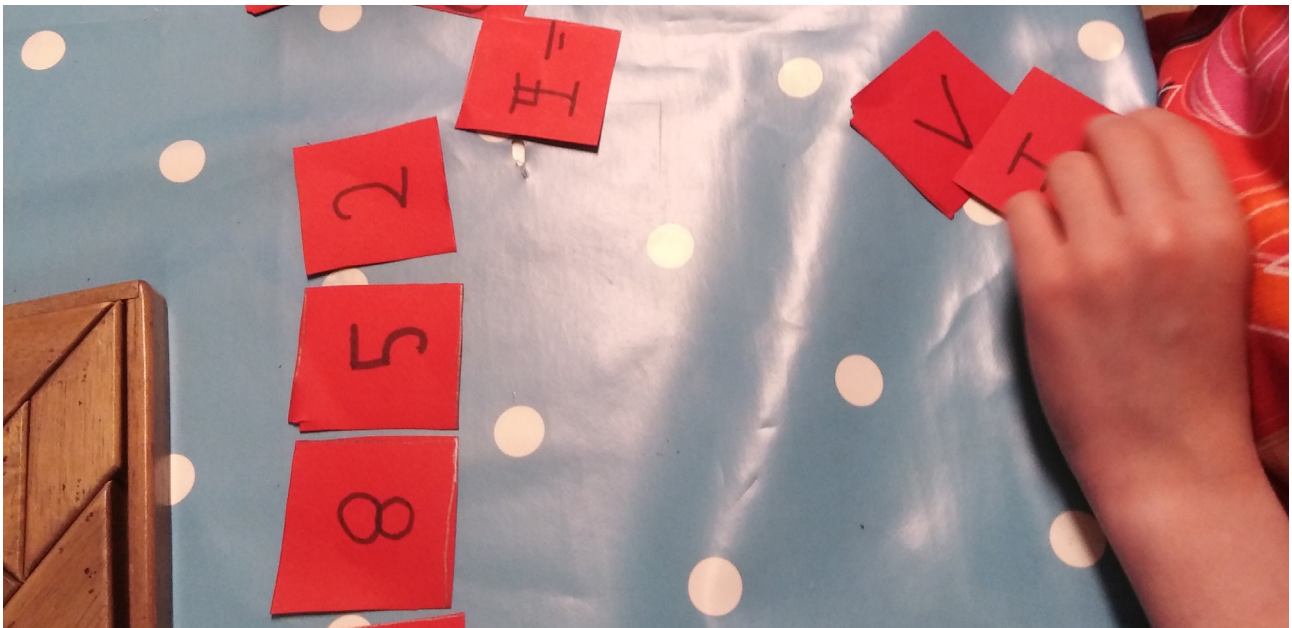


Πολιτ(ει)ότητα και Μαθηματική Εκπαίδευση στο Δημόσιο Σχολείο



FAIR & SQUARE: ΜΑΓΙΚΑ, ΛΑΤΙΝΙΚΑ & ΒΕΔΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ



Τα μαγικά τετράγωνα έχουν δημιουργηθεί και χρησιμοποιηθεί ως παιχνίδια από πολλούς και διαφορετικούς πολιτισμούς, ήδη από την αρχαιότητα μέχρι και σήμερα. Χαρακτηρίζονται από ομορφιά και συμμετρία και ενθουσιάζουν ακόμα και λάτρεις των γρίφων και των παζλ. Μπορούν ακόμα να διαμεσολαβήσουν ενδιαφέροντα μηνύματα για την ισορροπία στις ανθρώπινες σχέσεις, ενώ έχουν εφαρμοστεί σε διάφορους τομείς της ζωής. (Δείτε την ενότητα που αφορά τα Ηθικά Διλήμματα για μια συζήτηση των όρων 'μαγεία' και 'μαγικού' σε σχέση με τα 'μαγικά τετράγωνα' και συμβουλευτείτε την συνοδευτική παρουσίαση.) Η δραστηριότητα βασίζεται σε επτά εργασίες.

Όψεις κριτικής παγκοσμιο/τοπικής πολιτ(ει)ότητας

- αναγνώριση και σεβασμός διαφορετικών οπτικών και πολιτισμικών θεωρήσεων (συμβολή του Κινέζικου, του Ινδικού και άλλων πολιτισμών στα μαθηματικά), εναλλακτικά γνωσιακά συστήματα, πολιτισμοί και διαπολιτισμικές σχέσεις
- ενσυναίσθηση σε ζητήματα διαφορετικότητας, κοινωνική ενσυναίσθηση, αλληλοεξάρτηση
- δεξιότητες αναλυτικής και κριτικής σκέψης, δεξιότητες επικοινωνίας και συνεργασίας

Όψεις μαθηματικής σκέψης

- ενθάρρυνση για την απόκτηση θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά και τους αριθμούς
- αναζήτηση μοτίβων και συνδέσεων
- οργάνωση και συστηματοποίηση της εργασίας με τα μαθηματικά
- διαλλακτικότητα και ευελιξία
- διατύπωση υποθέσεων και προσπάθεια απόδειξής τους,
- οπτικοποίηση δεδομένων και χρήση της φαντασίας για την εξεύρεση λύσεων

- χρήση πολύ-αισθητηριακών και ενσώματων προσεγγίσεων μάθησης
- χρήση αναπαραστάσεων και συμβολισμών
- επιχειρηματολογία και αιτιολόγηση

Οι έννοιες αφορούν σε αριθμητικά μοτίβα και πράξεις, περιστροφική συμμετρία, κατανόηση αλγορίθμων. Το θέμα είναι πολύ πλούσιο και πιθανόν καλύπτει και άλλες γνωστικές περιοχές των μαθηματικών, πέρα από αυτές που προτείνονται.

Πόροι

Διαφάνειες παρουσίασης, φύλλα χαρτιού με αριθμούς σε διάφορα χρώματα για την εργασία 1, χαρτοταινία για να φτιαχτεί ένα επιδαπέδιο πλέγμα, αλληλοσυνδεόμενοι κύβοι lego ή παρόμοιος εξοπλισμός, μία πατάτα, μία πυξίδα, κηρομπογιές, χάρακες, μουσική, τετραγωνισμένο χαρτί, ένα αντίγραφο του σχολικού ωρολόγιου προγράμματος, αντίγραφα φύλλων εργασίας (Dotty squares 1, Dotty squares 2), Sudoku1, Sudoku 2 (πιθανόν πλαστικοποιημένα), το Βεδικό τετράγωνο., εκτυπωμένες διαφάνειες της παρουσίασης.

