αριθμούς. Αυτό έκανε η Terezinha Nunes στην πρώτη έρευνα για το σύστημα με δεκαδική βάση που θα περιγράψουμε (T. N. Carraher, 1985).

Η Nunes εργάστηκε με 72 παιδιά προσχολικής ηλικίας των οποίων η ηλικία κυμαινόταν από 5 έως σχεδόν 7 έτη (είναι η ηλικία στην οποία τα παιδιά στη Βραζιλία εγγράφονται στο δημοτικό σχολείο) και 20 ενήλικες φτωχής προέλευσης οι οποίοι, ως συνέπεια των κοινωνικο-οικονομικών τους συνθηκών, δεν πα-

ρακολούθησαν ποτέ το σχολείο. Τα παιδιά δεν ήξεραν να γράφουν πολυψήφιους αριθμούς, ενώ κάποιοι από τους ενήλικες ήξεραν.

Για να διερευνήσει την κατανόηση της έννοιας της μονάδας και της προσθετικής σύνθεσης στο πλαίσιο διαχείρισης χρημάτων, δύο έργα χρησιμοποιήθηκαν, αλλά απαιτήθηκαν διαφορετικές παρουσιάσεις της ίδιας ερώτησης στα παιδιά και τους ενήλικους.

Στο πρώτο έργο, τα υποκείμενα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν την έννοια της μονάδας, για να συγκρίνουν την τελική αξία συνόλων που αποτελούνταν από κέρματα ή χαρτονομίσματα διαφορετικής αξίας. Σε κάθε έργο σύγκρισης, στα παιδιά παρουσιάστηκαν δύο σειρές με αντικείμενα που ήταν υποτιθέμενα νομίσματα διαφορετικής αξίας –για παράδειγμα, τέσσερα κέρματα του 1c (c=cruzeiro, το νόμισμα της Βραζιλίας εκείνη την εποχή) και τέσσερα κέρματα των 10c. Σε ατομική συνέντευξη ζητήθηκε από τα παιδιά να φανταστούν ότι εκείνα θα έπαιρναν τα κέρματα της μίας σειράς και ο εξεταστής τα κέρματα της άλλης για να πάνε να ψωνίσουν ζαχαρωτά από ένα κατάστημα. Η ερώτηση στην οποία έπρεπε να απαντήσουν ήταν εάν θα μπορούσαν να αγοράσουν την ίδια ποσότητα ζαχαρωτών ή ο ένας από τους δύο θα αγόραζε περισσότερα ζαχαρωτά από τον άλλο.

Από τους ενήλικους ζήτησαν μόνο να φανταστούν ότι είχαν κέρματα της ίδιας ποσότητας και αξίας που χρησιμοποίησαν στο έργο των παιδιών, αλλά δεν τους παρουσίασαν τα αντικείμενα. Στη συνέχεια τους ζήτησαν να συγκρίνουν τα δύο ποσά.

Το 60% των παιδιών πέτυχαν σ' αυτό το έργο. Μεταξύ αυτών υπήρχαν κάποια παιδιά τα οποία δεν μπορούσαν καν να απαριθμήσουν το συνολικό ποσό των χρημάτων στις σειρές αλλά ήταν ικανά να αναγνωρίσουν ότι με τέσσερα κέρματα των 10c αγοράζει κάποιος περισσότερα ζαχαρωτά απ' ό,τι με τέσσερα κέρματα του 1c. Οι αναλφάβητοι ενήλικες δεν έκαναν κανέ-

να λάθος σ' αυτό το έργο. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα παιδιά και οι ενήλικες μπορούν να επιτύχουν έναν βαθμό κατανόησης της έννοιας των μονάδων διαφορετικού μεγέθους στο πλαίσιο των χρημάτων, χωρίς να πάνε στο σχολείο και χωρίς να γνωρίζουν να γράφουν πολυψήφιους αριθμούς.

Το δεύτερο έργο, το οποίο ονομάστηκε το έργο του καταστήματος, αφορούσε την προσθετική σύνθεση και τη δεκαδική (δηλαδή τη βάση-δέκα) δομή. Ο σκοπός του ήταν να μετρήσει την ικανότητα των παιδιών να συνδυάσουν διαφορετικές αξίες (δεκάδες και μονάδες) για να φθάσουν σε έναν συγκεκριμένο αριθμό. Ζητήθηκε από τα παιδιά να παίξουν ένα παιχνίδι, στο οποίο θα αγόραζαν αντικείμενα και έπρεπε να πληρώσουν το ακριβές ποσό στον εξεταστή, ο οποίος έπαιζε το ρόλο του καταστηματάρχη. Τους δόθηκαν κέρματα διαφορετικής αξίας: είτε του 1c και 5c ή του 1c και των 10c. Είχαν πάντοτε αρκετά χρήματα για να πληρώσουν τα χρήματα που τους ζητούσε ο εξεταστής αλλά έπρεπε να έχουν υπόψη τους την αξία των κερμάτων όταν υπολόγιζαν τα χρήματα. Για παράδειγμα, μπορεί να είχαν δώσει στα παιδιά δύο κέρματα των 5c και τέσσερα κέρματα του 1c και να τους ζητούσαν να πληρώσουν 7c για ένα παιχνίδι που ήταν στο κατάστημα. Σ' αυτήν την περίπτωση, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν ένα κέρμα των 5c και δύο του 1c. Ή πιθανά να τους έδιναν τέσσερα κέρματα των 10c και τέσσερα του 1c και να έπρεπε να πληρώσουν 13c. Αν και είχαν μόνο οκτώ κέρματα, εάν είχαν υπόψη τους τη σχετική αξία των κερμάτων, θα κατάλαβαν ότι είχαν αρκετά χρήματα. Τα ποσά των χρημάτων που ζητούσαν από τα παιδιά να πληρώσουν ήταν πάντα μέσα στα όρια της απαρίθμησής τους (δηλαδή, αυτές οι αξίες ήταν χαμηλότερες από τον μεγαλύτερο αριθμό που θα μπορούσαν να απαριθμήσουν, όταν τους ζητούσαν να απαριθμήσουν μεγάλα φωνα).

Αυτό το έργο της προσθετικής σύνθεσης ήταν πολύ πιο δύσκολο από το προηγούμενο έργο, αλλά δεν ήταν εντελώς αδύ-

νατο: μόνο 39% των παιδιών επέτυχαν στο έργο του καταστήματος. Όμως, τα ποσοστά επιτυχίας, αν και μέτρια, δείχνουν καθαρά ότι δεν είναι απαραίτητο να μάθουν τα παιδιά να γράφουν τους αριθμούς για να κατανοήσουν την προσθετική σύνθεση.

Το αντίστοιχο έργο που ανατέθηκε στους ενήλικους δεν εμπεριείχε αντικείμενα που μπορούσαν να χειριστούν. Δεν τους ζήτησαν να απαριθμήσουν χρήματα, κάτι που θα ήταν ένα έργο ρουτίνας γι' αυτούς: αντί γι' αυτό, τους ρώτησαν πόσα χαρτονομίσματα των 100c, 10c και 1c θα τους χρειαζόνταν, εάν έπρεπε να πληρώσουν, για παράδειγμα, 365 *cruzeiros* χρησιμοποιώντας τον μικρότερο δυνατό αριθμό χαρτονομισμάτων. Αυτό δεν ήταν ένα έργο ρουτίνας γι' αυτούς, αλλά εξακολουθούσε να είναι πολύ εύκολο για όλους τους ενήλικους ανεξάρτητα εάν ήξεραν ή όχι να γράφουν τους αριθμούς. Σχεδόν το 70% των ενηλίκων απάντησαν σωστά και στις τρεις δοκιμασίες και ούτε ένας από αυτούς δεν έδωσε λανθασμένη απάντηση και στις τρεις.

Αυτές οι δύο έρευνες οδήγησαν στα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. *Το να ξέρεις να απαριθμείς και να κατανοείς τη σχετική αξία της απαρίθμησης μονάδων και την προσθετική τους σύνθεση δεν είναι ταυτόσημα.* Τα παιδιά τα οποία γνωρίζουν πώς να απαριθμούν ίσως να μην είναι ακόμα σε θέση να κατανοήσουν τη σχετική αξία των μονάδων και να συγκροτήσουν αθροίσματα με διαφορετικής αξίας μονάδες σε περιπτώσεις διαχείρισης χρημάτων.
2. *Ούτε η φοίτηση στο σχολείο ούτε η ικανότητα να γράφει κάποιος τους αριθμούς παίζουν καθοριστικό ρόλο για την κατανόηση αυτών των πλευρών του αριθμού.* Μπορούν να κατακτηθούν με τη χρήση του προφορικού αριθμητικού συστήματος τουλάχιστον σε συνδυασμό με την εξοικείωση με τα νομισματικά συστήματα.



## 1.2. Η πρόσθεση και η κατάκτηση των ιδιοτήτων του αριθμητικού συστήματος

ΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ, λοιπόν, η βάση για την κατάκτηση του δεκαδικού συστήματος; Έχουμε αποφασίσει ότι δεν πρέπει κάποιος να ξέρει να διαβάσει και να γράφει τους αριθμούς για να κατανοεί τη δεκαδική δομή, και αυτό φαίνεται να μας αφήνει άλλες δύο αρκετά εύλογες εναλλακτικές. Η μία είναι ότι η εξάσκηση στην απαρίθμηση, και ιδιαίτερα στην ένα-προς-ένα αντιστοιχία, είναι η κρίσιμη εμπειρία που οδηγεί σ' αυτήν την κατανόηση. Τα παιδιά ίσως φθάσουν στο σημείο να αντιληφθούν ότι μπορούμε να δούμε οποιονδήποτε αριθμό ως το άθροισμα του αριθμού που προηγείται συν ένα (για παράδειγμα, ότι το έξι είναι το πέντε συν ένα) και μπορεί τότε να γενικεύσουν αυτήν την ιδιότητα σε άλλες προσθετικές συνθέσεις απλώς σαν αποτέλεσμα της συχνής εξάσκησης στην απαρίθμηση αντικειμένων. Σ' αυτήν την περίπτωση η ικανότητά τους να απαριθμούν αντικείμενα και να διατηρούν την ένα-προς-ένα αντιστοιχία θα πρέπει να συσχετίζεται με την κατανόηση από την πλευρά τους της προσθετικής σύνθεσης.

Είναι, όμως, πιθανό να συμβαίνει κάτι άλλο. Η εμπλοκή των παιδιών με την πρόσθεση ίσως να είναι μία απαραίτητη εμπειρία για την κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης, η οποία είναι η βάση του δεκαδικού συστήματος. Υπάρχει μία καλά εδραιωμένη αλλαγή στην προσέγγιση της πρόσθεσης από τα μικρά παιδιά η οποία, κατά τα φαινόμενα, θα μπορούσε να είναι το κίνητρο για την κατανόηση του δεκαδικού συστήματος. Αυτή η αλλαγή είναι η μετάβαση από την ολική απαρίθμηση στη μερική απαρίθμηση.

Ας υποθέσουμε ότι τα παιδιά των 5 και 6 ετών βρίσκονται μπροστά σε έναν αριθμό αντικειμένων και τους λέμε μια ιστορία για ένα αγόρι στο οποίο η μητέρα του έδωσε πέντε καραμέλες και ο πατέρας τρεις. Το έργο των παιδιών είναι να βρουν πόσες

είναι οι καραμέλες όλες μαζί. Χωρίς να γνωρίζουν ακόμη το 'αριθμητικό γεγονός'  $5+3=8$ , τα παιδιά χρησιμοποιούν τα αντικείμενα που θα τα βοηθήσουν να βρουν τη λύση, και είτε υιοθετούν τη στρατηγική που αποκαλείται 'ολική απαρίθμηση' ή εκείνη που αποκαλείται 'μερική απαρίθμηση'.

Το παιδί που τα απαριθμεί όλα σχηματίζει ένα σύνολο από πέντε αντικείμενα και ένα άλλο από τρία και, στη συνέχεια, τα μετράει όλα μαζί, αρχίζοντας από το ένα σύνολο και τελειώνοντας με το άλλο. Το παιδί το οποίο απαριθμεί μερικά σχηματίζει απλά ένα σύνολο από τρία και αρχίζει να μετράει από το 6: με άλλα λόγια, το παιδί χρησιμοποιεί τον συνολικό αριθμό του πρώτου συνόλου ως σημείο εκκίνησης και αντιλαμβάνεται ότι δεν είναι απαραίτητο να το απαριθμήσει και πάλι όλο. Είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι αυτή είναι η περισσότερη οικονομική στρατηγική από τις δύο και δεν μας εκπλήσσει το γεγονός ότι υπάρχει εδώ μια αναπτυξιακή πρόοδος. Τα μικρότερα παιδιά έχουν την τάση να τα απαριθμούν όλα, τα μεγαλύτερα και περισσότερα έμπειρα παιδιά να απαριθμούν μερικά.

