

Shodor Interactivate (Shodor Education Foundation)
http://www.shodor.org/interactivate

Αυτή η ιστοσελίδα περιέχει μια τεράστια λίστα βοηθητικών προγραμμάτων που συνεχίζει να μεγαλώνει. Επιπλέον, υπάρχουν μαθήματα και δραστηριότητες, πολλά από τα οποία περιλαμβάνουν και τη χρήση των βοηθητικών προγραμμάτων. Τα βοηθητικά προγράμματα (applets) τα οποία αναφέρονται και ως δραστηριότητες, είναι ταξινομημένα ανάλογα με το περιεχόμενο και όχι με το επίπεδο της τάξης, για αυτό βεβαιωθείτε ότι έχετε δει όλη την ιστοσελίδα. Είναι πολύτιμη βοήθεια, ιδιαίτερα για τους εκπαιδευτικούς στις μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού και στο γυμνάσιο.

Count On
www.mathsyear2000.org

Αυτή η ιστοσελίδα έχει σπόνσορα το National Grid for Learning και περιέχει πολλά είδη πηγών μαζί με βοηθητικά προγράμματα για τα μαθηματικά. Κάντε κλικ πάνω στο πλήκτρο Explorer και βρείτε βοηθητικά προγράμματα καθώς και χρήσιμα στοιχεία όπως ένα λεξικό μαθηματικών. Δείτε και τα άλλα τμήματα της σελίδας.



Επιπλέον κατάλογος βιβλίων και άρθρων που σχετίζονται με τις ιδέες που αναφέρονται σε αυτό το κεφάλαιο μπορείτε να βρείτε στο www.ablongman.com/vandewalle6e

Κεφάλαιο 9

Αναπτύσσοντας τις Πρώτες Μαθηματικές Έννοιες και το Νόημα του Αριθμού

Ο αριθμός αποτελεί μια έννοια πολύπλοκη και πολύπλευρη. Η βαθιά κατανόηση του αριθμού, μια σχεσιακή κατανόηση, εμπεριέχει διαφορετικές ιδέες, σχέσεις και δεξιότητες. Τα παιδιά έρχονται στο σχολείο με πολλές ιδέες για τον αριθμό. Αυτές οι ιδέες θα έπρεπε να οικοδομούνται η μία πάνω στην άλλη καθώς εμείς δουλεύουμε με τα παιδιά και τα βοηθούμε να αναπτύσσουν μαθηματικές σχέσεις. Είναι λυπηρό να βλέπεις πολλά παιδιά της τετάρτης και της πέμπτης να γνωρίζουν ελάχιστα για τους αριθμούς και για το πώς να μετρούν. Χρειάζεται χρόνο και πολλή εμπειρία να κατανοήσουν πλήρως την έννοια του αριθμού ώστε να μπορέσουν αργότερα να κατανοήσουν και τις έννοιες για τις σχέσεις των αριθμών.

Αυτό το κεφάλαιο μελετά την ανάπτυξη των εννοιών για τους αριθμούς μέχρι το 20. Αυτές οι θεμελιώδεις ιδέες μπορούν να εφαρμοστούν και σε μεγαλύτερους αριθμούς, πράξεις, βασικά γεγονότα και υπολογισμούς.

Κεντρικές Ιδέες

1. Η απαρίθμηση μας λέει από πόσα πράγματα αποτελείται ένα σύνολο. Όταν μετράμε ένα σύνολο πραγμάτων, η τελευταία λέξη ονοματίζει και το σύνολο.
2. Οι αριθμοί συνδέονται μεταξύ τους με πολλές και ποικίλες σχέσεις. Ο αριθμός 7 για παράδειγμα είναι περισσότερο από 4, δύο πιο κάτω από το 9, αποτελείται από το 3 και το 4, όπως και από το 2 και το 5, διαφέρει τρεις αριθμούς από το 10 και μπορεί γρήγορα να αναγνωριστεί ως διάφορες μονάδες με την μορφή κουκίδων. Αυτές οι ιδέες γενικεύονται για το 17, 57 και το 370.
3. Οι αριθμητικές έννοιες συνδέονται άμεσα με τον κόσμο που μας περιβάλλει. Η εφαρμογή των αριθμητικών σχέσεων στον πραγματικό κόσμο σηματοδοτεί την αρχή της κατανόησης του κόσμου με μαθηματικό τρόπο.

Μαθηματικά Συνδέσεις με το Περιεχόμενο

Η αρχική ανάπτυξη των αριθμών σχετίζεται με άλλα θέματα του αναλυτικού προγράμματος με δύο τρόπους: συγκεκριμένο που βρίσκεται σε συνάρτηση και εμπεριέχει την ανάπτυξη του αριθμού και συγκεκριμένο που επηρεάζεται άμεσα από το πόσο καλά έχουν αναπτυχθεί οι πρώτοι αριθμοί. Οι έννοιες της μέτρησης, των δεδομένων και των πράξεων ανήκουν στην πρώτη κατηγορία. Τα βασικά γεγονότα, η θεσιακή αξία και οι υπολογισμοί ανήκουν στη δεύτερη.

- **Πράξεις** (Κεφάλαιο 10). Καθώς τα παιδιά λύνουν προβλήματα σε μορφή ιστοριών για καθεμιά από τις τέσσερις πράξεις, μετρούν προς τα μπροστά και προς τα πίσω, ομαδοποιούν και συγκρίνουν. Στην πορεία επίλυσης σχηματίζουν νέες σχέσεις και μεθόδους εργασίας με αριθμούς.
- **Μέτρηση** (Κεφάλαιο 20). Ο καθορισμός μεγεθών μήκους, ύψους, πλάτους ή βάρους αποτελεί ένα βασικό τρόπο που το μικρό παιδί χρησιμοποιεί τους αριθμούς. Η μέτρηση περιέχει την καταμέτρηση και τις συγκρίσεις (αριθμητικές σχέσεις) και συνδέει τον αριθμό με τον κόσμο στον οποίο ζει το παιδί.
- **Δεδομένα** (Κεφάλαιο 22). Δεδομένα, όπως η μέτρηση, εμπεριέχουν υπολογισμούς και συγκρίσεις, τα οποία βοηθούν στην ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού και στη σύνδεση της με τον πραγματικό κόσμο.
- **Βασικά Γεγονότα** (Κεφάλαιο 11). Μια πλούσια και λεπτομερής ανάπτυξη των σχέσεων των αριθμών είναι ουσιώδης για την κατανόηση των βασικών γεγονότων. Χωρίς τις σχέσεις των αριθμών, τα παιδιά θα πρέπει να μάθουν τα γεγονότα παπαγαλία. Με την κατανόηση των αριθμών, τα γεγονότα για την πρόσθεση και την αφαίρεση μετατρέπονται σε σχετικά απλές επεκτάσεις.
- **Θεσιακή αξία και Υπολογισμός** (Κεφάλαια 12 και 13). Πολλές από τις ιδέες που οδηγούν σε υπολογιστική επάρκεια και ευελιξία με τους αριθμούς είναι ξεκάθαρες προεκτά-

σεις του πώς οι αριθμοί συνδέονται με το 10 και πώς οι αριθμοί μπορούν να σπάσουν στα δύο και να ξανασυνδυαστούν με πολλούς τρόπους.

Η Ανάπτυξη των Αριθμών στην Προσχολική Εκπαίδευση και το Νηπιαγωγείο

Οι γονείς βοηθούν τα παιδιά να μετρήσουν τα δάχτυλά τους, τα παιχνίδια τους, τους ανθρώπους στο τραπέζι και άλλα αντικείμενα. Ερωτήσεις σχετικά με το «Ποιος έχει περισσότερα;» ή «Υπάρχουν αρκετά;» είναι μέρος της καθημερινής ζωής των παιδιών ήδη από την ηλικία των 2 ή των 3 ετών. Μεγάλος αριθμός δεδομένων αποδεικνύει ότι τα πολύ μικρά παιδιά διαθέτουν ένα είδος κατανόησης των αριθμών και της απαρίθμησης (Baroody, 1987, Fuson, 1988 Gelman & Gallistel, 1978, Gelman & Meck, 1986, NRC 2001).

Οι Σχέσεις «Περισσότερο», «Λιγότερο» και «Ίδιο»

Οι έννοιες «περισσότερο», «λιγότερο» και «Ίδιο» είναι βασικές σχέσεις που συμβάλλουν στη γενική έννοια του αριθμού. Τα παιδιά αρχίζουν να διαμορφώνουν τέτοιες ιδέες πριν πάνε στο σχολείο. Ένα παιδί που πηγαίνει για πρώτη φορά στο νηπιαγωγείο είναι σχεδόν πάντα σε θέση να διαλέξει το σύνολο που έχει τα περισσότερα, αν του δείξουν δύο σύνολα με προφανή αριθμητική διαφορά. Ο Baroody (1987) αναφέρει ότι «Όταν ένα παιδί δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει διαισθητικά το «περισσότερο», τότε βρίσκεται σε σοβαρό εκπαιδευτικό κίνδυνο» (σελ. 29). Οι δραστηριότητες στην τάξη θα πρέπει να βοηθούν τα παιδιά να οικοδομήσουν πάνω σε αυτή τη βασική γνώση και να τη βελτιώσουν.

Παρόλο που η έννοια «λιγότερο» είναι λογικά ισοδύναμη με την έννοια «περισσότερο» (επιλέγοντας το σύνολο που είναι περισσότερο είναι το ίδιο σαν να μην επιλέγουμε το σύνολο που είναι λιγότερο), η λέξη λιγότερο αποδεικνύεται πιο δύσκολη για τα παιδιά απ' ό,τι η λέξη περισσότερο. Μια πιθανή εξήγηση είναι ότι τα παιδιά έχουν πολλές ευκαιρίες να χρησιμοποιήσουν τη λέξη περισσότερο, ενώ εκτίθενται πολύ πιο σπάνια στη λέξη λιγότερο. Για να τα βοηθήσετε με την έννοια «λιγότερο», συνδυάστε την συχνά με τη λέξη περισσότερο και κάνετε σκόπιμα ερωτήσεις του τύπου «Ποιο είναι λιγότερο;» καθώς και «Ποιο είναι περισσότερο;». Για παράδειγμα, ως υποθέσουμε ότι η τάξη σας έχει επιλέξει σωστά, από τα δύο που έχετε δώσει, το σύνολο που έχει τα περισσότερα. Τότε να θέσετε αμέσως το ερώτημα «Ποιο είναι λιγότερο;». Έτσι ο λιγότερο οικείος όρος και η λιγότερο οικεία έννοια θα συνδεθούν με τη γνωστή ιδέα.

Για όλες τις τρεις παραπάνω έννοιες (περισσότερο, λιγότερο, ίδιο) τα παιδιά θα πρέπει να κατασκευάζουν σύνολα χρησιμοποιώντας πούλια, καθώς και να κάνουν συγκρίσεις ή να επιλέξουν ανάμεσα σε δύο σύνολα που τους δίδονται. Οι δραστηριότητες που περιγράφονται εδώ περιλαμβάνουν και τους δύο τύπους. Αυτές οι δραστηριότητες θα πρέπει να διεξάγονται με διερευνητικό πνεύμα και να συνοδεύονται με ερωτήσεις, αν είναι δυνατόν για επεξηγήσεις, «Γιατί νομίζετε ότι αυτό το σύνολο έχει λιγότερα;».

Δραστηριότητα 9.1

Φτιάξτε Σύνολα με Περισσότερα/Λιγότερα/Ίδια

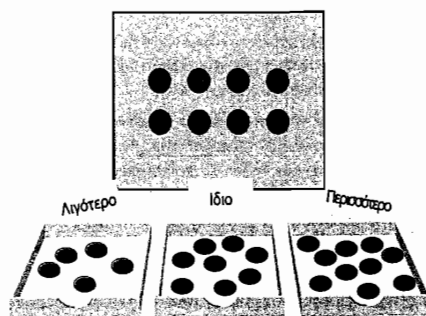
Σε ένα χώρο εργασίας ή ένα τραπέζι, δώστε περίπου οχτώ κάρτες με σύνολα των 4 έως 12 αντικειμένων, ένα σύνολο από μικρά πούλια ή κύβους και μερικές κάρτες που να γράφουν τις λέξεις «Περισσότερο», «Λιγότερο» και «Ίδιο». Δίπλα σε κάθε κάρτα, βάλτε τα παιδιά να φτιάξουν τρεις ομάδες από πούλια: ένα σύνολο με περισσότερα, ένα σύνολο με λιγότερα κι ένα σύνολο με τα ίδια. Οι κατάλληλες επικέτες τοποθετούνται πάνω στα σύνολα (βλ. Σχήμα 9.1).

Στη Δραστηριότητα 9.1, οι μαθητές δημιουργούν ένα σύνολο με πούλια, το οποίο τους παρέχει την ευκαιρία να προβληματιστούν για τα σύνολα και να τα αναπροσαρμόζουν καθώς εργάζονται. Η επόμενη δραστηριότητα εκτελείται χωρίς πούλια. Παρόλο που πραγματοποιείται τις ίδιες βασικές ιδέες, αναφέρεται σε μια διαφορετική κατάσταση για το πρόβλημα.

Δραστηριότητα 9.2

Βρείτε την Ίδια Ποσότητα

Δώστε στα παιδιά μια συλλογή από κάρτες με σύνολα. Μπορείτε να δώσετε κάρτες με κουκκίδες (βλ. τα Blackline Masters). Βάλτε τα παιδιά να επιλέξουν μια οποιαδήποτε κάρτα από τη συλλογή και έπειτα να βρουν



ΣΧΗΜΑ 9.1 Κατασκευή συνόλων που είναι αριθμητικά περισσότερα, λιγότερα ή ίδια.

μία κάρτα με την ίδια ποσότητα ώστε να έχουν ένα ζευγάρι. Συνεχίστε να βρίσκετε κι άλλα ζεύγη.

Η Δραστηριότητα 9.2 μπορεί να παραλλαχτεί λέγοντας στα παιδιά να βρουν κάρτες με κουκκίδες οι οποίες να είναι «περισσότερες» ή «λιγότερες».

Παρατηρήστε τα παιδιά καθώς ασχολούνται με αυτή τη δραστηριότητα. Τα παιδιά με αριθμητικές ιδέες που είναι απόλυτα συνδεδεμένες με την αριθμηση και τίποτα άλλο, θα επιλέξουν κάρτες στην τύχη και θα μετρήσουν τις κουκκίδες μία-μία. Άλλα θα αρχίσουν επιλέγοντας μια κάρτα η οποία φαίνεται να διαθέτει τον ίδιο περίπου αριθμό από κουκκίδες. Αυτό συνιστά ένα σημαντικό υψηλότερο επίπεδο κατανόησης. Παρατηρήστε και τον τρόπο που μετρούν τις κουκκίδες. Είναι ακριβής; Κάθε κουκκίδα μετρείται μόνο μια φορά; Έχουμε άλλο ένα σημαντικό επίπεδο κατανόησης όταν τα παιδιά αρχίζουν να αναγνωρίζουν μικρά σύνολα με πρότυπα χωρίς καμία απαρίθμηση.

II Σταματώ και στοάζομαι

Έχετε αρχίσει να βλέπετε κάποιες από τις θεμελιώδεις ιδέες για τους αριθμούς. Σταματήστε τώρα και κάντε έναν κατάλογο με σημαντικές ιδέες που θεωρείτε ότι θα πρέπει να ξέρουν τα παιδιά σχετικά με το 8, μέχρι τη στιγμή που θα τελειώσουν την πρώτη τάξη (ο αριθμός 8 χρησιμοποιείται ως παράδειγμα. Ο κατάλογος μπορεί να περιλαμβάνει οποιοδήποτε αριθμό από το 6, ως πούμε, μέχρι το 12). Παραμερίστε για λίγο τις ιδέες σας, θα επιστρέψουμε σε αυτές αργότερα.

Πρώτη Απαρίθμηση

Οι ουσιαστικές δραστηριότητες απαρίθμησης μπορεί να ξεκινήσουν κατά την προσχολική ηλικία. Γενικά, στο μέσο της χρονιάς, τα παιδιά θα πρέπει να έχουν κατανοήσει επαρκώς την απαρίθμηση, αλλά θα πρέπει να έχουν δομήσει αυτή την ιδέα μόνα τους. Δεν γίνεται να τα πείσουμε. Μόνο που η ακολουθία της απαρίθμησης είναι μια μηχανική διαδικασία. Το νόημα που αποδίδεται στην απαρίθμηση είναι η βασική εννοιολογική ιδέα, σύμφωνα με την οποία αναπτύσσονται όλες οι άλλες αριθμητικές έννοιες.

Η Ανάπτυξη των Δεξιοτήτων Απαρίθμησης

Η απαρίθμηση περιέχει δύο τουλάχιστον ξεχωριστές δεξιότητες. Πρώτον, το παιδί πρέπει να είναι σε θέση να παράγει με τη σωστή σειρά τη συνηθισμένη λίστα των αριθμητικών λέξεων: «Ένα, δύο, τρία, τέσσερα...». Δεύτερον, πρέπει να είναι σε θέση να συνδέει ένα προς ένα αυτή την ακολουθία με τα στοιχεία του συνόλου που απαριθμεί. Κάθε στοιχείο πρέπει να πάρει μία και μόνη τιμή.

Η εμπειρία και η καθοδήγηση αποτελούν τους βασικούς παράγοντες στην ανάπτυξη αυτών των δεξιοτήτων απαρίθμησης. Πολλά από τα παιδιά που έρχονται στο νηπιαγωγείο μπορούν να απαριθμήσουν σύνολα των 10 ή και περισσότερων. Ταυτόχρονα, παιδιά με ελάχιστο υπόβαθρο μπορεί να χρειαστούν πολλή εξάσκηση για να αναπληρώσουν την έλλειψη εμπειρίας. Το μέγεθος του συνόλου είναι επίσης ένας παράγοντας που σχετίζεται με την επιτυχία στην απαρίθμηση. Προφανώς, για την εκμάθηση μεγαλύτερων σειρών αριθμών απαιτείται περισσότερη εξάσκηση. Η μέτρηση 12 τιμών δεν περιλαμβάνει κάποιο πρότυπο ή επανάληψη και πολλά παιδιά δεν αναγνωρίζουν κάποιο πρότυπο, ακόμη και στους αριθμούς τους μεγαλύτερους από το δώδεκα. Στα παιδιά που μαθαίνουν ακόμη τις δεξιότητες της απαρίθμησης –που σημαίνει, την αντιστοίχιση προφορικών αριθμητικών λέξεων και αντικειμένων– πρέπει να δίνουμε σύνολα από κύβους ή πούλια που να μπορούν να τα μετακινήσουν ή εικόνες συνόλων με τέτοια διάταξη που να είναι εύκολη η απαρίθμηση.

Η Απαρίθμηση Αποκτά Νόημα

Οι Fosnot και Dolk (2001) ξεκαθάρισαν ότι η κατανόηση της έννοιας του αριθμού και η σύνδεση της με την απαρίθμηση δεν είναι απλό θέμα για ένα τετράχρονο παιδί. Τα παιδιά θα μάθουν πώς να μετρούν (να αντιστοιχίζουν αριθμητικές λέξεις σε αντικείμενα) πριν καταλάβουν ότι ο τελευταίος αριθμός δείχνει το μέγεθος του συνόλου ή το πλήθος των στοιχείων. Τα παιδιά που κάνουν αυτή τη σύνδεση λέμε πως κατέχουν την αρχή της αριθμησης, η οποία είναι μια μετεξέλιξη των αρχικών ιδεών τους σχετικά με την ποσότητα. Τα περισσότερα παιδιά, αν όχι όλα, έχουν κάνει αυτή τη σύνδεση έως την ηλικία των 4,5 χρόνων (Fuson & Hall, 1983).



Τα μικρά παιδιά που μπορούν να μετρήσουν προφορικά μπορεί να μην κατανοούν τη σημασία της καταμέτρησής τους. Δείτε στο παιδί μία κάρτα με πέντε έως εννιά μεγάλες κουκκίδες στη σειρά έτσι ώστε να είναι εύκολο να τις μετρήσει. Ζητήστε του να μετρήσει τις κουκκίδες. Αν η απάντησή του είναι σωστή, ρωτήστε «Πόσες κουκκίδες υπάρχουν στην κάρτα;». Πολλά παιδιά θα μετρήσουν ξανά. Μία ένδειξη κατανόησης της πρώτης καταμέτρησής θα είναι μια ίδια απάντηση για την οποία δεν χρειάστηκε να ξαναμετρήσει. Τώρα βάλτε το παιδί να διαλέξει τον ίδιο αριθμό από μία ομάδα από πούλια: «Σε παρακαλώ, βγάλε τόσα πούλια όσες είναι και η κουκκίδες στην κάρτα». Υπάρχουν πολλά στοιχεία τα οποία πρέπει να προσέξετε. Το παιδί θα ξαναμετρήσει έτσι ώστε να ξέρει πόσα πούλια να βγάλει; Μετράει τα πούλια ή τα βάζει ένα-ένα πάνω στις κουκκίδες; Αισθάνεται σιγουριά ότι υπάρχουν τόσα πούλια όσες και κουκκίδες; ■

Οι Fosnot και Dolk αναλύουν μία τάξη με τετράχρονα στην οποία τα παιδιά που ήξεραν ότι υπήρχαν δεκαεπτά παιδιά μέσα στην τάξη δεν ήσαν σίγουρα για το πόσα μπουκάλια γάλα θα έπρεπε να πάρουν έτσι ώστε κάθε παιδί να έχει από ένα.

Για να αναπτύξετε την κατανόηση της καταμέτρησης των παιδιών βάλτε τα να ασχολούνται με παιχνίδια που να αφορούν την καταμέτρηση και τη σύγκριση. Το ακόλουθο πρόβλημα είναι μια απλή πρόταση.

Δραστηριότητα 9.3

Γεμίστε τα αλεξίπτωτα

Φτιάξτε έναν πίνακα με τέσσερα αλεξίπτωτα. Καθένα περιέχει μια στήλη με δώδεκα τετράγωνα του ενός εκατοστού, που στην κορυφή έχει ένα αστέρι. Τα παιδιά κυλούν ένα ζάρι και συλλέγουν τόσα πούλια, όσα δείχνει. Μετά τοποθετούν τα πούλια σε ένα από τα αλεξίπτωτα. Σκοπός τους είναι να γεμίσουν όλα τα αλεξίπτωτα με πούλια. Μία περίπτωση είναι να ζητήσετε τα αλεξίπτωτα να γεμίσουν με ακρίβεια. Αν τυχόν το 5 δεν μπορούν να το χρησιμοποιήσουν για να γεμίσουν ένα αλεξίπτωτο που έχει τέσσερα κενά.

Αυτό το «παιχνίδι» σας δίνει πολλές δυνατότητες να μιλήσετε με τα παιδιά για τους αριθμούς και να αξιολογήσετε τη σκέψη τους. Παρατηρήστε πώς τα παιδιά μετρούν τις κορυφές στα ζάρια. Ρωτήστε «Πώς ξέρετε ότι έχετε το σωστό αριθμό από πούλια;» και «Πόσα πούλια βάλσατε στο αλεξίπτωτο; Πόσα ακόμα χρειάζεστε για να το γεμίσετε;».

Οι δραστηριότητες 9.1 και 9.2 παρέχουν επίσης ευκαιρίες για διάγνωση. Οι καθημερινές δραστηριότητες στην τάξη, όπως «μετρήστε πόσες χαρτοπετσέτες μας χρειάζονται για το μεσημεριανό γεύμα», είναι πρόσθετες ευκαιρίες για να μάθουν τα παιδιά τους αριθμούς και για να ακούσουν οι εκπαιδευτικοί τις ιδέες των παιδιών τους.

Γραφή και Αναγνώριση των Ψηφίων

Το να βοηθήσει τα παιδιά να διαβάσουν και να γράφουν μονοψήφιους αριθμούς είναι ίδιο με το να τα διδάσκουμε να διαβάζουν και να γράφουν τα γράμματα του αλφαβήτου. Κανένα από τα δύο δεν έχει σχέση με την έννοια του αριθμού. Παραδοσιακά, η διδασκαλία έκανε χρήση διαφόρων μορφών εξάσκησης μέσω της επανάληψης. Τα παιδιά αντιγράφουν σελίδες με αριθμητικά ψηφία, γράφουν επανειλημμένα τους αριθμούς από το 0 έως το 10, φτιάχνουν ψηφία από πηλό, τα σχεδιάζουν στην άμμο, τα γράφουν στον πίνακα ή στον αέρα κ.ο.κ.

Η αριθμομηχανή αποτελεί ένα καλό διδακτικό εργαλείο για την αναγνώριση των αριθμών. Εκτός από το ότι βοηθούν τα παιδιά με τους αριθμούς, οι πρώτες δραστηριότητες μπο-

ρούν να τα βοηθήσουν να εξοικειωθούν με την αριθμομηχανή, έτσι ώστε να είναι σε θέση να εκτελέσουν τις πιο πολύπλοκες δραστηριότητες.