Οργάνωση και Πρακτικά ζητήματα

Οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορούν να δουλεύουν σε ομάδες των δέκα για την πρώτη δραστηριότητα και λόγω της έμφασης σε κιναισθητική δράση, θα χρειαστεί ένας μεγάλος χώρος για την πραγματοποίηση της, πιθανόν στο μπροστινό μέρος της τάξης και ένας μεγαλύτερος χώρος για το τέλος της Εργασίας 1. Απαιτούνται περίπου 8 διδακτικές ώρες.

Εργασία 1. Γνωριμία με το Μαγικό Τετράγωνο Luo Shu 3 x 3

Τα παιδιά ενθαρρύνονται να δημιουργήσουν και να εξερευνήσουν κιναισθητικά ένα Λατινικό τετράγωνο και έπειτα ένα αρχαίο Κινέζικο Luo Shu μαγικό τετράγωνο 3x3. Η παρουσίαση Fair and Square στη Διαφάνεια 2 της παρουσίασης αφηγείται την ιστορία του Αυτοκράτορα Υι και της χελώνας (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη διαφάνεια αυτή στην τάξη). Το μαγικό τετράγωνο είναι ένα αριθμητικό πλέγμα στο οποίο το άθροισμα των αριθμών κάθε γραμμής, στήλης και διαγωνίου προκύπτει να είναι ο ίδιος αριθμός.

Προκειμένου να αναδημιουργήσουν τα παιδιά αυτό το τετράγωνο, προτείνεται να χωριστούν σε τρεις ομάδες των 9 ή των 10 ατόμων (αν τα παιδιά είναι περισσότερα, τότε οι εναπομείναντες μπορούν να παρατηρούν και να καταγράφουν τη διαδικασία, συμβάλλοντας έτσι στο παιχνίδι):

Βήμα 1ο

Στην πρώτη ομάδα, εννιά παιδιά καλούνται στο μπροστινό μέρος της τάξης (ή σε άλλο κατάλληλο σημείο) για να σχηματίσουν ένα τετράγωνο τριών γραμμών επί τριών στηλών, όπως δείχνει η εικόνα. Το δέκατο άτομο (ή ένα άτομο από άλλη ομάδα) χωροθετεί τα παιδιά σε κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιο και αναφέρει το άθροισμα που έφτιαξε (που πρέπει να είναι '3' σε κάθε περίπτωση). Αυτό γίνεται για να κατανοηθεί το σχήμα και η αριθμητική φύση του τετραγώνου, καθώς και το λεξιλόγιο που χρησιμοποιείται.

6	6	6
5	5	5
4	4	4

Ο αρχικός σχηματισμός

Στη συνέχεια δίνεται σε κάθε παιδί ένα χρωματιστό φύλλο χαρτιού με έναν αριθμό, όπως φαίνεται στη δεξιά εικόνα (οι ίδιοι αριθμοί έχουν ίδιο χρώμα). Έπειτα τους ζητάμε τα εξής:

- Μπορείτε να σχηματίσετε ομάδες τριών ατόμων με τέτοιο τρόπο ώστε το άθροισμα των τριών αριθμών σε κάθε σειρά, στήλη και σε καθεμία από τις διαγώνιους να είναι 15;

4	6	5
6	5	4
5	4	6

Μία πιθανή διάταξη για το Λατινικό Τετράγωνο χρησιμοποιώντας τους αριθμούς 4, 5 και 6

Τα χρώματα θα βοηθήσουν τα παιδιά να τοποθετήσουν τα σώματά τους σύμφωνα με τους αριθμούς. Το δέκατο παιδί μπορεί να ελέγξει το άθροισμα (και την ύπαρξη των τριών διαφορετικών χρωμάτων) σε κάθε γραμμή, στήλη και σε μία από τις δύο διαγωνίους. Μπορούμε να εξηγήσουμε στα παιδιά ότι αυτό που έφτιαξαν ονομάζεται 'Λατινικό Τετράγωνο', και είναι ένα τετράγωνο στο οποίο κάθε αριθμός ή σύμβολο εμφανίζεται μία και μόνη φορά σε κάθε γραμμή και στήλη και, συνεπώς, το

πλήθος των διαφορετικών αριθμών ή συμβόλων ισούται με τον αριθμό των γραμμών ή των σειρών του τετραγώνου. Μόλις ολοκληρωθεί το παραπάνω, τα παιδιά της πρώτης ομάδας μπορούν να αφήσουν τα φύλλα χαρτιού και να επιστρέψουν στις θέσεις τους.

Δείξτε την επόμενη διαφάνεια και ρωτήστε τα παιδιά αν μπορούν να ανακαλύψουν μοτίβα και ποια είναι αυτά στις παραλλαγές των Λατινικών τετραγώνων της διαφάνειας.

- Μπορούμε να φτιάξουμε κι άλλα Λατινικά τετράγωνα με τους αριθμούς 4, 5 και 6;
- Με ποιους τρόπους είναι ίδια μεταξύ τους και με ποια έννοια διαφορετικά; (Η διαφάνεια 3 δείχνει 3 δυνατότητες)
- Ι μαθηματικοί θα τα θεωρούσαν όλα ίδια. Γιατί;

Βήμα 2ο

Στην επόμενη φάση της δραστηριότητας, καλέστε τη δεύτερη ομάδα των 9 παιδιών να έρθει στο μπροστινό μέρος της τάξης.

- Θα φτιάξουμε τώρα ένα μαγικό τετράγωνο χρησιμοποιώντας αριθμούς από το 1 ως το 9. Αν προσθέσουμε όλους αυτούς τους αριθμούς, τι άθροισμα θα πάρουμε;

Δείξτε τη διαφάνεια 4 για να βοηθήσετε στη δομή της πρόσθεσης. Αφηγηθείτε την ιστορία του Gauss όταν ήταν παιδί την οποία θα βρείτε

κάτω από τη διαφάνεια 4.

- *Ώστε κάθε σειρά πρέπει να ισούται με... Γιατί;*
- *Ζητήστε από ένα παιδί να κρατήσει το κίτρινο φύλλο με τον αριθμό '5'.*
- *Αν θέλουμε το άθροισμα κάθε γραμμής, στήλης και διαγωνίου να είναι 15, ποια θα μπορούσε να είναι μια καλή θέση για να σταθεί αυτό το άτομο;*

Ζητήστε από ένα άλλο παιδί να σταθεί στην πάνω αριστερή θέση του τετραγώνου και δώστε του το λευκό φύλλο με τον αριθμό '4'. Ζητήστε από ένα τρίτο παιδί να σταθεί στην κάτω δεξιά θέση του τετραγώνου και να κρατήσει το μπλε φύλλο με τον αριθμό '6'. Τα υπόλοιπα 6 παιδιά θα κρατήσουν αριθμημένα χρωματιστά φύλλα ως εξής: ένα κόκκινο φύλλο με τον αριθμό '2', ένα κόκκινο φύλλο με τον αριθμό '7', ένα πράσινο φύλλο με τον αριθμό '3', ένα πράσινο φύλλο με τον αριθμό '8', ένα λευκό φύλλο με τον αριθμό '9' και ένα μπλε φύλλο με τον αριθμό '1'.