Αυτή η αναπτυξιακή αλλαγή μπορεί ασφαλώς να έχει σχέση με την κατανόηση της δεκαδικής δομής. Το παιδί, το οποίο καταλαβαίνει ότι δεν χρειάζεται να κοπιάσει να απαριθμήσει ξανά το μεγαλύτερο σύνολο, πιθανόν έχει αντιληφθεί ότι αυτό το σύνολο μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μία μεγαλύτερη μονάδα η οποία μπορεί να συνδυαστεί με μία μικρότερη. Αυτό το παιδί ίσως βρίσκεται σε καλύτερη θέση να καταλάβει ότι κάποιος μπορεί να σχηματίσει τον αριθμό 23, συνδυάζοντας δύο μονάδες μίας κατηγορίας (δύο δεκάδες) με τρεις μίας άλλης (τρεις μονάδες).

Η δική μας άποψη είναι ότι αυτή η δεύτερη πιθανότητα –η πρόσθεση μάλλον παρά η απαρίθμηση σαν βάση για την κατανόηση της δεκαδικής δομής– είναι η περισσότερη εύσημη από τις δύο. Προσδοκούσαμε ότι η πρόοδος στην κατανόηση της πρόσθεσης, ιδιαίτερα από την ολική απαρίθμηση στη μερική

απαρίθμηση, παρά η άνεση στην ένα-προς-ένα αντιστοιχία θα συνδεόταν ισχυρά με την ικανότητα στην επίλυση της προσθετικής σύνθεσης των χρημάτων στο έργο του καταστήματος.

Πραγματοποιήσαμε μία έρευνα για τη σχετική σημασία της απαρίθμησης και της πρόσθεσης (Nunes et al., υπό έκδοση) στην οποία πήραμε συνεντεύξεις από μία ομάδα Άγγλων παιδιών ηλικίας 5 και 6 ετών στην Οξφόρδη. Πολλά από τα έργα που δώσαμε στα παιδιά σ' αυτή τη νέα έρευνα θα είναι ήδη γνωστά. Δώσαμε μία εκδοχή του έργου των σχετικών αξιών, κατά το οποίο έπρεπε να κρίνουν τις σχετικές αξίες δύο ποσοτήτων χρημάτων και οι δύο ποσότητες είτε αποτελούνταν από μονάδες της ίδιας αξίας είτε διαφορετικών αξιών. Αναθέσαμε επίσης στα παιδιά μία εκδοχή του Έργου του Καταστήματος που ήδη περιγράψαμε: και πάλι σ' αυτό το έργο τα παιδιά έπρεπε να πληρώσουν για αντικείμενα με μία μονάδα (πέννες) ή με συνδυασμό δύο μονάδων (ή με 10p και 1p, ή με 20p και 1p).

Επειδή αυτά τα έργα ενέπλεκαν το συνδυασμό μονάδων διαφορετικών μεγεθών, μας έδωσαν ένα μέτρο της κατανόησης της προσθετικής σύνθεσης από τα παιδιά. Τα έργα που απλά αφορούσαν κέρματα της 1 πέννας, μας έδωσαν ένα καλό μέτρο της ικανότητας των παιδιών να απαριθμούν. Χρειαζόμασταν, επίσης, ένα μέτρο της ικανότητάς τους να προσθέτουν και, ιδιαίτερα, να χρησιμοποιούν την περισσότερη οικονομική στρατηγική της μερικής απαρίθμησης. Στα έργα πρόσθεσης ζητήσαμε από τα παιδιά να λύσουν απλά προβλήματα πρόσθεσης με την υποστήριξη αντικειμένων, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν σαν καραμέλες. Τα προβλήματα ήταν πολύ απλά (για παράδειγμα, η Μαρία είχε 8 καραμέλες και η γιαγιά της της έδωσε 5. Πόσες καραμέλες έχει τώρα;). Τα παιδιά είχαν αρκετά αντικείμενα πάνω στο τραπέζι για να αναπαραστήσουν τους δύο προσθετέους στο πρόβλημα (δηλαδή, τις ποσότητες που πρέπει να προστεθούν) και στη συνέχεια απαρίθμησαν όλα τα αντικείμενα μαζί. Στις συνεντεύξεις μας με τα παιδιά καταγράψαμε εάν είχαν σω-

στή ή λανθασμένη απάντηση και τη μέθοδο με την οποία έδωσαν αυτήν την απάντηση, με ολική απαρίθμηση, μερική απαρίθμηση, ή από μνήμης. Δεν παρατηρήθηκαν άλλες στρατηγικές.

Θεωρήσαμε ότι η στρατηγική της ολικής απαρίθμησης απλά αντιπροσώπευε την ικανότητα των παιδιών να χρησιμοποιούν αντικείμενα ως καραμέλες (και το συμβολικό παιχνίδι είναι μάλλον απλό για τα παιδιά των 5 ετών) και να απαριθμούν με ένα-προς-ένα αντιστοιχία. Αντίθετα, η στρατηγική της μερικής απαρίθμησης θα αντανakλούσε εκείνο το επίπεδο κατανόησης της πρόσθεσης το οποίο είναι πάνω από την απλή απαρίθμηση. Έτσι περιμέναμε να βρούμε: (1) μια σημαντική συνάφεια ανάμεσα στην ικανότητα των παιδιών να χρησιμοποιούν τη στρατηγική της μερικής απαρίθμησης και την επίδοσή τους στο έργο του καταστήματος και (2) καμία σημαντική σχέση μεταξύ του αριθμού των σωστών προβλημάτων πρόσθεσης που επιλύθηκαν, ανεξάρτητα από τη στρατηγική και την επίδοση στην προσθετική σύνθεση, διότι η στρατηγική της ολικής απαρίθμησης, η οποία βασίζεται στην απλή ένα-προς-ένα αντιστοιχία, μπορεί να οδηγήσει σε επιτυχία. Ο στόχος μας ήταν να διαπιστώσουμε κατά πόσον ο συνολικός αριθμός των σωστών λύσεων στα προβλήματα πρόσθεσης είχε σημαντική συσχέτιση με την κατανόηση του αριθμητικού συστήματος από τα παιδιά ή εάν μόνον ο αριθμός των λύσεων που επιτυγχάνονται με άλλες μεθόδους και όχι με τη στρατηγική της ολικής απαρίθμησης (δηλαδή, με μερική απαρίθμηση ή από μνήμης) θα συσχετιζόταν με την κατανόηση του αριθμητικού συστήματος.

Αυτά τα προβλήματα δεν ήταν τόσο δύσκολα αυτά καθ' εαυτά για τα παιδιά. Ωστόσο, ο μέσος όρος συχνότητας των λύσεων με μερική απαρίθμηση ή από μνήμης ήταν σημαντικά χαμηλότερος από τα ποσοστά επιτυχίας: μόνο το 10% των λύσεων των πεντάχρονων παιδιών και το 57% των λύσεων των εξαχρονων παιδιών προέρχονταν από μερική απαρίθμηση / μνήμη.

Οι αντιδράσεις των παιδιών στα προβλήματα στα οποία

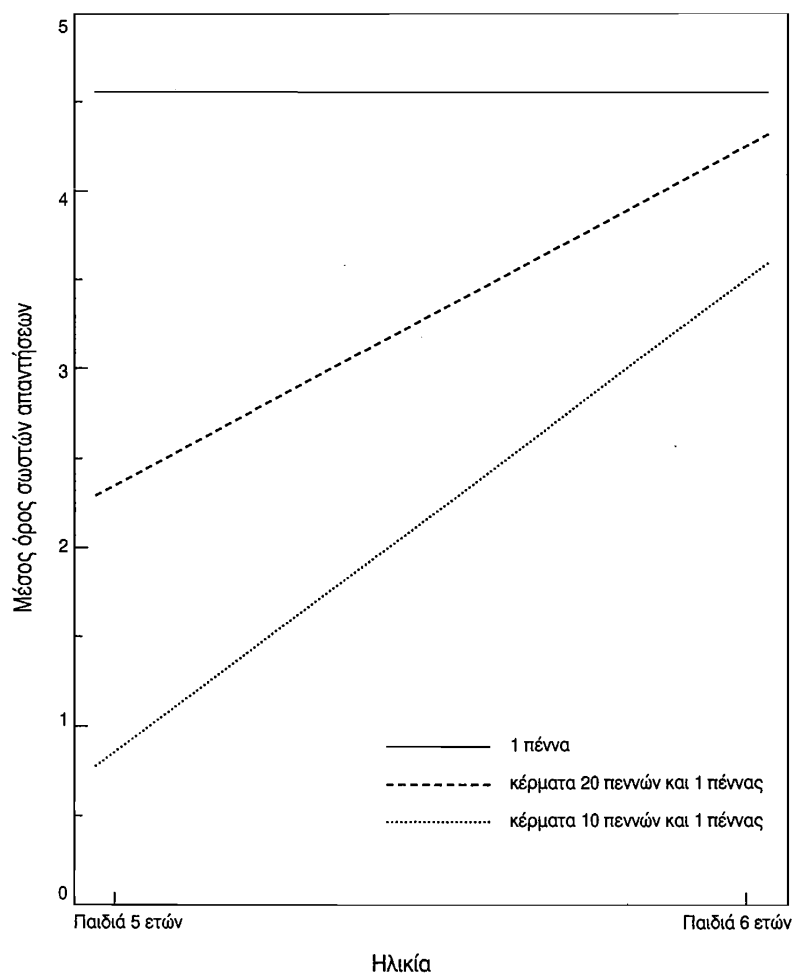
έπρεπε να κρίνουν τις σχετικές αξίες των δύο ποσοτήτων καθώς επίσης και στα προβλήματα του καταστήματος ήταν σχεδόν ίδιες με την προηγούμενη έρευνα. Τα παιδιά αντιμετώπισαν μικρή δυσκολία με τις δοκιμασίες που απλώς απαιτούσαν από αυτά να απαριθμήσουν τον αριθμό των κερμάτων για να συγκρίνουν τα σύνολα. Όμως, ήταν πολύ πιο δύσκολο για τα παιδιά, ιδιαίτερα για εκείνα των 5 ετών, να πάρουν υπόψη τους τη σχετική αξία των μονάδων. Η στατιστική ανάλυση έδειξε ότι: (1) τα παιδιά των 5 ετών είχαν σημαντικά καλύτερη επίδοση όταν δεν χρειάζονταν να υπολογίσουν τη σχετική αξία των μονάδων και (2) δεν υπήρχε συσχέτιση της επίδοσης των παιδιών στα δύο είδη δοκιμασιών.

Στο έργο του καταστήματος τα παιδιά είχαν σχεδόν τέλεια επίδοση, όταν τους ζητήθηκε να πληρώσουν για αντικείμενα με μία μονάδα (μόνο 1 πέννα). Το άλλο είδος του προβλήματος (όταν έπρεπε να χρησιμοποιήσουν σε συνδυασμό κέρματα της 1 πέννας και των 10 πεννών ή της 1 πέννας και των 20 πεννών) ήταν σημαντικά πιο δύσκολο για τα παιδιά των 5 και των 6 ετών.

Συγκρίναμε, επίσης, μεταξύ τους την επιτυχία τους στις δοκιμασίες της προσθετικής σύνθεσης με την επιτυχία τους και στις άλλες δοκιμασίες της προσθετικής σύνθεσης, σε όλες τις δοκιμασίες της προσθετικής σύνθεσης. Συγκρίναμε, δηλαδή, δοκιμασίες που ενέπλεκαν συνδυασμούς της 1 πέννας και των 10 πεννών έναντι των συνδυασμών της 1 πέννας και των 20 πεννών. Καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι ίσως τα αγγλόφωνα παιδιά θα βρουν τους συνδυασμούς των 20 πεννών και της 1 πέννας ευκολότερους από αυτούς των 10 πεννών και της 1 πέννας, διότι για τον πρώτο τύπο δοκιμασίας τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν γλωσσικές υποβολές αλλά δεν μπορούν να κάνουν το ίδιο για τον άλλον τύπο. Με άλλες λέξεις, η ανάλυση του 23 σε 20 και 3 ίσως είναι πιο εύκολη από την ανάλυση του 13 σε 10 και 3, διότι τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν λεκτι-

κές ονομασίες (twenty-three) και την αντιστοιχία στα κέρματα (20 πέννες και τρία κέρματα της 1 πέννας) ως οδηγό. Τα αποτελέσματα υποστήριξαν την υπόθεση ότι τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν λεκτικές υποβολές ως υποστήριξη. Οι δοκιμασίες με τους συνδυασμούς των 20 πεννών και της 1 πέννας ήταν πολύ πιο εύκολες απ' αυτές με τους συνδυασμούς των 10 πεννών και της 1 πέννας για τα παιδιά των 5 και 6 ετών, αν και οι γλωσσικές υποβολές φαίνεται να είναι πιο σημαντικές για τα παιδιά των 5 και 6 ετών (βλ. Σχήμα 3.1). Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι δοκιμασίες της συνθετικής πρόσθεσης που αφορούσαν κέρματα των 20 πεννών και της 1 πέννας εξακολουθούσαν να είναι σημαντικά πιο δύσκολες για τα παιδιά από εκείνες που αφορούσαν μόνο κέρματα της 1 πέννας. Αυτό σημαίνει ότι, αν και μπορεί να βοηθούσαν οι γλωσσικές υποβολές, δεν είναι αρκετές για τα παιδιά, ώστε να επιτύχουν την κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης. Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι η επίδοση των παιδιών στους δύο τύπους των δοκιμασιών που ενέπλεκαν συνδυασμούς κερμάτων διαφορετικής αξίας είχαν σημαντική συνάφεια. Έτσι, παρά την υποστήριξη που προσέφεραν οι γλωσσικές υποβολές στις δοκιμασίες με το συνδυασμό των 20 πεννών και της 1 πέννας, το είδος της κατανόησης στους δύο τύπους των δοκιμασιών εξακολουθούσε να είναι βασικά το ίδιο.