Δραστηριότητα 9.4

Βρες και Πάτησε

Κάθε παιδί θα πρέπει να έχει μία αριθμομηχανή. Βεβαιωθείτε ότι ξεκινούν πατώντας το πλήκτρο που καθαρίζει την οθόνη και στη συνέχεια λέτε έναν αριθμό και τα παιδιά πατούν αυτόν τον αριθμό στην αριθμομηχανή. Αν έχετε μια αριθμομηχανή στη συσκευή προβολής διαφανειών, μπορείτε να δείξετε στα παιδιά το σωστό πλήκτρο για να επαληθεύσουν τις απαντήσεις τους. Μια εναλλακτική λύση θα ήταν να γράψετε τον αριθμό στον πίνακα για να κάνουν τα παιδιά την επαλήθευση. Ξεκινήστε με μονοψήφιους αριθμούς και στη συνέχεια προχωρήστε λέγοντας διαδοχικά δύο ή τρεις αριθμούς. Πείτε, για παράδειγμα, «τρία, επτά, ένα». Τα παιδιά πατούν τη σειρά των αριθμών όπως την ακούν.

Ίσως, οι πιο συνηθισμένες ασκήσεις σε εγχειρίδια για το νηπιαγωγείο είναι να αντιστοιχίζουν τα παιδιά σύνολα με αριθμούς. Τους δίνονται σύνολα με εικόνες και τους ζητείται να γράψουν ή να αντιστοιχίσουν τον αριθμό που δηλώνει το πόσα. Μια άλλη ιδέα είναι να τους δοθεί ένας αριθμός και να τους ζητηθεί να φτιάξουν ή να σχεδιάσουν ένα σύνολο με τόσα αντικείμενα. Πολλά βιβλία του δασκάλου περιγράφουν έξυπνες δραστηριότητες μάθησης στις οποίες τα παιδιά αντιστοιχίζουν έναν αριθμό με το σύνολο του σωστού μεγέθους – βαρύνουν επάνω σε αριθμημένα νούφαρα, για παράδειγμα. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι αυτές οι συχνά τετριμμένες δραστηριότητες αφορούν τις δεξιότητες μόνο της απαρίθμησης συνόλων και της αριθμητικής αναγνώρισης ή γραφής. Όταν τα παιδιά ολοκληρώσουν με επιτυχία αυτές τις δραστηριότητες, δεν έχουμε να κερδίσουμε πολλά αν τις συνεχίσουμε.



Τα λογισμικά ηλεκτρονικών υπολογιστών που επιτρέπουν στα παιδιά να δημιουργούν σύνολα στην οθόνη με ένα πάτημα του ποντικιού είναι πολύ συνηθισμένα. Το *Unifix Software* (Hickey, 1996) είναι μια ηλεκτρονική έκδοση των διάσημων κύβων Unifix, που είναι πλαστικοί κύβοι οι οποίοι ενώνονται ο ένας με τον άλλο και φτιάχνουν ράβδους. Το λογισμικό αυτό επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να προσθέτει χαρακτηριστικά στις δραστηριότητες απαρίθμησης τα οποία δεν είναι διαθέσιμα μόνο στους κύβους. Στην πιο βασική μορφή του προγράμματος, τα παιδιά μπορούν να κατασκευάσουν ράβδους από κύβους οποιουδήποτε χρώματος, να σπάσουν τις ράβδους, να τις μετακινήσουν, να προ-

σθέσουν ήχους σε κάθε κύβο, και πολλά άλλα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέξει να εμφανίζεται ένας αριθμός σε κάθε ράβδο που να δηλώνει το σύνολο. Γίνεται επίσης να δημιουργηθούν ένας έως τέσσερις κύκλοι, με την εμφάνιση του συνόλου του κάθε κύκλου να συνιστά ξεχωριστή επιλογή. Τα παιδιά όχι μόνο μπορούν να απαριθμήσουν μέχρι τους καθορισμένους αριθμούς και να επιλέξουν την εμφάνιση των ψηφίων για επαλήθευση, αλλά μπορούν παράλληλα να διερευνούν, την ιδέα ότι δύο ποσότητες μπορούν να σχηματίσουν ένα μεγαλύτερο ποσό. ■

Μέτρηση Κανονικά και Αντίστροφα

Παρόλο που η ακολουθία προς τα μπρος των αριθμών είναι σχετικά οικεία στα περισσότερα μικρά παιδιά, η προς τα μπρος και η αντίστροφη απαρίθμηση είναι δύσκολες δεξιότητες για πολλούς. Προτείνουμε σύντομες και συχνά επαναλαμβανόμενες ασκήσεις.

Δραστηριότητα 9.5

Προς τα Μπρος και Προς τα Πίσω

Η απαρίθμηση προς έναν αριθμό-στόχο και αντίστροφα με ρυθμικό τρόπο είναι μια σημαντική άσκηση απαρίθμησης. Για παράδειγμα, βάλτε στη σειρά πέντε παιδιά και πέντε καρέκλες μπροστά στην υπόλοιπη τάξη. Ενώ όλη η τάξη μετρά από το 1 ως το 5, τα παιδιά κάθονται ένα-ένα στις καρέκλες. Όταν φτάσετε στον αριθμό-στόχο, στο 5, το επαναλαμβάνετε. Το παιδί που κάθισε με το 5, τώρα σηκώνεται όρθιο και η απαρίθμηση συνεχίζει πάλι ως το 1. Ενώ γίνεται η αντίστροφη απαρίθμηση, τα παιδιά σηκώνονται ένα-ένα όρθια, «1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1, ...». Τα παιδιά του νηπιαγωγείου και της πρώτης τάξης βρίσκουν αυτές τις ασκήσεις διασκεδαστικές και συναρπαστικές. Μπορεί να χρησιμοποιήσετε οποιαδήποτε κίνηση (παλαμάκια, περιστροφή, αναπηδησεις), καθώς η απαρίθμηση συνεχίζεται ρυθμικά.

Η τελευταία δραστηριότητα έχει σχεδιαστεί μόνο για να βοηθήσει τα παιδιά να αποκτήσουν ευχέρεια με τις αριθμητικές λέξεις τόσο κανονικά όσο και αντίστροφα και να μπορούν να αρχίσουν την απαρίθμηση και με άλλους αριθμούς εκτός από το 1. Αν και δεν είναι καθόλου εύκολο για τα μικρά παιδιά, αυτές οι δραστηριότητες ουσιαστικά δεν αντιμετωπίζουν την απαρίθμηση προς τα μπρος ή προς τα πίσω με έναν κατανοητό για τα παιδιά τρόπο. Οι Fosnot και Dolk (2001) περιγράφουν την ικανότητα να μετρούμε ως το «ορόσημο» στην πορεία μας για την κατανόηση των αριθμών. Οι δύο επόμενες δραστηριότητες έχουν σχεδιαστεί για το σκοπό αυτό.

Δραστηριότητα 9.6

Απαρίθμηση με Πούλια

Δώστε σε κάθε παιδί μια συλλογή από 10 ή 12 μικρά πούλια να τα βάλουν στη σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά πάνω στα θρανία τους. Πείτε τους να μετρήσουν τέσσερα πούλια και να τα κρύψουν κάτω από την αριστερή τους παλάμη ή να τα κρύψουν σε ένα ποτήρι (βλ. Σχήμα 9.2). Στη συνέχεια πείτε «Δείξτε την παλάμη σας. Πόσα υπάρχουν εκεί;» (Τέσσερα). «Άς μετρήσουμε, λοιπόν, έτσι: τ-έ-σ-σ-ε-ρ-α (δείχνοντας την παλάμη τους), πέντε, έξι, ...». Επαναλάβετε με άλλους αριθμούς.

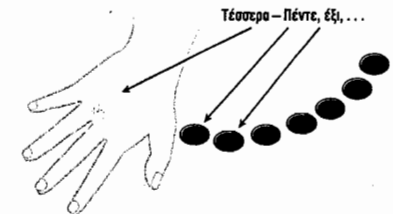
Η επόμενη δραστηριότητα αναφέρεται στην ίδια έννοια με τρόπο ο οποίος στηρίζεται στην επίλυση προβλημάτων.

Δραστηριότητα 9.7

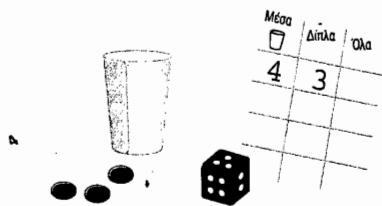
Αληθινή Απαρίθμηση

Αυτό το «παιχνίδι» για δύο παιδιά απαιτεί κάρτες με αριθμούς από 1 ως το 7, ένα ζάρι, ένα χαρτονένιο ποτήρι και μερικά πούλια. Ο πρώτος παίκτης γυρίζει την κάρτα που βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας και τοποθετεί στο ποτήρι τόσα πούλια όσα αναγράφονται στην κάρτα. Η κάρτα τοποθετείται δίπλα από το ποτήρι για να υπενθυμίζει πόσα πούλια βρίσκονται εκεί. Το δεύτερο παιδί ρίχνει το ζάρι και τοποθετεί τα ανάλογα πούλια δίπλα στο ποτήρι (βλ. Σχήμα 9.3). Μαζί αποφασίζουν πόσα πούλια υπάρχουν. Μπορεί να κατασκευαστεί ένα φύλλο αναφοράς με τρεις στήλες «Μέσα στο Ποτήρι», «Δίπλα στο Ποτήρι» και «Όλα». Ο μεγαλύτερος αριθμός της κάρτας μπορεί να μη χρησιμοποιηθεί.

Παρατηρήστε πώς τα παιδιά προσδιορίζουν τη συνολική ποσότητα σε αυτή τη δραστηριότητα. Τα παιδιά που δεν μετρούν ακόμη μπορούν να βγάλουν τα πούλια από το ποτήρι ή μπορεί να μετρήσουν από το ένα χωρίς να βγάλουν τα πούλια. Επιτρέψτε τέτοιες ενέργειες. Καθώς τα παιδιά συνεχίζουν το παιχνίδι, θα αρχίσουν να μετρούν γιατί η στρατηγική θα αποκτήσει νόημα και θα γίνεται χρήσιμη.



ΣΧΗΜΑ 9.2 Απαρίθμηση: «Κρύψτε τέσσερα. Μετρήστε αρχίζοντας από τον αριθμό όσων κρύψατε».



ΣΧΗΜΑ 9.3 Πόσα πούλια υπάρχουν στο «όλα»; Πώς μετρούν τα παιδιά για να βρουν το σύνολο; Βγάζουν τα πούλια από το ποτήρι; Μετράνε από το ένα χωρίς να βγάλουν τα πούλια; Απαριθμούν;

Νόημα των Πρώτων Αριθμών

Η έννοια του αριθμού ήταν ένας όρος που έγινε γνωστός στο τέλος της δεκαετίας του '80, παρόλο που τέτοιοι όροι καθορίζονται αφηρημένα. Ο Howden (1989) περιέγραψε τον όρο ως «μια καλή διαίσθηση για τους αριθμούς και τις σχέσεις που έχουν μεταξύ τους. Εξελίσσεται σταδιακά καθώς κανείς εξερευνά τους αριθμούς, τους βλέπει σε διαφορετικά πλαίσια και τους συσχετίζει με τρόπους που δεν περιορίζονται από τους παραδοσιακούς αλγόριθμους» (σελ. 11). Αυτός μάλλον εξακολουθεί να είναι ο καλύτερος ορισμός.

NCTM Στάδιο
Στις Αρχές και τα Σπάνια, ο όρος έννοια του αριθμού χρησιμοποιείται ελεύθερα στο τμήμα Number and Operation Standard. Αυτό το παράδειγμα είναι από το επίπεδο του νηπιαγωγείου μέχρι τη δεύτερη τάξη: «Καθώς τα παιδιά δουλεύουν με τους αριθμούς, αποκτούν σταδιακά ευελιξία στη σκέψη τους για τους αριθμούς, γεγονός που σημαίνει κατανόηση της έννοιας του αριθμού... Η έννοια του αριθμού αναπτύσσεται καθώς τα παιδιά κατανοούν το μέγεθος των αριθμών, αναπτύσσουν πολλούς τρόπους σκέψης και αναπαράστασης των αριθμών, χρησιμοποιούν τους αριθμούς ως σημεία αναφοράς και αναπτύσσουν ορθές αντιλήψεις για τις πράξεις των αριθμών» (σελ. 80).

Η συζήτηση γύρω από την έννοια του αριθμού ξεκινάει σε αυτό το βιβλίο στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου όπου βλέπουμε είδη σχέσεων και συνδέσεων που θα πρέπει να κάνουν τα παιδιά με αριθμούς μέχρι το 20 περίπου. Όμως «η καλή διαίσθηση για τους αριθμούς» δεν τελειώνει σε αυτούς τους μικρούς ακέραιους αριθμούς. Τα παιδιά συνεχίζουν να αναπτύσσουν την έννοια του αριθμού καθώς ξεκινούν να τους χρησιμοποιούν όταν κάνουν πράξεις, οικοδομούν την έννοια της θετικής αξίας και χρησιμοποιούν ευέλικτες μεθόδους υπολογισμού και εκτιμήσεων που περιλαμβάνουν μεγάλους α-

ριθμούς. Η ευελιξία και διαισθητική σκέψη για τους αριθμούς –η έννοια του αριθμού– θα πρέπει να συνεχίσει να αναπτύσσεται κατά τη διάρκεια των σχολικών χρόνων καθώς τα κλάσματα, οι δεκαδικοί και τα ποσοστά θα προστεθούν στο ρεπερτόριο των παιδιών για τις αριθμητικές ιδέες.

Οι πρώτες έννοιες του αριθμού που συζητήθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο αποτελούν στοιχειώδη συστατικά του αριθμού. Δυστυχώς, πολλά παραδοσιακά προγράμματα προχωρούν κατευθείαν από αυτές τις πρώτες ιδέες στην πρόσθεση και την αφαίρεση, αφήνοντας τα παιδιά με ελάχιστες γνώσεις σχετικά με την έννοια του αριθμού, τις οποίες θα μπορούσαν να τις ενσωματώσουν στα νέα αυτά θέματα. Το αποτέλεσμα είναι τα παιδιά να συνεχίζουν να μετρούν ένα-ένα για να λύσουν απλά προβλήματα και να έχουν δυσκολία να κατανοήσουν βασικά γεγονότα. Η ανάπτυξη της πρώτης έννοιας του αριθμού απαιτεί μεγαλύτερη προσοχή από αυτή που δίνεται στα παραδοσιακά προγράμματα για το νηπιαγωγείο μέχρι και τη δεύτερη τάξη.

Σχέσεις Μεταξύ των Αριθμών από το 1 έως το 10

Από τη στιγμή που τα παιδιά θα έχουν αναπτύξει την έννοια του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου και είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν σωστά τις δεξιότητες απαρίθμησης, δεν έχουν πολλά πλέον να αποκομίσουν από το είδος των δραστηριοτήτων απαρίθμησης που περιγράψαμε προηγουμένα. Χρειάζεται να δημιουργηθούν περισσότερες σχέσεις για να αναπτύξουν τη λεγόμενη σημασία του αριθμού, μια ευέλικτη έννοια του αριθμού που δεν είναι απόλυτα συνδεδεμένη με την απαρίθμηση.

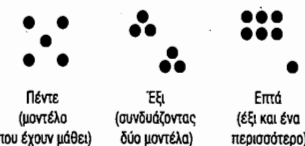
Μια Συλλογή Αριθμητικών Σχέσεων

Το Σχήμα 9.4 δείχνει τους τέσσερις διαφορετικούς τύπους σχέσεων που μπορούν και πρέπει να αναπτύξουν τα παιδιά σε ότι αφορά τους αριθμούς:

- **Χωρικές σχέσεις:** Τα παιδιά μπορούν να μάθουν να αναγνωρίζουν σύνολα αντικειμένων σε πρότυπη σχηματική διάταξη και να λένε πόσα είναι χωρίς να τα μετρούν. Για τους περισσότερους αριθμούς υπάρχουν διάφορα συνηθισμένα πρότυπα. Επίσης, για τους μικρότερους αριθμούς είναι δυνατό να φτιάξουμε πρότυπα με δύο ή περισσότερα πιο εύκολα πρότυπα.
- **Ένα - δύο περισσότερα, ένα - δύο λιγότερα:** Οι σχέσεις του «δύο περισσότερα» και «δύο λιγότερα» δεν αφορούν μόνο την ικανότητα να μετράμε δύο προς τα εμπρός ή δύο προς τα πίσω. Τα παιδιά θα πρέπει να γνωρίζουν ότι το 7, για παράδειγμα, είναι 1 περισσότερο από το 6 και 2 λιγότερο από το 9.

- **Σχέση των αριθμών με το 5 και το 10 ή το 5 και το 10 ως «σημεία αναφοράς»:** Εφόσον το 10 παίζει τόσο σημαντικό ρόλο στο σύστημα απαρίθμησης και αφού δύο πεντάδια κάνουν το 10, είναι πολύ χρήσιμο να αναπαχθούν σχέσεις για τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 10 με σημεία αναφοράς το 5 και το 10.
- **Σχέσεις μέρους-μέρους-όλου:** Η αντίληψη ότι ένας αριθμός απαρτίζεται από δύο ή περισσότερα μέρη αποτελεί και την πιο σημαντική κατάκτηση αριθμητικής σχέσης. Για παράδειγμα, το 7 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύνολο του 3 και ένα σύνολο του 4 ή ως ένα σύνολο του 2 και ένα του 5.

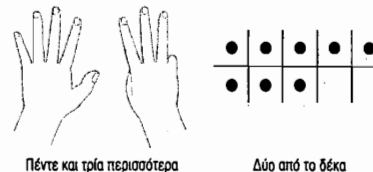
Χωρικές σχέσεις



Ένα περισσότερο/Δύο περισσότερα/Ένα λιγότερο/Δύο λιγότερα



Θέση αριθμών με το 5 και το 10



Μέρος-μέρος-όλο



«Έξι και τρία μας κάνει εννιά»

ΣΧΗΜΑ 9.4 Τέσσερις σχέσεις που αναπτύσσονται σε μικρούς αριθμούς.

Χωρικές Σχέσεις: Αναγνώριση Πρωτοσε Σύνολα

Πολλά παιδιά μαθαίνουν να αναγνωρίζουν τη διάταξη των κουκκίδων στα ξάρια εξαιτίας των πολλών παιχνιδιών με ξάρια που έχουν παίξει. Όμοια «άμεση αναγνώριση» μπορεί να ισχύει και για άλλα πρότυπα (γνωστή επίλυση και ως *subitizing*). Οι προτεινόμενες δραστηριότητες αυτού του βιβλίου έχουν σχεδιαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να ενθαρρύνουν την αναστοχαστική σκέψη και να προάγουν την οικοδόμηση σχέσεων. Τα παιδιά μπορούν να μάθουν και να κατονομάσουν τις ποσότητες μέχρι το 10 χωρίς τη ρουτίνα της απαρίθμησης. Αυτό μπορεί μετά να βοηθήσει στην απαρίθμηση (από ένα ήδη γνωστό πρότυπο) ή στην εκμάθηση συνδυασμών αριθμών (αναγνωρίζοντας ένα πρότυπο από δύο γνωστά μικρότερα πρότυπα).

Ένα καλό υλικό για να χρησιμοποιηθεί σε δραστηριότητες αναγνώρισης προτύπων είναι ένα σύνολο από πιάτα με κουκκίδες. Μπορείτε να τις φτιάξετε από μικρά χάρτινα πιάτα και αυτοκόλλητες κουκκίδες που πωλούνται σε χαρτοπωλεία. Στο Σχήμα 9.5 βλέπουμε μια λογική συλλογή σχεδίων. Παρατηρήστε ότι ορισμένα πρότυπα αποτελούν συνδυασμούς δύο μικρότερων προτύπων ή ενός προτύπου με μία ή περισσότερες επιπλέον κουκκίδες. Αυτά θα τα φτιάξετε με δύο χρώματα. Φρονάστε τα πρότυπά σας να είναι συμπαγή. Αν οι κουκκίδες είναι διασκορπισμένες, δύσκολα διακρίνονται τα σχηματικά τους πρότυπα.

Δραστηριότητα 9.8

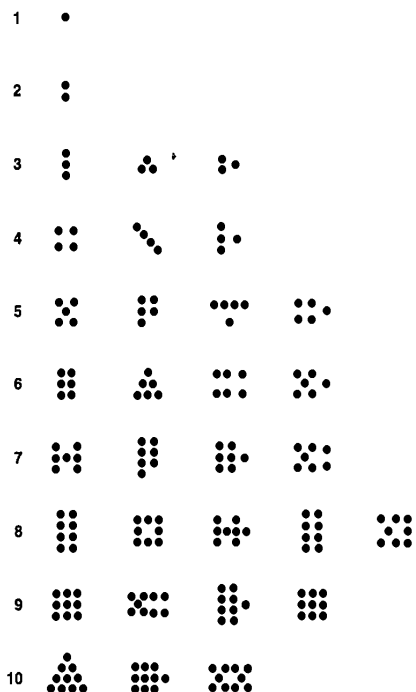
Μαθαίνοντας πρότυπα

Για να παρουσιάσετε τα πρότυπα, δώστε σε κάθε μαθητή περίπου 10 πούλια και ένα κομμάτι χαρτόνι για να τα ακουμπούν. Σηκώστε ψηλά ένα πιάτο με κουκκίδες για 3 περίπου δευτερόλεπτα. «Φτιάξτε το μοντέλο που είδατε χρησιμοποιώντας τα πούλια στο χαρτόνι. Πόσες κουκκίδες είδατε; Πώς τις είδατε;». Σχολιάστε για λίγο το πλήθος και τη διάταξη των κουκκίδων. Κάνετε τη δραστηριότητα παρουσιάζοντας μερικά νέα πρότυπα κάθε μέρα.

Δραστηριότητα 9.9

Παχνίδι Μνήμης με Πιάτο με Κουκκίδες

Κρατήστε ψηλά ένα πιάτο με κουκκίδες μόνο για 1 με 3 δευτερόλεπτα. «Πόσες ήταν; Πώς τις είδατε;». Στα παιδιά αρέσει να βλέπουν πόσο γρήγορα μπορούν να αναγνωρίσουν και να πουν τον αριθμό των κουκκίδων. Συμπεριλάβετε πολλά εύκολα σχέδια και ορισμένα με περισσότερες κουκκίδες καθώς θα ενισχύετε την αυτοπεποίθησή τους. Ως δραστηριότητα σε ομάδες, τα παιδιά μπορούν επίσης να δείχνουν σημιαία το ένα στο άλλο πιάτα με κουκκίδες.



ΣΧΗΜΑ 9.5 Μια χρήσιμη συλλογή από σχέδια κουκκίδων για «πιάτα με κουκκίδες».

Δραστηριότητα 9.10

Ντόμινο

Φτιάξτε μια σειρά από ντόμινο με χαρτόνι και βάλτε ένα πρότυπο με κουκκίδες σε κάθε άκρη. Τα ντόμινο μπορούν να είναι περίπου 6 επί 12 εκατοστά. Τα ίδια πρότυπα μπορούν να εμφανίζονται σε πολλά ντόμινο με το κάθε ένα να αποτελείται από διαφορετικά ζεύγη προτύπων. Αφήστε τα παιδιά να παίζουν με τα ντόμινο με το συνηθισμένο τρόπο, ταιριάζοντας, δηλαδή, τις άκρες. Μια δραστηριότητα ταχύτητας είναι να απλώσετε όλα τα ντόμινο και να δείτε πόσο γρήγορα μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν όλα στο παιχνίδι ή να παίξουν έως ότου να μην υπάρχουν άλλα που να μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν. Θα μπορούσατε επίσης να χρησιμοποιήσετε και συνηθισμένα ντόμινο, αλλά δεν θα υπάρχουν τόσα πολλά πρότυπα.

Οι δραστηριότητες της άμεσης αναγνώρισης με τα πιάτα είναι συναρπαστικές και μπορούν να γίνουν μέσα σε 5 λεπτά οποιαδήποτε στιγμή της μέρας ή ανάμεσα στα μαθήματα. Αξίζει να τα χρησιμοποιήσετε σε οποιαδήποτε τάξη του δημοτικού και οποιαδήποτε στιγμή της χρονιάς.

Ένα - Δύο Περισσότερα,

Ένα - Δύο Λιγότερα

Όταν τα παιδιά μετρούν, δεν έχουν κανένα λόγο να σκεφτούν τον τρόπο με τον οποίο σχετίζεται ο ένας αριθμός με τον άλλο. Ο μόνος στόχος είναι να αντιστοιχίσουν λέξεις με αντικείμενα μέχρι να ολοκληρώσουν την απαρίθμηση. Για να μάθουν ότι το 6 και το 8 συνδέονται με το ζεύγος των σχέσεων «δύο περισσότερα» και «δύο λιγότερα», χρειάζεται να σκεφτούν αυτές τις ιδέες μέσα από δραστηριότητες που να επιτρέπουν την απαρίθμηση. Η ευθεία ή αντίστροφη απαρίθμηση, ένα-ένα ή δύο-δύο κάθε φορά, είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την οικοδόμηση αυτών των ιδεών.