Τα παιδιά θα πρέπει να τοποθετηθούν σε σχέση με την ήδη υπάρχουσα διαγώνιο των παιδιών, ώστε να σχηματίσουν ένα τετράγωνο 3 x 3 του οποίου η κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιος έχει άθροισμα 15. Δώστε λίγο χρόνο στα παιδιά να κάνουν δοκιμές χωρίς βοήθεια. Τα υπόλοιπα παιδιά μπορούν να κρατούν σημειώσεις και να παρατηρούν τους αριθμούς ή και να προτείνουν πιθανές λύσεις.

4	9	2
3	5	7
8	1	6
Το Μαγικό Τετράγωνο Luo Shu		

Αν τα παιδιά δεν μπορούν να βρουν τη λύση, μπορείτε να τους βοηθήσετε με τον εξής τρόπο: Ενώ η διαγώνιος 4-5-6 παραμένει στη θέση της, καλέστε τα παιδιά με το ίδιο χρώμα στα φύλλα χαρτιού, να σταθούν το ένα δίπλα στο άλλο, μέσα στο τετράγωνο, ακολουθώντας τον κανόνα ότι οι γραμμές, οι στήλες και οι διαγώνιοι πρέπει να έχουν άθροισμα 15. Δώστε τους άλλη μια ευκαιρία να λύσουν το γρίφο. (Αν ακόμα δυσκολεύονται, μπορείτε να τους υποδείξετε ότι ο μικρότερος αριθμός σε κάθε ζευγάρι θα πρέπει να είναι μπροστά ή αριστερά από τον μεγαλύτερο αριθμό).

Εξηγείστε ότι οι αρχαίοι Κινέζοι πίστευαν ότι οι συγκεκριμένοι αριθμοί και τα χρώματα αντιπροσωπεύουν τα στοιχεία της φύσης. Ζητήστε από τα παιδιά να σηκώνουν το χέρι τους ώστε να ταυτιστούν και με τη φαντασία τους να γίνουν τα ίδια τα στοιχεία της φύσης που αντιπροσωπεύουν.

Το μαγικό τετράγωνο μπορεί να φτιαχτεί αν τα στοιχεία ακολουθούν αυτή τη σειρά σε φορά αντίθετη από αυτή του ρολογιού ξεκινώντας από τον αριθμό σε κίτρινο, έπειτα σε μπλε και ούτω καθ' εξής: Η γη σταματά το νερό, το νερό σβήνει τη φωτιά, η φωτιά λιώνει το μέταλλο, το μέταλλο κόβει το ξύλο, και το ξύλο εισχωρεί στη γη.

γη: κίτρινο

νερό: μπλε

φωτιά: κόκκινο

μέταλλο: λευκό

ξύλο: πράσινο

Βήμα 3ο

Μια λύση βρίσκεται στη διαφάνεια 5. Δουλεύοντας σε μικρότερες ομάδες τα παιδιά μπορούν να απαντήσουν στις ερωτήσεις:

- *Πόσοι τρόποι υπάρχουν για το μαγικό τετράγωνο; Τους έχετε βρει όλους; Πώς το ξέρετε;*
- *Η διαφάνεια 6 δείχνει όλες τις πιθανότητες.*
- *Τι παρατηρείτε σε αυτές τις παραλλαγές;*

Για να βοηθήσετε τα παιδιά στο συλλογισμό, δώστε σε κάθε μικρή ομάδα ένα μεγάλο, τετράγωνο φύλλο χαρτιού.

- *Διπλώστε το χαρτί ακριβώς στη μέση κάθετα. Ανοίξτε το. Αυτός είναι ο κάθετος άξονας συμμετρίας. Διπλώστε το στη μέση ξανά οριζόντια... και ξανά στη διαγώνιο... και ξανά στην άλλη διαγώνιο... Αυτοί είναι οι τέσσερις άξονες συμμετρίας του τετραγώνου.*
- *Περιστρέψτε το τετράγωνο – υπάρχουν τέσσερις πιθανές θέσεις.*
- *Πώς συνδέεται αυτό με τα μαγικά τετράγωνα;*

Θα ήταν βοηθητικό για εσάς και για τα παιδιά να έχετε ένα έτοιμο τετράγωνο το οποίο θα έχετε κατασκευάσει νωρίτερα ακολουθώντας τις παρακάτω οδηγίες και να δουλεύετε παράλληλα με τα παιδιά την κατασκευή, ώστε να μπορούν να μιμηθούν τις κινήσεις που κάνετε. Στο έτοιμο τετράγωνο μπορείτε να έχετε σχεδιάσει με διαφορετικά χρώματα τον άξονα συμμετρίας, τη διαγώνιο, κλπ.

Στην τελευταία φάση της δραστηριότητας, η τρίτη ομάδα με 9 παιδιά έρχεται στο μπροστινό μέρος της τάξης και σχηματίζει μια εκδοχή του μαγικού τετραγώνου Luo Shu χρησιμοποιώντας τα χρωματιστά χαρτιά με τους αριθμούς. Έπειτα διαλέγει μια άλλη εκδοχή και, δουλεύοντας ομαδικά, αναδιαμορφώνει το τετράγωνο στη νέα του εκδοχή. Μπορεί να επαναλάβει την άσκηση μια ή δύο φορές αν είναι χρήσιμο.

Αν επιτρέπει ο χρόνος και ο χώρος, κάθε ομάδα των 9 μαζί με τους χορογράφους τους, μπορούν να δημιουργήσουν μια χορογραφία που να δείχνει και τις οχτώ παραλλαγές.



Εργασία 2. Διερευνήσεις με τα μαγικά τετράγωνα Luo Shu 3 x 3

Περιλαμβάνει περαιτέρω διερευνήσεις του μαγικού τετραγώνου Luo Shu. Αυτές οι διερευνήσεις μπορούν να οργανωθούν και να διεξαχθούν από μικρές ομάδες παιδιών και έπειτα να παρουσιαστούν ή να δοθούν ως εργασίες για άλλα παιδιά για την ανάπτυξη της συνεργατικής μάθησης. Καθώς τα παιδιά διερευνούν, μπορούν να ακούν μουσική εμπνευσμένη από τα μαγικά τετράγωνα (για παράδειγμα το: Secret Pulse του Zack Browning).

Βήμα 1ο

Ξεκινώντας ζητήστε από τα παιδιά να αφαιρέσουν τον αριθμό 5 από κάθε αριθμό του τετραγώνου Luo Shu και να εκφράσουν τις παρατηρήσεις τους για το αποτέλεσμα. Δείξτε τη διαφάνεια 7 και συνεχίστε τη συζήτηση.