Αυτά τα αποτελέσματα είναι σημαντικά διότι καταδεικνύουν ότι χρειάζεται να κάνουμε έναν διαχωρισμό ανάμεσα στη δεξιότητα απαρίθμησης και την κατανόηση της δεκαδικής δομής του αριθμητικού συστήματος από τα παιδιά στην Αγγλία ακριβώς όπως και στη Βραζιλία. Αλλά το ερώτημα αναφορικά με τις απαρχές της κατανόησης της δεκαδικής δομής απαιτεί περαιτέρω ανάλυση. Ένας κύριος στόχος αυτής της έρευνας ήταν να συγκρίνουμε τη σημασία της απαρίθμησης και της πρόσθεσης στην ανάπτυξη της κατανόησης της δεκαδικής δομής του συστήματος.



ΣΧΗΜΑ 3.1 Η επιτυχία των παιδιών στην ανάγνωση και γραφή αριθμών

ΠΗΓΗ: NUNES et al. (υπό έκδοση)

Αρχίζοντας να αναζητούμε απαντήσεις, εξετάσαμε τις συνάφειες μεταξύ της δεξιότητας της απαρίθμησης και της προσθετικής σύνθεσης, από τη μία μεριά, και της επίλυσης προβλημάτων πρόσθεσης και προσθετικής σύνθεσης από την άλλη. Η συνάφεια ανάμεσα στην επιτυχία των παιδιών στις δοκιμασίες της μίας μονάδας και στις δοκιμασίες της προσθετικής σύνθεσης δεν ήταν σημαντική. Δύο βαθμολογίες χρησιμοποιήθηκαν για τα έργα της πρόσθεσης, μία βασισμένη στον αριθμό των σωστών απαντήσεων και μία δεύτερη βασισμένη στον αριθμό των δοκιμασιών στις οποίες χρησιμοποιήθηκε η στρατηγική της μερικής απαρίθμησης ή της μνήμης. Ενώ η πρώτη βαθμολογία δεν παρουσίαζε συνάφεια με τις δοκιμασίες της προσθετικής σύνθεσης, η σχέση ανάμεσα στον αριθμό των δοκιμασιών στις οποίες χρησιμοποιήθηκε η στρατηγική της μερικής απαρίθμησης / μνήμης και την επίδοση στις δοκιμασίες προσθετικής σύνθεσης ήταν σημαντική.

Μία σύνοψη των σχέσεων ανάμεσα στις δοκιμασίες στα έργα παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.2. Οι δοκιμασίες είναι οργανωμένες σε δύο ομάδες, σε εκείνες όπου οι λύσεις βασίζονται απλώς στην απαρίθμηση μονάδων και σε εκείνες οι οποίες απαιτούν κάτι παραπάνω από την απλή απαρίθμηση (δηλαδή, να ληφθεί υπόψη η σχετική αξία των μονάδων, να χρησιμοποιηθεί προσθετική σύνθεση, ή να χρησιμοποιηθεί η στρατηγική της μερικής απαρίθμησης). Είναι σαφές ότι υπάρχουν σημαντικές σχέσεις στην επίδοση των παιδιών σε κάθε ομάδα έργων αλλά, αντίθετα, υπάρχει μικρή σχέση ανάμεσα στις δύο ομάδες. Αυτές οι συνάφειες δείχνουν ότι τα παιδιά δεν κατανοούν τις ιδιότητες του αριθμητικού συστήματος ως αποτέλεσμα της μεγαλύτερης εξάσκησης τους στην απαρίθμηση μέσω ένα-προς-ένα αντιστοιχία. Είναι περισσότερο πιθανό ότι η πρόοδός τους στην κατανόηση της πρόσθεσης τους παρέχει μία βάση για την κατανόηση των ιδιοτήτων των αριθμητικών συστημάτων βάσης.

Αυτό το συμπέρασμα υποστηρίζεται από τα αποτελέσματα

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2 Διασυσχετίσεις ανάμεσα στα δύο είδη έργων, τα οποία μπορούσαν και δεν μπορούσαν να λυθούν με απαρίθμηση μονάδων

| Επιλύσιμα με απαρίθμηση μονάδων    |    | AM  | ΣΑ               | ΟΠ  | ΣΜ   | ΠΣ               | ΜΠ               |
|------------------------------------|----|-----|------------------|-----|------|------------------|------------------|
| Απαρίθμηση μονάδων                 | AM | 1.0 | .47 <sup>α</sup> | .19 | .23  | .20              | .26              |
| Σύγκριση αριθμού<br>κερμάτων       | ΣΑ |     | 1.0              | .15 | .21  | .33              | .27              |
| Ολική πρόσθεση                     | ΟΠ |     |                  | 1.0 | -.05 | -.02             | .01              |
| Μη επιλύσιμα με απαρίθμηση μονάδων |    |     |                  |     |      |                  |                  |
| Σχετική αξία των μονάδων           | ΣΜ |     |                  |     | 1.0  | .67 <sup>β</sup> | .52 <sup>β</sup> |
| Προσθετική σύνθεση                 | ΠΣ |     |                  |     |      | 1.0              | .70 <sup>β</sup> |
| Μερική πρόσθεση                    | ΜΠ |     |                  |     |      |                  | 1.0              |

<sup>α</sup> Συνάφεια στατιστικά σημαντική στο 0.5<sup>β</sup> Συνάφεια στατιστικά σημαντική στο 0.001

Οι άλλες συνάφειες δεν είναι σημαντικές

μιας άλλης έρευνας που πραγματοποιήθηκε στην Ελλάδα από την Αικατερίνα Κορνηλάκη (1994) με παιδιά προσχολικής ηλικίας από 5½ έως 6 ετών. Διερεύνησε τη σχέση ανάμεσα στην πρόσθεση και την προσθετική σύνθεση χρησιμοποιώντας ένα έργο πρόσθεσης, στο οποίο προσπάθησε να εμποδίσει τη χρήση της στρατηγικής της ολικής απαρίθμησης.

Σ' αυτό το έργο, έδειξε στα παιδιά ένα πορτοφόλι και τους είπε ότι ένα κορίτσι είχε, για παράδειγμα, 8 δραχμές στο πορτοφόλι του και ότι της έδωσαν άλλες 7 δραχμές, οι οποίες τοποθετήθηκαν πάνω σε ένα τραπέζι μπροστά στο παιδί. Η ερώτηση που έπρεπε να απαντήσουν τα παιδιά ήταν πόσα χρήματα είχε το κορίτσι τώρα. Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιήθηκε το πορτοφόλι ήταν για να εμποδίσει τη στρατηγική της ολικής απαρίθμησης διασφαλίζοντας ότι τα παιδιά είχαν μια οπτική αναπαράσταση για τον δεύτερο προσθετέο (τα 7 κέρματα πάνω

στο τραπέζι) αλλά όχι για τον πρώτο προσθετέο (τα 8 κέρματα μέσα στο πορτοφόλι). Για να λύσουν αυτό το πρόβλημα, γνωστό ως πρόσθεση με έναν μη ορατό προσθετέο, τα παιδιά χρειάζεται να απαριθμήσουν αρχίζοντας από το 8 χρησιμοποιώντας τα κέρματα που είναι έξω από το πορτοφόλι για να βρουν το σύνολο.

Αποδεικνύεται ότι αυτό δεν είναι τόσο απλό έργο για παιδιά 5-6 ετών. Μόνο το 66% ήταν ικανά να δώσουν τη σωστή απάντηση. Το να γνωρίζουν πώς να απαριθμούν και το να χρησιμοποιούν το αριθμητικό σύστημα για να λύσουν αυτό το πρόβλημα δεν είναι ακριβώς το ίδιο πράγμα.

Ο αριθμός των παιδιών που απέτυχαν / πέτυχαν στα έργα της προσθετικής σύνθεσης και της πρόσθεσης με έναν μη ορατό προσθετέο παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.3. Αξίζει να σημειώσουμε ότι όλα τα παιδιά τα οποία πέτυχαν στην προσθετική σύνθεση, πέτυχαν, επίσης, στο έργο της πρόσθεσης με έναν μη ορατό προσθετέο, αλλά το αντίστροφο δεν συνέβη. Η σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών είναι ιδιαίτερα σημαντική. Αυτό σημαίνει ότι είναι δυνατόν η επιτυχία στο έργο της πρόσθεσης με έναν μη ορατό προσθετέο να σημαίνει μία απαραίτητη αλλά όχι επαρκή ικανότητα για την κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3 Αριθμός των παιδιών που πέτυχαν/απέτυχαν στην προσθετική σύνθεση και την πρόσθεση με μη ορατό προσθετέο

|                                |          | Προσθετική σύνθεση |          |
|--------------------------------|----------|--------------------|----------|
|                                |          | Επιτυχία           | Αποτυχία |
|                                |          | 12                 | 21       |
| Πρόσθεση με μη ορατό προσθετέο | Επιτυχία | 12                 | 21       |
|                                | Αποτυχία | 0                  | 17       |

Η Κορνηλάκη έκανε λεπτομερή παρατήρηση των στρατηγικών των παιδιών κατά την επίλυση έργων με έναν μη ορατό προ-



σθετέο. Οι παρατηρήσεις της αποκάλυψαν ότι οι στρατηγικές που περιγράφονται από τους Steffe et al. (1982) στις Ηνωμένες Πολιτείες ήταν αντίστοιχες με τη συμπεριφορά των παιδιών στην Ελλάδα. Τα παιδιά που αποτύγχαναν απαριθμούσαν μόνον ό,τι ήταν ορατό. Έτσι, είτε έδιναν ως απάντηση στο πρόβλημα την τιμή του δεύτερου προσθετέου (δηλαδή, απαριθμούσαν τις 7 δραχμές που έβλεπαν και απαντούσαν «επτά») είτε απαριθμούσαν το πορτοφόλι ως ένα και πρόσθεταν τις δραχμές που έβλεπαν σ' αυτό (δηλαδή, η απάντησή τους στο παραπάνω πρόβλημα θα ήταν «οκτώ»).

Τα παιδιά τα οποία πέτυχαν χρησιμοποιούσαν σταθερά μία στρατηγική ανάμεσα σε πολλές πιθανές στρατηγικές στα διαφορετικά προβλήματα. Κάποια παιδιά (23%) αναπαριστούσαν τον πρώτο προσθετέο χρησιμοποιώντας τα δάκτυλά τους. Μετά απαριθμούσαν τα δάκτυλά τους, αρχίζοντας από το ένα, και συνέχιζαν να απαριθμούν τις δραχμές που έβλεπαν. Μία άλλη στρατηγική, που χρησιμοποιήθηκε από το 37%, ήταν να δείχνουν προς το πορτοφόλι (είτε με τα δάκτυλα ή με κινήσεις του κεφαλιού) καθώς απαριθμούσαν από το ένα έως την τιμή του πρώτου προσθετέου και κατόπιν συνέχιζαν να απαριθμούν τις δραχμές που έβλεπαν. Αυτά τα παιδιά φαίνεται ότι αναπαριστούσαν τις δραχμές που βρίσκονταν μέσα στο πορτοφόλι με κινήσεις. Έτσι, αυτές οι δύο στρατηγικές ενέπλεκαν την αναπαράσταση των μη ορατών δραχμών μέσω χειρονομιών που έκαναν τα παιδιά μαζί με την απαρίθμηση.

Δύο άλλες στρατηγικές που ήταν επίσης επιτυχείς δεν ενέπλεκαν μία εμφανή, με χειρονομία αναπαράσταση των μη ορατών δραχμών μαζί με την απαρίθμηση: αναπαριστούσαν τις μη ορατές δραχμές με λέξεις. Στην πρώτη από αυτές, που χρησιμοποιήθηκε από το 21% των παιδιών, τα παιδιά απλώς έλεγαν τις αριθμητικές λέξεις από το ένα μέχρι την τιμή του πρώτου προσθετέου αρκετά γρήγορα και, κατόπιν, συνέχιζαν να απαριθμούν τις δραχμές που έβλεπαν. Έτσι, κάθε μη ορατή δραχμή αναπαριστα-

νόταν μόνο με τη λέξη απαρίθμησης. Στη δεύτερη στρατηγική, τα παιδιά (18%) απλώς έλεγαν τον απόλυτο αριθμό για τον πρώτο προσθετέο και συνέχιζαν να απαριθμούν τις ορατές δραχμές. Σ' αυτήν την περίπτωση, ο απόλυτος αριθμός θεωρούνταν ικανή αναπαράσταση για όλο το σύνολο των μη ορατών δραχμών.