Παρατηρήστε ότι η σχέση «δύο περισσότερα από» είναι πολύ διαφορετική από το «έρχεται δύο μετά από». Αυτή η τελευταία σχέση εφαρμόζεται στη σειρά των λέξεων για τους αριθμούς και όχι στις ποσότητες που αντιπροσωπεύουν. Η σχέση του έρχεται-δύο-μετά-από μπορεί να εφαρμοσθεί στα γράμματα του αλφάβητου. Το γράμμα Φ είναι δύο μετά από Τ. Ωστόσο, δεν υπάρχει αριθμητική ή ποσοτική διαφορά ανάμεσα στο Φ και το Τ. Η ποσότητα του 8 θα εξακολουθούσε να είναι δύο περισσότερα από το 6 ακόμα και αν δεν υπήρχε αριθμητική σειρά για να μετρηθούν αυτές οι ποσότητες. Η αριθμητική σχέση είναι που θέλετε να αναπτύξετε, ακόμα και αν τα παιδιά αρχικά θα χρησιμοποιούν την απαρίθμηση με διαφορετικό τρόπο έτσι ώστε να καταφέρουν να την αναπτύξουν.

Η ακόλουθη δραστηριότητα είναι ένα καλό σημείο εκκίνησης για να βοηθήσετε τα παιδιά με αυτές τις σχέσεις. Όπως περιγράψαμε, επικεντρώνεται στη σχέση δύο-περισσότερα-από, αν και μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ίδιο καλά για οποιαδήποτε από τις τέσσερις σχέσεις.

ΔΙΕΥΡΥΝΩΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

Ένα διευρυμένο μάθημα που στηρίζεται στην δραστηριότητα 9.11 μπορείτε να το βρείτε στο τέλος του πέμπτου κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 9.11

Φτιάξτε ένα Σύνολο για τη Σχέση «Δύο Περισσότερα»

Δώστε στα παιδιά έξι περίπου κάρτες με κουκκίδες. Πρέπει να φτιάξουν ένα σύνολο με πούλια που να είναι δύο περισσότερα από το σύνολο που αναπαριστά

καθεμία από τις κάρτες. Κατά παρόμοιο τρόπο, αφού απλώσετε οκτώ με δέκα κάρτες με κουκκίδες να βρείτε ακόμη μια κάρτα για την καθεμία που να έχει δύο κουκκίδες λιγότερες από την κάρτα που δείχνετε (παράλειψτε την κάρτα με το 1 και το 2 για το «δύο λιγότερα από» κ.ο.κ.).

Σε δραστηριότητες όπου τα παιδιά βρίσκουν ένα σύνολο ή φτιάχνουν ένα σύνολο, μπορούν να προσθέσουν μια αριθμοκάρτα (μια μικρή κάρτα με έναν αριθμό γραμμένο πάνω της) το κάθε σύνολο με το οποίο ασχολούνται. Μπορείτε επίσης να τα ενθαρρύνετε να διαβάσουν με τη σειρά μια αριθμητική πρόταση στο διπλανό τους. Αν, για παράδειγμα, το παιδί έχει φτιάξει ένα σύνολο που υπερβαίνει κατά δύο ένα σύνολο των τεσσάρων, μπορεί να το διαβάσει λέγοντας την αριθμητική πρόταση «Δύο περισσότερα από το τέσσερα μας κάνουν έξι» ή «Έξι είναι δύο περισσότερα από το τέσσερα».

Η επόμενη δραστηριότητα συνδυάζει τις σχέσεις έτσι ώστε να πρέπει τα παιδιά να είναι πιο προσεκτικά στο ποια ιδέα πρέπει να σκεφτούν.

Δραστηριότητα 9.12

Περισσότερο ή λιγότερο

Αυτή είναι μία δραστηριότητα για δύο παίκτες ή για μια μικρή ομάδα. Χρησιμοποιήστε τα Blackline Masters για να κάνετε μία τράπουλα με κάρτες Περισσότερο-ή-Λιγότερο όπως φαίνεται και στο Σχήμα 9.6. Φτιάξτε τέσσερις ή πέντε από κάθε τύπο κάρτας. Θα χρειαστείτε επίσης μία ομάδα καρτών με αριθμούς από το 3 μέχρι το 10 (2 για τον κάθε αριθμό). Ένα παιδί τραβά μια αριθμοκάρτα και την τοποθετεί έτσι ώστε να μπορούν να βλέπουν όλα τα παιδιά τους αριθμούς. Τοποθετείστε σε ένα ποτήρι τον ίδιο αριθμό από πούλια. Έπειτα, ένα άλλο παιδί τραβά μία κάρτα από την τράπουλα Περισσότερο-ή-Λιγότερο και την τοποθετεί δίπλα στην αριθμοκάρτα. Για τις κάρτες Περισσότερο, προσθέτει στο ποτήρι τα οντιστοίχα πούλια. Για τις κάρτες Λιγότερο, αφαιρεί πούλια. Για τις Μηδενικές κάρτες δεν γίνεται καμία αλλαγή. Μόλις γεμίσει το ποτήρι, το κάθε παιδί προβλέπει πόσα πούλια υπάρχουν μέσα. Βγάζουν τα πούλια και τα μετράνε. Έτσι τελειώνει αυτός ο γύρος του παιχνιδιού και τραβάνε μια νέα αριθμοκάρτα.

Το «Περισσότερο ή Λιγότερο» μπορεί να παχτεί με όλη την τάξη. Τους λέτε πόσα πούλια θα βάλτε μέσα στο ποτήρι και γράφετε τον αριθμό στον πίνακα. Βάλτε ένα παιδί να ζωγραφίσει μία κάρτα και ζητήστε από τα υπόλοιπα παιδιά να προβλέψουν το νέο ποσό. Οι λέξεις *περισσότερο* ή *λιγότερο* μπορούν να συνδυαστούν ή να αντικατασταθούν με το *συν* ή *μείον* έτσι ώστε να συνδεθούν αυτές οι ιδέες με τις αριθμητικές πράξεις, ακόμα και αν δεν τις έχετε διδάξει ακόμα.

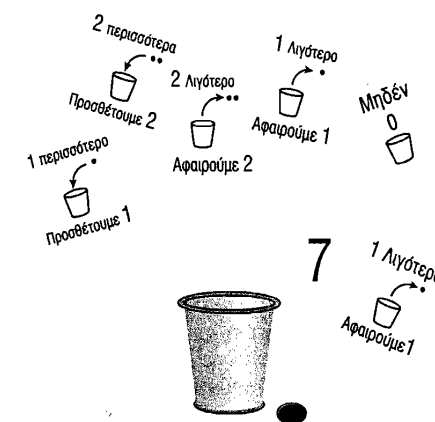
Η αριθμομηχανή μπορεί να γίνει μία συναρπαστική για πρακτική πάνω στις σχέσεις του ένα περισσότερο από, δύο περισσότερα από, ένα λιγότερο από και δύο λιγότερα από.

Δραστηριότητα 9.13

Αριθμομηχανή «Δύο Περισσότερα Από»

Διδόξτε στα παιδιά πώς να κατασκευάζουν μια μηχανή «δύο περισσότερα». Πατήστε 0 [+ 2 [=]. Με αυτό η αριθμομηχανή μετατρέπεται σε μια τέτοια μηχανή. Πατήστε τώρα έναν οποιονδήποτε αριθμό το 5, για παράδειγμα. Τα παιδιά κρατούν το δάχτυλό τους πάνω από το πλήκτρο [=] και προβλέπουν τον αριθμό, ο οποίος είναι δύο περισσότερα από 5. Έπειτα πατούν [=] για επαλήθευση. Εάν δεν πατήσουν κανένα από τα πλήκτρα των πράξεων (+, -, ×, ÷), η «μηχανή» θα συνεχίσει να λειτουργεί κατ' αυτόν τον τρόπο.

Αυτό που συμβαίνει στην πραγματικότητα με τη μηχανή του «δύο περισσότερα από» είναι ότι η αριθμομηχανή «θυμάται» ή αποθηκεύει την τελευταία πράξη, δηλαδή το «+ 2», και το προσθέτει σε οποιονδήποτε αριθμό βρίσκεται στο πλαίσιο όταν πατούμε το [=]. Αν το παιδί εξακολουθήσει να πατάει το [=], η αριθμομηχανή θα μέτρα ανά 2. Καινούργιοι αριθμοί μπορούν να πληκτρολογηθούν όποια στιγμή θέλουμε ακολουθούμενοι από το [=]. Για να κάνουμε μια μηχανή «δύο λιγότερα από», πατάμε 2 [- 2 [=] (με το πρώτο πάτημα του 2 αποφεύ-



ΣΧΗΜΑ 9.6 Για να παίξουν το «Περισσότερο ή Λιγότερο» τα παιδιά ζωγραφίζουν μία αριθμοκάρτα που να λέει πόσα πούλια να βάλουν στο ποτήρι. Έπειτα ζωγραφίζουν μία κάρτα Περισσότερο-ή-Λιγότερο και προσαρμόζουν αντίστοιχα τον αριθμό από τα πούλια. Έπειτα προβλέπουν πόσα πούλια υπάρχουν στο ποτήρι.

γουμε τον αριθμητικό αριθμό). Τα παιδιά στην αρχή ξεχνούν και πατούν τα πλήκτρα των πράξεων, κάτι που ουσιαστικά αλλάζει αυτό που κάνει η αριθμομηχανή. Σύντομα, ωστόσο, αποκτούν οικειότητα με τη συγκεκριμένη χρήση της αριθμομηχανής.

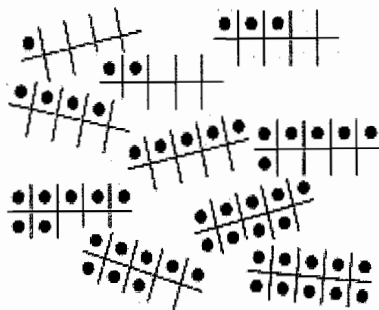
Η αριθμομηχανή του «δύο-περισσότερα-από» θα δώσει φυσικά αποτέλεσμα «2 περισσότερα» από όποιον αριθμό πιέσουμε, συμπεριλαμβανομένων και αυτών με δύο ή περισσότερα ψηφία. Αν και δεν υπάρχει στα παραδοσιακά αναλυτικά προγράμματα, η σχέση δύο-περισσότερα-από θα πρέπει να επεκταθεί και στους διψήφιους αριθμούς μόλις τα παιδιά αρχίσουν να τους γνωρίζουν. Ένας τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι να ρωτήσουμε ποιός αριθμός είναι δύο περισσότερα από το 7. Αφού πάρете τη σωστή απάντηση, ρωτήστε «Ποιος αριθμός είναι δύο περισσότερα από το 37;» και ακολουθήστε την ίδια τακτική για οποιοδήποτε αριθμό τελειώνει σε 7. Όταν θα το δοκιμάσετε αυτό για το 8 και το 9, να περιμένετε δυσκολίες και απρόσμενες απαντήσεις, όπως για παράδειγμα «δύο περισσότερα από το 28 είναι το είκοσι-δέκα». Στην πρώτη τάξη, αυτή η προσπάθεια μπορεί να αποδειχθεί αρκετά πολύτιμη. Η δραστηριότητα «Περισσότερο ή Λιγότερο» μπορεί να επεκταθεί επίσης και σε μεγαλύτερους αριθμούς, αν δεν χρησιμοποιούμε πραγματικά πούλια.

Αριθμοί με Σημεία Αναφοράς το 5 και το 10

Εδώ και πάλι θέλουμε να βοηθήσουμε τα παιδιά να συνδέσουν έναν αριθμό με άλλους αριθμούς και ιδιαίτερα με το 5 και το 10. Τέτοιες σχέσεις είναι εξαιρετικά χρήσιμες όταν σκεφτόμαστε διάφορους συνδυασμούς αριθμών. Για παράδειγμα, σκεφτείτε ποιο ρόλο μπορεί να παίξει η γνώση ότι το 8 είναι «5 συν 3» και «10 μείον 2» σε καθεμία από τις ακόλουθες περιπτώσεις: $5 + 3$, $8 + 6$, $8 - 2$, $8 - 3$, $8 - 4$, $13 - 8$ (σε αυτό το σημείο αξίζει να σταματήσετε και να σκεφτείτε το ρόλο του 5 και του 10 σε καθεμία από αυτά τα παραδείγματα). Παρόμοιες σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν αργότερα για την ανάπτυξη νοερών υπολογιστικών δεξιοτήτων με μεγαλύτερους αριθμούς, όπως το $68 + 7$.

Το πιο συνηθισμένο και ίσως πιο σημαντικό μοντέλο για τη σχέση αυτή είναι το πλαίσιο των δέκα (ten-frame). Το πλαίσιο των δέκα είναι απλά ένας πίνακας 2×5 , στον οποίο τοποθετούνται πούλια ή κουκκίδες για να απεικονίσουν τους αριθμούς (βλ. Σχήμα 9.7). Τα πλαίσια των δέκα μπορείτε απλά να τα ζωγραφίσετε σε ένα κομμάτι χαρτόνι (ή χρησιμοποιήστε τα Blackline Master). Δεν χρειάζεται κάτι εξεζητημένο και κάθε παιδί μπορεί να έχει από ένα. Το πλαίσιο των δέκα έχει ενσωματωθεί σε πολλές δραστηριότητες σε αυτό το βιβλίο και γίνεται ολοένα και πιο δημοφιλές στα καθιερωμένα διδακτικά βιβλία για παιδιά.

Τα παιδιά στο νηπιαγωγείο ή στις αρχές της πρώτης, τα



ΣΧΗΜΑ 9.7 Πλαίσια των δέκα.

οποία δεν έχουν διερευνήσει ακόμη τα πλαίσια του δέκα, είναι καλή ιδέα να αρχίσουν με πλαίσια του πέντε. Αυτή η σειρά των πέντε τμημάτων σχεδιάζεται επίσης και σε ένα φύλλο χαρτί (ή χρησιμοποιήστε τα Blackline Master). Δώστε στα παιδιά δέκα περίπου πούλια, τα οποία θα ταυρίζουν στα τμήματα των πλαισίων των πέντε και κάνουν την επόμενη δραστηριότητα.

Δραστηριότητα 9.14

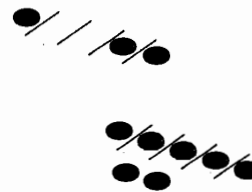
Τα πλαίσια των Πέντε μας λένε

Εξηγήστε ότι μόνο ένα πούλι επιτρέπεται σε κάθε τμήμα των πλαισίων των πέντε. Δεν επιτρέπεται κανένα άλλο πούλι. Βάλτε τα παιδιά να παραστήσουν το 3 στο πλαίσιο των πέντε. «Τι λέτε για το τρία κοιτάζοντας στον πίνακά σας;». Αφού ακούσετε διάφορα παιδιά, δοκιμάστε άλλους αριθμούς από το 0 έως το 5. Τα παιδιά επιτρέπεται να τοποθετήσουν τα πούλια τους στο πλαίσιο των πέντε με οποιονδήποτε τρόπο. Αυτό που παρατηρούν θα διαφέρει αρκετά από παιδί σε παιδί. Για παράδειγμα, με τέσσερα πούλια, ένα παιδί με δύο σε κάθε άκρη μπορεί να πει: «Έχει ένα κενό στο μέσο» ή «Είναι δύο και δύο». Δεν υπάρχουν λανθασμένες απαντήσεις. Επικεντρώστε την προσοχή στο πόσα πούλια χρειάζονται ακόμη για να έχουμε 5 ή πόσο μακριά από το 5 είναι ένας αριθμός. Στη συνέχεια δοκιμάστε αριθμούς μεταξύ 5 και 10. Ο κανόνας «ένα πούλι σε κάθε τμήμα» ισχύει ακόμη, αλλά μην εξηγήσετε πώς γίνεται αυτό. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 9.8, οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από 5 αναπαρίστανται με ένα πλήρες πλαίσιο των πέντε και επιπρόσθετα πούλια στον πίνακα αλλά όχι στο πλαίσιο. Κατά τη συζήτηση εστιάστε την προσοχή σε αυτούς τους μεγαλύτερους αριθμούς όπως το 5 και λίγο ακόμη: «Το οκτώ είναι πέντε και τρία ακόμη».

Σημειώστε ότι το πλαίσιο των πέντε εστιάζεται στη σχέση του 5 ως σημείο αναφοράς για τους αριθμούς αλλά δεν συσχετίζει αριθμούς με το 10. Ύστερα από μια εβδομάδα περίπου χρήσης των πλαισίων των πέντε, εισάγετε τα πλαίσια των δέκα. Ενδεχομένως να επιθυμείτε να παίξει η τάξη μια εκδοχή της Δραστηριότητας 9.14 με πλαίσια των δέκα, αλλά φροντίστε να εισάγετε σύντομα τον ακόλουθο κανόνα αναπαράστασης των αριθμών στα πλαίσια των δέκα: *Γεμίζουμε πάντα την πάνω σειρά πρώτα, αρχίζοντας από τα αριστερά, όπως διαβάζουμε. Όταν γεμίσουν όλα τα κενά στην πρώτη σειρά, τα πούλια μπορούν να τοποθετηθούν στην κάτω σειρά, επίσης από τα αριστερά.* Με αυτόν τον κανόνα εφαρμόζεται ο «συνηθισμένος» τρόπος αναπαράστασης των αριθμών στο πλαίσιο των δέκα, όπως στο Σχήμα 9.7.

Ο οριζόντιος προσανατολισμός των πλαισίων των δέκα δεν είναι συσπώδης, αν και είναι αυτός που γενικά παρουσιάζεται σε αυτό το βιβλίο. Ωστόσο, κάποιοι εκπαιδευτικοί τοποθετούν τα πούλια σε κάθετα πλαίσια των δέκα και γεμίζουν πρώτα τα κάτω τμήματα αντί να γεμίσουν μία σειρά από τα πέντε πρώτα (π.χ. Losq, 2003, 2005). Με αυτόν τον τρόπο, το 5 εμφανίζεται ως δύο κουκκίδες σε μία σειρά ή στήλη και ως τρία σε μία άλλη. Μπορούμε να πούμε ότι η διάταξη δεν τονίζει τη σχέση του 5 και του 10 τόσο έντονα, όσο η διάταξη «μια-σειρά-τη-φορά» που παρουσιάζεται στο Σχήμα 9.7.

Για κάποιο χρονικό διάστημα, πολλά παιδιά θα μετρούν κάθε πούλι στο πλαίσιο των δέκα. Μερικά θα αφαιρέσουν όλα τα πούλια και θα αρχίσουν την αναπαράσταση ενός νέου αριθμού σε άδειο πλαίσιο. Άλλα παιδιά θα μάθουν σύντομα να προσαρμόζουν τους αριθμούς προσθέτοντας ή αφαιρώντας μόνο τον απαιτούμενο αριθμό από πούλια, χρησιμοποιώντας συχνά μια σειρά των πέντε χωρίς να την απαριθμούν. Μην τα πιέζετε. Με συνεχή εξάσκηση, όλα τα παιδιά θα βελτιωθούν. Ο τρόπος με τον οποίο τα παιδιά χρησιμοποιούν τα πλαίσια των δέκα μας πληροφορεί σχετικά με το πόσο έχουν αναπτύξει την έννοια του αριθμού.



ΣΧΗΜΑ 9.8 Ένα πλαίσιο των πέντε εστιάζεται στο 5 ως σημείο αναφοράς. Τα πούλια τοποθετούνται σε μία θέση κάθε φορά και τα παιδιά λένε πώς βλέπουν τον αριθμό στο πλαίσιο.

Δραστηριότητα 9.15

Οι Τρελοί Μπερδεμένοι Αριθμοί

Αυτή η δραστηριότητα είναι από το *Mathematics Their Way* (Baratta-Lorton, 1976). Όλα τα παιδιά φτιάχνουν τον ίδιο αριθμό στο πλαίσιο των δέκα. Ο/η εκπαιδευτικός στη συνέχεια λείει τυχαίους αριθμούς ανάμεσα στο 0 και στο 10. Έπειτα από κάθε αριθμό, τα παιδιά αλλάζουν τα πλαίσια των δέκα έτσι ώστε να δείχνουν το νέο αριθμό. Τα παιδιά μπορούν να παίξουν αυτό το παιχνίδι μεμονωμένα ετοιμάζοντας σειρές από 15 περίπου «τρελούς, μπερδεμένους αριθμούς». Ένα παιδί παίζει τον/την «εκπαιδευτικό» και τα υπόλοιπα χρησιμοποιούν τα πλαίσια των δέκα. Στα παιδιά αρέσει να φτιάχνουν τις δικές τους σειρές αριθμών.

Οι «Τρελοί Μπερδεμένοι Αριθμοί» είναι κάτι παραπάνω από ένα πρόβλημα. Πώς αποφασίζετε τον τρόπο που θα αλλάξετε το δικό σας πλαίσιο των δέκα; Ορισμένα παιδιά θα καθαρίσουν τελείως ολόκληρο το πλαίσιο και θα αρχίσουν από την αρχή με κάθε αριθμό. Άλλα θα έχουν μάθει πώς μοιάζει κάθε αριθμός πάνω στο πλαίσιο. Για να προσθέσετε άλλη μια διάσταση, βάλτε τα παιδιά να σας πουν, πριν αλλάξουν τα πλαίσιά τους, πόσα πούλια χρειάζεται να προστεθούν ακόμη («συν») ή να αφαιρεθούν («μείον»). Τότε θα σας πουν το ανώλογο ποσό που πρέπει να προστεθεί ή να αφαιρεθεί. Αν, για παράδειγμα, στα πλαίσια υπήρχε ο αριθμός 6 και ο δάσκαλος έλεγε «τέσσερα», τα παιδιά θα απαντούσαν «Μείον δύο!» και μετά θα έκαναν τις αλλαγές τους στα πλαίσια των δέκα. Αξίζει να ακολουθηθεί μια συζήτηση σχετικά με το πώς ξεόρντι να κάνουν.

Οι κάρτες με τα πλαίσια των δέκα είναι άλλη μια χρήσιμη παραλλαγή. Φτιάξτε κάρτες από χαρτόνι, πρώτου στο μέγεθος μιας μικρής καρτέλας αρχιεοθέτησης και σχεδιάστε σε καθεμία από ένα πλαίσιο των δέκα. Τις κουκκίδες θα τις σχεδιάζετε μέσα στα πλαίσια. Ένα σετ από 20 κάρτες αποτελείται από μια κάρτα με το 0, μια κάρτα με το 10 και από δύο κάρτες για κάθε αριθμό από το 1 έως το 9. Οι κάρτες δίνουν τη δυνατότητα για εξάσκηση της χρήσης του 5 και του 10 ως σημείων αναφοράς, όπως και στην επόμενη δραστηριότητα.

Δραστηριότητα 9.16

Κάρτες με Πλαίσια των Δέκα

Δείτε στιγμιόια κάρτες με πλαίσια των δέκα στην τάξη ή στην ομάδα και δείτε πόσο γρήγορα μπορούν να σας πουν πόσες κουκκίδες υπήρχαν. Αυτή η δραστηριότητα γίνεται γρήγορα, διαρκεί μόνο μερικά λεπτά, μπορεί να γίνει οποιαδήποτε στιγμή και είναι πολύ διασκεδαστική, αν ενθαρρύνετε την ταχύτητα.

Σημαντικές παραλλαγές αυτής της δραστηριότητας είναι:

- Τα παιδιά λένε τον αριθμό των κενών στην κάρτα, αντί για τον αριθμό των κουκκίδων.
- Τα παιδιά λένε ένα παραπάνω από τον αριθμό των κουκκίδων (ή δύο παραπάνω, καθώς και παρακάτω).
- Τα παιδιά αναφέρουν κάποιο «δεδομένο σχετικό με το δέκα» –για παράδειγμα «Έξι και τέσσερα κάνουν δέκα».

Αυτές οι ασκήσεις βασίζονται κατά πολύ στην επύλωση προβλημάτων. Τα παιδιά πρέπει να αναπαράσθουν στις δύο σειρές των πέντε, τα κενά που μένουν και πώς κάθε αριθμός είναι περισσότερο ή λιγότερο από το 5 και ακόμη πόσο απέχει από το 10. Οι συζητήσεις που προηγούνται σχετικά με το πώς φαίνονται οι αριθμοί στα πλαίσια των πέντε και των δέκα, είναι παραδείγματα των σύντομων ασκήσεων που θα ακολουθήσουν όπου το ένα παιδί μπορεί να μάθει από το άλλο.

Ο βαθμός στον οποίο ανταποκρίνονται τα παιδιά στο παιχνίδι με τις «Κάρτες με τα Πλαίσια των Δέκα» αποτελεί μία καλή ένδειξη των αριθμητικών ιδεών και θα πρέπει να περιλαμβάνεται σε οποιαδήποτε γρήγορη αξιολόγηση για το επίπεδο της κατανόησης του κάθε παιδιού. Συμπεριλάβετε επίσης τις παραλλαγές της δραστηριότητας που αναφέρθηκαν. Εφόσον η απόσταση μέχρι το 10 είναι τόσο σημαντική, ένας άλλος τρόπος αξιολόγησης είναι να δείξετε ένα αριθμό μικρότερο από το 10 και να ρωτήσετε, «Αν υπήρχαν τόσες κουκκίδες στο πλαίσιο των δέκα, πόσοι άδειοι χώροι θα υπήρχαν;». Ή μπορείτε απλά να ρωτήσετε, «Αν έχω επτά, πόσα ακόμα χρειάζομαι για να κάνω δέκα;» ■

Σχέσεις Μέρους-Μέρους-Όλου

II Σπαματί και στοκάρομα

Προτού συνεχίσετε το διάβασμα, πάρτε μερικά νομίσματα ή πούλια. Μετρήστε ένα σύνολο από οχτώ πούλια μπροστά σας σαν να ήσασταν μαθητές ή μαθήτριες της πρώτης ή δεύτερης τάξης.