Βήμα 2ο

Ο σχεδιαστής Claude Bragdon χρησιμοποίησε το μαγικό τετράγωνο 3x3 για να φτιάξει ένα όμορφο σχέδιο. Ποια μαθηματική ιδιότητα κρύβεται στο σχέδιο;

Μπορείτε να περιστρέψετε το σχέδιο κατά 360° γύρω από το κέντρο του για να δείξετε ότι ταυτίζεται με το αρχικό δυο φορές – μια φορά στην αρχή και μια στη μέση της περιστροφής (στις 180°). Μπορείτε να το κάνετε στην προβολή των διαφανειών είτε να έχετε εκτυπωμένη την εικόνα κάτι που θα διευκολύνει τα παιδιά στους πειραματισμούς που ακολουθούν.

- *Το σχέδιο έχει περιστροφική συμμετρία τάξης 2. Υπογραμμίστε το γεγονός ότι το σχέδιο δεν έχει αξονική συμμετρία.*



Copyright free.
Claude Bragdon, Frozen Fountain, 1932

Ζητήστε από τα παιδιά να διαλέξουν ένα από τα τετράγωνα της διαφάνειας 6 και χρησιμοποιώντας ένα αντίγραφο των τετραγώνων με κουκίδες (Dotty squares 1), να γράψουν τους αριθμούς με μολύβι. Χρησιμοποιώντας χρώματα, ενώνουν τις τελείες με αριθμητική σειρά.

- *Τώρα διαλέξτε μια περιστροφή του πρώτου σας τετραγώνου που υπάρχει στο Dotty squares 1 και να επαναλάβετε χρησιμοποιώντας διαφορετικό χρώμα. Επαναλάβετε και για τις άλλες δύο περιστροφές. Τι παρατηρείτε για τα τέσσερα σχέδια;*

Θα πρέπει μετά από μία ολόκληρη περιστροφή κάθε σχεδίου αυτό να ταυτίζεται δύο φορές με καθένα από τα υπόλοιπα. Αυτό συμβαίνει γιατί έχει περιστροφική συμμετρία τάξης 2.

Τώρα χρησιμοποιώντας τα *Dotty squares 2*, τα παιδιά αντιγράφουν προσεχτικά τις δύο διακριτές περιπτώσεις περιστροφής που είχαμε βρει προηγουμένως στο μεγαλύτερο τετράγωνο.

Χρωματίστε το σχέδιο προσπαθώντας να διατηρήσετε την περιστροφική συμμετρία. (Μπορείτε να χρωματίσετε με το ίδιο χρώμα τα σχήματα που ταυτίζονται μεταξύ τους, καθώς περιστρέφουμε το σχέδιο)

Όταν ολοκληρωθεί το σχέδιο, μπορούν να φτιάξουν μια λίστα με τα διαφορετικά σχήματα που μπορούν να διακρίνουν.



Βήμα 3ο

Όπως φαίνεται στη διαφάνεια 10, το τετράγωνο Luo Shu ισορροπεί. Χρειάζεται ο κατάλληλος εξοπλισμός όπως αλληλοσυνδεόμενοι κύβοι ή lego/duplo και μια επιφάνεια όπου μπορούν να τοποθετηθούν. Καθώς είναι πολύ δύσκολο να πετύχουμε την ισορροπία κρεμώντας το μαγικό τετράγωνο με σπάγκο ή χρησιμοποιώντας ένα μυτερό σημείο, προτείνεται η χρήση μιας επιφάνειας, όπως το εξωτερικό μέρος μιας μικρής πατάτας. Η διαφάνεια 10 απεικονίζει έναν πιθανό τρόπο τοποθέτησης.

Τα παιδιά μπορεί να έχουν την περιέργεια να πολλαπλασιάσουν τα 'βάρη' με την απόσταση από το κέντρο και έπειτα να συγκρίνουν τα αθροίσματα αυτών από την μία και την άλλη πλευρά κάθε άξονα της συμμετρίας (θα πρέπει να προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα κάθε φορά).

Λέγεται ότι το μαγικό τετράγωνο Luo Shu χρησιμοποιείται ως βάση στο Feng Shui (κινέζικη φιλοσοφία για την αρμονική ζωή). Τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιούν μια κοινή πυξίδα για να βρουν ποια κατεύθυνση είναι η βόρεια (θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τον μέσο όρο από διάφορα δείγματα που θα πάρουν σε διαφορετικά σημεία). Τοποθετούν ένα εκτυπωμένο αντίγραφο της διαφάνειας 11, με τρόπο ώστε ο αριθμός 9 στο τετράγωνο να 'κοιτάει' το νότο.

Τι είδους εκθέματα και σε ποια χρώματα μπορούν να τοποθετηθούν σε συγκεκριμένα σημεία της τάξης, σύμφωνα με την πρακτική του Feng Shui.

Το τετράγωνο Luo Shu καλείται και τετράγωνο των 9 πυλών. Παλαιότερα πίστευαν ότι σε καθένα από τα 8 εξωτερικά τετράγωνα/πύλες ζούσε και μεγάλωνε μια διαφορετική οικογένεια, αλλά όλες μαζί μοιράζονταν το μεσαίο και κεντρικό τετράγωνο (αυτό αναφέρεται ως μεταφορά στους αυτοκράτορες και στα παλάτια που υπάρχουν σε γη και σε ουρανό). Κάποιοι ακόμη το χρησιμοποιούν για να βρουν αν διαφορετικοί τομείς της ζωής τους βρίσκονται σε ισορροπία.



Εργασία 3. Διερευνώντας και δημιουργώντας Μαγικά Τετράγωνα 4x4

Εκτός από την αρχαία Κίνα, τα μαγικά τετράγωνα έχουν χρησιμοποιηθεί και στην αρχαία Αίγυπτο και η χρήση τους χρονολογείται για περισσότερο από χίλια χρόνια στην Ινδία, την Περσία, την Αραβία και την Ευρώπη. Ένα παράδειγμα από την Ινδία βρίσκεται στη διαφάνεια 12. Ρωτήστε τα παιδιά αν αναγνωρίζουν κάποιους από τους αριθμούς (θα πρέπει να αναγνωρίζουν το 2, το 3, το 0 και πιθανών το 1). Οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται είναι από το 1 μέχρι το 16.

- *Πώς μπορούμε να βρούμε τον μαγικό αριθμό;*

Χρησιμοποιείτε την τεχνική από την Εργασία 1 για να βρείτε τον μαγικό αριθμό.