Η Κορνηλάκη, στη συνέχεια, διερεύνησε κατά πόσον ο τύπος της στρατηγικής που χρησιμοποίησαν τα παιδιά για να λύσουν τα προβλήματα πρόσθεσης με μη ορατό προσθετέο διαφοροποιούσε το βαθμό επιτυχίας τους στο έργο της προσθετικής σύνθεσης. Τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης έδειξαν ότι τα παιδιά τα οποία δεν χρησιμοποίησαν μία εμφανή αναπαράσταση για τον μη ορατό προσθετέο, η οποία συνδεόταν με λεκτική απαρίθμηση, είχαν μεγαλύτερες πιθανότητες να επιτύχουν στο έργο της προσθετικής σύνθεσης. Όλα τα παιδιά, τα οποία απλά χρησιμοποίησαν την απόλυτη τιμή του συνόλου των δραχμών που δεν έβλεπαν, έλυσαν το πρόβλημα με επιτυχία, και τα πέντε από τα επτά τα οποία χρησιμοποίησαν τις λέξεις απαρίθμησης χωρίς να δείχνουν ή να απαριθμούν τα δάκτυλά τους, επίσης, είχαν επιτυχία στο έργο της προσθετικής σύνθεσης. Αυτά τα παιδιά αποτελούν τα 11 από τα 12 που ήταν επιτυχή στο έργο της προσθετικής σύνθεσης.

Συνεπώς, τα αποτελέσματα της Κορνηλάκη παρέχουν μία ισχυρή υποστήριξη στην ιδέα ότι η ένα-προς-ένα αντιστοιχία δεν είναι η βάση για την κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης. Τα παιδιά χρειάζεται να υπερβούν αυτόν τον τύπο του συλλογισμού σχετικά με τους αριθμούς, να κατανοήσουν την απόλυτη τιμή ως μία επαρκή αναπαράσταση του συνόλου και να είναι σε θέση να προσθέτουν σε αυτό ώστε να κατακτήσουν την προσθετική σύνθεση.

*Εκπαιδευτικές εφαρμογές:* Τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών έχουν εμφανείς εκπαιδευτικές εφαρμογές. Δείχνουν ότι τα παιδιά μπορεί να παρακινηθούν να επεκτείνουν την κατα-

νόηση του αριθμητικού συστήματος με την εμπλοκή τους στην επίλυση απλών προβλημάτων πρόσθεσης από νωρίς, ακόμα και από την ηλικία των πέντε ετών. Μία αλληλουχία για τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσαν αυτά τα προβλήματα να εισαχθούν υποδεικνύεται μέσω της συνολικής ανάλυσης αυτών των αποτελεσμάτων. Είναι ίσως χρήσιμο για τα παιδιά των 5 ετών αρχικά να έχουν την ευχέρεια σ' ένα πρόβλημα πρόσθεσης να αναπαριστούν και τους δύο προσθετέους με αντικείμενα, αλλά η πρόοδος στην κατανόηση της πρόσθεσης εντείνεται από την ανάγκη τους να λύνουν προβλήματα με μη ορατούς προσθετέους. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχουν ενδιάμεσες στρατηγικές τις οποίες μπορούν τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν καθώς κατανοούν τον απόλυτο αριθμό ως μία επαρκή αναπαράσταση του αριθμού των αντικειμένων σε ένα σύνολο. Έχουμε δει ότι μερικά παιδιά χρησιμοποιούν τα δάκτυλά τους και άλλα παιδιά χρησιμοποιούν χειρονομίες απαρίθμησης, για να ξεπεράσουν τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν όταν χειρίζονται έναν μη ορατό προσθετέο, προτού να είναι σε θέση να βασιστούν μόνο σε λέξεις.

Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να θέσουν στους μαθητές τους προβλήματα με μη ορατούς προσθετέους και να τα λύσουν αυτά σε συνεργασία, έτσι ώστε οι μαθητές να καταλάβουν τι πρέπει να κάνουν σχετικά με την αναπαράσταση ενός μη ορατού προσθετέου για να λύσουν το πρόβλημα. Άλλες έρευνες σχετικά με την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης από τα παιδιά (Groen and Resnick, 1977) δείχνουν ότι τα παιδιά τείνουν να εργάζονται με πιο αποτελεσματικές στρατηγικές, όταν τους δίδεται η ευκαιρία να λύσουν μία ποικιλία από προβλήματα. Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να ανακαλύψουν μόνα τους την πιθανότητα να εγκαταλείψουν τα δάκτυλα ή τις χειρονομίες για την αναπαράστασή τους ενός από τους προσθετέους.

### 1.3. Γλωσσικές υποβολές και η κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης από τα παιδιά

ΕΧΟΥΜΕ φθάσει στο συμπέρασμα ότι ούτε η απαρίθμηση καθεαυτή ούτε η μάθηση της ανάγνωσης και της γραφής των αριθμών είναι καθοριστικές εμπειρίες για τη μάθηση της δεκαδικής δομής, και έχουμε υποστηρίξει ότι είναι πολύ πιο σημαντικό αυτό που τα παιδιά μαθαίνουν για την πρόσθεση. Όμως, συζητάμε για τη μάθηση των αριθμητικών συστημάτων στα οποία οι αριθμητικές λέξεις δεν δίνουν σταθερές υποβολές (τουλάχιστον για τους αριθμούς κάτω του 20) αναφορικά με το γεγονός ότι απαριθμούμε μονάδες διαφορετικού μεγέθους σε ένα σύστημα δεκαδικής βάσης.

Είδαμε νωρίτερα σ' αυτό το κεφάλαιο ότι υπάρχουν άλλα συστήματα, όπως το ιαπωνικό, τα οποία δίνουν πολύ πιο δυνατές υποβολές ως προς την απαρίθμηση των μονάδων διαφορετικού μεγέθους και την προσθετική τους σύνθεση. Είναι πιθανόν η εμπειρία της απαρίθμησης σε ένα ομαλό σύστημα να βοηθάει τα παιδιά να κατανοήσουν τις ιδιότητες του συστήματος δεκαδικής βάσης και να τα διευκολύνει περισσότερο σ' αυτό σε σχέση με τα παιδιά τα οποία πρέπει να χειριστούν περισσότερο ιδιότροπα συστήματα.

Υπάρχουν αρκετοί λόγοι για να θεωρήσουμε ότι η τακτικότητα του συστήματος ίσως διαφοροποιεί σε σημαντικό βαθμό τα πράγματα. Ο ένας είναι μία έρευνα των Miller και Stigler (1987) οι οποίοι συνέκριναν παιδιά των 4, 5, και 6 ετών στην Ταϊβάν και τις Ηνωμένες Πολιτείες. Το κινέζικο αριθμητικό σύστημα, το οποίο μάθαιναν τα παιδιά στην Ταϊβάν, είναι ένα ομαλό και διαφανές σύστημα σαν το ιαπωνικό σύστημα.

Οι Miller και Stigler απλώς ζήτησαν και από τις δύο ομάδες των παιδιών να απαριθμήσουν: τα παιδιά απαρίθμησαν αντικείμενα, είτε σε τυχαία διεύθυνση ή σε τακτικές σειρές, και απαρίθμησαν «αφηρημένα», το οποίο σημαίνει ότι απλά απα-

ριθμούσαν μέχρι εκεί που μπορούσαν, αν και δεν απαριθμούσαν κάτι συγκεκριμένο.

Τα παιδιά στην Ταϊβάν ήταν αξιοθαύμαστα καλύτερα και στα δύο είδη απαρίθμησης. Η μεγάλη διαφορά ανάμεσα στις δύο ομάδες ήταν αρκετά εντυπωσιακή, αλλά ο τύπος των διαφορών ήταν ακόμη πιο ενδιαφέρων.

Τα λάθη που έκαναν τα παιδιά όταν απαριθμούσαν αντικείμενα ήταν κυρίως δύο ειδών, τα γνωστά λάθη ένα-προς-ένα αντιστοιχίας και λάθη με την ακολουθία των αριθμών, όπως η παραγωγή αριθμών σε λανθασμένη σειρά ή η παράλειψη αριθμών. Δεν υπήρχε καμία διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων αναφορικά με τα λάθη ένα-προς-ένα, και είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι αυτά τα λάθη ήταν πολύ πιο συχνά, όταν τα παιδιά απαριθμούσαν τις τυχαίες σειρές παρά τις τακτικές σειρές. Όμως υπήρχε μία σημαντική διαφορά ανάμεσα στις ομάδες αναφορικά με την ικανότητα των παιδιών να παράγουν τις συμβατικές αριθμητικές λέξεις καθώς έδειχναν τα αντικείμενα. Τα παιδιά στην Ταϊβάν μπορούσαν να απαριθμούν πολύ καλύτερα.

Οι διαφορές ανάμεσα στα παιδιά στην Ταϊβάν και τις Ηνωμένες Πολιτείες στο έργο της αφηρημένης απαρίθμησης, επίσης, είχε εντυπωσιακή μορφή. Οι Miller και Stigler άφησαν τα παιδιά να εξακολουθούν να απαριθμούν έως ότου κάνουν δύο λάθη: έτσι είχαν ένα μέτρο μέχρι πού μπορούν να απαριθμήσουν τα παιδιά χωρίς να υποπέσουν σε σοβαρό λάθος. Να υπενθυμίσουμε ότι μη ομαλές αριθμητικές λέξεις είναι όλες οι λέξεις για τους αριθμούς ανάμεσα στο 10 και το 20 και για τις δεκάδες. Η έρευνα των Miller και Stigler έδειξε ότι η εντονότερη διαφορά ανάμεσα στις δύο ομάδες ήταν στον αριθμό των παιδιών τα οποία άρχισαν να κάνουν σοβαρά λάθη μεταξύ του 10 και του 20. Σχεδόν κανένα παιδί από τα παιδιά στην Ταϊβάν δεν έκανε λάθος σε αυτό το στάδιο, ενώ ένας μεγάλος αριθμός από τα παιδιά στις Ηνωμένες Πολιτείες έκανε.

Αυτό το τελευταίο αποτέλεσμα είναι μία αρκετά δυνατή απόδειξη ότι ένα μεγάλο μέρος της διαφοράς μεταξύ των δύο ομάδων είναι η άμεση επίδραση των διαφορετικών αριθμητικών λέξεων. Τα παιδιά στις Ηνωμένες Πολιτείες κάνουν περισσότερα λάθη, διότι πρέπει να διαχειριστούν ένα σύνολο λέξεων λιγότερο υποστηρικτικών: λιγότερο υποστηρικτικών διότι είναι κυρίως ένα βάρος στη μνήμη τους. Πρέπει να θυμούνται λέξεις, όπως 'twelve' και 'thirteen'. Σε αντίθεση με τα παιδιά στην Κίνα, δεν μπορούν να παράξουν αυτές τις λέξεις από τη σύνθεση των αριθμών 10 και 2 ή 10 και 3.

Η έρευνα σαφώς εγείρει ένα ερώτημα για την κατανόηση της δομής δεκαδικής βάσης από τα παιδιά στις Ηνωμένες Πολιτείες και την Ταϊβάν. Τα παιδιά στην Αμερική έκαναν περισσότερα λάθη, αλλά δεν ξέρουμε εάν αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά στην Ταϊβάν είχαν συλλάβει καλύτερα τη φύση του δεκαδικού συστήματος. Χρειάζεται να ξέρουμε όχι απλώς πόσο καλά απαριθμούν, αλλά και πόσο καλή επίδοση έχουν σε έργα στα οποία πρέπει να ασχοληθούν με διαφορετικές μονάδες και να εφαρμόσουν τη δική τους κατανόηση για την προσθετική σύνθεση του αριθμού.

Για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα εμείς οι ίδιοι (Lines και Bryant, υπό έκδοση) διεξήγαμε μία έρευνα αναφορικά με την κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης και την απαρίθμηση σε παιδιά 6 ετών από την Ταϊβάν και τη Μεγάλη Βρετανία. Σ' αυτήν την έρευνα επαναλάβαμε τα έργα απαρίθμησης των Miller και Stigler, και δώσαμε, επίσης, στις δύο ομάδες παιδιών το δικό μας έργο του καταστήματος, για να διαπιστώσουμε πόσο καλά μπορούσαν να χειριστούν διαφορετικές μονάδες και πόσο καλά μπορούσαν να συνδυάσουν αυτές τις μονάδες.

Ο σκοπός του έργου του καταστήματος, όπως έχουμε δει, είναι να αναλύσουμε την κατανόηση από τα παιδιά της προσθετικής σύνθεσης. Σ' αυτήν την έρευνα συμπεριλάβαμε συνδυασμούς της 1 πέννας και των 5 πεννών, καθώς και συνδυασμούς

της 1 πέννας και των 10 πεννών, οι οποίοι αποτελούν αριθμητικές αξίες κερμάτων και στην Ταϊβάν και στην Αγγλία. Οι δοκιμασίες που αφορούσαν τους συνδυασμούς της 1 πέννας και των 5 πεννών δημιουργούν ένα χρήσιμο έργο ελέγχου, διότι μας επιτρέπουν να διαπιστώσουμε κατά πόσον οι δύο ομάδες παιδιών διαφοροποιούνται στην ικανότητά τους να συνδυάζουν διαφορετικές μονάδες, οποιεσδήποτε και αν είναι αυτές, ή εάν διαφέρουν μόνον στην επιτυχία τους να συνδυάζουν μονάδες και δεκάδες.