Οποιοδήποτε παιδί που έχει μάθει να μετράει με νόημα, μπορεί να μετρήσει οχτώ αντικείμενα όπως κάνετε εσείς. Αυτό που έχει σημασία σε αυτή την εμπειρία είναι αυτό που δεν χρειάστηκε να σκεφτείτε. Τίποτε δεν θα έκανε ένα παιδί να παρατηρήσει άμεσα ότι ένα σύνολο από οχτώ αποτελείται από δύο μέρη. Ξεχωρίστε, για παράδειγμα, τα πούλια που χωρίσατε σε στήλες και αναλογιστείτε τους συνδυασμούς. Θα μπορούσε να είναι 2 και 6 ή 7 και 1 ή 4 και 4. Αλλάξτε τις δύο στήλες και αναλογιστείτε το νέο σας συνδυασμό. Το να εστιάσετε στην ποσότητα σύμφωνα με τα μέρη από τα οποία αποτελείται, έχει σημαντικές επιδράσεις στην ανάπτυξη της

έννοιας του αριθμού. Μία γνωστή ερευνητρια της έννοιας του αριθμού στα παιδιά, η Lauren Resnick (1983), δηλώνει:

Ίσως η κυριότερη εννοιολογική επίτευξη των πρώτων σχολικών χρόνων να είναι η ερμηνεία των αριθμών με βάση τις σχέσεις μέρους και όλου. Με την εφαρμογή ενός σχήματος Μέρους-Όλου σε μια ποσότητα, δίνεται στα παιδιά η δυνατότητα να σκέφτονται τους αριθμούς ως συνθέσεις άλλων αριθμών. Αυτός ο εμπλουτισμός της κατανόησης των αριθμών ανοίγει το δρόμο σε τρόπους επύλωσης και ερμηνείας μαθηματικών προβλημάτων που δεν διαθέτουν τα μικρότερα παιδιά (σ. 114).

Μια μελέτη σε παιδιά του νηπιαγωγείου εξέταζε όλα τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων του τύπου «μέρος-μέρος-όλο» στις αριθμητικές έννοιες (Fischer, 1990). Με 20 μόνο μέρες διδασκαλίας στη διάθεσή τους για να μάθουν τη δομή «μέρος-μέρος-όλο», τα παιδιά σημείωσαν σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στις αριθμητικές έννοιες, στα λεκτικά προβλήματα και στις έννοιες της θεσιακής αξίας των ψηφίων σε σύγκριση με την ομάδα ελέγχου.

Τα Βασικά Συστατικά των Δραστηριοτήτων του Τύπου Μέρους-Μέρους-Όλου

Οι περισσότερες δραστηριότητες της μορφής μέρος-μέρος-όλο εστιάζονται αποκλειστικά σε έναν και μόνο αριθμό. Έτσι, το παιδί ή η ομάδα των παιδιών που εργάζονται μαζί μπορεί να ασχολούνται με τον αριθμό 7 από την αρχή ως το τέλος της δραστηριότητας. Τα παιδιά είτε χτίζουν τη συγκεκριμένη ποσότητα από δύο ή περισσότερα μέρη είτε ξεκινούν με ολόκληρο το ποσό και το διαχωρίζουν σε δύο ή περισσότερα μέρη. Μια ομάδα δύο ή τριών παιδιών μπορεί να εργάζεται με έναν αριθμό σε μια δραστηριότητα για 5 ως 20 λεπτά. Συνήθως τα παιδιά του νηπιαγωγείου ξεκινούν αυτές τις δραστηριότητες με το 4 ή το 5. Καθώς αναπτύσσονται οι έννοιες, τα παιδιά μπορούν να επεκταθούν στους αριθμούς από το 6 ως το 12. Μία ευρεία γκάμα υλικών και τύπων μπορεί να βοηθήσει να διατηρηθεί το ενδιαφέρον των παιδιών. Δεν είναι ασυνήθιστο να βρίσκουμε παιδιά στη δεύτερη τάξη που δεν έχουν αναπτύξει ακόμη στερεές δομές του τύπου μέρος-μέρος-όλο για τους αριθμούς της κλίμακας 7 με 12.

Όταν τα παιδιά κάνουν αυτές τις δραστηριότητες, βάλτε τα να πουν ή να «διαβάσουν» φωναχτά τα μέρη ή να τα γράψουν σε ένα φύλλο σημειώσεων (ή να τα κάνουν και τα δύο). Η ανάγνωση ή το γράψιμο των συνδυασμών σας βοηθά να ενθαρρύνετε τη συλλογιστική σκέψη γύρω από τη σχέση μέρος-μέρος-όλο. Το γράψιμο μπορεί να έχει τη μορφή σχεδίων, αριθμών γραμμένων σε κενά (_____ και _____) ή εξισώσεων πρόσθεσης, αν έχουν ήδη διδαχθεί ($3 + 5 = 8$). Υπάρχει μια σαφής σύνδεση ανάμεσα στις έννοιες μέρος-μέρος-όλο και στην ιδέα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Δραστηριότητες του τύπου μέρος-μέρος-όλο

Η ακόλουθη δραστηριότητα και οι παραλλαγές της μπορούν να θεωρηθούν ως «βασικές» του μέρους-μέρους-όλου.

Δραστηριότητα 9.17

Κατασκευάστε το από μέρη

Δώστε στα παιδιά ένα είδος υλικού, όπως σφηνουβλάκια ή κύβους από χρωματιστό χαρτί. Σκοπός είναι να δείτε πόσο διαφορετικοί συνδυασμοί μπορούν να γίνουν χρησιμοποιώντας δύο μέρη (αν θέλετε μπορείτε να τους αφήσετε να συνδυάσουν περισσότερα μέρη). Κάθε διαφορετικός συνδυασμός μπορεί να γίνει σε ένα μικρό πλαίσιο, όπως ένα τέταρτο χαρπύ. Ορίστε μερικές ιδέες, που μπορείτε να τις δείτε και στο σχήμα 9.9.

- Φτιάξτε σύνολο με δέχρωμα υλικά, όπως φασόλια βαμμένα με σπρέι από τη μία πλευρά (είναι διαθέσιμα επίσης και σε πλαστικό).
- Φτιάξτε ράβδους συνδέοντας σφηνουβλάκια. Φτιάξτε κάθε ράβδο με δύο χρώματα. Διατηρήστε τα χρώματα στην ίδια ομάδα.
- Χρωματίστε σειρές από τετράγωνα σε χαρτί με καμβά από τετραγώνια πλευράς δύο εκατοστών.
- Κάντε συνδυασμούς χρησιμοποιώντας «ταινίες με κουκκίδες», οι οποίες είναι απλά λωρίδες από χαρτόνι πάνω στις οποίες έχουμε κολλήσει κουκκίδες (φτιάξτε πολλές λωρίδες με μία έως τέσσερις κουκκίδες και λιγότερες ταινίες με πέντε έως δέκα κουκκίδες).
- Κάντε συνδυασμούς με δίστηλες ταινίες. Αυτές θα τις κόψετε από χαρτόνι και θα σχεδιάσετε με το χάρακα τετράγωνα πλευράς 2 εκατοστών. Εκτός από το μονό τετράγωνο, όλα τα κομμάτια κόβονται από δύο στήλες τετραγώνων.

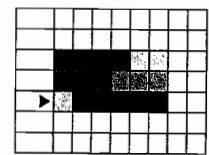
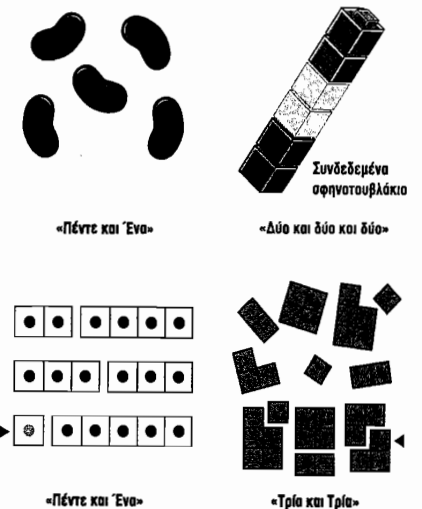
Όπως παρατηρείτε τα παιδιά να δουλεύουν με την παραπάνω δραστηριότητα, ζητήστε τους να «διαβάσουν» την αριθμητική πρόταση που πάει με κάθε σχέδιο. Ενθαρρύνετε τα παιδιά να διαβάσουν το ένα στο άλλο τα σχέδιά τους. Μια ομάδα δύο ή τριών παιδιών που δουλεύει με τα ίδια υλικά μπορεί να παράγει μεγάλο αριθμό συνδυασμών που μπορεί να περιλαμβάνουν πολλές επαναλήψεις.

Μια σημείωση για τις «δύο στήλες χαρτών» που φαίνεται στο Σχήμα 9.9 αν αναφέρεται στην αντίστοιχη δραστηριότητα: στην αδημοσίευτη έρευνά της, η Kuske (2001) αναφέρει ότι το μοντέλο των δύο στηλών είναι σημαντικότερο από τα πρότυπα κουκκίδων και τα πλαίσια των δέκα. Η λογική της είναι ότι τα κομμάτια είναι «προσθετικά». Αυτό σημαίνει ότι ο

συνδυασμός οποιωνδήποτε δύο κομματιών είναι άλλο ένα κομμάτι του συνόλου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.9. Φυσικά αυτό δεν ισχύει για τα πρότυπα κουκκίδων και τα πλαίσια των δέκα. Στην εργασία της Kuske και του Losq τα σύνολα των δέκα έχουν ιδιαίτερη σημασία και χρησιμοποιούνται ως πρότυποι της θεσιακής αξίας. Για παράδειγμα, το κομμάτι 6 και 7 κάνουν ένα κομμάτι 10 κι ένα κομμάτι 3. Η έρευνά τους έχει αρκετό ενδιαφέρον και πέρα από όλα τα άλλα, ενισχύει την ιδέα να βοηθήσουμε τα παιδιά να σκεφτούν τους αριθμούς ως δύο μέρη.

Στο «Κατασκευάστε το από μέρη», τα παιδιά εστιάζουν σε συνδυασμούς. Για να προσθέσουμε κάποιο ενδιαφέρον, μπορούμε να αλλάξουμε λίγο τη δραστηριότητα προσθέτοντας ένα σχέδιο. Αντί να φτιάξουν ένα σχέδιο από δύο μέρη για έναν αριθμό, μπορούν να δημιουργήσουν ένα σχέδιο με κάποια στοιχεία. Για κάθε σχέδιο, τους ζητείται να το διαβάσουν σε δύο μέρη. Ορίστε κάποιες ιδέες.

- Φτιάξτε διατάξεις από ξύλινους κύβους.



ΣΧΗΜΑ 9.9 Διάφορα υλικά για τη δημιουργία μερών του 6.

- Φτιάξτε αναπαραστάσεις με σχηματισμένους κύβους. Μια καλή ιδέα είναι να χρησιμοποιήσετε μόνο ένα ή δύο σχήματα κάθε φορά.
- Φτιάξτε αναπαραστάσεις με επίπεδες οδοντογλυφίδες. Μπορείτε να τις βουτήξετε σε λευκή κόλλα και να τις τοποθετήσετε σε μικρά τετράγωνα από χαρτόνι για να κατασκευάσετε ένα μόνιμο αρχείο.
- Φτιάξτε αναπαραστάσεις βάζοντας δύλα-δύλα τετράγωνα ή τρίγωνα. Κόψτε μεγάλο αριθμό από μικρά τετράγωνα ή τρίγωνα από χαρτόνι. Μπορείτε επίσης και να τα κολλήσετε.

Είναι ταυτόχρονα διασκεδαστικό και χρήσιμο να κεντρίσετε τα παιδιά να δουν τις αναπαραστάσεις τους με διαφορετικούς τρόπους, παράγοντας διαφορετικούς αριθμητικούς συνδυασμούς. Στο Σχήμα 9.10, προσδιορίστε πώς βλέπουν τα παιδιά τις αναπαραστάσεις ώστε να φτάσουν στους συνδυασμούς που αναγράφονται κάτω από την καθεμία. Η παρακάτω δραστηριότητα είναι αυστηρά συμβολική. Ωστόσο, τα παιδιά θα πρέπει να χρησιμοποιούν πούλια, αν το χρειάζονται.

Δραστηριότητα 9.18

Δύο από τα τρία

Φτιάξτε λίστες τριών αριθμών, δύο από τις οποίες έχουν άθροισμα που ισοδυναμεί με το σύνολο στο οποίο εστιάζουν τα παιδιά. Ορίστε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας λίστας για τον αριθμό 5:

2-3-4
5-0-2
1-3-2
3-1-4
2-2-3
4-3-1

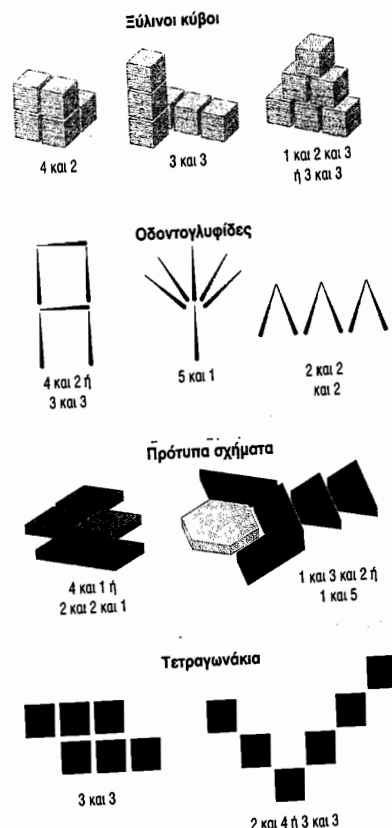
Έχοντας τη λίστα στον πίνακα, σε συσκευή προβολής διαφανειών ή σε φύλλα εργασίας, τα παιδιά μπορούν να επιλέγουν με τη σειρά τους δύο αριθμούς που συνιστούν το σύνολο. Όπως σε όλες τις δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων, θα πρέπει να ζητήσετε από τα παιδιά να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους.

Δραστηριότητες με το Μέρος που Λείπει

Μια ξεχωριστή και σημαντική παραλλαγή των δραστηριοτήτων του τύπου μέρος-μέρος-όλο είναι γνωστή ως δραστηριότητες του μέρους που λείπει. Εδώ τα παιδιά γνωρίζουν το συνολικό ποσό και χρησιμοποιούν την ήδη ανεπτυγμένη γνώση τους για τα μέρη αυτού του συνόλου για να βρουν ποιο είναι το καλυμμένο ή το κρυμμένο μέρος. Αν δεν ξέρουν ή δεν

είναι σίγουρα, απλά ξεσκεπάζουν το άγνωστο μέρος και λένε ολόκληρο το συνδυασμό όπως θα έκαναν κανονικά. Οι δραστηριότητες του μέρους που λείπει παρέχουν ευκαιρίες για σκέψη γύρω από τους συνδυασμούς που υπάρχουν για έναν αριθμό. Επιπλέον, λειτουργούν ως προπομπή των εννοιών της αφαίρεσης. Με ένα σύνολο των 8, όπου μόνο το 3 είναι ορατό, το παιδί μπορεί αργότερα να μάθει να γράφει « $8 - 3 = 5$ ».

Στις δραστηριότητες με μέρος που λείπει πρέπει ένα μέρος να είναι κρυμμένο ή να είναι άγνωστο. Συνήθως αυτό γίνεται αν δύο παιδιά συνεργάζονται αν ο/η εκπαιδευτικός κατευθύνει τη διεξαγωγή της δραστηριότητας στην τάξη. Και πάλι, η δραστηριότητα εξακολουθεί να εστιάζεται στο σύνολο μιας μεμονωμένης καθορισμένης ποσότητας. Οι επόμενες τέσσερις δραστηριότητες παρουσιάζουν διαφοροποιήσεις αυτής της σημαντικής ιδέας.



ΣΧΗΜΑ 9.10 Σχέδια για το 6.

Δραστηριότητα 9.19

Καλυμμένα Μέρη

Μετράτε ένα σύνολο από πούλια ισοδύναμο με το ποσό-στόχο και βάζετε τα υπόλοιπα στην άκρη. Ένα παιδί τοποθετεί τα πούλια κάτω από ένα δοχείο ή ένα κομμάτι χαρτόνι. Στη συνέχεια τραβάει μερικά έξω και τα δείχνει (μπορεί να μην τραβήξει κανένα, να τα τραβήξει όλα ή οποιαδήποτε ενδιάμεση ποσότητα). Για παράδειγμα, αν το σύνολο είναι το 6 και δείχνει 4, το άλλο παιδί λέει «Τέσσερα και δύο μας κάνουν έξι». Αν διστάζει ή αν δεν ξέρει το κρυμμένο ποσό, τότε θα πρέπει να το ξεσκεπάσει αμέσως (βλ. Σχήμα 9.11).

Δραστηριότητα 9.20

Κάρτες με Μέρος που Λείπει

Για κάθε αριθμό από το 4 έως και το 10, φτιάξτε κάρτες με μέρη που λείπουν πάνω σε λωρίδες χαρτονιού 6 επί 18 εκατοστών. Κάθε κάρτα έχει έναν αριθμό για το σύνολο και δύο σύνολα από κουκκίδες όπου το ένα είναι καλυμμένο με χαρτί. Για τον αριθμό 8, χρειά-

ζεστε εννέα κάρτες με το μέρος που φαίνεται να κυμαίνεται από 0 ως 8 κουκκίδες. Τα παιδιά χρησιμοποιούν κάρτες όπως στα «Καλυμμένα Μέρη» λέγοντας «Τέσσερα και δύο μας κάνουν έξι» για μια κάρτα όπου οι τέσσερις κουκκίδες φαίνονται και οι δύο είναι κρυμμένες (βλ. Σχήμα 9.11).

Δραστηριότητα 9.21

Εύχομαι να Είχα

Κρατήστε ψηλά μία ράβδο από σφηνοτουβλάκια, μία λωρίδα με κουκκίδες, μία λωρίδα με δύο στήλες ή ένα πιάτο με κουκκίδες που να δείχνει 6 ή λιγότερα. Πείτε «Εύχομαι να είχα έξι». Τα παιδιά απαντούν λέγοντας το μέρος που λείπει για να έχετε έξι. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η απαρίθμηση προς τα μπροστά για να γίνει ο έλεγχος. Το παιχνίδι μπορεί να εστιάσει σε ένα μόνο σύνολο ή ο αριθμός «Εύχομαι να είχα» μπορεί να αλλάζει κάθε φορά.

Η επόμενη δραστηριότητα είναι απόλυτα συμβολική, αλλά είναι μια αποτελεσματική μέθοδος εξάσκησης των συνδυασμών μερών-όλου.

Δραστηριότητα 9.22

Μέρη του 8 με Αριθμομηχανή

Δημιουργήστε μέρη του 8 πιέζοντας 8=8 (βλ. Σχήμα 9.12). Τώρα αν πιεστεί οποιοσδήποτε αριθμός από το 0 ως το 8 και ακολουθήσει ταί=, η οθόνη δείχνει το άλλο μέρος. Το δεύτερο μέρος εμφανίζεται ως αρνητικός αριθμός. Πείτε στα παιδιά ότι έτσι μπορούν να καταλάβουν ποιος είναι το δεύτερο μέρος. Τα παιδιά θα πρέπει να προσπαθήσουν να ονομάσουν το άλλο μέρος προτού πιέσουν το =. Αν και ουσιαστικά αυτή είναι μια δραστηριότητα εξάσκησης, η συζήτηση με οποιοδήποτε παιδί για την εξήγηση που δίνει μας επαναφέρει στο πρόβλημα. Μπορούν να δημιουργηθούν τέτοιες αριθμομηχανές για οποιονδήποτε αριθμό.

Υπάρχουν πάμπολλοι τρόποι να χρησιμοποιήσετε λογισμικό για να φτιάξετε δραστηριότητες μερών-όλου-όλο. Το μόνο που χρειάζεται είναι ένα πρόγραμμα το οποίο επι-

τρέπει στα παιδιά να δημιουργήσουν σύνολα από αντικείμενα στην οθόνη. Το e-Tools (Pearson Education, 2004) περιλαμβάνει μία ποικιλία τέτοιων οθονών για πούλια. Στην εκδοχή που εμφανίζεται στο Σχήμα 9.12, τα παιδιά μπορούν να σημαδεύσουν τα παιχνίδια της μηχανής είτε μέσα στην μα-

ΔΙΕΥΡΥΝΩΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

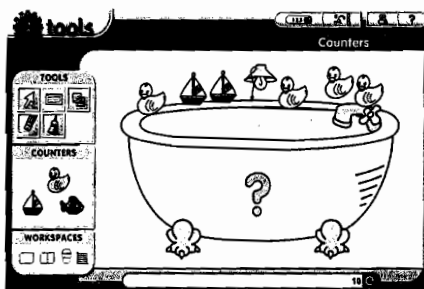
Ένα διευρυνόμενο μάθημα που στηρίζεται στην δραστηριότητα 9.21 με την βοήθεια του www.ablongman.com/vandewalle6e.

ΣΧΗΜΑ 9.11 Δραστηριότητες με τα Μέρη που Λείπουν.

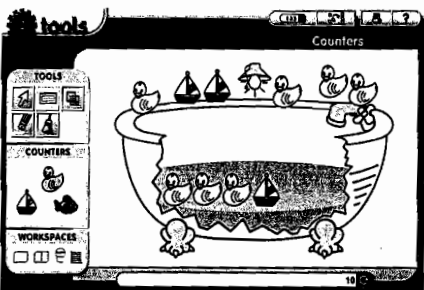
νιέρα (που δεν φαίνονται) είτε έξω από την μπανιέρα. Ο αριθμός στην μπανιέρα δείχνει πόσα υπάρχουν μέσα της ή μπορεί να μετατραπεί και να δείχνει ένα ερωτηματικό έτσι ώστε να οδηγούνται τα παιδιά να σκέφτονται το μέρος που λείπει. Η ράβδος εξελίχθηκε στο κάτω μέρος δείχνει το σύνολο. Και αυτό μπορεί επίσης να μη φαίνεται. Κάνοντας κλικ στο φωτάκι μπορείτε να δείτε τα περιεχόμενα της μπανιέρας (Σχήμα 9.12β). Στα χέρια του εκπαιδευτικού αυτό το πρόγραμμα προσφέρει μεγάλη ποικιλομορφία και πρόκληση για τις δραστηριότητες τόσο μέρους – όλου, όσο και για αυτές με τα μέρη που λείπουν.

Το *Combining and Breaking Apart Numbers* (Tenth Planet, 1998a) είναι ειδικά σχεδιασμένο για δραστηριότητες μέρους – μέρους – όλου. Αν και οι δραστηριότητες για τα πρώτα βήματα στο πακέτο αυτό είναι σχετικά αργές και παθητικές, το τμήμα «Thorough», το τελευταίο δηλαδή, προσθέτει μερικές δραστηριότητες όπου τα παιδιά μπορούν να προβληματιστούν. Σε διάφορα περιβάλλοντα με ήχο και κίνηση, τα παιδιά προ-

(α)



(β)



ΣΧΗΜΑ 9.12 Το εργαλείο μέτρησης στο λογισμικό e – Tools (Pearson Education, 2004) είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τη διερεύνηση των ιδεών μέρους – μέρους – όλου και του μέρους που λείπει, καθώς και τις πρώτες ιδέες για τους αριθμούς, την πρόσθεση και την αφαίρεση.

σπαθούν να φτιάξουν έναν αριθμό είτε από δύο μέρη είτε προσθέτοντας δύο ομάδες και στη συνέχεια απομακρύνοντας μία ή δύο ομάδες. Πρόκειται για ένα παράδειγμα λογισμικού που απαιτεί καθοδήγηση από τον/την εκπαιδευτικό για τη δημιουργία χρήσιμων προβλημάτων, ειδικά για τα παιδιά θα χάσουν το ενδιαφέρον τους. Το έντυπο συνοδευτικό υλικό περιλαμβάνει προτάσεις για αντίστοιχες δραστηριότητες που κάνουν το συγκεκριμένο πρόγραμμα αξιόλογο. ■

II Σταματώ και στοπάρομαι

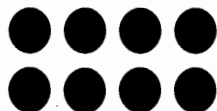
Θυμάστε τη λίστα που κάνατε νωρίτερα στο κεφάλαιο σχετικά με ό,τι γνωρίζετε για τον αριθμό 8; Δείτε τώρα αν θα προσέτατε κάτι ή αν θα αλλάζατε κάτι με αφορμή όσα διαβάσατε εδώ. Κάντε το προτού συνεχίσετε.