Αν γνωρίζουμε το 0, το 1, το 2 και το 3, μπορούμε να βρούμε και τα υπόλοιπα ψηφία;

Ο μαγικός αριθμός αυτού του τετραγώνου είναι το 34. Πώς μπορούμε να εργαστούμε για να βρούμε όλα τα ψηφία και να λύσουμε αυτό το παζλ;

Χρησιμοποιείτε το 0 για να βρείτε το 1. Χρησιμοποιείτε τον μαγικό αριθμό για να βρείτε το 6, το 8 και το 15. Το τελευταίο μας δίνει το 5. Τώρα πρέπει να βρούμε το 4, το 7 και το 9. Ένα από αυτά θα πρέπει να βρίσκεται στην πάνω αριστερή γωνία. Το 17 και το 19 δεν είναι στο τετράγωνο και συνεπώς πρέπει να είναι το 14. Χρησιμοποιείτε τον μαγικό αριθμό για να βρείτε το 7 και το 9.

Η διαφάνεια 13 δείχνει ακόμη ένα μαγικό τετράγωνο, αυτή τη φορά από τη Βόρεια Αφρική. Ρωτήστε τα παιδιά αν αναγνωρίζουν κάποιους από τους αριθμούς (θα πρέπει να αναγνωρίζουν το 1, το 7 και το 9). Όταν αποκαλυφθούν οι δυτικοί αριθμοί, ζητήστε από τους μαθητές να βρουν τη 'μαγική συνέχεια'.

- *Παρατηρείστε τους αριθμούς που χρησιμοποιούνται σε αυτό το τετράγωνο και συζητείστε στις ομάδες σας γιατί ο μαγικός αριθμός είναι διαφορετικός αυτή τη φορά.*

Οι διαφάνειες 12 και 13 μπορούν να εκτυπωθούν και να δοθούν στις ομάδες

ως φύλλα εργασίας, διαγράφοντας τους πίνακες με τις λύσεις. Οι διαφάνειες 14 και 15 εξηγούν πώς προέκυψαν οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε σήμερα στη Δύση. Αυτές οι τέσσερις διαφάνειες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπτύξουν την ιστορική και διαπολιτισμική γνώση των μαθητών.

Ένας πιο σύγχρονος Ινδός μαθηματικός, ο Srinivasa Ramanujan, ο οποίος πέθανε μόλις πριν από εκατό χρόνια, πρότεινε μια φόρμουλα για την κατασκευή του προσωπικού μαγικού τετραγώνου για τον καθένα ή την καθεμία. Χρησιμοποιώντας τετραγωνισμένο χαρτί, καλέστε τα παιδιά να φτιάξουν το δικό τους μαγικό τετράγωνο 4x4 ξεκινώντας με την προσωπική τους ημερομηνία γέννησης, ακολουθώντας τη μέθοδο του Ινδού μαθηματικού Srinivasa Ramanujan.



Τα βήματα εξηγούνται στις συνοδευτικές διαφάνειες της παρουσίασης που χρησιμοποιούν την ημερομηνία γέννησης του Ramanujan.

Μπορούμε να βοηθήσουμε τα παιδιά να ακολουθήσουν αυτά τα βήματα;

Copyright free.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c1/Srinivasa_Ramanujan_-_OPC_-_1.jpg

Έπειτα μπορούν να ελέγξουν τα τετράγωνα τους για να δουν αν όντως είναι 'μαγικά';

Ποια μοτίβα παρατηρείτε στη δομή των μαγικών τετραγώνων (διαφάνεια 17);

Είναι πιθανό κάποια παιδιά με διαφορετική ημερομηνία γέννησης να έχουν το ίδιο μαγικό τετράγωνο; *Πώς είναι δυνατό αυτό;*

Αφού κοιτάξουν τη διαφάνεια 20, μια πιθανή εργασία για το σπίτι είναι να ζητηθεί από τα παιδιά να βρουν με πόσους τρόπους μπορούν να φτάσουν στη 'μαγική συνέχεια'.

Ο Ramanujan (Διαφάνεια 16) ήταν μια ενδιαφέρουσα προσωπικότητα, ενώ η ζωή του συνδέεται με την πάλη κατά της αποικιοκρατίας και της σύγκρουσης πολιτισμών στην εποχή του.

Λεπτομέρειες βρίσκονται στην ιστοσελίδα https://en.wikipedia.org/wiki/Srinivasa_Ramanujan

που περιέχει και τη διάσημη ιστορία για τον αριθμό 1729. Κάποια παιδιά μπορεί να ενδιαφέρονται να ερευνήσουν αριθμούς που σχετίζονται με τους εαυτούς τους.

Μια πιθανή δραστηριότητα επέκτασης είναι να δείξουμε ένα τετράγωνο 4x4 φτιαγμένο από λέξεις (Διαφάνεια 21). Τα παιδιά μπορούν να αναρωτηθούν σε ποιο βαθμό ένα τετράγωνο είναι μαγικό. Το κείμενο μπορεί να διαβαστεί με τον ίδιο τρόπο από πάνω προς τα κάτω και αντίστροφα, από αριστερά προς τα δεξιά και αντίστροφα και στρέφοντας το κατά 180°. Επίσης οι διαγώνιοι είναι άξονες συμμετρίας



Εργασία 4: Λατινικά τετράγωνα

Ο Ελβετός μαθηματικός Leonhard Euler μελετούσε τα μαγικά τετράγωνα όταν σκέφτηκε την ιδέα ενός τετραγώνου στο οποίο κάθε αριθμός ή σύμβολο εμφανίζεται τόσες φορές στο τετράγωνο όσες το μήκος της μίας από τις πλευρές του τετραγώνου, αλλά εμφανίζεται μόνο μία φορά σε κάθε γραμμή και στήλη (διαφάνεια 22).

Το παραπάνω έγινε γνωστό ως 'Λατινικό Τετράγωνο' γιατί στις πρώτες του εκδοχές χρησιμοποιήθηκαν Λατινικοί αριθμοί ως σύμβολα. [Λατινικά τετράγωνα δημιουργήθηκαν και στη Δραστηριότητα 1 (διαφάνεια 3)].

Τα Λατινικά Τετράγωνα είναι πολύ χρήσιμα στις μέρες μας για τον προγραμματισμό αθλητικών επιδόσεων, ωρολογίων προγραμμάτων ή πειραμάτων. (Βλ. <http://www.cre8atemaths.org.uk/growing-food/growing-more> για περισσότερες ιδέες για τη χρήση τους σε γεωργικά πειράματα). Είναι επίσης η βάση για τους γρίφους Sudoku, δημοφιλή παζλ σε πολλές εφημερίδες και περιοδικά σήμερα.

Βήμα 1ο

Ένα καλό Sudoku είναι αυτό που έχει μία μοναδική λύση. Η διαφάνεια 23 δείχνει τρία διαφορετικά σημεία έναρξης για την κατασκευή του Λατινικού Τετραγώνου. Δύο από αυτά είναι καλά Sudoku, άλλα το ένα έχει πάνω από μία (εμφανή) λύση.