Υποστηρίξαμε ότι το κινέζικο σύστημα είναι τόσο διαφανές που ίσως τα παιδιά από την Κίνα να συμπεριφέρονταν στο έργο του καταστήματος *σαν να κατανοούσαν την προσθετική σύνθεση* όταν χειρίζονται τους συνδυασμούς της 1 και των 10 πεννών, αλλά μπορούσε απλά να αντιστοιχίζουν τις λεκτικές ονομασίες με τα κέρματα. Εάν συνέβαινε έτσι, θα είχαν καλύτερη επίδοση στις δοκιμασίες της 1 και των 10 πεννών, αλλά δεν θα είχαν καλύτερη επίδοση από αυτήν που θα είχαν τα παιδιά της Αγγλίας στις δοκιμασίες που απαιτούσαν τους συνδυασμούς της 1 και των 5 πεννών. Είχαμε προηγουμένως βρει ότι τα παιδιά στην Αγγλία είχαν καλύτερη επίδοση στις δοκιμασίες που απαιτούσαν τους συνδυασμούς των 20 και της 1 πέννας (οι οποίοι περιέχουν περισσότερες υποβολές για την προσθετική σύνθεση) από ό,τι στους συνδυασμούς των 10 και της 1 πέννας.

Μία διαφορετική πιθανότητα είναι τα παιδιά να μην αντιστοιχίσουν απλά τις αριθμητικές λέξεις με τις αξίες των κερμάτων στο έργο του καταστήματος. Αντίθετα, *χρειάζεται να κατανοήσουν την ιδέα της προσθετικής σύνθεσης* και, ως εκ τούτου, ιδιαίτερες γλωσσικές υποβολές δεν επιδρούν ριζικά στην επίδοση των παιδιών. Ένα διαφανές αριθμητικό σύστημα, όπως το προφορικό κινέζικο και το ιαπωνικό αριθμητικό σύστημα, θα διευκόλυνε τη μάθηση των παιδιών με έναν περισσότερο σφαιρικό τρόπο, βοηθώντας τα να κατανοήσουν την ιδέα της προσθετικής σύνθεσης, και όχι απλά να τα οδηγεί σε μια αντιστοίχιση

των αριθμητικών λέξεων με τις αξίες. Εάν έτσι έχουν τα πράγματα, τότε τα παιδιά στην Ταϊβάν θα πρέπει να έχουν σημαντικά καλύτερη επίδοση από τα παιδιά στην Αγγλία, τόσο στις δοκιμασίες που αφορούν τους συνδυασμούς των 10 πεννών και της 1 πέννας, όσο και σε εκείνες που αφορούν τους συνδυασμούς των 5 πεννών και της 1 πέννας.

Τρία ενδιαφέροντα αποτελέσματα προέκυψαν από αυτήν την έρευνα. Πρώτον, επιβεβαιώσαμε την έντονη διαφορά μεταξύ των κινεζόφωνων και των αγγλόφωνων, που αρχικά είχαν αναφέρει οι Miller και Stigler. Τα αγγλόφωνα παιδιά μειονεκτούσαν σε σχέση με τους συνομήλικούς τους από την Ταϊβάν, όπως τα παιδιά στην Αμερική στην έρευνα των Miller/Stigler. Αυτό υποστηρίζει την ιδέα ότι τα παιδιά που μιλάνε κινέζικα βοηθούνται σημαντικά στη μάθηση της απαρίθμησης από το αριθμητικό τους σύστημα.

Το δεύτερο αποτέλεσμα αφορά τα προβλήματα των μονάδων στο έργο του καταστήματος. Σ' αι τό το έργο οι δύο ομάδες ήταν γενικά στο ίδιο επίπεδο, όταν έπρεπε να πληρώσουν μόνο με τη μονάδα της 1 πέννας, αλλά τα αγγλόφωνα παιδιά ήταν σε μειονεκτική θέση όταν έπρεπε να πληρώσουν μόνο με 10 πέννες. Τα παιδιά από την Ταϊβάν μπορούσαν να απαριθμούν σε δεκάδες πολύ καλύτερα από τα αγγλόφωνα παιδιά, και αυτό, χωρίς αμφιβολία, οφειλόταν στο γεγονός ότι οι κινέζικες λέξεις για τις δεκάδες είναι πολύ περισσότερο υποστηρικτικές από ό,τι οι αντίστοιχες αγγλικές.

Τρίτον, τα κινεζόφωνα παιδιά είχαν καλύτερες επιδόσεις από τα αγγλόφωνα παιδιά και στα δύο προβλήματα συνδυασμένων μονάδων αλλά αυτή η διαφορά ήταν μεγαλύτερη όταν είχαν να συνδυάσουν τη 1 πέννα με 10 πέννες, παρά όταν έπρεπε να συνδυάσουν τη 1 πέννα με 5 πέννες. Έτσι, εδώ έχουμε και τα δύο, και ένα ειδικό αλλά και ένα γενικό αποτέλεσμα. Τα παιδιά που μιλούν κινέζικα έχουν ένα πλεονέκτημα σε σχέση με τα αγγλόφωνα παιδιά σε γενικό επίπεδο, όταν πρέπει να συνδυά-

σουν μονάδες, αλλά αυτό το αποτέλεσμα είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακό όταν εμπλέκονται δεκάδες. Φαίνεται ότι η κανονικότητα των κινέζικων λέξεων για τη δομή των δεκάδων βοηθάει τα κινεζόπουλα γενικά στην προσθετική σύνθεση των μονάδων διαφορετικού μεγέθους, και ειδικότερα στην προσθετική σύνθεση που εμπλέκει δεκάδες.

Μία άλλη σύγκριση διαφορετικών αριθμητικών συστημάτων πραγματοποιήθηκε από τους Nunes et al. (υπό έκδοση), αυτή τη φορά με αγγλόφωνα και γαλλόφωνα παιδιά. Το αγγλικό και το γαλλικό προφορικό αριθμητικό σύστημα έχουν παρόμοιες δυσκολίες μέχρι τον αριθμό 69. Από κει και πάνω, το γαλλικό σύστημα γίνεται περισσότερο περίπλοκο, διότι δεν υπάρχουν πλέον οι απλοί συνδυασμοί με την ονομασία της δεκάδας συν μονάδες. Η λέξη για το 70 είναι αντίστοιχη με το 'sixty-ten' (εξήντα-δέκα), ακολουθεί το 'sixty-eleven' (εξήντα-έντεκα), 'sixty-twelve' (εξήντα-δώδεκα) κ.λπ. μέχρι το 'sixty-nineteen' (εξήντα-δεκαεννέα) (δηλαδή, 79). Η λέξη για το 80 είναι αντίστοιχη με το 'four-twenty' (τέσσερα-είκοσι) ακολουθούν ονομασίες μέχρι το 'four-twenty-nineteen' (τέσσερα-είκοσι-δεκαεννέα), δηλαδή το 99. Το ερώτημά μας ήταν, εάν αυτές οι ιδιαίτερες αντικανονικότητες του γαλλικού αριθμητικού συστήματος, θα έκαναν το έργο της κατανόησης των ιδιοτήτων της απαρίθμησης ακόμη πιο δύσκολο για τα γαλλόφωνα παιδιά ή εάν δεν θα δημιουργούσαν καμία επιπλέον δυσκολία, διότι οι πρόσθετες αντικανονικότητες εμφανίζονται μόνο με τους πολύ μεγάλους αριθμούς. Υποστηρίξαμε ότι είναι δυνατόν τα παιδιά να αναπτύξουν την κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης στην περιοχή των μικρότερων αριθμών (μέχρι το 30-50) και να χρησιμοποιούν αυτήν την κατανόηση όταν ασχολούνται με μεγαλύτερους αριθμούς ακόμη και όταν υπάρχουν πρόσθετες αντικανονικότητες στο σύστημα. Εάν συμβαίνει έτσι, τα γαλλόφωνα και τα αγγλόφωνα παιδιά θα έπρεπε να μη διαφέρουν στην κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης. Επι-

πρόσθετα, τα γαλλόφωνα παιδιά θα έπρεπε να μην εμφανίζουν περισσότερες δυσκολίες κατά τη σύνθεση αθροισμάτων με χρήματα από το 70 έως το 90 από ό,τι κατά τη σύνθεση αθροισμάτων από το 40 έως το 60.

Πήραμε συνέντευξη από 30 γαλλόφωνα παιδιά, 10 σε κάθε μία από τις τρεις ηλικιακές ομάδες, των 5, 6 και 7 ετών, και συγκρίναμε την επίδοση των παιδιών των 5 και 6 ετών με αυτή των αγγλόφωνων παιδιών. Αυτή δεν είναι μια ευθεία σύγκριση διότι τα παιδιά των 5 ετών στην Αγγλία φοιτούσαν στην πρώτη τάξη του δημοτικού, ενώ τα παιδιά των 5 ετών στη Γαλλία ήταν στο νηπιαγωγείο. Εάν τα παιδιά στην Αγγλία είχαν ένα πλεονέκτημα στην ηλικία των 5 ετών, αυτή η διαφορά θα μπορούσε να προκύπτει είτε από το γεγονός ότι φοιτούσαν στο σχολείο, είτε από τη χρήση ενός περισσότερο ομαλού συστήματος. Για να ελαχιστοποιήσουμε την επίδραση της φοίτησης στο σχολείο, εργαστήκαμε μόνο με παιδιά 5 ετών που βρίσκονταν στο πρώτο τρίμηνο στο σχολείο στην Αγγλία και με παιδιά 6 ετών που βρίσκονταν επίσης στο πρώτο τρίμηνο στο σχολείο στη Γαλλία. Για κάποιες συμπληρωματικές αναλύσεις που αφορούσαν στα παιδιά από τη Γαλλία μόνο, πήραμε συνεντεύξεις από μία ομάδα παιδιών 7 ετών.

Όλα τα παιδιά απάντησαν, μεταξύ άλλων έργων, στο έργο της προσθετικής σύνθεσης με δύο είδη δοκιμασιών, εκείνες στις οποίες χρησιμοποίησαν μόνο κέρματα της 1 πέννας και εκείνες στις οποίες συνδύαζαν κέρματα των 10 πεννών και της 1 πέννας. Επί πλέον, τα γαλλόφωνα παιδιά των 6 και 7 ετών απάντησαν σε δοκιμασίες όπου τους ζητήθηκε να πληρώσουν ποσά χρημάτων στη δεκάδα των 80 είτε χρησιμοποιώντας 20 πέννες και 1 πέννα ή χρησιμοποιώντας συνδυασμό των 10 πεννών και της 1 πέννας. Αυτές οι τελευταίες δοκιμασίες εισήχθησαν για να εξακριβώσουμε εάν τα γαλλόφωνα παιδιά θα έδειχναν μεγαλύτερη ευκολία στη σύνθεση μεγαλύτερων ποσών χρημάτων με τη χρήση τεσσάρων κερμάτων των 20 πεννών (μία σύνθεση πα-

ράλληλη με την ονομασία 'quatre-vingt' για το 80) ή με τη χρήση οκτώ κερμάτων των 10 πεννών (μία σύνθεση η οποία απέχει από τη λεκτική ονομασία αλλά συνδέεται με την κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης των αριθμών οι οποίοι δομούνται από μικρότερες τιμές). Αυτό μας επέτρεψε να αξιολογήσουμε την πιθανότητα να κάνουν τα παιδιά ευθείες αντιστοιχίσεις ανάμεσα στις λεκτικές ονομασίες και τα κέρματα στο έργο του καταστήματος.