Εδώ είναι μια πιθανή λίστα με πράγματα που τα παιδιά θα έπρεπε να γνωρίζουν για τον αριθμό 8 (και για οποιονδήποτε αριθμό ως το 12) αποφοιτώντας από την πρώτη τάξη. Τα παιδιά θα πρέπει να είναι σε θέση να:

- Μετρούν μέχρι το οχτώ (να γνωρίζουν τις λέξεις των αριθμών)
- Μετρούν οχτώ αντικείμενα και να γνωρίζουν ότι η τελευταία λέξη του αριθμού μαρτυρά και το «πόσα είναι».
- Γράφουν τον αριθμό οχτώ
- Αναγνωρίζουν τον αριθμό 8

Η παραπάνω λίστα δείχνει τις ελάχιστες δεξιότητες σχετικά με τον αριθμό. Στην επόμενη λίστα είναι οι αριθμητικές σχέσεις που θα πρέπει να γνωρίζουν τα παιδιά σχετικά με την σημασία των αριθμών:

- Περισσότερο ή λιγότερο του 1 και 2: το 8 είναι ένα περισσότερο του 7, ένα λιγότερο του 9, δύο περισσότερο του 6 και δύο λιγότερο του 10.
- Σχηματικά πρότυπα για το 8, όπως

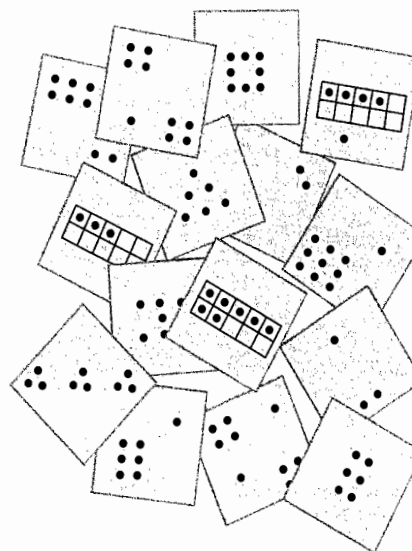


- Σχέσεις με σημεία αναφοράς το 5 και το 10: το 8 είναι 5 και 3 ακόμη, καθώς και 2 μακριά από το 10.
- Σχέσεις μέρους – όλου: το 8 είναι 5 και 3, 2 και 6, 7 και 1 κλπ. Αυτό περιλαμβάνει τη γνώση του αριθμού που λείπει από το 8.
- Άλλες σχέσεις όπως:
Διπλάσιο: το διπλάσιο του 4 είναι το 8.
Σχέσεις με τον πραγματικό κόσμο: το 8 είναι περισσότε-

ρο από τις ημέρες της εβδομάδας, ο αδερφός μου είναι 8 χρονών, το βιβλίο μου έχει πλάτος 8 εκατοστά.

Δραστηριότητες με Κάρτες με Κουκκίδες

Πολλές καλές δραστηριότητες εκμάθησης των αριθμών απαιτούν τη συνδρομή περισσότερων από μία από τις σχέσεις που αναφέραμε μέχρι εδώ. Καθώς τα παιδιά μαθαίνουν για τα πλαίσια των δέκα, για τα σύνολα που παρουσιάζουν πρότυπα και για τις άλλες σχέσεις, οι κάρτες με κουκκίδες που θα βρείτε στα Blackline Masters παρέχουν άφθονες δραστηριότητες (βλ. Σχήμα 9.13). Οι καρτέλες περιέχουν σχήματα με κουκκίδες, σχήματα για απαρίθμηση, συνδυασμούς δύο και τριών αυτών σχημάτων και πλαίσια των δέκα με τους «καθιερωμένους» καθώς και ασυνήθιστους τρόπους διάταξης των κουκκίδων. Όταν τα παιδιά χρησιμοποιούν αυτές τις κάρτες σχεδόν σε κάθε δραστηριότητα που αφορά αριθμητικές έννοιες, οι κάρτες αυτές τα βοηθούν να σκεφτούν τους αριθμούς με διαφορετικούς τρόπους. Οι κάρτες με κουκκίδες δίνουν μια άλλη διάσταση σε πολλές από τις δραστηριότητες που ήδη περιγράψαμε και μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά στις παρακάτω δραστηριότητες.



ΣΧΗΜΑ 9.13 Κάρτες με κουκκίδες που μπορούν να δημιουργηθούν με τα Blackline Masters.

Δραστηριότητα 9.23

«Διπλή Μάχη»

Το παιχνίδι της «Διπλής Μάχης» (Kamil, 1985) παίζεται όπως ο πόλεμος, αλλά σε κάθε παιχνίδι οι δύο παίκτες γυρίζουν ανάποδα δύο κάρτες αντί για μία. Νικητής είναι όποιος συγκεντρώσει το μεγαλύτερο ποσό. Τα παιδιά που παίζουν μπορεί να χρησιμοποιήσουν πολλές διαφορετικές αριθμητικές σχέσεις για τον καθορισμό του νικητή χωρίς να βρίσκουν πραγματικά το συνολικό αριθμό των κουκκίδων.

Δραστηριότητα 9.24

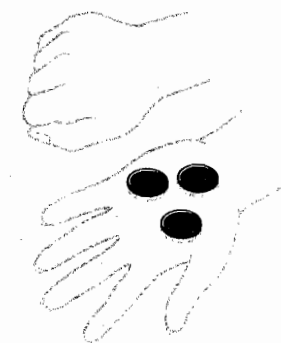
Τρένα με Κάρτες με Κουκκίδες

Σχηματίστε μια μακριά σειρά από κάρτες με κουκκίδες από το 0 ως το 9, έπειτα πάλι πίσω ως το 1, μετά μπροστά κ.ο.κ. Μπορείτε επίσης να ξεκινήσετε με το 0 ή το 1 και να φτιάξετε ένα τρένο με δύο περισσότερα- δύο λιγότερα.

Δραστηριότητα 9.25

«Πόλεμος» της Διαφοράς

Εκτός από το μοίρασμα των καρτών στους δύο παίκτες, όπως στο κανονικό παιχνίδι του Πολέμου, ετοιμάστε μια στοίβα από 30 με 40 περίπου πούλια. Σε κάθε παιχνίδι, οι παίκτες αναποδογυρίζουν τις κάρτες όπως συνήθως. Ο παίκτης με το μεγαλύτερο αριθμό κουκκίδων κερδίζει τόσα πούλια, όσα είναι και η διαφορά ανάμεσά τους στις δύο κάρτες. Οι παίκτες κρατούν τις κάρτες τους. Το παιχνίδι τελειώνει όταν τελειώσουν και η στοίβα με τα πούλια. Κερδίζει ο παίκτης με τα περισσότερα πούλια.



ΣΧΗΜΑ 9.14 Αξιολόγηση με το μέρος που λείπει. Οχτώ στο σύνολο. «Πόσα είναι κρυμμένα».

Εξερευνώντας

τον Αριθμό, τα Δεδομένα και το Χώρο

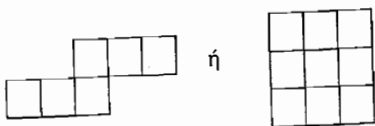
Νηπιαγωγείο. Πόσα είναι Όλα Έρευνα 2: Έξι Πλάκα

Περιεχόμενο

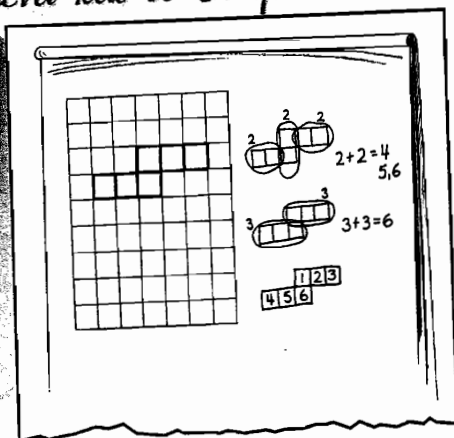
Οι δραστηριότητες σε αυτή την έρευνα λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια μιας ή δύο εβδομάδων προς το τέλος της χρονιάς, αν και μπορεί να γίνουν και νωρίτερα. Η κύρια δραστηριότητα εστιάζει στον αριθμό 6. Οι συγγραφείς εξηγούν ότι το 6 είναι μια ποσότητα που τα περισσότερα παιδιά του νηπιαγωγείου μπορούν να μετρήσουν, ακόμα και στην αρχή της χρονιάς. Τα παιδιά χρειάζονται παραπάνω από το ένα χέρι για να δείξουν τον αριθμό 6. Παρέχει συνδυασμό δύο μερών έτσι ώστε να είναι ενδιαφέρον και να αποτελεί μια ποσότητα που μπορεί εύκολα να μεινεί στο μυαλό και να δουλευτεί. Επιπλέον, τα περισσότερα παιδιά του νηπιαγωγείου θα γίνουν 6 χρονών μέσα στη χρονιά.

Περιγραφή της Εργασίας

Στο εξώφυλλο "Cover Up", ο δάσκαλος σχεδιάζει έξι τετράγωνα που όλοι μπορούν να δουν. Για παράδειγμα:



Τα παιδιά καλούνται να δουν τα σχέδια και να συζητήσουν τρόπους για να θυμούνται τι είδαν. Κατόπιν, η εικόνα καλύπτεται και τα παιδιά προσπαθούν να περιγράψουν την εικόνα. Η συζήτηση εστιάζεται σε ιδέες για τα κομμάτια της εικόνας, όχι μόνο τα τετράγωνα. Η δραστηριότητα επαναλαμβάνεται με διάφορες εικόνες. Η δραστηριότητα «Έξι πλακάκια στο σύνολο», είναι μία δρα-



From *Investigations in Number, Data, and Space: Kindergarten* by Marlene Kliman et al. Copyright © 1998 by Dale Seymour Publications. Reprinted by permission of Pearson Education, Inc.

στηριότητα όπου τα παιδιά κολλάνε έξι τετράγωνα σε χαρτί με τετραγωνάκια με όσους τρόπους μπορούν να σκεφτούν. Τα τετράγωνα πρέπει να ενώνονται μεταξύ τους (η πλευρά του ενός να εφάπτεται σε κάποια πλευρά του άλλου). Οι διαφορετικοί συνδυασμοί μοιράζονται και ο δάσκαλος βοηθά τα παιδιά στους συνδυασμούς του 6, όπως βλέπετε σε αυτές τις σημειώσεις του. Η έρευνα παρέχει μία μόνο ευκαιρία να εισάγουμε φυσικά τα παιδιά στο συμβολισμό, καθώς αυτά λένε τους συνδυασμούς που βλέπουν.

Οι συγγραφείς επισημαίνουν ότι είναι παραπλανητική η σκέψη ότι αυτές οι δραστηριότητες θα μπορούσαν να επαναληφθούν και για άλλους αριθμούς. Η εμπειρία τους, ωστόσο, λέει ότι τα παιδιά βαριούνται κάνοντας τα ίδια και τα ίδια. Αυτές οι ιδέες είναι σημαντικές για άλλους αριθμούς, αλλά τα παιδιά χρειάζονται διαφορετικά συγκείμενα και υλικά για να μη χάσουν το ενδιαφέρον τους.

βλέπει προς τα κάτω. Όταν τα παιδιά θα έχουν βρει τουλάχιστον δέκα «σάντουιτς», η επόμενη πρόκληση θα είναι να κατονομάσουν την κάρτα που είναι ανάποδα. Γυρνάν το σάντουιτς για να το επιβεβαιώσουν. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα ίδια ζευγάρια για να κατονομαστεί το κρυμμένο μέρος.

Δραστηριότητα 9.26

Αριθμοί Σάντουιτς

Επιλέξτε έναν αριθμό από το 5 ως το 12 και βρείτε συνδυασμούς από δύο κάρτες που να έχουν άθροισμα αυτόν τον αριθμό. Με τις δύο κάρτες τα παιδιά κάνουν ένα «σάντουιτς» με την κάρτα που έχει την κουκκίδα να



Για τις σχέσεις του μέρους – όλου, χρησιμοποιείστε την αξιολόγηση του χαμένου κομματιού, όμοιου με τη Δραστηριότητα 9.19 («Καλυμμένα Μέρη»). Ξεκινήστε με έναν αριθμό που πιστεύετε ότι το παιδί έχει εμπεδώσει, ας πούμε το 5. Ζητήστε από το παιδί να μετρήσει τα πουλία που έχετε στο χέρι σας, το οποίο είναι ανοιχτό. Κλείστε την παλάμη σας όντας βέβαιοι ότι το παιδί ξέρει πόσα είναι τα κρυμμένα πουλία. Μετά αφαιρέστε κάποια πουλία και δείξτε την παλάμη σας (Βλ. Σχήμα 9.14). Ρωτήστε το παιδί «Πόσα είναι τα κρυμμένα;». Επαναλάβετε αφαιρώντας κάθε φορά διαφορετική ποσότητα από πουλία, παρόλο που εκείνο που χρειάζεται είναι να ελέγχετε τα τρία ή τέσσερα μέρη κάθε αριθμού. Αν το παιδί ανταποκρίνεται γρήγορα και σωστά και είναι ξεκάθαρο ότι δεν μετράει, ονομάστε την άσκηση «κατακτημένος αριθμός». Αν ένας αριθμός έχει κατακτηθεί, επαναλάβετε τη διαδικασία με τον επόμενο μεγαλύτερο αριθμό. Συνεχίστε μέχρι το παιδί να αρχίσει να δυσκολεύεται. Στην πρώτη τάξη θα συναντήσετε ποναλιά αριθμών που έχουν εμπεδωθεί από το 4 μέχρι το 7 και 8. Μέχρι την άνοιξη, στην πρώτη τάξη τα περισσότερα παιδιά θα έχουν εμπεδώσει αριθμούς μέχρι το 10. ■

Το αναλυτικό πρόγραμμα για το νηπιαγωγείο *Investigations in Number, Data and Space* περιλαμβάνει την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού για το μεγαλύτερο κομμάτι της χρονιάς. Τέσσερις από τις επτά ενότητες εστιάζουν στην ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού, συμπεριλαμβανομένης της μονάδας ενός δεδομένου και μιας μέτρησης. Η παραπάνω δραστηριότητα δίνει μια γεύση του προγράμματος *Investigations* για μια πρώτη προσέγγιση του αριθμού.

Σχέσεις για τους Αριθμούς από το 10 ως το 20

Παρόλο που τα παιδιά του νηπιαγωγείου, της πρώτης και της δεύτερης τάξης βιώνουν καθημερινά αριθμούς μεγαλύτερους από το 20, δεν πρέπει να υποθέτουμε ότι θα επεκτείνουν αυτόματα το σύνολο των σχέσεων που έχουν μάθει για μικρότερους αριθμούς, στους αριθμούς πάνω από το 10. Κι όμως, αυτοί οι αριθμοί παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο σε πολλές απλές δραστηριότητες απαρίθμησης, σε βασικά γεγονότα και σε μεγάλο μέρος όλων όσων κάνουμε με νοερούς υπολογισμούς. Οι σχέσεις αυτών των αριθμών είναι το ίδιο σημαντικές με τις σχέσεις που αφορούν τους αριθμούς ως το 10.

Μια Σχέση με το 10 πριν από τη Θεσιακή Αξία των Ψηφίων

Η δεκάδα θα πρέπει να παίζει για τα παιδιά βασικό ρόλο στην αρχική κατανόηση των αριθμών από το 10 ως το 20. Όταν τα

παιδιά βλέπουν ένα σύνολο των 6 με ένα σύνολο των 10, θα πρέπει να ξέρουν χωρίς να μετρήσουν ότι το άθροισμα είναι 16. Ωστόσο, οι αριθμοί από το 10 ως το 20 δεν ενδείκνυνται για τη διδασκαλία των εννοιών της θεσιακής αξίας των ψηφίων. Πριν, δηλαδή, ολοκληρωθεί η ανάπτυξη των εννοιών της θεσιακής αξίας του ψηφίου (κατάλληλη για τη δεύτερη τάξη και άνω), δεν πρέπει να ζητάτε από τα παιδιά να εξηγούν ότι το 1 στο 16 αντιπροσωπεύει «μία δεκάδα».

II Στραμιά και σκουάδρα

Πείτε στον εαυτό σας «μία δεκάδα». Σκεφτείτε το λίγο! Τι σημαίνει αυτό για ένα πεντάχρονο παιδί που μαθαίνει να μετρά μέχρι το 20; Τι μπορεί να σημαίνει η μία δεκάδα, όταν το δέκα μου λέει πόσα δάχτυλα έχω και είναι ο αριθμός που ακολουθεί το εννιά; Πώς μπορεί να γίνει αυτό;

Αρχικά τα παιδιά δεν βλέπουν αριθμητικό μοντέλο στους αριθμούς ανάμεσα στο 10 και το 20. Αντίθετα αυτά τα ονόματα των αριθμών είναι απλά δέκα νέες λέξεις στην αριθμητική ακολουθία. Η έννοια μιας δεκάδας είναι απλά πολύ περίεργη για να την καταλάβει ένα παιδί του νηπιαγωγείου ή στις αρχές της πρώτης τάξης. Κάποιοι μπορούν να πουν ότι δεν είναι κατάλληλο για τα παιδιά της πρώτης (Kamii, 1985). Η ακαταλληλότητα της συζήτησης «μία δεκάδα και 6 μονάδες» (τι είναι η μονάδα;) δεν σημαίνει ότι μια ομάδα από δέκα δεν θα έπρεπε να εμφανίζεται στη συζήτηση για τους αριθμούς από το 11 μέχρι το 19. Η ακόλουθη δραστηριότητα δείχνει αυτή την ιδέα.

Δραστηριότητα 9.27

Δέκα και κάτι παραπάνω

Χρησιμοποιήστε ένα απλό πλαίσιο με δύο μέρη και πείτε στα παιδιά να μετρήσουν δέκα πουλία στο ένα μέρος. Έπειτα ζητήστε τους ναβάλουν πέντε πουλία στην άλλη πλευρά. Μετρήστε μαζί όλα τα πουλία ένα – ένα. Φωνάξτε σαν χορωδία το συνδυασμό: «Δέκα και πέντε, δεκαπέντε». Περιστρέψτε το πλαίσιο: «Πέντε και δέκα, δεκαπέντε». Επαναλάβετε το ίδιο με απλούς αριθμούς σε τυχαία σειρά, αλλά χωρίς να αλλάξετε στο πλαίσιο την πλευρά που έχει τα δέκα πουλία.

Η Δραστηριότητα 9.27 είναι σχεδιασμένη για να διδάξει τα νέα ονόματα των αριθμών κι έτσι απαιτεί ως ένα βαθμό κατευθυνόμενη διδασκαλία. Όταν ολοκληρώσετε αυτή τη δραστηριότητα, διερευνήστε τους αριθμούς ως το 20 με τρόπο που επιτρέπει μεγαλύτερη αυτονομία. Δώστε σε κάθε παιδί δύο πλαίσια των δέκα σχεδιασμένα σε ένα κομμάτι χαρτόνι ή στα Blackline Masters, με το ένα πλαίσιο των δέκα κάτω από το άλλο. Με τυχαία σειρά, βάλτε τα παιδιά να σας δείξουν τους αριθμούς ως το 20 στα χαρτόνια τους. Αυτό σημαίνει ότι θα

παίξετε τους «Τρελούς Μπερδεμένους Αριθμούς» (Δραστηριότητα 9.15) με δύο πλαίσια των δέκα και αριθμούς μέχρι το 20. Δεν υπάρχει ένας σωστός τρόπος να γίνει αυτό, αρκεί να έχουν το σωστό αριθμό από πούλια. Θα είχε ενδιαφέρον να συζητήσετε πώς μπορούν να τοποθετηθούν τα πούλια στο χαρτόνι, έτσι ώστε να είναι εύκολο να δει κάποιος πόσα είναι τα πούλια. Αφήστε τα παιδιά να ανταλλάξουν ιδέες. Δεν θα χρησιμοποιήσουν όλα τα παιδιά ολόκληρο το σύνολο των δέκα, αλλά καθώς θα συζητούν σε αυτή την ιδέα όλο και περισσότερα, σύντομα θα αρχίσουν να ανταλλάβονται ότι το δέκα και πάνω είναι ένα ποσό με πρώτο συνθετικό το «δέκα». Μην παραλείψετε και αριθμούς μικρότερους από το δέκα. Όσο θα ακούτε τα παιδιά σας, ίσως θελήσετε να τα παρακινήσετε να βρουν τρόπους να παραστήσουν 26 πούλια ή ακόμη και περισσότερα.

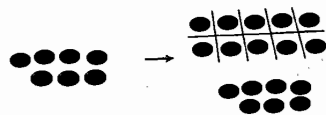
Επεκτείνοντας τις Σχέσεις του «Λιγότερο» και «Περισσότερο»

Οι σχέσεις «ένα περισσότερα», «δύο περισσότερα», «ένα λιγότερο» και «δύο λιγότερα» είναι σημαντικές για όλους τους αριθμούς. Ωστόσο, αυτές οι έννοιες οικοδομούνται ή συνδέονται με το ίδιο σκεπτικό για τους αριθμούς που είναι μικρότεροι του 10. Το γεγονός ότι το 17 είναι κατά ένα λιγότερο από το 18 συνδέεται με την ιδέα ότι το 7 είναι κατά ένα μικρότερο από το 8. Τα παιδιά ίσως χρειαστούν βοήθεια για να κάνουν τη σύνδεση αυτή.

Δραστηριότητα 9.28

Επέκταση των Εννοιών «Περισσότερο» και «Λιγότερο»

Στη συσκευή προβολής διαφανειών, δείξτε 7 πούλια και ρωτήστε ποιος αριθμός είναι κατά δύο μεγαλύτερος ή κατά ένα μικρότερος και συνεχίστε έτσι. Τώρα προσθέστε ένα γεμάτο πλαίσιο των δέκα στη διαφάνεια (ή



Πόσα;
Τι αριθμός είναι
το ένα παραπάνω;
Δύο λιγότερα;

Πόσα;
Τι αριθμός είναι
το ένα παραπάνω;
Δύο λιγότερα;

ΣΧΗΜΑ 9.15 Επέκταση των σχέσεων στους αριθμούς από το έντεκα ως το δεκαεννιά.

10 με οποιοδήποτε σχηματικό πρότυπο) και επαναλάβετε τις ερωτήσεις. Φτιάξτε ζεύγη ερωτήσεων καλύπτοντας και αποκαλύπτοντας το πλαίσιο των δέκα όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.15.

Σχέσεις Διπλάσιου και Σχεδόν Διπλάσιου

Η χρήση του διπλάσιου (το διπλάσιο του 6 είναι το 12) και του σχεδόν διπλάσιου (το 13 είναι διπλάσιο του 6 συν 1) γενικά θεωρείται στρατηγική για την απομνημόνευση βασικών γεγονότων πρόσθεσης. Δεν υπάρχει λόγος να μην αρχίσουν τα παιδιά να μαθαίνουν αυτές τις σχέσεις πολύ πριν ασχοληθούν με την απομνημόνευση βασικών δεδομένων. Τα διπλάσια και τα σχεδόν διπλάσια είναι απλά ειδικές περιπτώσεις της ευρύτερης δομής μέρους—μέρος—όλο.

Συσχετίστε τα διπλάσια με ειδικές εικόνες. Ο Thornton (1982) βοήθησε παιδιά της πρώτης τάξης να συσχετίσουν τα διπλάσια με τις εξής οπτικές ιδέες:

Το διπλάσιο του 3 είναι ο κοριός: τρία πόδια σε κάθε πλευρά.

Το διπλάσιο του 4 είναι η αράχνη: τέσσερα πόδια σε κάθε πλευρά.

Το διπλάσιο του 5 είναι τα χέρια: δύο χέρια.

Το διπλάσιο του 6 είναι η συγοθήκη: δύο σειρές από έξι αυγά.

Το διπλάσιο του 7 είναι οι δύο εβδομάδες: δύο εβδομάδες στο ημερολόγιο.

Το διπλάσιο του 8 είναι οι κηρομπογιές: δύο σειρές από οχτώ κηρομπογιές στο κομτί.

Το διπλάσιο του 9 είναι το 18τροχο φορηγό: δύο πλευρές, εννέα ρόδες σε κάθε πλευρά.

Τα παιδιά μπορούν να σχεδιάσουν εικόνες ή να φτιάξουν αφίσες με τα διπλάσια κάθε αριθμού. Δεν υπάρχει λόγος να περιοριστούν οι εικόνες σε αυτές που αναφέρθηκαν εδώ. Οποιοδήποτε εικόνες με «δυνατές» ιδέες είναι χρήσιμες για τα παιδιά.

Κατά περιόδους κάνετε προφορικές ασκήσεις στις οποίες τα παιδιά θα διπλασιάζουν τον αριθμό που δίνετε. Ζητήστε να εξηγήσουν πώς έμαθαν ένα συγκεκριμένο διπλάσιο νούμερο. Πολλά από αυτά δεν θα καταφέρουν στις εικόνες.

Δραστηριότητα 9.29

Ο Διπλασιαστής

Κάντε την αριθμομηχανή έναν «διπλασιαστή» πατώντας 2 $\times$ $=$. Τώρα το πάτημα οποιουδήποτε ψηφίου $=$ θα παράγει το διπλάσιο του αριθμού. Τα παιδιά μπορούν να δουλέψουν σε ζευγάρια ή μόνα τους για να προσπαθήσουν να νικήσουν την αριθμομηχανή.