Ποιο είναι ποιο;

Βρείτε τρία διαφορετικά σημεία έναρξης του Sudoku χρησιμοποιώντας δύο αριθμούς.

Καθώς τα παιδιά ανατροφοδοτούν τις ιδέες τους, θα υπάρξει η ευκαιρία να συζητηθεί τι θεωρείται ίδιο και τι διαφορετικό στα μαθηματικά. Είναι

Growers are always looking for ways to improve the quality and the quantity of their crop yield.

Experiments are conducted to test out:

- new varieties
- fertilisers
- planting systems
- and so on.

Different parts of a field have different yields. Why does this happen?

In a Latin square, each row and each column has all the variables once and only once. Latin square design is often used for field experiments. Why?

Use a Latin square design to test 3 different varieties of rhubarb.

There are 12 possible layouts. Can you find them all?

Do you think all 12 designs are really different?

<http://www.cre8atemaths.org.uk/growing-food/growing-more>

σημαντικό να δοθεί έμφαση στο ότι δεν υπάρχουν 'σωστές' απαντήσεις και στο γεγονός ότι τέτοιου είδους αποφάσεις αναπτύσσονται στο πλαίσιο μαθηματικών συλλογισμών.

Σκεφτείτε σχετικά με την απόφασή σας. Ποιες είναι οι πιθανές επιλογές;

Εμπιστευτείτε την επιλογή σας.

Δικαιολογείστε και σκεφτείτε την επιλογή σας αφού έχετε ακούσει τις απόψεις των άλλων.

Ζητήστε από τα παιδιά να δουλέψουν σε ζευγάρια και να συμπληρώσουν το φύλλο εργασίας Sudoku που δίνεται στο υλικό της δραστηριότητας. Εξηγήστε τους κανόνες, ότι καθένα από τα πεδία πρέπει να περιέχει όλους τους αριθμούς από το 1-9. Κάθε αριθμός μπορεί να εμφανιστεί μόνο μια φορά σε κάθε γραμμή, στήλη και πεδίο. Μια χρήσιμη συμβουλή που θα μπορούσε να δοθεί είναι να ξεκινήσει κάποιος από τη γραμμή με τους περισσότερους αριθμούς.

Μπορείτε επίσης να 'κατεβάσετε' περισσότερα Sudoku από το διαδίκτυο για τα παιδιά που ανταποκρίνονται ιδιαίτερα (βλ. άλλοι πόροι, παρακάτω).

Βήμα 2ο

Μια δεύτερη δραστηριότητα που μπορούν να δοκιμάσουν οι ομάδες τελειώνοντας με το Sudoku 1 είναι να παρατηρήσουν ένα αντίγραφο του σχολικού ωρολογίου προγράμματος ή παρόμοιου πλάνου που λειτουργεί σαν Λατινικό Τετράγωνο (βλ. παράδειγμα στη διαφάνεια 24).

Φανταστείτε μια σχολική ημέρα χωρισμένη σε τέσσερα μαθήματα με τέσσερις διαφορετικές τάξεις και τέσσερις διαφορετικούς δασκάλους. Κατασκευάστε το ωρολόγιο πρόγραμμα.

Βήμα 3ο

Τέλος, η τάξη μπορεί να δοκιμάσει ένα απαιτητικό Sudoku (Διαφάνεια 25 και Sudoku 2). Μία προσέγγιση είναι να δουλέψουν τα παιδιά σε ομάδες και κάθε ομάδα με τη σειρά της θα προτείνει τον επόμενο αριθμό που θα συμπληρωθεί. Η ομάδα θα πρέπει να αιτιολογεί την επιλογή της στην τάξη. Έτσι θα δοθούν αρκετές ευκαιρίες για την άσκηση επιχειρηματολογίας ως μορφή μαθηματικής δεξιότητας.

Αφού η κάθε ομάδα αναφέρει την άποψή της μια φορά, τότε οι ομάδες μπορούν να συνεχίσουν να δουλεύουν μόνες τους. Αν έχουν ένα πλαστικοποιημένο αντίγραφο Sudoku για να μπορούν να το σβήνουν όποτε θέλουν, μπορούν εύκολα να επιστρέψουν στην λυμένη κατά το ήμισυ εκδοχή του γρίφου και να ξεκινήσουν ξανά από εκεί.

Η λύση του Sudoku
στη διαφάνεια 25

2	3	9	1	8	4	5	6	7
8	5	4	6	7	9	2	1	3
6	1	7	3	5	2	4	8	9
9	6	3	8	4	5	7	2	1
4	7	5	2	6	1	9	3	8
1	8	2	7	9	3	6	4	5
7	4	1	5	2	8	3	9	6
5	9	8	4	3	6	1	7	2
3	2	6	9	1	7	8	5	4

<http://www.printmysudoku.com>

Η εργασία μπορεί να επεκταθεί χρωματίζοντας και κόβοντας περισσότερα αντίγραφα του επιλεγμένου κουτιού και κολλώντας το μοτίβο του πλακακιού για να φτιαχτεί μια σύνθεση.

Μπορούν να εξερευνηθούν περαιτέρω τα μοτίβα επικαλύψεων του Βεδικού τετραγώνου χρησιμοποιώντας τετραγωνισμένα χαρτάκια ή χαρτί με κουκίδες –ως επιπλέον πρόκληση.

Εργασία 5. Βεδικά Τετράγωνα

Παρουσιάστε απόσπασμα ενός Βεδικού Τετραγώνου (διαφάνεια 26). Τα Βεδικά Τετράγωνα έχουν χρησιμοποιηθεί για αιώνες, τόσο στην Ινδία όσο και στον Ισλαμικό κόσμο, για να δημιουργήσουν γεωμετρικά μοτίβα για πλακοστρώσεις. Τι παρατηρούν τα παιδιά σχετικά με τις ακολουθίες των αριθμών στις γραμμές (και τις στήλες) από το 1 μέχρι το 4; Μοιάζει να είναι ένας πίνακας πολλαπλασιασμού (για παράδειγμα στη στήλη 2 βρίσκεται η προπαίδεια του αριθμού 1, στη στήλη 3 η προπαίδεια του 2 κ.ο.κ.).

Αλλά πώς προκύπτουν τα 3άρια και τα 7άρια στην κάτω δεξιά γωνία;

Ενθαρρύνετε τα παιδιά να συζητήσουν το πρόβλημα σε ζευγάρια πριν συνεχίσετε.

$$3 \times 4 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3$$

Το 3 είναι το άθροισμα των ψηφίων του 12. Ποιο θα ήταν το άθροισμα των ψηφίων του 7×8 ?