Τα αποτελέσματα αυτών των συγκρίσεων παρουσιάζονται σύντομα παρακάτω. Πρώτον, μία σύγκριση των διαφορετικών δοκιμασιών για τα γαλλόφωνα παιδιά έδειξε για μια φορά ακόμη τη σημασία της διάκρισης ανάμεσα στην απαρίθμηση και την κατανόηση του αριθμητικού συστήματος. Δοκιμασίες οι οποίες αφορούσαν μόνο κέρματα του 1 φράγκου (φράγκο, το γαλλικό νόμισμα) ήταν σημαντικά ευκολότερες από εκείνες οι οποίες αφορούσαν κέρματα διαφορετικών μονάδων, παρ' όλο που η αξία του αθροίσματος των χρημάτων ήταν σταθερή, όπως στις έρευνες που είχαν προηγηθεί. Δεύτερον, η σύγκριση ανάμεσα στα γαλλόφωνα και τα αγγλόφωνα παιδιά στη διάρκεια του πρώτου τριμήνου στο σχολείο δεν έδειξε σημαντικές διαφορές. Η μεγαλύτερη αντικανονικότητα στις ονομασίες των αριθμών στα γαλλικά δεν καθιστούσε το έργο της κατανόησης της προσθετικής σύνθεσης περισσότερο δύσκολο για τα γαλλόφωνα παιδιά απ' ό,τι για τα αγγλόφωνα. Ωστόσο, πρέπει να επισημάνουμε ότι τα παιδιά στη Γαλλία που ήταν στο ξεκίνημα του σχολείου ήταν μεγαλύτερα σε ηλικία από τα αντίστοιχα στην Αγγλία. Τρίτον, για τα παιδιά στη Γαλλία το να συνθέσουν αθροίσματα που οι αξίες τους ήταν στις δεκάδες του εβδομήντα, ογδόντα και ενενήντα δεν ήταν δυσκολότερο από το να συνθέσουν αθροίσματα που οι αξίες τους ήταν στις δεκάδες του σαράντα, πενήντα και εξήντα. Αυτό το αποτέλεσμα υποστηρίζει την ιδέα ότι τα παιδιά μπορούν να αναπτύξουν την κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης στην περιοχή των μικρότερων

αριθμών και να εφαρμόσουν αυτήν την κατανόησή τους σε μεγαλύτερους αριθμούς ακόμη κι όταν παρατηρούνται νέες αντικανονικότητες στο αριθμητικό σύστημα. Τέλος, για τα παιδιά στη Γαλλία δεν ήταν περισσότερο εύκολο να συνθέσουν αθροίσματα χρημάτων στη δεκάδα του 80 χρησιμοποιώντας τέσσερα κέρματα των 20 φράγκων από ό,τι οκτώ κέρματα των 10 φράγκων. Αυτό το αποτέλεσμα μία ακόμη φορά υποστηρίζει ότι τα παιδιά δεν αντιστοιχίζουν απλώς τις λεκτικές ονομασίες με τα κέρματα στο έργο του καταστήματος, διότι η γαλλική λέξη 'quatre-vingt' θα τους έδειχνε να χρησιμοποιήσουν τέσσερα κέρματα των 20 φράγκων για να πληρώσουν 80 φράγκα, αλλά όχι να χρησιμοποιήσουν οκτώ κέρματα των 10 φράγκων. Με άλλα λόγια, εάν τα παιδιά κατανοούν την προσθετική σύνθεση, οι συγκεκριμένες αξίες (5, 10 ή 20), οι οποίες υπεισέρχονται στη σύνθεση, δεν επηρεάζουν σημαντικά την επίδοσή τους σε αυτό το έργο.

Για να συνοψίσουμε, οι έρευνες που περιγράψαμε εδώ, δείχνουν ότι η κανονικότητα του αριθμητικού συστήματος επηρεάζει σημαντικά τη μάθηση των παιδιών. Τα συστήματα με υψηλή κανονικότητα, όπως το κινέζικο, όπου η απαρίθμηση των μονάδων διαφορετικών τιμών είναι σαφής ακόμη και σε αριθμούς μεταξύ του 10 και του 20, παρέχουν στα παιδιά καλύτερες δυνατότητες για την κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης. Αυτή η διευκόλυνση φαίνεται πράγματι να προκύπτει εν μέρει από τη χρήση συγκεκριμένων γλωσσικών υποβολών και εν μέρει από τη γενική κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης. Εάν ένα σύστημα έχει πρόσθετες αντικανονικότητες στους μεγαλύτερους αριθμούς, αυτές οι αντικανονικότητες δεν φαίνεται να επηρεάζουν σημαντικά τη μάθηση, διότι τα παιδιά μπορούν να επεξεργαστούν την ιδέα της προσθετικής σύνθεσης μέσα στην περιοχή των σχετικά μικρότερων αριθμών. Αν και η δυσκολία στο έργο της κατανόησης της προσθετικής σύνθεσης ποικίλλει στους διαφορετικούς πολιτισμούς που έχουν κανονικότητα στο σύ-



στημα, τα παιδιά σε αυτούς τους διαφορετικούς πολιτισμούς πρέπει να κατακτήσουν τις ίδιες αρχές για να μπορέσουν να κατανοήσουν το δικό τους αριθμητικό σύστημα.

Μία πρόσφατη έρευνα από τους Miura et al. (1994) που περιελάμβανε σύγκριση παιδιών της πρώτης τάξης από έξι διαφορετικές χώρες (Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας, Γαλλία, Ιαπωνία, Κορέα, Σουηδία και Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής) επιβεβαιώνει ακόμη πιο πολύ αυτές τις ιδέες. Στην έρευνα των Miura et al., ζητήθηκε από τα παιδιά να δώσουν στον εξεταστή μερικές ποσότητες από μικρά τουβλάκια, τα οποία μπορούσε να ήταν ή μεμονωμένα τουβλάκια ή τουβλάκια σε μια σειρά από δέκα τουβλάκια κολλημένα μεταξύ τους. Αυτό το έργο, παρόμοιο πολύ περισσότερο με ένα σχολικό έργο παρά με το δικό μας έργο του καταστήματος, αποκάλυψε ότι οι ομιλητές των γλωσσών όπου η δεκαδική βάση του αριθμητικού συστήματος είναι διαφανής –συγκεκριμένα κινέζικα, ιαπωνικά και κορεάτικα– είχαν μία ισχυρή προτίμηση να δομούν τα μεγάλα ποσά που τους ζήτησε ο εξεταστής (για παράδειγμα, 42 τουβλάκια) χρησιμοποιώντας τη σειρά των δέκα συν μονά τουβλάκια –μία αποτελεσματική στρατηγική για το έργο. Αντίθετα, οι ομιλητές των γλωσσών όπου η δομή του συστήματος δεν είναι τόσο ξεκάθαρη –συγκεκριμένα, γαλλικά, σουηδικά και αγγλικά– προτιμούσαν να δομούν τις ίδιες ποσότητες χρησιμοποιώντας μονά τουβλάκια τα οποία απαριθμούσαν ένα-ένα. Οι συγγραφείς προχωρούν στο να υποθέσουν ότι αυτό ίσως δίνει στα παιδιά στην Κίνα, την Ιαπωνία και την Κορέα ένα συνολικό πλεονέκτημα στη μάθηση των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο. Αν και αυτή είναι μία εύλογη υπόθεση, πιστεύουμε ότι χρειάζονται ακόμη πολύ περισσότερες αποδείξεις προτού να είμαστε σίγουροι ότι οι, συχνά αποδεδειγμένα, καλύτερες επιδόσεις των παιδιών στην Ιαπωνία και την Κίνα στα μαθηματικά μπορούν να ερμηνευτούν κυρίως στη βάση της χρήσης ενός αριθμητικού συστήματος δομημένου με περισσότερη κανονικότητα.

## 2. Η κατανόηση των γραπτών αριθμών

ΣΤΗΝ ΕΝΑΡΞΗ της διερεύνησής μας θέσαμε την ερώτηση εάν είναι απαραίτητο να γνωρίζει κάποιος πώς να γράφει τους αριθμούς για να κατανοήσει τη δομή του αριθμητικού συστήματος. Διαπιστώσαμε ότι παιδιά και ενήλικες οι οποίοι δεν ήξεραν πώς να γράφουν τους αριθμούς μπορούσαν να κατανοήσουν τις σταθερές ενός αριθμητικού συστήματος βάσης. Η κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης φαινόταν να βασίζεται στην κατανόηση της πρόσθεσης. Μία φυσική συνέπεια στις έρευνές μας ήταν να αντιστρέψουμε την ερώτηση: είναι η κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης απαραίτητη για να μάθει κανείς πώς να γράφει και να διαβάσει τους αριθμούς;

Μερικές σκέψεις σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο γράφουμε τους αριθμούς είναι απαραίτητες προτού περιγράψουμε τις εμπειρικές μελέτες. Πρώτον, είναι σαφές ότι ο τρόπος με τον οποίο γράφουμε τους αριθμούς εμπλέκει την έννοια των μονάδων. Στο ινδο-αραβικό σύστημα που χρησιμοποιούμε, κάθε ψηφίο αναπαριστά μονάδες συγκεκριμένης αξίας. Όταν γράφουμε, για παράδειγμα, '124', το ψηφίο 1 δηλώνει τον αριθμό των εκατοντάδων, το 2 τον αριθμό των δεκάδων και το 4 τον αριθμό των μονάδων. Δεύτερον, κάθε μονάδα αναπαρίσταται από τη θέση της στον αριθμό από τα δεξιά προς τα αριστερά. Το ψηφίο στα δεξιά δηλώνει πόσες είναι οι μονάδες, το επόμενο στα αριστερά πόσες είναι οι δεκάδες, και το άλλο στα αριστερά πόσες είναι οι εκατοντάδες κ.τ.λ. Αυτή η σύμβαση είναι γνωστή ως *θεσιακή αξία*, μία έκφραση που δείχνει ότι η σχετική αξία δηλώνεται από τη θέση του ψηφίου. Τρίτον, εάν υπάρχει μία κενή μονάδα στον αριθμό –για παράδειγμα, στον αριθμό 1.805 δεν υπάρχουν δεκάδες– ένα μηδενικό χρησιμοποιείται στη θέση των δεκάδων για τη διατήρηση της θέσης. Έτσι, μερικές πλευρές του γραπτού αριθμητικού συστήματος απαιτούν την κατανόηση των ίδιων αρχών που απαιτούνται στο προφο-

ρικό σύστημα, αλλά άλλες πλευρές –όπως, η θεσιακή αξία και η χρήση του μηδενικού για τη διατήρηση της θέσης– είναι χαρακτηριστικά του γραπτού συστήματος.

Αυτή η ανάλυση μας οδηγεί να αναμένουμε πως τα παιδιά, τα οποία δεν κατανοούν την προσθετική σύνθεση, δεν θα μπορούν να γράψουν και να διαβάσουν τους αριθμούς, αλλά και πως τα παιδιά τα οποία κατανοούν την προσθετική σύνθεση δεν θα ξέρουν απαραίτητα πώς να γράψουν και να διαβάσουν τους αριθμούς. Μπορούμε, επίσης, λογικά να αναμένουμε ότι, εάν γίνει κατάλληλη διδασκαλία, τα παιδιά τα οποία κατανοούν την προσθετική σύνθεση θα είναι έτοιμα να μάθουν να γράφουν και να διαβάζουν τους αριθμούς.

Υπάρχει πληθώρα στοιχείων που δείχνουν ότι τα μικρά παιδιά έχουν στην αρχή σημαντική δυσκολία να γράψουν μεγάλους αριθμούς, αλλά, μέχρι πρόσφατα, υπάρχουν λίγα ευρήματα που δείχνουν ποια είναι η πηγή του προβλήματός τους. Η Kamii (1980) και η Sinclair (1988), για παράδειγμα, έδειξαν ότι τα παιδιά των 6-7 ετών έχουν δυσκολίες να ερμηνεύσουν την ιδέα της θεσιακής αξίας. Όταν έδειξαν στα παιδιά ένα διψήφιο αριθμό –όπως το 16– και τους ζήτησαν να δείξουν τι σημαίνει το κάθε ψηφίο, πολλά παιδιά έδειξαν τη σημασία του κάθε ψηφίου σαν να αναφέρονταν μόνο σε μονάδες, δείχνοντας ένα αντικείμενο για το ψηφίο 1 στον αριθμό 16 και έξι αντικείμενα για το ψηφίο 6. Τα παιδιά, στην έρευνα της Kamii ενήργησαν με αυτόν τον τρόπο, αν και αρχικά τους ζητήθηκε να ξεχωρίσουν 16 αντικείμενα και να γράψουν πόσα αντικείμενα είχαν πάνω στο τραπέζι.

Όμως, ούτε η Kamii ούτε η Sinclair δεν διερεύνησαν την κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης από τα παιδιά και τη σχέση της με τη γραφή των αριθμών ή την ερμηνεία των γραπτών αριθμών. Αυτό το ερώτημα διατύπωσε η Terezinha Nunes και η συνεργάτιδά της Analucia Schliemann (T.N. Carraher, 1982· T.N. Carraher and Schliemann, 1983). Οι έρευνες διεξήχθησαν στη Βραζιλία και οι στόχοι τους ήταν να ελέγξουν την υπόθεση ότι

τα παιδιά χρειάζεται να κατανοήσουν την προσθετική σύνθεση του αριθμού, προτού αρχίσουν να είναι σε θέση να γράφουν και να ερμηνεύουν τους πολυψήφιους αριθμούς. Για να ελέγξουν αυτήν την υπόθεση, έδωσαν στα παιδιά το έργο του καταστήματος, για να διαπιστώσουν την ικανότητά τους να χειριστούν την προσθετική σύνθεση των αριθμών και, επίσης, ζήτησαν από τα παιδιά να γράψουν και να διαβάσουν ένα σύνολο από πολυψήφιους αριθμούς.