Μία σχετική προφορική δραστηριότητα είναι να λέτε έναν αριθμό και να ζητάτε από τα παιδιά να σας πουν τίνος το διπλάσιο είναι. «Τι είναι το δεκατέσσερα;» (Το διπλάσιο του 7!). Όταν τα παιδιά αποκτήσουν ευχέρεια σε αυτό, χρησιμοποιήστε έναν οποιονδήποτε αριθμό μέχρι το 20. «Τι είναι το δεκαεπτά;» (Το διπλάσιο του 8 και 1 ακόμη παραπάνω).

Το Νόημα του Αριθμού και ο Αληθινός Κόσμος

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε τρόπους περαιτέρω διεύρυνσης της πρώτης αυτής γνώσης των αριθμών. Οι σχέσεις των αριθμών με ποσότητες και μονάδες μέτρησης του πραγματικού κόσμου και η χρήση των αριθμών σε απλούς υπολογισμούς είναι δυνατόν να βοηθήσουν τα παιδιά να διαμορφώσουν ιδιαίτερα επιθυμητές, ευέλικτες, διαισθητικές ιδέες σχετικά με τους αριθμούς.

Εκτίμηση και Μέτρηση

Ένας από τους καλύτερους τρόπους να κάνουμε τα παιδιά να σκεφτούν τις πραγματικές ποσότητες είναι να συσχετίσουμε τους αριθμούς με μονάδες μέτρησης αντικειμένων. Στις μικρότερες τάξεις, καλή αφετηρία αποτελούν οι μονάδες του μήκους, του βάρους και του χρόνου. Ωστόσο, η απλή μέτρηση και η καταγραφή των αποτελεσμάτων δεν είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική, αφού τα παιδιά δεν έχουν λόγο να ενδιαφέρονται ή να προβληματίζονται για το αποτέλεσμα. Για να βοηθήσουμε τα παιδιά να σκεφτούν ή να συλλογιστούν λίγο ποιος αριθμός μπορεί να μας λέει πόσο μακριά είναι το θρανίο ή πόσο βαρύ είναι το βιβλίο, καλό θα ήταν πρώτα να γράψουν ή να σας πουν μια εκτίμηση δική τους. Μια τέτοια εκτίμηση, όμως, είναι πολύ δύσκολη για τα μικρά παιδιά. Δεν καταλαβαίνουν την έννοια της «εκτίμησης» ή του «περίπου». Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχετε κόψει αρκετές πολύ μεγάλες πατημασιές από γυαλιστερό χαρτόνι, μήκους, ας πούμε, περίπου 54 εκατοστών ή καθεμία. Όλες έχουν ακριβώς το ίδιο μέγεθος. Θέλετε να ρωτήσετε την τάξη, «Πόσες περίπου πατημασιές χρειάζονται για να μετρήσουμε το χαλάκι στη γωνία της ανάγνωσης;». Η λέξη κλειδί εδώ είναι το περίπου, στην οποία θα χρειαστεί να αφιερώσετε πολύ χρόνο ώστε να βοηθήσετε τα παιδιά να την κατανοήσουν. Για το σκοπό αυτό μπορείτε να ζητήσετε από τα παιδιά μια εκτίμηση με τρόπο τέτοιο που να τα βοηθά με την έννοια του «περίπου», αλλά και να τα αφήνει περιθώρια να απαντήσουν. Παρακάτω σας προτείνουμε ορισμένες λύσεις που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν στις αρχικές δραστηριότητες εκτίμησης.

- *Περισσότερο ή λιγότερο από* _____. Οι πατημασιές θα είναι περισσότερες ή λιγότερες από 10; Το μήλο θα ζυγίζει περισσότερο ή λιγότερο από 20 ξυλινούς κύβους; Υπάρχουν περισσότερα ή λιγότερα από 15 σφηνουβλάκια σε αυτή τη μακριά ράβδος;
- *Πλησιάζει το* _____ ή το _____; Οι πατημασιές θα πλησιάζουν τις 5 ή τις 20; Το βάρος του μήλου θα πλησιάζει το βάρος των 10 ή των 30 κύβων; Το μήκος αυτής της ράβδου πλησιάζει τα 10 ή τα 50 σφηνουβλάκια;
- *Περίπου* _____. Χρησιμοποιείστε ένα από αυτούς τους αριθμούς: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, ... Περίπου πόσες πατημασιές; Περίπου πόσους κύβους θα ζυγίζει το μήλο; Περίπου πόσα σφηνουβλάκια υπάρχουν σε αυτή τη ράβδος;

Αυτή η λίστα με τους τύπους ερωτήσεων για τις εκτιμήσεις βοηθά τα παιδιά να μάθουν τι εννοείτε όταν λέτε «περίπου». Κάθε παιδί μπορεί να κάνει μια εκτίμηση χωρίς να είναι υποχρεωμένο να πει έναν αριθμό στην τύχη.

Για να βοηθήσετε τα παιδιά με τους αριθμούς και τις μετρήσεις, εκτιμάτε διάφορα αντικείμενα χρησιμοποιώντας την ίδια μονάδα μέτρησης. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μετράτε «γύρω από τα αντικείμενα» χρησιμοποιώντας ένα σπάγκο. Για να μετρήσετε, τυλίγετε το σπάγκο γύρω από το αντικείμενο και στη συνέχεια τον μετράτε με κάποια μονάδα, όπως τα ξυλάκια της χειροτεχνίας. Αφού έχετε μετρήσει την απόσταση γύρω από το κεφάλι της Δήμητρας, εκτιμήστε την απόσταση γύρω από το καλάθι των αγρήτων ή γύρω από μια σφαίρα ή γύρω από τον καρπό του Γιώργου. Κάθε διαδοχική μέτρηση βοηθά τα παιδιά να τις κανονίσεις εκτιμήσεις. Δείτε το Κεφάλαιο 20, όπου υπάρχει μια ολοκληρωμένη συζήτηση για τη μέτρηση.

Περισσότερες Συνδέσεις

Εδώ σας δίνουμε μερικές πρόσθετες δραστηριότητες που μπορούν να βοηθήσουν τα παιδιά να συνδέσουν τους αριθμούς με ρεαλιστικές καταστάσεις.

Δραστηριότητα 9.30

Πρόσθεσε μια Μονάδα στον Αριθμό σου

Γράψτε έναν αριθμό στον πίνακα. Προτείνετε κάποιες μονάδες για να τον συνοδέψουν και ρωτήστε τα παιδιά πού θα ταίριαζε η καθεμία. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός είναι το 9. «Τι σας έρχεται στο μυαλό όταν λέω 9 δολάρια; 9 ώρες; 9 αυτοκίνητα; 9 παιδιά; 9 μέτρα; 9 ακριβώς; 9 παλάμες; 9 Γαλόνια;». Αφιερώστε λίγο χρόνο στο σχολιασμό της καθεμιάς. Δώστε στα παιδιά την ευκαιρία να προτείνουν και αυτά μονάδες. Να είστε προετοιμασμένοι να διερευνήσετε ορισμένες από τις ιδέες είτε αμέσως είτε με τη

μορφή εργασιών ή ασκήσεων που θα κάνουν με τους γονείς τους στο σπίτι.

Δραστηριότητα 9.31

Είναι λογικό;

Επιλέξτε έναν αριθμό και μια μονάδα –15 μέτρα για παράδειγμα. Θα μπορούσε η δασκάλα να έχει ύψος 15 μέτρα; Θα μπορούσε το σαλόνι σας να έχει πλάτος 15 μέτρα; Μπορεί ένας άνθρωπος να περπατήσει 15 μέτρα ψηλά; Μπορούν τρία παιδιά να περπατήσουν τα χέρια τους για 15 πόδια; Διαλέξτε έναν οποιονδήποτε αριθμό, μεγάλο ή μικρό και μια μονάδα που να είναι οικεία στα παιδιά. Έπειτα φτιάξτε μια σειρά από τέτοιες ερωτήσεις.

Μόλις τα παιδιά εξοικειωθούν με τη Δραστηριότητα 9.31, βάλτε τα να διαλέξουν τον αριθμό και τη μονάδα ή τα αντικείμενα (10 παιδιά, 20 μπανάνες, ...) και προσέξτε τι είδους ερωτήσεις επινοούν. Όταν προκύπτει διαφορά απόψεων, επωφεληθείτε από την ευκαιρία για διερεύνηση και ανακάλυψη. Ανασταθείτε στον πειρασμό να παράχετε τις γνώσεις που έχετε ως ενήλικας. Αντί για αυτές πείτε, «Λοιπόν, πώς μπορούμε να βρούμε αν αυτό είναι ή δεν είναι λογικό; Ποιος έχει κάποια ιδέα για αυτό που θα μπορούσαμε να κάνουμε;».

Αυτές οι δραστηριότητες βασίζονται στην επάλυψη προβλημάτων με την αληθινή σημασία τους. Όχι μόνο δεν υπάρχουν ξεκάθαρες απαντήσεις, αλλά τα παιδιά μπορούν εύκολα να αρχίσουν να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να διερευνούν τους αριθμούς αξιοποιώντας εκείνο το κομμάτι του περιβάλλοντός τους που τα ενδιαφέρει περισσότερο. Στην αρχή τα παιδιά δεν θα διαθέτουν αυτές τις συνδέσεις με την πραγματικότητα και θα απογοητευτείτε από τις περιορισμένες ιδέες τους για τους αριθμούς. Η Howden (1989) γράφει για μια δασκάλα της πρώτης τάξης με παιδιά από πάμφτωχες οικογένειες, η οποία της είχε εξηγήσει πως «Έχουν όλα τους τα δάχτυλα, ο χώρος του σχολείου είναι σπαρμένος με πλήθος χαλίκια και φύλλα και τα φασόλια είναι φθηνά». Έτσι απαριθμούμε, ταξινομούμε, συγκρίνουμε και μετράμε για τέτοια αντικείμενα. Έχουμε μετρήσει και ζυγίσει σχεδόν τα πάντα σε αυτό το δωμάτιο και σχεδόν καθέτι που μπορούν να κουβαλήσουν στην τάξη τα παιδιά» (σελ. 6). Τα παιδιά αυτής της δασκάλας είχαν φτιάξει μια εξαιρετικά πλούσια και μακροσκελή λίστα απαντήσεων στην ερώτηση «Τι σας έρχεται στο μυαλό όταν λέω είκοσι τέσσερα;». Σε ένα άλλο σχολείο, σε μια εκπαιδευτική κοινότητα όπου οι βαθμοί στις δοκιμασίες είναι υψηλοί, η ίδια ερώτηση δεν έλαβε σχεδόν καμία απάντηση από μια τάξη της τρίτης. Η προσπάθεια να βοηθήσετε τα παιδιά να συνδέσουν τις αριθμητικές ιδέες με καταστάσεις του πραγματικού κόσμου μπορεί να αποδειχτεί ιδιαίτερα επικοινωνιακή.

Διαγράμματα

Οι δραστηριότητες με κατασκευή διαγραμμάτων είναι ένας άλλος καλός τρόπος να συνδεθεί ο κόσμος των παιδιών με τους αριθμούς. Στο Κεφάλαιο 22 αναφέρουμε τρόπους να φτιάξουμε διαγράμματα με παιδιά των τάξεων από το νηπιαγωγείο ως τη δεύτερη τάξη. Τα διαγράμματα μπορούν να κατασκευαστούν γρήγορα και σχεδόν από οποιαδήποτε δεδομένα που μπορείτε να συγκεντρώσετε από τα παιδιά: το αγαπημένο τους παγωτό ή χρώμα, την αγαπημένη τους ομάδα, το αγαπημένο τους κατοικίδιο, τον αριθμό των αδερφών, τα παιδιά που μεταφέρονται με διαφορετικά λεωφορεία, τους τύπους των παπουτσιών, τον αριθμό των κατοικίδιων κ.ά. Μπορείτε να συνδέσετε τα γραφήματα με την ύλη άλλων μαθημάτων. Μια έννοια με θέμα τη θαλάσσια ζωή μπορεί να οδηγήσει σε ένα διάγραμμα με τα αγαπημένα θαλάσσια ζώα.

Μόλις κατασκευάσετε ένα απλό ραβδόγραμμα, είναι πολύ σημαντικό να αφιερώσετε μερικά λεπτά κάνοντας όσες αριθμητικές ερωτήσεις μπορούν να γίνουν σχετικά με αυτό. Στα πρώτα στάδια της ανάπτυξης των αριθμών (από το νηπιαγωγείο ως την πρώτη), η χρήση των διαγραμμάτων για τις αριθμητικές σχέσεις και για τη σύνδεση των αριθμών με πραγματικές ποσότητες στο περιβάλλον των παιδιών είναι πολύ πιο σημαντικός λόγος για την κατασκευή διαγραμμάτων απ' ό,τι τα ίδια τα διαγράμματα. Τα διαγράμματα εστιάζουν την προσοχή στη μέτρηση πραγματικών αντικειμένων. Εξίσου σημαντικό στοιχείο είναι ότι τα ραβδόγραμμα εκθέτουν με σαφήνεια συγκρίσεις ανάμεσα και μεταξύ των αριθμών, οι οποίες σπάνια γίνονται όταν μελετάται μόνο ένας αριθμός ή μια ποσότητα τη φορά. Στο Σχήμα 9.16, βλέπετε το παράδειγμα ενός διαγράμματος και των ερωτήσεων που μπορούν να τεθούν. Στην αρχή, τα παιδιά θα έχουν πρόβλημα με τις ερωτήσεις που αφορούν τις διαφορές, αλλά η επανειλημμένη έκθεση σε αυτές τις ιδέες με τη μορφή ενός ραβδόγραμματος θα βελτιώσει την κατανόησή τους. Αυτές οι έννοιες της σύγκρισης επαυξάνουν σημαντικά την κατανόηση των αριθμών από τα παιδιά.

NCTM
Στόνταρ

Τα Στάνταρ αναγνωρίζουν ξεκάθαρα την αξία της ανάπτυξης των αριθμών και σε άλλους τομείς του αναλυτικού προγράμματος. «Τα παιδιά που δουλεύουν με τους αριθμούς θα πρέπει να συνδέουν αυτά που κάνουν με άλλα θέματα των μαθηματικών. Για παράδειγμα, η επάρκεια... στους υπολογισμούς μπορεί τόσο να επιτρέπει, όσο και να επιτρέπεται από τους μαθητές για να εξερευνήσουν τα δεδομένα. Η γνώση των σχηματικών υποστηρίξεις την ανάπτυξη της απαρίθμησης ανά δύο, ανά τρία κ.ο.κ. και της αλγεβρικής σκέψης. Και οι εμπειρίες με τα σχήματα, το χώρο και τον αριθμό βοηθούν τα παιδιά να αναπτύξουν δεξιότητες εκτίμησης για διαφορών ποσοτήτων και μεγεθών» (σελ. 79).



Σύνδεση με τη Λογοτεχνία

Η παιδική λογοτεχνία έχει θαυμάσια βιβλία απαρίθμησης. Η πολυκύλιση επαφή των παιδιών με τα βιβλία μπορεί να εξυπηρετεί τη σύνδεση των αριθμών με την πραγματικότητα, να τους αναγάγει σε προσωπικό βίωμα και να παράσχει άφθονες ευκαιρίες για επάλυψη προβλημάτων. Βεβαιωθείτε ότι δεν μένετε στην απλή ανάγνωση ενός βιβλίου απαρίθμησης ή ενός βιβλίου σχετικού με αριθμούς, ούτε απλά στο κοίταγμα των εικόνων. Βρείτε έναν τρόπο να επεκτείνετε το περιεχόμενο του βιβλίου στον κόσμο των παιδιών. Δημιουργήστε προβλήματα σχετικά με την ιστορία. Βάλτε τα παιδιά να γράψουν μια παρόμοια ιστορία. Εκτείνετε τους αριθμούς και δείτε τα αποτελέσματα. Δημιουργήστε μια τοιχογραφία, διαγράμματα ή αφίσες. Οι ιδέες είναι εξίσου άφθονες με τα βιβλία. Ορίστε μερικές από αυτές.

Anno's Counting House

Anno, 1982

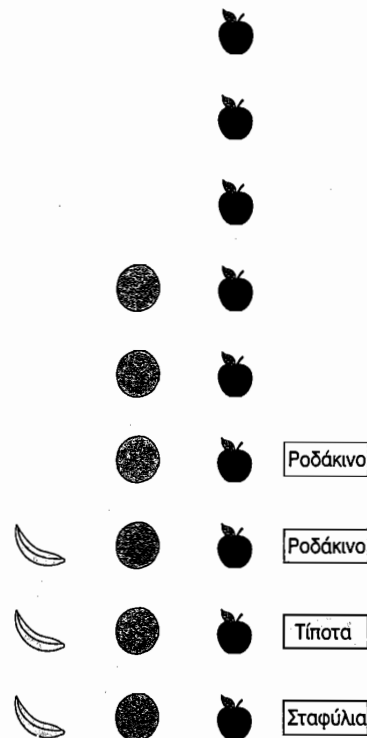
Αυτό το βιβλίο, γραμμένο με το όμορφο ύφος του Anno, δείχνει δέκα παιδιά σε διάφορα σημεία ενός σπιτιού. Καθώς γυρνούν οι σελίδες, η πρόσψη του σπιτιού καλύπτει τα παιδιά και μερικά διακρίνονται μέσα από κομμένα παράθυρα. Ένα δεύτερο σπίτι βρίσκεται στην επόμενη σελίδα. Όσο προχωράτε στο βιβλίο, τα παιδιά μετακινούνται ένα – ένα στο δεύτερο σπίτι, δημιουργώντας τη δυνατότητα για ένα πρότυπο με ζεύγη για το $10 - 0, 9 - 1, 8 - 2, \dots, 0 - 10$. Αλλά καθώς κάθε σελίδα δείχνει μέρος των παιδιών πίσω από το παράθυρο, γίνεται η ευκαιρία να συζητήσετε πόσα λείπουν. Πείτε στα παιδιά να χρησιμοποιήσουν πούλια ως μοντέλο αναπαράστασης της ιστορίας, ενώ τη «διαβάζετε» για δεύτερη ή τρίτη φορά.

Κι αν τα παιδιά μετακινούνται ανά ζεύγη αντί για ένα – ένα; Τι θα γίνονταν αν υπήρχαν τρία σπίτια; Κι αν υπήρχαν περισσότερα παιδιά; Τι άλλο θα μπορούσε να υπάρχει στο σπίτι που να μετρείται; Πόσα δωμάτια, πίνιακες, παράθυρα; Στο δικό σας σπίτι; Σε δύο τάξεις ή σε δύο λεωφορεία αντί για σπίτια;

The Very Hungry Caterpillar

Carle, 1969

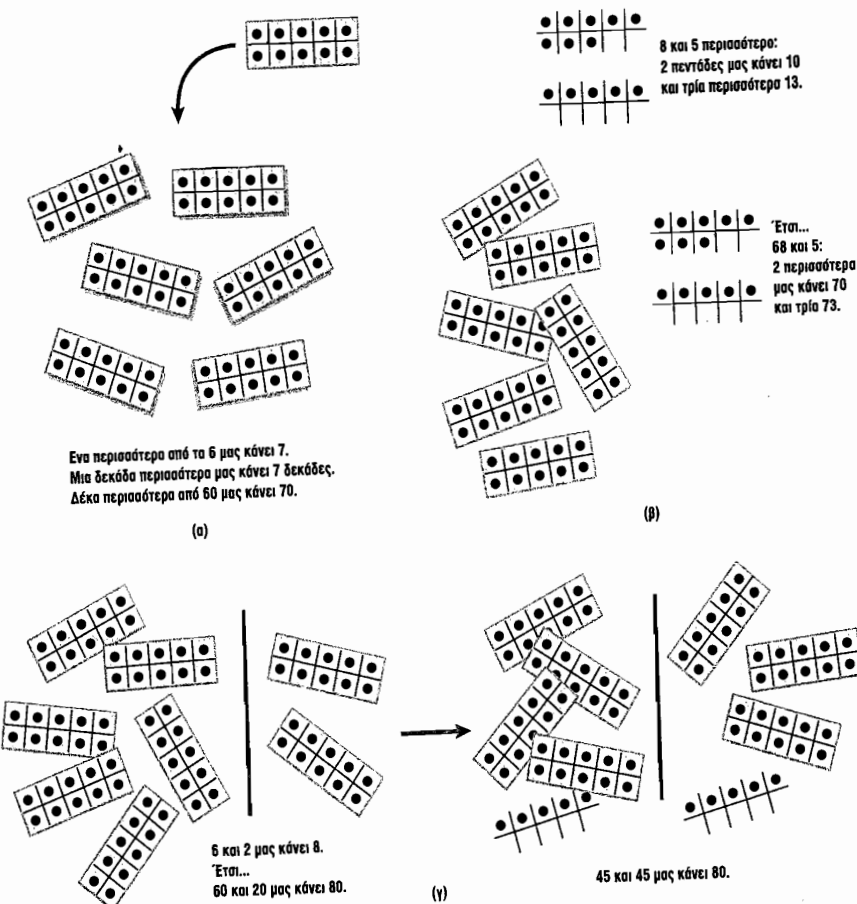
Πρόκειται για ένα βιβλίο απαρίθμησης με προβλέψιμη εξέλιξη που μιλά για μια κάμπια που τρώει πρώτα ένα πράγμα, μετά δύο και συνεχίζει ανάλογα. Τα παιδιά μπορούν να δημιουργήσουν τις δικές τους ιστορίες με φαγητό και να τις εικονογραφήσουν. Τι θα γίνονταν αν σε κάθε στάση έτρωγε περισσότερα από ένα είδη πραγμάτων; Ποιοι συνδυασμοί υπάρχουν για κάθε αριθμό; Επτά μικρότερα πράγματα είναι περισσότερα από τρία ή λιγότερα από τρία πολύ μεγάλα πράγματα; Πόσο ζυγίζουν όλα αυτά; Πόσα πράγματα τρώει συνολικά;



Γράφημα της τάξης που δείχνει τα φρούτα που έφεραν τα παιδιά για καλατσά. Χάρτινα αποκόμματα με μπανάνες, πορτοκάλια, μήλα και καρτέλες για τα «άλλα».

- Ποια ράβδος (ή άλλως αναφερθείτε σε ό,τι αναπαριστά το γράφημα) έχει τα περισσότερα; Τα λιγότερα;
- Ποια είναι περισσότερα (λιγότερα) από 7 (ή κάποιον άλλο αριθμό);
- Ποια είναι ένα λιγότερο (περισσότερο) από αυτή τη ράβδο;
- Πόσο περισσότερο είναι το _____ από το _____; (αμέσως μετά διατυπώστε την ίδια ερώτηση, αντιστρέφοντας τη σειρά και ρωτώντας πόσο λιγότερο είναι).
- Πόσο λιγότερο είναι το _____ από το _____; (αντιστρέψτε αυτή την ερώτηση, αφού πάρετε μία απάντηση).
- Πόση διαφορά υπάρχει ανάμεσα στο _____ και στο _____.
- Ποιες δύο ράβδοι έχουν μαζί τον ίδιο αριθμό φρούτων με την _____;

ΣΧΗΜΑ 9.16 Σχέσεις και σημασία των αριθμών σε ένα ραβδόγραμμα.



ΣΧΗΜΑ 9.17 Επέκταση των πρώτων σχέσεων των αριθμών σε νοητικές δραστηριότητες υπολογισμού.

Two Ways to Count to Ten

Dee, 1988

Αυτό το λαϊκό παραμύθι από τη Λιβερία μιλάει για το βασιλιά Λεοπάρο που αναζητά το καλύτερο ζώο για να παντρεύσει την κόρη του. Ο άθλος που έχει επινοήσει είναι να ρβούν ένα ακόντιο και να μετρήσουν ως το 10 πριν αυτό προσγειωθεί. Πολλά ζώα προσπαθούν και αποτυγχάνουν. Η απαρίθμηση ανά μονάδες αποδεικνύεται πολύ χρονοβόρα. Τέλος, η αντάλψη πετυχαίνει μετρώντας «2, 4, 6, 8, 10».

Η ιστορία είναι μια ιδανική εισαγωγή για την απαρίθμηση ανά δύο, τρία ή όποιο άλλο πολλαπλάσιο του 1. Μπορεί-

τε να μετρήσετε ως το 10 ανά τρία; Πώς αλλιώς μπορείτε να μετρήσετε ως το 10; Με πόσους τρόπους μπορείτε να μετρήσετε ως το 48; Σε ποιους αριθμούς μπορείτε να φτάσετε, αν μετράτε ανά πέντε; Το μέγεθος των αριθμών που ερευνάτε περιορίζεται μόνο από τα παιδιά. Ένας πίνακας αριθμών ως το 100 ή πούλια είναι χρήσιμα παιχνίδια σκέψης που θα βοηθήσουν με αυτά τα προβλήματα. Βεβαιωθείτε ότι τα παιδιά γράφουν για ό,τι ανακαλύπτουν στις έρευνές τους.