Μοιράστε αντίγραφα της διαφάνειας 27 και έπειτα ζητήστε από τα παιδιά να συμπληρώσουν τους αριθμούς που λείπουν δουλεύοντας σε ζευγάρια. Στη συνέχεια μπορούν να αποκαλυφθούν οι αριθμοί και να γίνει έλεγχος. Ποια μοτίβα στις ακολουθίες των αριθμών παρατηρούν τα παιδιά;

Όταν συμπληρωθούν τα Βεδικά Τετράγωνα, τα παιδιά χρησιμοποιώντας το Βεδικό τετράγωνο, χάρακες και χρωματιστά μολύβια, μπορούν να πειραματιστούν ενώνοντας ίδιους αριθμούς μεταξύ τους (όπως φαίνεται στις διαφάνειες 28-29).

Τα παιδιά μπορούν να συνεχίσουν χρωματίζοντας τα σχήματα με διαφορετικά χρώματα. Σε μικρές ομάδες διαλέγουν ένα από τα πλακίδια, το κόβουν και πειραματίζονται για να δουν αν ταιριάζει ή αν συνδέεται με άλλα σχήματα. Τι παρατηρούν;



Εργασία 6. Εξερευνώντας περαιτέρω τα Μαγικά Τετράγωνα

Υπάρχουν πολλές ακόμη μαγικές ανακαλύψεις σχετικές με τα μαγικά τετράγωνα. Οι διαφάνειες 30 ως 45 εξερευνούν κάποιες από αυτές τις ιδέες. Το σχήμα 'Torus' (χρήσιμο στην επιστήμη της ηλεκτρολογίας καθώς το σχήμα προσφέρει τη λιγότερη αντίσταση στον ηλεκτρισμό) μπορεί να φτιαχτεί με μεγαλύτερα Μαγικά Τετράγωνα (9x9 or 27x27) (Διαφάνειες 32-33). Μοτίβα συχνότητων (ή αναλογιών) σε σχέση με την καθεμία από τις Πυθαγόρειες μουσικές κλίμακες βρίσκονται σε ένα μαγικό τετράγωνο 27 x 27 (Διαφάνειες 34-35). Περίπου πριν από 1.500 χρόνια ο Varahamihira από την Ινδία περιέγραψε ένα μαγικό τετράγωνο για την κατασκευή αρωμάτων (βλ. Διαφάνεια 36).

Πολλά ενδιαφέροντα μοτίβα μπορούν να προκύψουν, καθώς χρωματίζουμε μαγικά τετράγωνα (διαφάνειες 37-41).

Ένα σύντομο βίντεο (<https://www.youtube.com/watch?v=hIgmiDn-mVdU>) με συναρπαστικές εικόνες ακουστικών μοτίβων Chladni μπορούν να συγκριθούν με τα μοτίβα στα μαγικά τετράγωνα. Τέλος, γίνεται σύντομη εισαγωγή στη χρήση των Μαγικών Τετραγώνων σε μετρήσεις που αφορούν τη συγκράτηση του νερού (Διαφάνεια 44). Αν διαθέτετε αρκετά lego και χρόνο, θα μπορούσατε να εξελίξετε την παραπάνω ιδέα σε μια πρακτική διερεύνηση.

Βήματα Φιλοσοφίας με Παιδιά (P4C)

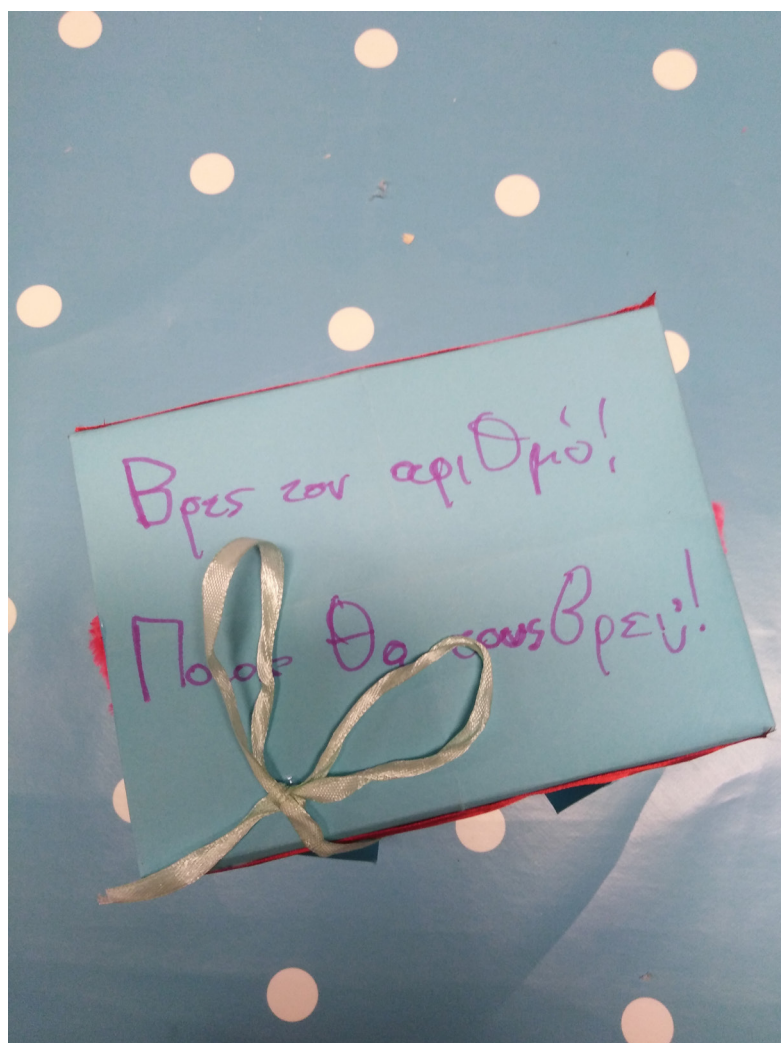
1. Προετοιμασία (ζέσταμα)
2. Παρουσίαση του βίντεο
3. Χρόνος για σκέψη
4. Συζήτηση
5. Ερωτήσεις (διατύπωση)
6. Έκφραση (των ερωτήσεων)
7. Επιλογή (ψήφισμα μιας ερώτησης)
8. Οι πρώτες λέξεις που μας έρχονται στο μυαλό / ιδεοθύελλα
9. Συζήτηση (οικοδόμηση)
– δημιουργική, κριτική και συνεργατική σκέψη ώστε να βρεθούν απαντήσεις στην ερώτηση
10. Τελευταίες Λέξεις / συνειρμοί
11. Αναθεώρηση της έρευνας

Εργασία 7. 'Φιλοσοφία για παιδιά' (Έρευνα P4C)