Η επίδοση των παιδιών αναλύθηκε αναφορικά με την ικανότητά τους να συνδυάζουν μονάδες μέτρησης χρημάτων στο έργο του καταστήματος και την επάρκεια των παιδιών στη γραφή και την ερμηνεία των αριθμών. Σε γενικές γραμμές τα παιδιά θα μπορούσαν να καταταχθούν σε τρεις πιθανές κατηγορίες: (1) σε εκείνα που δεν θα μπορούσαν να ανταποκριθούν σε κανένα από τα έργα, (2) σε εκείνα που θα μπορούσαν να ανταποκριθούν στο έργο της προσθετικής σύνθεσης των αριθμών αλλά δεν θα μπορούσαν ούτε να γράψουν ούτε να διαβάσουν πολυψήφιους αριθμούς, (3) σε εκείνα τα οποία θα μπορούσαν να ανταποκριθούν καλά και στα δύο έργα και, (4) αντίστροφα, σε εκείνα τα οποία θα μπορούσαν να διαβάσουν και να γράψουν τους αριθμούς, αλλά θα αποτύγχαναν στην προσθετική σύνθεση. Όμως, εάν είναι αλήθεια ότι τα παιδιά χρειάζεται να κατανοήσουν την προσθετική σύνθεση για να μάθουν να γράφουν και να διαβάζουν πολυψήφιους αριθμούς, μπορούμε να προβλέψουμε ότι τα παιδιά θα καταταχθούν μόνο σε τρεις από αυτές τις τέσσερις πιθανές κατηγορίες. Η υπόθεση οδηγεί στην πρόβλεψη ότι η τέταρτη ομάδα δεν μπορεί να είναι πιθανή. Μπορεί κάλλιστα να υπάρχουν παιδιά τα οποία μπορούν να λύσουν προβλήματα προσθετικής σύνθεσης αλλά δεν καταφέρνουν να διαβάσουν και να γράψουν πολυψήφιους αριθμούς. Όμως, δεν θα μπορούσε να υπάρχουν παιδιά τα οποία τα πάνε καλά στην ανάγνωση και τη γραφή των αριθμών αλλά αποτυγχάνουν στο έργο της προσθετικής σύνθεσης.

Τα αποτελέσματα αι.έδειξαν ακριβώς αυτό. Ρωτήθηκαν εκατό παιδιά της πρώτης και της δευτέρας τάξης, και όλα τα παιδιά βρέθηκαν στις τρεις πρώτες ομάδες: κανένα δεν βρέθηκε στην τέταρτη.

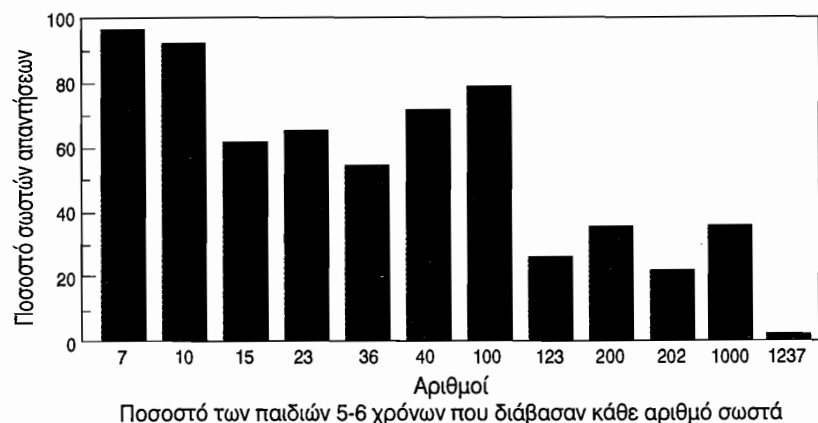
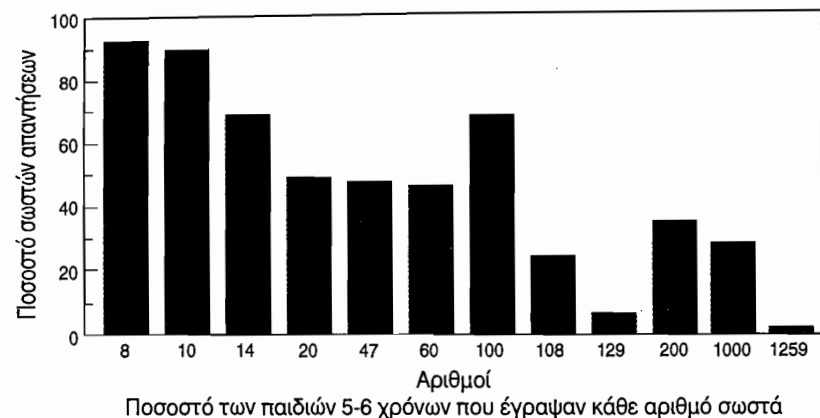
Τα παιδιά στην πρώτη ομάδα δεν μπορούσαν ούτε να κατανοήσουν την προσθετική σύνθεση των ποσών των χρημάτων στο έργο του καταστήματος, ούτε να γράψουν τους αριθμούς σωστά. Στη δεύτερη ομάδα ήταν τα παιδιά τα οποία είχαν καλή επίδοση στο έργο της προσθετικής σύνθεσης αλλά έκαναν ακόμη λάθη κατά τη γραφή των αριθμών. Τα λάθη τους, όμως, ήταν συστηματικά. Τις περισσότερες φορές αυτά τα παιδιά αναπαριστούσαν τις εκατοντάδες και τις χιλιάδες κυριολεκτικά και δεν κατάφεραν μία ολοκληρωμένη αναπαράσταση με θεσιακή αξία. Για παράδειγμα, όταν έγραφαν τον αριθμό 'εκατόν είκοσι', τα παιδιά έτειναν να παράγουν '10020'. Ομοίως, όταν έγραφαν 'χίλια εκατόν εξήντα ένα', μία κοινή παραγωγή ήταν 100010061'. Μερικά από τα παιδιά ήταν ικανά να απαλείφουν μερικά από τα μηδενικά σε αυτές τις παραγωγές αλλά ακόμη και τότε δεν πραγματοποιούσαν μία ολοκληρωμένη αναπαράσταση μέσω της θεσιακής αξίας. Παραδείγματα της μερικής μείωσης των μηδενικών ήταν το 120 γραμμένο ως '1020' και το 1161 γραμμένο ως '10161'.

Τέλος, μία τρίτη ομάδα παιδιών έδειξε να κατανοεί πλήρως και την προσθετική σύνθεση των ποσών των χρημάτων και τη συμβατική γραφή των αριθμών.

Οι Nunes et al. (υπό έκδοση) εξέτασαν επίσης την παραγωγή γραπτών αριθμών από τα παιδιά στην Αγγλία. Ζητήσαμε από τα παιδιά στην Αγγλία να γράψουν έναν μονοψήφιο αριθμό (8), τρεις διψήφιους αριθμούς (14, 25, 47), δύο τριψήφιους αριθμούς (108, 129), και έναν τετραψήφιο αριθμό (2569). Ζητήσαμε, επίσης, να γράψουν στρογγυλούς αριθμούς (10, 60, 100, 200, 1000). Ζητήθηκε, ακόμη, από τα παιδιά να διαβάσουν αριθμούς με έναν ανάλογο τρόπο. Είχαμε διάφορες υποθέσεις

γι' αυτήν την έρευνα και θα αναφερθούμε σε καθεμία με τη σειρά. Πρώτον, αναμέναμε ότι το μέγεθος του αριθμού δεν θά ήταν η καλύτερη πρόβλεψη της δυσκολίας του για τα παιδιά, είτε στο έργο της ανάγνωσης είτε της γραφής. Τους στρογγυλούς αριθμούς, όπως 10, 100, 200 και 1000, μπορεί να τους έβλεπαν τα παιδιά πιο συχνά στην καθημερινή τους ζωή και, επίσης, θα ενείχαν λιγότερες δυσκολίες, διότι η έννοια της προσθετικής σύνθεσης δεν είναι απαραίτητη. Έτσι, τα περισσότερα παιδιά ίσως γράψουν σωστά το 100 σε σχέση με το 47, ή το 200 σε σχέση με το 129, παρά το γεγονός ότι το 100 και το 200 έχουν μεγαλύτερη αξία από το 47 και το 129, αντίστοιχα. Το Σχήμα 3.2 δείχνει το ποσοστό των παιδιών που έγραψαν και διάβασαν κάθε αριθμό σωστά. Τα γραφήματα δείχνουν ότι, όπως αναμέναμε, περισσότερα παιδιά γράφουν και διαβάζουν το 100 σωστά από ό,τι αριθμούς όπως το 14, 25, 36, και 47. Όμοια, περισσότερα παιδιά διαβάζουν και γράφουν σωστά το 200 και το 1000 από ό,τι το 129 ή το 123.

Δεύτερον, περιμέναμε πως τα παιδιά θα μάθαιναν με ενεργό τρόπο το γραπτό αριθμητικό σύστημα και θα προσπαθούσαν να δημιουργήσουν τη γραπτή αναπαράσταση, αν και δεν είχαν διδαχθεί πώς να γράφουν διψήφιους αριθμούς και δεν είχαν κατακτήσει το σύστημα. Αυτή η υπόθεση βασίζεται στην άποψή μας ότι η εκμάθηση των μαθηματικών εμπλέκει την πρόσκτηση δημιουργικών συστημάτων και όχι την εκμάθηση μεμονωμένων γεγονότων. Εάν αποδεικνυόταν ότι έτσι έχουν τα πράγματα, θα έπρεπε να μπορούσαμε να βρούμε έναν ικανό αριθμό παιδιών τα οποία χρησιμοποίησαν το δικό τους σύστημα για να δημιουργήσουν γραπτούς αριθμούς με έναν σχετικά συνεπή, εάν όχι σωστό, τρόπο. Έτσι, οι παραγωγές των παιδιών ταξινομήθηκαν με βάση τις αρχές που φάνηκε ότι χρησιμοποίησαν όταν έγραψαν τους αριθμούς.



ΣΧΗΜΑ 3.2 Παραδείγματα από την ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των αριθμών και των λέξεων στους γραπτούς αριθμούς των παιδιών

Σχεδόν όλα τα παιδιά ήταν σε θέση να γράψουν σωστά το 8 (93%) και το 10 (85%). Μόνο λίγα παιδιά (περίπου 15%) αρνήθηκαν να προσπαθήσουν να γράψουν τους περισσότερους από

τους άλλους αριθμούς. Οι αρνήσεις από τα άλλα παιδιά ήταν επιλεκτικές. Περίπου τα μισά παιδιά είπαν ότι δεν μπορούσαν να γράψουν το 2569, αλλά μόνο περίπου το 30% είπαν ότι δεν μπορούσαν να γράψουν το 129, αριθμό με το δεύτερο μεγαλύτερο ποσοστό αρνήσεων. Αυτό σε καμία περίπτωση δεν σημαίνει ότι τα παιδιά ήξεραν πώς να γράψουν τους άλλους αριθμούς που υπαγορεύσαμε. Έδειχναν να αισθάνονται, όμως, ότι μπορούσαν να προσπαθήσουν.

Μερικά παιδιά (4%) εμφανίστηκαν να χρησιμοποιούν μία ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ αριθμητικής λέξης και ψηφίου. Αυτό σημαίνει, για παράδειγμα, ότι το 25 απαιτούσε δύο ψηφία, το 60 ήταν γραμμένο με ένα ψηφίο, και το 100 και το 1000 γράφτηκαν με δύο ψηφία, ένα ψηφίο που υποδήλωνε το 'ένα' και το δεύτερο ψηφίο που υποδήλωνε το 'εκατό' ή το 'χίλια'. Η Αλίκη, η οποία έγραψε μία ελαφρώς διαφορετική λίστα αριθμών (αποφάσισε να γράψει το 40, για παράδειγμα, αντί για το 60) δημιούργησε αριθμούς μέσα σε αυτό το σύστημα. Η Γκλόρια χρησιμοποίησε αυτό το σύστημα εν μέρει, όταν επέλεξε το σύμβολο της αγγλικής λίρας για να αναπαραστήσει το 'εκατό' (βλ. Σχήμα 3.3).