Σε συνέχεια των πρώτων δραστηριοτήτων, εξηγήστε ότι από πολύ παλιά ως σήμερα πολλοί άνθρωποι έχουν σκεφτεί ή σκέφτονται ότι οι αριθμοί ενέχουν σχέσεις εξουσίας και πολλαπλές νοηματοδοτήσεις. Υπάρχουν κάποιες αρμονικές μορφές που έχουν προέλθει από τα μαγικά τετράγωνα. (βλ. βίντεο: <https://www.youtube.com/watch?v=Y8SA0gtSBNs>)

Τα παιδιά είναι χρήσιμο να γνωρίζουν ότι τα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται στο βίντεο είναι για αρκετά προχωρημένους, ώστε να κατανοηθούν πλήρως από τα ίδια, αλλά θα μπορέσουν να καταλάβουν ορισμένα σημεία που συνδέονται με τη μαθηματική τους δραστηριότητα για τα μαγικά τετράγωνα. (Εναλλακτικά, ένα βίντεο που αφορά τα αριθμητικά μοτίβα στη φύση και μπορεί να τα κινητοποιήσει στην έρευνα για το P4C – είναι: (http://www.etere-aestudios.com/docs_html/nbyn_hm/intro.htm)

Χρησιμοποιήστε το για να ενθαρρύνετε ερωτήσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ανάπτυξη της φιλοσοφικής σκέψης των παιδιών (P4C).



Επέκταση μάθησης

Μια επέκταση-πρόκληση αυτής της δραστηριότητας που μπορεί να χρειάζεται να δουλέψουν μαζί εκπαιδευτικοί και παιδιά είναι η συνεργασία ώστε να βρουν τη λύση στο Μαγικό Τετράγωνο Sudoku: <http://www.sachsentext.de/en/node/825>. Τα μαγικά τετράγωνα 3x3 θα είναι εκδοχές του τετραγώνου Luo Shu, βλ. διαφάνεια 6). Πώς το ξέρουμε;

Μια απλή μέθοδος για την κατασκευή Μαγικών Τετραγώνων με περιττούς αριθμούς, μαζί με μια γενική φόρμουλα Μαγικών Τετραγώνων βρίσκεται στις διαφάνειες 48-50.

Μια απαιτητική αλλά ενδιαφέρουσα εξερεύνηση είναι να δημιουργηθεί και να ελεγχθεί μια 'γεωμαγική' εκδοχή του μαγικού τετραγώνου Luo Shu χρησιμοποιώντας 'πολυόμινα' φτιαγμένα από αλληλοσυνδεόμενους κύβους ή παρόμοιο εξοπλισμό ή απλό τετραγωνισμένο χαρτί. (Τα 'πολυόμινα' είναι επίπεδοι σχηματισμοί που δημιουργούνται ενώνοντας ίσα τετράγωνα μεταξύ τους πλευρά με πλευρά).

Το παραπάνω βασίζεται στο έργο του Lee Sallows. Η διαφάνεια 47 της παρουσίασης δείχνει πώς θα μπορούσε να γίνει αυτό και παρέχει κάποιες από τις λύσεις. Μπορούμε να ζητήσουμε από τα παιδιά να σημειώσουν τις αντιστοιχίες ανάμεσα στα σχήματα και τα σύμβολα συν και μείον στη διαφάνεια 7. Θα μπορούσε επίσης να συμπεριληφθεί στις δραστηριότητες έρευνας για τα Μαγικά Τετράγωνα στην Εργασία 2.

Πηγές

Παρουσίαση για τα Μαγικά Τετράγωνα (ppt).

Περισσότερα Sudoku με δέκα ψηφία <http://www.printmysudoku.com> χρησιμοποιώντας το επίπεδο 'easy'.

Με λιγότερα από δέκα ψηφία: <http://www.mathsphere.co.uk/resources/MathSphereFreeResourcesSudoku.html>

Συνιστάται οι δάσκαλοι/ες να έχουν εκπαιδευτεί σε θέματα που αφορούν τη φιλοσοφία για παιδιά. Περισσότερες πληροφορίες για το P4C μπορείτε να βρείτε: <https://www.sapere.org.uk>

Ηθικά ζητήματα ή διλήμματα

Υπάρχει μικρός κίνδυνος να δει ή να δημιουργήσει κάποιο παιδί τη μορφή της Σβάστικας (Swastika pattern) ακολουθώντας την αριθμητική ακολουθία του τετραγώνου Luo Shu (Διαφάνειες 9, 10 και 31). Αν προκύψει αυτό, συνιστάται να εξηγηθεί ότι αυτό είναι ένα αρχαίο σύμβολο της Ανατολής, που ενώ σήμερα μπορεί να συνδέεται με τη Ναζιστική Γερμανία, δεν είναι το ίδιο. Συγκεκριμένα, το ναζιστικό σύμβολο, που υιοθετήθηκε μετά την ανακάλυψη συμβόλων Σβάστικας στα ερείπια της αρχαίας Τροίας, όπου τα 'χέρια' σε αυτό είναι αντεστραμμένα σε σύγκριση με το παραδοσιακό σύμβολο και χρησιμοποιείται σε γωνία/κλίση.

Ιστορικά αλλά και σήμερα πολλοί άνθρωποι θεωρούν ότι οι αριθμοί έχουν ένα ιδιαίτερο νόημα και ισχύ. Η ονομασία 'μαγικά τετράγωνα' ίσως έχει αποδοθεί γιατί οι άνθρωποι θαύμασαν τον τρόπο με τον οποίο η τοποθέτηση των αριθμών με συγκεκριμένους τρόπους μπορεί να οδηγήσει στο ίδιο αποτέλεσμα, ανεξάρτητα από τη θέση τους, δίνοντάς τους έτσι έναν υπερφυσικό ρόλο. Ωστόσο, οι σχέσεις των αριθμών και η ισορροπία μεταξύ τους εξηγούν πλήρως με μαθηματικό τρόπο την επίλυση των μαγικών τετραγώνων. Για το λόγο αυτό προτείνεται να μην χρησιμοποιείται ο όρος 'μαγικό' χωρίς περεταίρω επεξήγηση (ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που στην ομάδα εργασίας συμμετέχουν παιδιά από θρησκευόμενα περιβάλλοντα, τα οποία μπορεί να δημιουργήσουν λάθος συνδέσεις για τον όρο).

This image shows a full page of blank white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a template for writing or drawing. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are approximately 20 lines visible. The paper has a slight shadow on the right side, suggesting it's resting on a surface. There is no handwriting or other markings on the paper.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
UNIVERSITY
OF THESSALY



mathematikum
Mathematik zum Anfassen.
UNIVERSITATEA **Sheffield**
DIN BUCUREȘTI **Hallam**
University
—VIRTUTE ET SAPIENTIA—



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union