Πολλά από τα παιδιά φάνηκε να χρησιμοποιούν δύο συστήματα, ένα για τους διψήφιους αριθμούς και ένα για τη γραφή του 108, του 129 (μερικές φορές) του 200, και του 2569. Οι διψήφιοι αριθμοί (25 και 47) και οι στρογγυλοί αριθμοί (100, 1000 και μερικές φορές 200) συχνά γράφτηκαν σωστά. Δεν είναι σαφές σε μας πώς τα παιδιά κατόρθωσαν να γράψουν με επιτυχία τους διψήφιους αριθμούς και συγκεκριμένα το 25 και το 47. Αν και θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι η απλή μνήμη εξηγούσε την επιτυχία τους με τους στρογγυλούς αριθμούς 100, 200 και 1000, είναι απίθανο να μπορούσαν τα παιδιά να απομνημονεύσουν όλους τους διψήφιους αριθμούς χωρίς ένα σύστημα που θα τα βοηθούσε στην παραγωγή τους. Το δεύτερο σύστημά τους αποτελούνταν από την παράθεση μιας σειράς αριθμών

| Alice                                                               |                                                                   | Gloria                                                           |  |
|---------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|--|
| 8<br>5<br>15<br>4                                                   | 15<br>15p<br>15p<br>105<br>105<br>105                             | 8 10 14 25<br>047 08 110<br>110 8 110 29 2110<br>f1 2f 2f7 1000  |  |
| Felicity                                                            |                                                                   | Sinead                                                           |  |
| 8 10 14 25<br>47 06 100<br>108 1001<br>200 10000<br>20000 20000 061 | Kieran<br>8 10 14 25<br>47 60 100<br>108 900<br>1000 10000 100000 | 8 10 14 25<br>47 60 100<br>1008 10024 200<br>1000 2000 2000 5000 |  |

ΣΧΗΜΑ 3.3 Διάφορα είδη λαθών κατά τη γραφή αριθμών

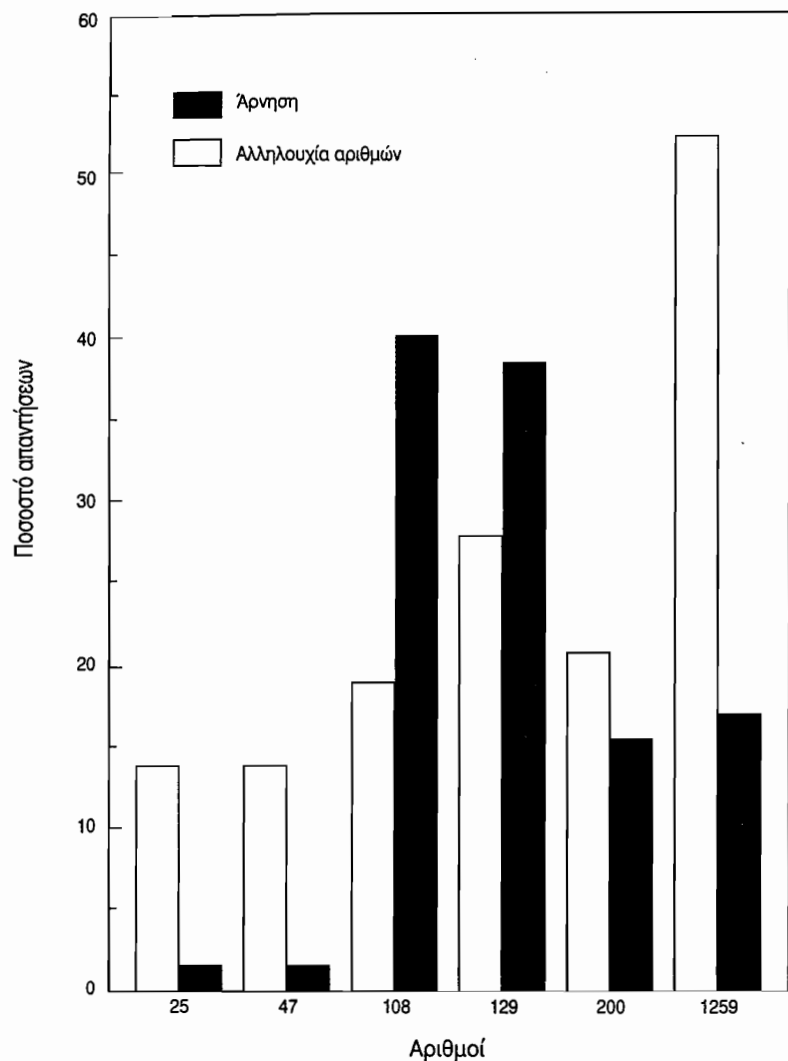
ΠΗΓΗ: NUNES et al. (υπό έκδοση)

που αντιστοιχούσαν στις ονομασίες των αριθμών, ακριβώς όπως παρατηρήσαμε με τα παιδιά στη Βραζιλία. Έτσι, το 108 γράφτηκε ως 1008 και το 2569 γράφτηκε ως 200050069. Μερικές φορές ο αριθμός των μηδενικών αυξανόταν ή μειωνόταν. Μερικά παραδείγματα αυτού του τύπου παραγωγής αριθμών παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.3. Για τους αριθμούς 108 και 129, περίπου το 40% των παιδιών παρήγαγε αυτό τον τύπο γραφής, η οποία ήταν περισσότερο συχνή και από τις αρνήσεις και από τις σωστές απαντήσεις. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι αυτός ο τρόπος γραφής των αριθμών αντιστοιχεί στη χρήση σταθερών (ακόμα και αυτονόητων) κανόνων που χρησιμοποίησαν τα παιδιά.

Το Σχήμα 3.4 δείχνει το ποσοστό παραγωγών γραφής των αριθμών με αλληλουχία και τα ποσοστά των αρνήσεων για κάποιους από τους αριθμούς που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα. Οι παραγωγές των αριθμών, οι οποίες δεν μπορούσαν να γραφούν με τη διαδικασία της αλληλουχίας εξαιρούνται από αυτό το σχήμα.

Ο τρίτος τύπος των απαντήσεων περιελάμβανε παραγωγές που ενέπλεκαν άλλα λάθη—όπως η γραφή λανθασμένου ψηφίου (για παράδειγμα, το 129 μπορεί να εμφανίστηκε ως 159) ή αντιστροφή από τη δεξιά στην αριστερή θέση των ψηφίων (π.χ., το 47 γραμμένο ως 74). Αυτά τα λάθη αφορούν σε ένα σχετικά μικρό ποσοστό παραγωγών και δεν υπερβαίνουν το 21% σε καμία περίπτωση.

Συνοπτικά, ένα μικρό ποσοστό από τα λάθη των παιδιών κατά τη γραφή αριθμών ήταν το αποτέλεσμα χρήσης λανθασμένων ψηφίων ή λανθασμένης της σχετικής τοποθέτησης των ψηφίων. Η μεγάλη πλειοψηφία των λαθών εξηγούνται από τη χρήση του κανόνα αλληλουχίας, ο οποίος είχε σαν αποτέλεσμα τη γραφή καθενός συστατικού της αριθμητικής λέξης μετά το άλλο σε ακολουθία. Αυτός ο κανόνας γραφής των αριθμών παρατηρήθηκε, επίσης, σε παιδιά στην Ιταλία ηλικίας από 6 μέχρι



ΣΧΗΜΑ 3.4 Γραφή των αριθμών: ποσοστά αλληλουχίας και αρνήσεων

8 ετών (Power and Dal Martello, 1990), σε παιδιά στη Γαλλία και το Βέλγιο (Seron and Fayol, 1994) και επιβεβαιώθηκε ακόμη μία φορά σε παιδιά στη Βραζιλία (Silva, 1993).

Στην τελική ανάλυση, χωρίσαμε τα παιδιά της έρευνάς μας σε δύο ομάδες, μία με τα παιδιά τα οποία είχαν επιτυχία στο έργο της προσθετικής σύνθεσης και μία δεύτερη με τα παιδιά τα οποία δεν είχαν λύσει αυτό το έργο. Τα ποσοστά των σωστά γραμμένων παραγωγών για τους κρίσιμους αριθμούς στην έρευνά μας, το 108, το 129 και το 2569, ήταν αρκετά διαφορετικά. Ενώ τα παιδιά τα οποία είχαν επιτυχία στο έργο της προσθετικής σύνθεσης είχαν 60% σωστές απαντήσεις με αυτούς τους αριθμούς, τα παιδιά τα οποία δεν είχαν επιτυχία στην προσθετική σύνθεση, εμφάνισαν μόνο 13% σωστές απαντήσεις. Αυτή η διαφορά στην κατανομή των σωστών απαντήσεων ήταν στατιστικά σημαντική.

Μπορούμε τώρα να επιστρέψουμε σε ένα ερώτημα, το οποίο παρουσιάστηκε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου. Ο Luria είχε παρατηρήσει ότι οι ασθενείς του, οι οποίοι δεν μπορούσαν να γράψουν τριψήφιους αριθμούς, είχαν δυσκολίες στην κατανόηση της δομής του αριθμητικού συστήματος, καθώς επίσης και με μερικά προβλήματα πρόσθεσης. Έκανε την υπόθεση ότι η ικανότητα να γράφει κανείς αριθμούς ήταν η βάση για τις δύο άλλες επιδόσεις, την κατανόηση της δομής του αριθμητικού συστήματος και την πρόσθεση. Επιβεβαιώσαμε τις παρατηρήσεις του για τη σχέση μεταξύ αυτών των τριών όψεων των αριθμών, όταν εργαστήκαμε με παιδιά και ενήλικες σε διαφορετικές χώρες. Όμως, αντιστρέψαμε την υπόθεσή του. Είναι πιθανόν, η κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης των αριθμών να λειτουργεί ως βάση για τη μάθηση του τρόπου γραφής των αριθμών. Αλλά πρέπει να τονίσουμε ότι τα δεδομένα μας μόνο συσχετίζονται, όπως τα δεδομένα του Luria και μία αιτιώδης σχέση δεν μπορεί να αποδειχθεί χωρίς περαιτέρω έρευνα.



## 3. Συμπεράσματα

ΟΙ ΕΡΕΥΝΕΣ που παρουσιάστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο δείχνουν ότι η απλή απαρίθμηση με ένα-προς-ένα αντιστοιχία, αν και αποτελεί σημαντικό ξεκίνημα, σαφώς δεν είναι αρκετή για να κατανοήσουν τα παιδιά το αριθμητικό μας σύστημα. Σε ένα αριθμητικό σύστημα βάσης, η προσθετική σύνθεση του αριθμού από μονάδες διαφορετικής αξίας είναι μία θεμελιώδης έννοια. Χωρίς αυτήν την κατανόηση, είναι δύσκολο για τα παιδιά να μάθουν να διαβάζουν και να γράφουν τους αριθμούς. Η προσθετική σύνθεση, με τη σειρά της, φαίνεται να στηρίζεται περισσότερο στην κατανόηση της πρόσθεσης από τα παιδιά, παρά στην ένα-προς-ένα αντιστοιχία. Η απαρίθμηση, όπως επανειλημμένα είδαμε, δεν είναι αρκετή για την κατανόηση του αριθμητικού συστήματος από τα παιδιά.

Φαίνεται να υπάρχει μία τάξη στον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσεται η αντίληψη των παιδιών αναφορικά με την κατανόηση του αριθμού. Η χρήση της στρατηγικής της μερικής απαρίθμησης στην πρόσθεση προηγείται της κατανόησης των ιδιοτήτων του αριθμητικού συστήματος, η οποία λειτουργεί ως βάση για να μάθουν τα παιδιά να γράφουν και να διαβάζουν αριθμούς. Αλλά αυτή η ακολουθία δεν φαίνεται να είναι μία σειρά από προαπαιτούμενα τα οποία τα παιδιά πρέπει να αναπτύξουν μόνα τους. Τα μικρά παιδιά (ηλικίας 5 ετών) μπορούν να αντιμετωπίσουν προβλήματα πρόσθεσης, στα οποία ο ένας προσθετέος δεν είναι ορατός. Η ανάγκη να ασχοληθούν με τέτοιου είδους προβλήματα ίσως τα οδηγήσει να ανακαλύψουν περισσότερο αποτελεσματικές στρατηγικές πρόσθεσης, οι οποίες θα αποτελέσουν μία βάση για την κατανόηση του αριθμητικού συστήματος. Όταν τα παιδιά χρησιμοποιούν ψεύτικα χρήματα κατά την επίλυση προβλημάτων, εξοικειώνονται με την ιδέα να ανταλλάξουν ένα κέρμα των 10 πεννών με δέκα κέρματα της 1 πέννας, ή άλλες παρόμοιες ανταλλαγές. Χρησιμοποιούν την ιδέα

των μονάδων και την προσθετική σύνθεση ως ‘θεωρήματα στην πράξη’ (για να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση του Vergnaud, βλ. Vergnaud, 1985) –δηλαδή, μία σιωπηρή αλλά καλά εδραιωμένη γνώση των σταθερών. Αυτά τα στοιχεία θα είναι σημαντικά για την κατανόηση από τη μεριά τους του γραπτού ινδοαραβικού αριθμητικού συστήματος. Η εκμάθηση της ανάγνωσης και της γραφής των αριθμών θα δημιουργήσει με τη σειρά της νέες ευκαιρίες στα παιδιά.

Συνοπτικά, αυτά τα ευρήματα δείχνουν ότι τα μικρά παιδιά μπορούν να λύσουν απλά προβλήματα, ακόμη κι εάν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν υποστηρικτικά κάποιας μορφής οπτικές αναπαραστάσεις και ότι είναι σημαντικό να τα εμπλέκουμε στην επίλυση προβλημάτων για να δομήσουν μία βάση για την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού πέρα από την απαρίθμηση με ένα-προς-ένα αντιστοιχία. Στο Κεφάλαιο 4 θα στραφούμε σε άλλες εμπειρίες, όπου τα μικρά παιδιά πρέπει να σκεφθούν την έννοια των μονάδων, θα δούμε τις εμπειρίες τους με τα συστήματα μέτρησης.