Ένα άλλο διασκεδαστικό βιβλίο που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε είναι το *The King's Commissioners*, Friedman, 1994, ένα ξεκαρδιστικό παραμύθι το οποίο επιπλέον δημιουργεί

γεί νέες ευκαιρίες για απαρίθμηση με διαφορετικές ομαδοποιήσεις ή απαρίθμηση με πολλαπλάσια του 1.■

Επεκτάσεις στα Πρώτα Νοητικά Μαθηματικά

Οι δάσκαλοι της δευτέρας και της τρίτης τάξης μπορούν να επωφεληθούν από ορισμένες από τις πρώτες αριθμητικές σχέσεις και να τις επεκτείνουν στους αριθμούς ως το 100. Ένα χρήσιμο σύνολο υλικών που μπορεί να βοηθήσει με αυτές τις σχέσεις είναι τα μικρά πλαίσια των δέκα που θα βρείτε στα Blackline Masters. Κάθε παιδί μπορεί να έχει ένα σύνολο 10 δεκάδων και ένα σύνολο από πλαίσια για κάθε αριθμό από το 1 έως το 9 με ένα επιπλέον 5.

Οι ακόλουθες τρεις ιδέες απεικονίζονται με τα μικρά πλαίσια των δέκα στο Σχήμα 9.17. Αρχικά βλέπουμε τις σχέσεις με το ένα περισσότερο και ένα λιγότερο. Αν καταλαβαίνετε ότι το 7 είναι ένα παραπάνω από το 6, τότε κατά παρόμοιο τρόπο, το 70 είναι δέκα παραπάνω από το 60 (δηλαδή, μία δεκάδα παραπάνω). Η δεύτερη ιδέα αποτελεί προετοιμασία για τη μετέπειτα μάθηση των στρατηγικών

που χρησιμοποιούνται στις βασικές πράξεις. Αν ένα παιδί έχει μάθει να προσθέτει στο 8 και στο 9 προσθέτοντας πρώτα ως το 10 και μετά προσθέτοντας και τα υπόλοιπα, η επέκταση σε παρόμοιους διψήφιους αριθμούς είναι πολύ απλή: βλ. Σχήμα 9.17β. Τέλος, η πιο αποτελεσματική ιδέα για τους μικρούς αριθμούς είναι να τους βλέπουμε σε μέρη. Είναι πολύ χρήσιμη η ιδέα (αν και δεν τη βλέπουμε στα σχολικά εγχειρίδια) να διασπάμε τους μεγαλύτερους αριθμούς, ώστε να αρχίσουμε να αναπτύσσουμε με τον ίδιο τρόπο κάποια ευελιξία. Τα παιδιά μπορούν να αρχίσουν να σκέφτονται τρόπους να διασπάσουν ένα πολλαπλάσιο του 10, όπως το 80. Αφού το κάνουν με τις δεκάδες, η νέα πρόκληση μπορεί να είναι να σκεφτούν τρόπους να διασπάσουν το 80 σε κομμάτια που να περιέχουν ένα 5, όπως το 25 ή το 35.

Στο Κεφάλαιο 13 θα αναφερθούν περισσότερα παραδείγματα για τους πρώτους νοερούς υπολογισμούς. Σκοπός εδώ είναι να δούμε ότι οι πρώτες σχέσεις των αριθμών έχουν πολύ μεγαλύτερο αντίκτυπο στις γνώσεις των παιδιών απ' ό,τι φαίνεται αρχικά. Ακόμη και οι εκπαιδευτικοί των μεγαλύτερων τάξεων μπορούν να ωφεληθούν, αν λάβουν υπόψη τους τη χρήση των πλαισίων των δέκα και των δραστηριοτήτων του τύπου μέρος—μέρος—όλο.

Σκέψεις πάνω στο Κεφάλαιο 9

Μαθαίνουμε γράφοντας

1. Περιγράψτε μια δραστηριότητα για μια βασική αριθμητική έννοια που δεν απαιτεί κατανόηση απαρίθμησης. Εξηγήστε το σκοπό αυτής της δραστηριότητας.
2. Ποια πράγματα πρέπει να είναι σε θέση να κάνει ένα παιδί για να μετρήσει ένα σύνολο σωστά;
3. Πότε ένα παιδί κατατάσσεται στην αρχή των πληθύνων των στοιχείων (του πληθάριμου ενός συνόλου); Πώς μπορείτε να πείτε ότι αυτή η αρχή έχει κατακτηθεί;
4. Περιγράψτε μια δραστηριότητα που αποτελεί μια «αντιστοίχιση αριθμού—σύνολο». Ποιες ιδέες πρέπει να έχει ένα παιδί για να κάνει αυτές τις δραστηριότητες σωστά;
5. Πώς μπορεί η «Αληθινή Απαρίθμηση» (Δραστηριότητα 9.7) να χρησιμοποιηθεί ως αξιολόγηση και να προσδιορίσει αν τα παιδιά κατανοούν την απαρίθμηση ή αν ακόμα βρίσκονται σε πρώιμο στάδιο;
6. Ποιοι είναι οι τέσσερις τύποι σχέσεων που περιγράφηκαν σε σχέση με τους μικρούς αριθμούς; Δώστε ένα σύντομο ορισμό καθενός από αυτούς και αναφέρετε τουλάχιστον μία δραστηριότητα για καθέναν ξεχωριστά.
7. Περιγράψτε μια δραστηριότητα του τύπου «μέρος που λείπει» και εξηγήστε τι πρόκειται να συμβεί αν το παιδί που προσπαθεί να βρει το μέρος που λείπει, δεν το γνωρίζει.

8. Πώς μπορεί ο εκπαιδευτικός να αξιολογήσει την κάθε μία από τις σχέσεις των τεσσάρων αριθμών; Δώστε ιδιαίτερη προσοχή στις ιδέες μερών—όλου.
9. Πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια αριθμομηχανή για την ανάπτυξη των πρώτων ιδεών απαρίθμησης που συνδέονται με τους αριθμούς; Πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια αριθμομηχανή για να βοηθήσει ένα παιδί να εξασκηθεί στις αριθμητικές σχέσεις όπως στις σχέσεις μερών—όλου ή ένα λιγότερο από;
10. Για τους αριθμούς ανάμεσα στο 10 και στο 20, περιγράψτε τον τρόπο ανάπτυξης καθεμιάς από τις εξής ιδέες:
 - α) την ιδέα των αριθμών με πρώτο συνθετικό το δέκα ως σύνολο 10 και μεριών ακόμη,
 - β) επέκταση της έννοιας του ένα περισσότερο/ένα λιγότερο, στην περίπτωση των αριθμών με πρώτο συνθετικό το δέκα.
11. Εξηγήστε σύντομα τι σημαίνει για σας η σημασία της έννοιας του αριθμού.
12. Ποιοι είναι οι τρεις τρόποι με τους οποίους μπορούμε να βοηθήσουμε τα παιδιά να συνδέσουν τους αριθμούς με ιδέες του αληθινού κόσμου;
13. Δώστε δύο παραδείγματα πώς οι σχέσεις των πρώτων αριθμών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπτύξουν μερικές πρώτες νοητικές ικανότητες υπολογισμού.

Για Διάλογο και Διερεύνηση

- 1. Εξετάστε μια σειρά εγχειριδίων για τις τάξεις από το νηπιαγωγείο ως τη δεύτερα. Συγκρίνετε την πραγμάτευση της ανάπτυξης των εννοιών της απαρίθμησης και του αριθμού με όσα παρουσιάστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο. Ποιες ιδέες τονίζονται; Ποιες ιδέες παραλείπονται εντελώς; Αν διδάσκατε σε μία από αυτές τις τάξεις, πώς θα σχεδιάζατε το πρόγραμμα ανάπτυξης της έννοιας του αριθμού; Τι ρόλο θα έπαιξε σε αυτό το εγχειρίδιο;
- 2. Πολλοί εκπαιδευτικοί σε τάξεις πάνω από την τρίτη διαπιστώνουν ότι τα παιδιά τους δεν κατέχουν τις αριθμητικές σχέσεις που αναφέρθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, αλλά στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό στην απαρίθμηση. Με δεδομένη αυτή την πείρα από το περιεχόμενο των άλλων μαθημάτων στις τάξεις αυτές, πόση προσπάθεια χρειάζεται για την αποκατάσταση αυτών των ελλείψεων στην έννοια του αριθμού;

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία
Συστάσεις για Περαιτέρω Διάβασμα

Burton, G. (1993). *Number sense and operations: Addenda series, grades K–6*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Είτε αυτό το βιβλίο είτε εκείνο από τη σειρά βοηθημάτων *Number Sense and Operations* που αντιστοιχεί στην τάξη σας οφείλει να είναι ένα από τα «απαράρτητα» για την ανάπτυξη των αριθμητικών εννοιών. Οι δραστηριότητες περιγράφονται με αρκετή λεπτομέρεια ώστε και να σας παρέχουν σαφή καθοδήγηση και να σας αφήνουν μεγάλα περιθώρια ευελιξίας.

Fosnot, C.T., & Dolk, M., (2001) *Young Mathematicians at Work: Constructing number sense, addition and subtraction*. Portsmouth, NH: Heinemann

Ένα από τα τρία βιβλία σε μία σειρά από τους ίδιους συγγραφείς, στο οποίο περιγράφουν ξεκάθαρα την ανάπτυξη των εννοιών των αριθμών. Ο Dolk υποστηρίζει την άποψη του Freudental Institute στην Ολλανδία και ο Fosnot είναι ένας αξιολογιστής μαθηματικών και θεωρητικός των μαθηματικών στις Ηνωμένες Πολιτείες. Το βιβλίο εκφράζει μία ευαισθησία απέναντι στα παιδιά και μία λεπτομερή οπτική της ανάπτυξης της έννοιας του αριθμού στα παιδιά.

Fuson, K. C., Grandau, L., & Sugiyama, P. A. (2001). *Achievable numerical understandings for all young children*. Teaching Children Mathematics, 7, 552–526.

Οι ερευνητές που δουλεύουν με την ανάπτυξη του αριθμού στα μικρά παιδιά, παρέχουν στον αναγνώστη μία άποψη της ανάπτυξης του αριθμού σε ηλικίες 3 ως 7 ετών. Η πρακτική αναφορά της έρευνάς τους είναι αρκετά χρήσιμη.

Griffin, S., (2003). *Laying the foundation for computational fluency in early childhood*. Teaching Mathematics, 9, 306–309

Αυτό το σύντομο άρθρο παρουσιάζει ξεκάθαρα τα πέντε στάδια της ανάπτυξης των αριθμών που στηρίζεται σε ένα πρόβλημα αυλής πρόσθεσης γύρω από μια ιστορία. Το πρόβλημα

ακολουθείται από δραστηριότητες για να αναπτυχθεί η έννοια των αριθμών σε κάθε στάδιο. Ένα χρήσιμο άρθρο, ιδιαίτερα για διάγνωση και πραγμάτωση της ανάπτυξης των πρώτων αριθμών.

Richardson K., (2002) *Assessing Math Concepts: The hiding assessment*. Rowley, MA: Didax.

Ένα από τα εννιά βιβλία μιας σειράς για την αξιολόγηση, τα οποία καλύπτουν διάφορα θέματα από την απαρίθμηση μέχρι τους διηρήσιμους αριθμούς. Οι αξιολογήσεις είναι σχεδιασμένες έτσι ώστε να προκύπτουν έπειτα από προσωπικές συζητήσεις με τα παιδιά. Παρέχονται εκτεταμένες εξηγήσεις και παραδείγματα για όλα τα επίπεδα. Ο Richardson είναι ένας από τους σημαντικότερους ειδικούς για την ανάπτυξη των πρώτων αριθμητικών εννοιών και την αξιολόγηση. Τα άλλα βιβλία της σειράς συνιστώνται, αν και στο πρώτο τμήμα τους τα θέματα συμπίπτουν.

Διαδικτυακές Πηγές

Προτεινόμενα Βοηθητικά Προγράμματα και Διαδικτυακοί Σύνδεσμοι

Count Us In
www.abc.net.au/countusin/default.htm

Μία σελίδα γεμάτη από παιχνίδια και δραστηριότητες που μπορείτε να κατεβάσετε για την ανάπτυξη των πρώτων αριθμητικών εννοιών.

Let's Count to Twenty
http://illuminations.nctm.org/index_o.aspx?id=153

Μία σειρά επτά μαθημάτων που έχει σχεδιαστεί για να αναπτύσσει την κατανόηση των παιδιών σε σχέση με τους αριθμούς μέχρι το 20. Περιλαμβάνονται τα Blackline Masters. Ένα από τα πολλά μαθήματα για τους πρώτους αριθμούς στη σελίδα του Investigations.

Math Tools: Math 1, Number Sense
<http://mathforum.org/mathtools/cell/m1.3.2.ALL.ALL>

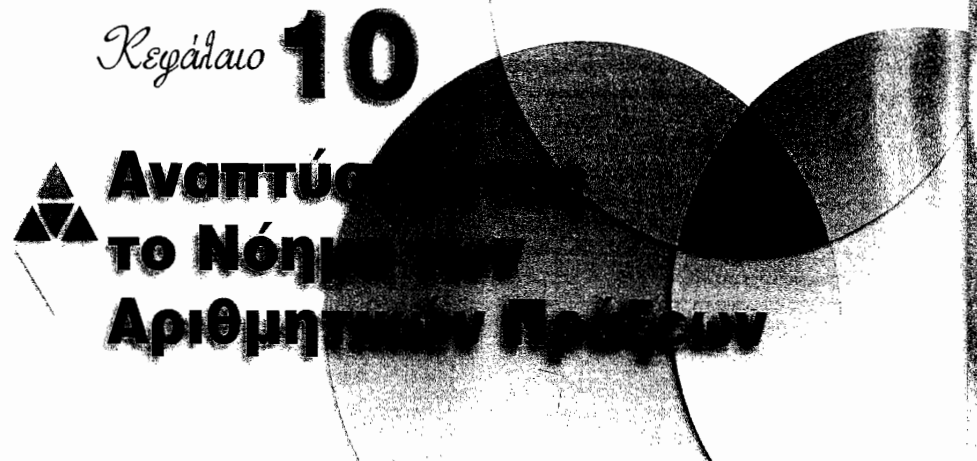
Σε αυτή τη σελίδα του Math Tools μπορείτε να βρείτε δραστηριότητες και μαθήματα που είναι κατάλληλα για την έννοια των αριθμών στην πρώτη τάξη. Διερευνήστε και τις άλλες επιλογές της σελίδας.

Ten Frame (NCTM Illuminations Tools)
http://illuminations.nctm.org/tools/tool_detail.aspx?id=75

Μία καλή χειραυτή εκδοχή των πλαισίων με δεκάδες (βοηθητικό πρόγραμμα). Πιθανότατα χρησιμοποιείται καλύτερα από τον/την εκπαιδευτικό, αν το κείμενο είναι μικρό. Τα παιδιά χρησιμοποιούν πούλια και εισάγουν τον αριθμό που απαιτάνται στην ερώτηση. Υπάρχει επίσης και βοηθητικό πρόγραμμα με πλαίσιο του 5.



Επιπλέον κατάλογος βιβλίων και άρθρων που σχετίζονται με τις ιδέες που αναφέρονται σε αυτό το κεφάλαιο μπορείτε να βρείτε στο www.ablongman.com/vandewalle6e



Αυτό το κεφάλαιο έχει ως στόχο του να βοηθήσουμε τα παιδιά να συνδέσουν διαφορετικές σημασίες, ερμηνείες και σχέσεις με τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις, της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, έτσι ώστε να είναι σε θέση να τις χρησιμοποιούν αποτελεσματικά και σε πραγματικές καταστάσεις.

Ο κύριος σκοπός του κεφαλαίου είναι να βοηθήσουμε τα παιδιά να καλλιεργήσουν αυτό που θα μπορούσε να οριστεί ως το νόημα των αριθμητικών πράξεων, μια εξαιρετικά ολοκληρωμένη κατανόηση των τεσσάρων πράξεων και των πολλών διαφορετικών, αλλά αλληλοσχετιζόμενων σημασιών που υπάρχουν σε πραγματικές συνθήκες.

Καθώς θα το διαβάζετε, προσέξτε ιδιαίτερα την επίδραση στην ανάπτυξη των αριθμητικών εννοιών, την κατάκτηση των βασικών γεγονότων και των υπολογισμών. Καθώς τα παιδιά αναπτύσσουν την κατανόηση των πράξεων, μπορούν και πρέπει να αναπτύξουν ταυτόχρονα επιπρόσθετες ιδέες σχετικά με τους αριθμούς και τρόπους να σκέφτονται διαφορετικούς συνδυασμούς σε βασικά γεγονότα. Τα προβλήματα με αφήγηση αφορούν στο νόημα των πράξεων και αποτελούν επίσης και μία μέθοδο για την ανάπτυξη των υπολογιστικών ικανοτήτων.

Κεντρικές Ιδέες

- 1. Η πρόσθεση και η αφαίρεση σχετίζονται μεταξύ τους. Η πρόσθεση ονομάζει το σύνολο σε σχέση με τα μέρη και η αφαίρεση ονομάζει το μέρος που λείπει.
- 2. Ο πολλαπλασιασμός αφορά την απαρίθμηση ομάδων του ίδιου μεγέθους και τον καθορισμό της συνολικής τους ποσότητας (πολλαπλασιαστική σκέψη).
- 3. Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση σχετίζονται μεταξύ τους. Η διαίρεση ονομάζει έναν άγνωστο παράγοντα σε σχέση με το γνωστό παράγοντα και το γινόμενο.

- 4. Για την επίλυση προβλημάτων με αφήγηση για όλες τις πράξεις και για τον εντοπισμό της συγκεκριμένης πράξης που απαιτείται σε ένα πρόβλημα μπορούν να χρησιμοποιηθούν μοντέλα ανεξάρτητα από το μέγεθος των αριθμών. Τα μοντέλα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν επίσης και για να δώσουν νόημα στις αριθμητικές προτάσεις.

Μαθηματικά
Συνδέσεις με το Περιεχόμενο

Οι ιδέες σε αυτό το κεφάλαιο συνδέονται άμεσα με τις ιδέες της αριθμησης και την ανάπτυξη της επινόησης υπολογιστικών στρατηγικών.

- **Ανάπτυξη του αριθμού (κεφάλαιο 9):** Καθώς τα παιδιά μαθαίνουν να σκέφτονται τον αριθμό ως μέρη ή και ως μέρη που λείπουν, θα πρέπει να συνδέουν αυτές τις ιδέες με την πρόσθεση και την αφαίρεση. Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση προϋποθέτουν παιδιά που σκέφτονται τον αριθμό ως σύνολο μονάδων: στο 3×6 , καθεμία από τις τρεις εξάδες μετρίεται ως μονάδα. Κατά μία έννοια, οι πράξεις μπορούν να θεωρηθούν απλά ως ένας τρόπος για να καταγράφουν ιδέες σχετικά με τους αριθμούς χρησιμοποιώντας σύμβολα.
- **Βασικά Γεγονότα (Κεφάλαιο 11):** Μια καλή κατανόηση των πράξεων μπορεί σίγουρα να συνδέσει την πρόσθεση και την αφαίρεση με τέτοιο τρόπο ώστε τα γεγονότα της αφαίρεσης να αποτελούν φυσική συνέπεια της κατάκτησης της πρόσθεσης. Για παράδειγμα, $12 - 5 = 7$ από τη στιγμή που $5 + 7$ κάνει 12. Μία σταθερή σύνδεση μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης προσφέρει ένα ανάλογο όφελος.
- **Η θεσπική αξία του ανεξάρτητου αριθμού και ο υπολογισμός (Κεφάλαιο 12 και 13):** Τα παιδιά μπορούν να δουλέψουν κάποιες ιδέες σχετικές με το δεκαδικό σύστημα και να τις αναπτύξουν καθώς λύνουν προβλήματα με α-

φήγηση που περιέχουν μεγαλύτερους αριθμούς. Παρόλο που οι υπολογιστικές στρατηγικές παραδοσιακά έχουν διαχτεί ξεχωριστά από το νόημα των πράξεων, είναι λογικό να ζητάμε από τα παιδιά να φευνόσκουν στρατηγικές υπολογισμού για διαφόρους αριθμούς καθώς οικοδομούν την κατανόηση των πράξεων.

■ **Αλγεβρική Σκέψη (Κεφάλαιο 15):** Η αναπαράσταση συγκεκριμένων καταστάσεων στις εξισώσεις είναι η καρδιά της αλγεβρικής σκέψης. Αυτό ακριβώς κάνουν τα παιδιά καθώς μαθαίνουν να γράφουν εξισώσεις για να λύνουν προβλήματα με αφήγηση.

■ **Υπολογισμός Κλασμάτων και Δεκαδικών Αριθμών (Κεφάλαια 17 και 18):** Αυτά τα θέματα για τις μεγαλύτερες τάξεις του Δημοτικού και τις πρώτες του Γυμνασίου, εξαρτώνται από την καλή κατανόηση των πράξεων.

Δομές Προβλημάτων Πρόσθεσης και Αφαίρεσης

Μια σημαντική μέθοδος ανάπτυξης νοήματος για τις πράξεις είναι να ζητάμε από τα παιδιά να λύνουν προβλήματα σχετικά με το συγκεκριμένο ή αλλιώς να λύνουν προβλήματα με αφηγήσεις.

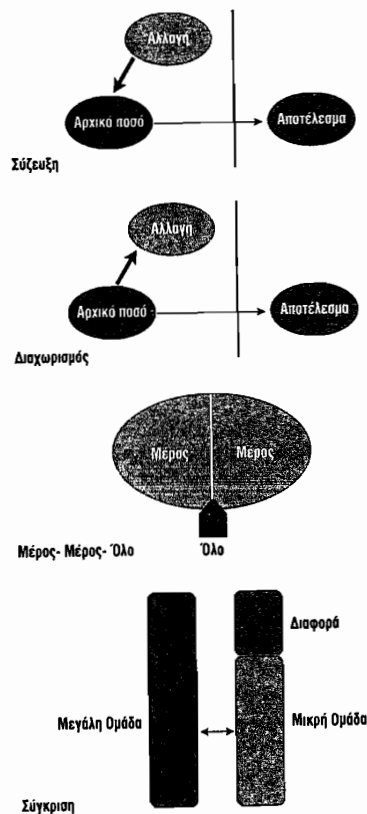
Οι ερευνητές έχουν χωρίσει τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης σε κατηγορίες, ανάλογα με το είδος των σχέσεων που περιέχουν: προβλήματα σύζευξης, προβλήματα διαχωρισμού, προβλήματα μέρους – μέρους – όλου και προβλήματα σύγκρισης (Carpenter, Carey, & Koubas, 1990, Carpenter, Fennema, Franke, Levi, & Empson, 1999, Gustein & Romberg, 1995). Η βασική δομή καθενός από τους τέσσερις τύπους προβλημάτων απεικονίζεται στο Σχήμα 10.1. Κάθε δομή περιέχει μια αριθμητική «οικογένεια» όπως το 3, 5, 8. Ανάλογα με το ποια από τις τρεις ποσότητες μας είναι άγνωστη προκύπτει και ένα διαφορετικό πρόβλημα.

Παραδείγματα Προβλημάτων για Κάθε Δομή

Η αριθμητική οικογένεια 4, 8, 12 χρησιμοποιείται σε καθένα από τα προβλήματα με αφήγηση που ακολουθούν και μπορούν να συνδεθούν με τη δομή του Σχήματος 10.1. Τα σχέδια αυτά δεν απευθύνονται στα παιδιά, αλλά σε σας ως εκπαιδευτικούς για να σας βοηθήσουν να μελετήσετε τις διαφορετικές δομές. Σημειώστε επίσης ότι τα προβλήματα περιγράφονται ως προς τη δομή τους και όχι ως προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης. Αντίθετα σε όσα μπορεί να σκεφτήκατε, μία πράξη σύζευξης δεν σημαίνει πάντα πρόσθεση, ούτε ο διαχωρισμός σημαίνει πάντα αφαίρεση.

Προβλήματα Σύζευξης

Στην πράξη της σύζευξης περιλαμβάνονται τρεις ποσότητες:



ΣΧΗΜΑ 10.1 Τέσσερις βασικές δομές για την πρόσθεση και την αφαίρεση σε προβλήματα με αφήγηση. Κάθε δομή έχει τρεις αριθμούς. Οποιοσδήποτε από τους τρεις αριθμούς μπορεί να είναι ο άγνωστος σε ένα τέτοιο πρόβλημα.

ένα αρχικό ποσό, ένα ποσό αλλαγής (το μέρος που προστίθεται ή ενώνεται) και το τελικό ποσό (το αποτέλεσμα).

ΣΥΖΕΥΞΗ: ΑΓΝΩΣΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

Η Σάντρα είχε 8 σεντς. Ο Τζωρτζ της έδωσε 4 περισσότερα. Πόσα σεντς έχει συνολικά η Σάντρα;

ΣΥΖΕΥΞΗ: ΠΟΣΟ ΑΛΛΑΓΗΣ ΑΓΝΩΣΤΟ

Η Σάντρα είχε 8 σεντς. Ο Τζωρτζ της έδωσε μερικά ακόμη. Τώρα η Σάντρα έχει 12 σεντς. Πόσα σεντς της έδωσε ο Τζωρτζ;

ΣΥΖΕΥΞΗ: ΑΓΝΩΣΤΟ ΤΟ ΑΡΧΙΚΟ ΠΟΣΟ

Η Σάντρα είχε μερικά σεντς. Ο Τζωρτζ της έδωσε άλλα 4. Τώρα η Σάντρα έχει 12 σεντς. Πόσα σεντς είχε στην αρχή η Σάντρα;

Προβλήματα Διαχωρισμού

Παρατηρήστε ότι στα προβλήματα διαχωρισμού, το αρχικό ποσό είναι το σύνολο ή το μεγαλύτερο ποσό, ενώ στα προβλήματα σύζευξης σύνολο ήταν το εξαγόμενο. Και πάλι δείτε το Σχήμα 10.1 όσο μελετάτε αυτά τα προβλήματα. Βεβαιωθείτε ότι μπορείτε να εντοπίσετε ποιες ποσότητες είναι τα αρχικά ποσά, τα ποσά αλλαγής και τα εξαγόμενα ποσά.

ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ: ΑΓΝΩΣΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

Η Σάντρα είχε 12 σεντς. Έδωσε 4 σεντς στον Τζωρτζ. Πόσα σεντς έχει τώρα η Σάντρα;

ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ: ΑΓΝΩΣΤΟ ΠΟΣΟ ΑΛΛΑΓΗΣ

Η Σάντρα είχε 12 σεντς. Έδωσε μερικά στον Τζωρτζ. Τώρα έχει 8 σεντς. Πόσα σεντς έδωσε στον Τζωρτζ;

ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ: ΑΓΝΩΣΤΟ ΑΡΧΙΚΟ ΠΟΣΟ

Η Σάντρα είχε μερικά σεντς. Έδωσε 4 στον Τζωρτζ. Τώρα έχει 8 σεντς. Πόσα σεντς είχε η Σάντρα στην αρχή;

Προβλήματα Μέρους - Μέρους - Όλου

Τα προβλήματα μέρους - μέρους - όλου περιλαμβάνουν δύο μέρη τα οποία συνδυάζονται και σχηματίζουν ένα σύνολο. Ο συνδυασμός μπορεί να είναι μια φυσική πράξη ή να πραγματοποιηθεί νοερά, με τα μέρη να μη συνδυάζονται στην πράξη.

Δεν υπάρχει κάποια σημαντική διαφοροποίηση ανάμεσα στα δύο μέρη στο πρόβλημα του τύπου μέρους - μέρους - όλου, επομένως δεν χρειάζεται να υπάρχει διαφορετικό πρόβλημα με άγνωστο καθένα από τα δύο μέρη. Για κάθε πιθανότητα (σύνολο άγνωστο και μέρος άγνωστο) δίνονται εδώ δύο προβλήματα. Το πρώτο είναι ένας νοερός συνδυασμός στον οποίο δεν υπάρχει καμία πράξη. Το δεύτερο πρόβλημα περιέχει μια φυσική πράξη.

ΜΕΡΟΣ - ΜΕΡΟΣ - ΟΛΟ: ΑΓΝΩΣΤΟ ΤΟ ΟΛΟ

Ο Τζωρτζ έχει 4 σεντς και 8 πεντάλεπτα. Πόσα νομίσματα έχει;

Ο Τζωρτζ έχει 4 σεντς ενώ η Σάντρα 8. Βάζουν τα νομίσματά τους σε έναν κουμπαρά. Πόσα σεντς έβαλαν στον κουμπαρά;

ΜΕΡΟΣ - ΜΕΡΟΣ - ΟΛΟ: ΑΓΝΩΣΤΟ ΜΕΡΟΣ

Ο Τζωρτζ έχει 12 νομίσματα. Οκτώ από αυτά τα νομίσματα είναι σεντς και τα υπόλοιπα είναι πεντάλεπτα. Πόσα πεντάλεπτα έχει ο Τζωρτζ;

Ο Τζωρτζ και η Σάντρα έβαλαν στον κουμπαρά 12 σεντς. Ο Τζωρτζ έβαλε 4 σεντς. Πόσα σεντς έβαλε η Σάντρα;

Προβλήματα Σύγκρισης

Τα προβλήματα σύγκρισης έχουν να κάνουν με τη σύγκριση δύο ποσοτήτων. Το τρίτο ποσό δεν υπάρχει ακριβώς, αλλά συνιστά τη διαφορά μεταξύ των δύο ποσών. Υπάρχουν τρεις τύποι προβλημάτων σύγκρισης, ανάλογα με την ποσότητα που είναι κάθε φορά άγνωστη (η μεγαλύτερη, η μικρότερη ή η διαφορά). Για καθέναν από αυτούς δίνονται δύο παραδείγματα: ένα πρόβλημα όπου η διαφορά παρουσιάζεται ως έκφραση του περισσότερου και ένα ως έκφραση του λιγότερου.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ: Η ΑΓΝΩΣΤΗ ΔΙΑΦΟΡΑ

Ο Τζωρτζ έχει 12 σεντς και η Σάντρα έχει 8 σεντς. Πόσα περισσότερα σεντς έχει ο Τζωρτζ από τη Σάντρα;

Ο Τζωρτζ έχει 12 σεντς. Η Σάντρα έχει 8 σεντς. Πόσα λιγότερα σεντς έχει η Σάντρα από τον Τζωρτζ;

ΣΥΓΚΡΙΣΗ: ΤΟ ΑΓΝΩΣΤΟ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ ΠΟΣΟ

Ο Τζωρτζ έχει 4 σεντς περισσότερα από τη Σάντρα. Η Σάντρα έχει 8 σεντς. Πόσα σεντς έχει ο Τζωρτζ;

Η Σάντρα έχει 4 σεντς λιγότερα από τον Τζωρτζ. Η Σάντρα έχει 8 σεντς. Πόσα σεντς έχει ο Τζωρτζ;

ΣΥΓΚΡΙΣΗ: ΤΟ ΑΓΝΩΣΤΟ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ ΠΟΣΟ

Η Σάντρα έχει 4 σεντς λιγότερα από τον Τζωρτζ. Ο Τζωρτζ έχει 12 σεντς. Πόσα σεντς περισσότερα έχει η Σάντρα; Ο Τζωρτζ έχει 4 σεντς περισσότερα από τη Σάντρα. Ο Τζωρτζ έχει 12 σεντς. Πόσα σεντς έχει η Σάντρα;

Σταματήστε και σκεφτείτε

Δείτε ξανά όλα τα παραπάνω προβλήματα και αντιστοιχίστε τους αριθμούς στα προβλήματα με τα συστατικά των δομών στο Σχήμα 10.1. Για κάθε πρόβλημα, κάντε δύο επιπρόσθετες ενέργειες. Πρώτον, χρησιμοποιήστε ένα σύνολο από πούλια για να αναπαραστήσετε (λύσετε) το πρόβλημα όπως πιστεύετε ότι θα το έλυναν τα παιδιά των πρώτων τάξεων. Δεύτερον, για κάθε πρόβλημα, γράψτε μια εξίσωση είτε πρόσθεσης, είτε αφαίρεσης που πιστεύετε ότι αντιπροσωπεύει καλύτερα το πρόβλημα όπως το παρουσιάσατε με πούλια.

Σκέψεις πάνω στις Τέσσερις Δομές

Σχεδόν σε όλα τα αναλυτικά προγράμματα, δίνεται μεγάλη έμφαση στα ευκολότερα προβλήματα σύζευξης και διαχωρισμού όπου είναι άγνωστο το αποτέλεσμα. Αυτοί είναι οι στάνταρ ορισμοί της πρόσθεσης και της αφαίρεσης: πρόσθεση σημαίνει «τα βάζω μαζί» και η αφαίρεση σημαίνει «τα παίρνω πίσω». Η αλήθεια είναι ότι αυτοί δεν είναι οι ορισμοί της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Όταν τα παιδιά αναπτύσσουν τους παραπάνω ορισμούς για την πρόσθεση και την αφαίρεση, αργότερα συναντούν συχνά δυσκολίες στην πρόσθεση και την αφαίρεση καθώς η δομή είναι κάτι παραπάνω από «βάζω μαζί» ή «παίρνω πίσω». Είναι σημαντικό να εκτίθενται τα παιδιά σε όλες τις μορφές των δομών.

Υπολογιστικές και Σημαιολογικές Μορφές των Εξισώσεων

Αν γράφατε μια εξίσωση για το καθένα από τα προβλήματα που προτάθηκαν, θα είχατε εξισώσεις στις οποίες η άγνωστη ποσότητα δεν θα ήταν απομονωμένη από τη μια μεριά της εξίσωσης. Για παράδειγμα, μια πιθανή εξίσωση για το πρόβλημα σύζευξης με άγνωστο το αρχικό ποσό είναι $\square + 4 = 12$. Αυτή θα ήταν η *σημαιολογική εξίσωση* για το συγκεκριμένο πρόβλημα, εφόσον οι αριθμοί αναγράφονται με τη σειρά που εμφανίζονται στην εκφώνηση. Όταν η σημαιολογική μορφή δεν απομονώνει τον άγνωστο, μπορεί να γραφεί μια ισοδύναμη εξίσωση για τα εξी προβλήματα σύζευξης και διαχωρισμού. Παρατηρήστε ότι τα δύο προβλήματα με άγνωστο το αποτέλεσμα θέτουν το άγνωστο στοιχείο στη μία πλευρά του ίσον. Μία εξίσωση που απομονώνει το άγνωστο στοιχείο με αυτό τον τρόπο αναφέρεται ως η *υπολογιστική μορφή* της εξίσωσης. Όταν η σημαιολογική μορφή δεν αποτελεί και την υπολογιστική μορφή, μπορεί να γραφεί μία αντίστοιχη εξίσωση. Για παράδειγμα, η εξίσωση $\square + 4 = 12$ μπορεί να γραφεί αντίστοιχα και ως $12 - 4 = \square$. Η υπολογιστική μορφή είναι αυτή που θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε, αν θα έπρεπε να λύσετε αυτές τις εξισώσεις με αριθμομηχανή. Καθώς οι αριθμοί μεγαλώνουν και τα παιδιά δεν λύνουν τα προβλήματα με πούλια, θα πρέπει τελικά να μάθουν να βλέπουν την αντιστοιχία ανάμεσα στις διαφορετικές μορφές εξισώσεων.

Δυσκολία του Προβλήματος

Όλα τα προβλήματα δεν παρουσιάζουν την ίδια δυσκολία για τα παιδιά. Τα προβλήματα με τα ποσά αλλαγής όπου το αρχικό ποσό είναι άγνωστο αποτελούν και τα δυσκολότερα προβλήματα, προφανώς επειδή τα παιδιά που χρησιμοποιούν άμεση αναπαράσταση των προβλημάτων με μοντέλα δεν ξέρουν πόσα πούλια να χρησιμοποιήσουν αρχικά. Αλλά και τα προβλήματα όπου τα ποσά αλλαγής είναι άγνωστα έχουν ιδιαίτερη δυσκολία.

Πολλά παιδιά θα λύσουν τα προβλήματα σύζευξης ως προβλήματα μέρους-μέρους-όλου χωρίς να φτιάξουν ξεχωριστά σύνολα από πούλια για τις δύο ποσότητες. Το όλο χρησιμοποιείται στη θέση της μεγάλης ποσότητας, το ένα μέρος στη θέση του μικρού ποσού και το άλλο στη θέση της διαφοράς. Ποια μέθοδο χρησιμοποιήσατε; Δεν υπάρχει κανένας απολύτως λόγος για να αποθαρρύνετε κάτι τέτοιο από τη στιγμή που τα παιδιά έχουν ξεκαθαρίσει τι κάνουν.

Διδάσκοντας Πρόσθεση και Αφαίρεση

Μέχρι στιγμής έχετε δει διάφορους τύπους προβλημάτων με αφηγήσεις σχετικά με την πρόσθεση και την αφαίρεση και κατά πάσα πιθανότητα έχετε χρησιμοποιήσει μερικά πούλια για να σας βοηθήσουν να κατανοήσετε τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά μπορούν να λύσουν αυτά τα προβλήματα. Αυτές οι δύο μέθοδοι, προβλήματα συγκεκριμένου και μοντέλα (πούλια, ζωγραφιές, αριθμογραμμές), αποτελούν τα κύρια διδακτικά εργαλεία που έχετε στη διάθεσή σας για να βοηθήσετε τα παιδιά να δομήσουν μια πλήρως κατανόηση αυτών των δύο πράξεων. Ας εξετάσουμε πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η κάθε προσέγγιση μέσα στην τάξη.

Χρησιμοποιώντας Προβλήματα Συγκεκριμένου

Υπάρχουν κι άλλα που μπορεί κανείς να σκεφτεί, πέρα από το να δώσει απλά στους μαθητές κάποια προβλήματα για να τα λύσουν.

Προβλήματα Συγκεκριμένου ή Αφήγησης

Σε ανάθεση με τα αυτιά, μάλλον στείρα, προβλήματα με αφήγηση του προηγούμενου τιμήματος του κεφαλαίου, δείτε το παρακάτω πρόβλημα

Άγνωστη Ποσότητα	Πρόβλημα Σύζευξης	Πρόβλημα Διαχωρισμού
Αποτέλεσμα	8 + 4 = 12	12 - 4 = 8
Μέγεθος	8 + 4 = 12	12 - 4 = 8
Αρχικό	8 + 4 = 12	12 - 4 = 8

ΣΧΗΜΑ 10.2 Η σημαιολογική εξίσωση για κάθε ένα από τα εξί προβλήματα σύζευξης και διαχωρισμού στις σελίδες 144-145. Παρατηρήστε ότι για τα προβλήματα με άγνωστο το αποτέλεσμα η σημαιολογική μορφή αποτελεί επίσης και την υπολογιστική μορφή. Η υπολογιστική μορφή για τα υπόλοιπα τέσσερα προβλήματα είναι μία αντίστοιχη εξίσωση που απομονώνει την άγνωστη ποσότητα.

Χθες, μετρήσαμε πόσο ψηλοί είμαστε. Θυμάστε ότι χρησιμοποιήσαμε σφηνουβλάκια για να φτιάξουμε ένα μεγάλο τρένο όσο και το ύψος μας όταν ξαπλώναμε κάτω. Η Ντόν και η Ρόζα αναρωπόντουσαν πόσοι κύβοι θα μπορούσαν να τις μετρήσουν όταν θα ξαπλώναν με τα πόδια της μίας στο κεφάλι της άλλης. Η Ντόν είχε μετρήσει την Ρόζα και ήταν 84 κύβους ψηλή. Η Ρόζα είχε μετρήσει την Ντόν και ήταν 102 κύβους ψηλή. Ας δούμε τώρα αν μπορούμε να διαπιστώσουμε πόσο ψηλές θα είναι και οι δύο μαζί και μετά θα το ελέγξουμε μετρώντας τες.

Οι Fosnot και Dolk (2001) τόνισαν ότι στα προβλήματα με αφήγηση τα παιδιά τείνουν να εστιάζουν στο να πάρουν μια απάντηση, προφανώς με τον τρόπο που θέλει ο εκπαιδευτικός. «Τα προβλήματα συγκεκριμένου, όμως, συνδέονται έντονα με τις ζωές των παιδιών και όχι με τα σχολικά μαθηματικά. Είναι σχεδιασμένα να καλλιεργούν στα παιδιά τη μαθηματική μοντελοποίηση του αληθινού κόσμου» (σελ. 24). Αυτά τα προβλήματα μπορούν να προκύπτουν από πρόσφατα βιώματα της τάξης, από μια εκδρομή, μία συζήτηση που κάνατε σχετικά με την τέχνη ή κάποιο κοινωνικό γεγονός ή από την παιδική λογοτεχνία.

Μαθήματα που Βασίζονται σε Προβλήματα Συγκεκριμένου ή Αφήγησης

Η τάση στις Ηνωμένες Πολιτείες είναι να βάζουμε τα παιδιά να λύνουν πολλά προβλήματα σε μια μόνο διδακτική ώρα. Τα μαθήματα αυτά φαίνεται ότι εστιάζονται στο πώς να παίρνουμε απαντήσεις. Στην Ιαπωνία, ωστόσο, ένα ολοκληρωμένο μάθημα κινείται γύρω από ένα ή δύο προβλήματα και τη σχετική συζήτηση (Reys & Reys, 1995).

Πώς θα ήταν ένα καλό μάθημα της δευτέρας τάξης βασισμένο σε ένα πρόβλημα-ιστορία; Η απάντηση έρχεται πιο φυσικά αν σκεφτείτε τα παιδιά σας όχι μόνο να λύνουν τα προβλήματα, αλλά να χρησιμοποιούν λέξεις, εικόνες και αριθμούς για να εξηγήσουν την πορεία της σκέψης τους προς τη λύση και τους λόγους που πιστεύουν ότι η λύση τους είναι η σωστή. Τα παιδιά θα πρέπει να είναι ελεύθερα να χρησιμοποιούν φυσικά υλικά που ίσως να τους χρειάζονται ή να κάνουν απλώς κάποια σχέδια. Οτιδήποτε βάλουν στο χαρτί τους θα πρέπει να εξηγεί καλά αυτό που έκαναν ώστε ο άλλος να το καταλαβαίνει (αφήστε τουλάχιστον μισή σελίδα κενή για κάθε πρόβλημα).

Επιλέγοντας Αριθμούς για τα Προβλήματα

Ακόμη και από τα παιδιά του νηπιαγωγείου θα πρέπει να περιμένετε να λύνουν προβλήματα με αφήγηση. Οι μέθοδοι λύσης τους χρησιμοποιούν πούλια σε μια πολύ άμεση

αναπαράσταση του προβλήματος. Αυτός είναι και ο λόγος που κάνει τα προβλήματα σύζευξης και διαχωρισμού με τα αρχικά ποσά άγνωστα τόσο δύσκολα. Για αυτά τα προβλήματα, τα παιδιά αρχικά χρησιμοποιούν τη μέθοδο δοκιμής και λάθους (Carpenter, Fennema, Franke, Levi & Empson, 1999).

Παρόλο που η δομή των προβλημάτων θα διαφοροποιηθεί τη δυσκολία, οι αριθμοί των προβλημάτων θα πρέπει να είναι αντίστοιχοι με το επίπεδο της αριθμητικής ανάπτυξης των παιδιών. Τα παιδιά του νηπιαγωγείου μπορούν να χρησιμοποιούν μεγάλους αριθμούς ανάλογους με αυτούς που μπορούν να μετρήσουν. Συνήθως οι αριθμοί είναι ως το 10 με 12 περίπου.

Τα παιδιά της δευτέρας τάξης μαθαίνουν επίσης για τους διψήφιους αριθμούς και αρχίζουν να καταλαβαίνουν πώς λειτουργεί το δεκαδικό σύστημα. Αντί να περιμένετε μέχρι τα παιδιά να μάθουν τη θεσπική αξία και να αναπτύξουν τεχνικές για να υπολογίζουν αριθμούς, τα προβλήματα με αφήγηση είναι μια καλή ευκαιρία, που βασίζεται στην επίλυση προβλημάτων, για να μάθουν ταυτόχρονα για τους αριθμούς και τους υπολογισμούς. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα που περιλαμβάνει τον υπολογισμό του 30 και του 42 έχει σκοπό να βοηθήσει τους μαθητές να δώσουν προσοχή στα σύνολα του δέκα. Καθώς αρχίζουν να σκεφτόνται το 42 ως 40 και 2, δεν είναι καθόλου παράλογο να σκεφτούν ότι θα προσθέσουν το 30 και το 40 και κατόπιν θα προσθέσουν και άλλα δύο. Καθώς μαθαίνετε περισσότερα για τις στρατηγικές που εφευρίσκουν τα παιδιά στο Κεφάλαιο 13, θα κατανοήσετε καλύτερα πώς να επιλέγετε αριθμούς για να βοηθήτε την ανάπτυξη των υπολογισμών.

NTM
Στάνταρ

Οι συγγραφείς των Standards (Στάνταρ) τονίζουν την αξία της σύνδεσης της πρόσθεσης με την αφαίρεση. «Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να βεβαιώνεται ότι τα παιδιά αντιμετωπίζουν επαναλαμβανόμενες καταστάσεις όπου οι ίδιοι αριθμοί εμφανίζονται σε διαφορετικά συγκεκριμένα. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 3, 4, και 7 μπορεί να εμφανίζονται σε κάποια κατάσταση επίλυσης προβλημάτων η οποία θα μπορούσε να αναπαρασταθεί ως $4 + 3, 3 + 4$ ή $7 - 3$ ή $7 - 4$... Αναγνωρίζοντας την αντίστροφη σχέση μεταξύ πρόσθεσης και αφαίρεσης τα παιδιά διευκολύνονται έτσι ώστε να έχουν μια ευέλικτη σκέψη όταν χρησιμοποιούν στρατηγικές για να λύνουν προβλήματα» (σελ. 83).

Εισάγοντας το Συμβολισμό

Τα πολύ μικρά παιδιά δεν έχουν ανάγκη τα σύμβολα +, -, και =. Ωστόσο, αυτές οι συμβολικές συμβάσεις είναι σημαντικές. Όταν νιώσετε ότι τα παιδιά είναι έτοιμα να χρησιμοποιήσουν αυτά τα σύμβολα, εισαγάγετέ τα στο κομμάτι της συζήτησης σε ένα μάθημα όπου τα παιδιά έχουν λύσει προβλήματα με αφήγηση. Πείτε «Είχατε τον αριθμό 12 στο πρόβλημά σας,

καθώς και το 8 ως ένα από τα μέρη του 12. Βρήκατε ότι το μέρος που δεν ξέρατε ήταν το 4. Ορίστε ένας τρόπος που μπορούμε να το γράψουμε αυτό: « $12 - 8 = 4$ ». Το σημάδι του πλην διαβάζεται *μείον* ή *αφαιρώ* αλλά όχι *βγάζω*. Το σημάδι του συν είναι πιο εύκολο καθώς αποτελεί απλά ένα υποκατάστατο του «και».

Θα πρέπει να δοθεί προσοχή και στο σύμβολο του ίσον. Το συγκεκριμένο σημάδακι σημαίνει «είναι ίδιο με». Ωστόσο, τα περισσότερα παιδιά το βλέπουν ως ένα σύμβολο που λέει ότι «η απάντηση είναι». Κάπως έτσι το βλέπουν και όταν το πατούν στην αριθμομηχανή. Πατούν δηλαδή το πλήκτρο για να πάρουν την απάντηση. Μια εξίσωση όπως $4 + 8 = 3 + 9$ δεν έχει «απάντηση» και εξακολουθεί να ισχύει γιατί και οι δυο πλευρές έχουν την ίδια ποσότητα. Μια καλή ιδέα, διαβάζοντας εξισώσεις με τα παιδιά σας, είναι να χρησιμοποιείτε τη φράση «είναι το ίδιο με» αντί ή σε σχέση με τα «ίσα».



Παρακολουθώντας τα παιδιά να λύνουν προβλήματα με αφήγηση θα πάρете πολλές πληροφορίες σχετικά με την αριθμητική κατανόηση των παιδιών καθώς και πιο προφανείς πληροφορίες σχετικά με την επίλυση προβλημάτων και την κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Το σχέδιο CGI (Carpenter και συνεργάτες, 1999), έχει οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι τα παιδιά αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων από το ημιπαγωγιό μέχρι και τη δεύτερη τάξη. Αυτές οι στρατηγικές αποτελούν μία ένδειξη της αριθμητικής κατανόησης των παιδιών καθώς και την προκύπτουσα κατανόηση των στρατηγικών για τα βασικά γεγονότα. Για παράδειγμα, στην αρχή τα παιδιά θα χρησιμοποιήσουν πουλία και θα μετρήσουν κάθε προσθετέο και ολόκληρο το σύνολο για ένα πρόβλημα σύζευξης με άγνωστο αποτέλεσμα. Αργότερα, θα μετρήσουν από το δεύτερο σύνολο. Αυτή η στρατηγική θα τροποποιηθεί έτσι ώστε να μετρούν από το μεγαλύτερο σύνολο. Δηλαδή, για το $4 + 7$, το παιδί θα αρχίσει να μετρά από το 7, αν και το 4 αποτελεί το αρχικό ποσό. Τελικά, τα παιδιά θα αρχίσουν να χρησιμοποιούν δεδομένα τα οποία θα ανακαλούν από την μνήμη τους και θα στηρίζονται στα πουλία ή σε άλλα μοντέλα μόνο όταν αυτό γίνεται αναγκαστικά. Το να παρακολουθείτε τα παιδιά καθώς θα λύνουν προβλήματα μπορεί να σας δώσει τα απαραίτητα στοιχεία που θα σας βοηθήσουν να αποφασίσετε ποιους αριθμούς θα χρησιμοποιήσετε στα προβλήματα και πώς θα προκαλέσετε τα παιδιά να συνεχίσουν να δομούν πάνω στις αριθμητικές έννοιες και στις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων. ■

Χρησιμοποιώντας προβλήματα βασισμένα σε μοντέλα

Πολλά παιδιά θα χρησιμοποιήσουν πουλία ή αριθμογραμμές (μοντέλα) για να λύσουν προβλήματα με αφήγηση. Το μοντέ-

λο είναι ένα εργαλείο σκέψης που βοηθά τα παιδιά και να καταλάβουν τι συμβαίνει στο πρόβλημα, αλλά και αποτελεί έναν τρόπο παρακολούθησης των αριθμών την ώρα που λύνουν το πρόβλημα. Μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν επίσης ακόμη και αν δεν υπάρχει συγκεκριμένο. Η έννοια του μέρους-μέρους-όλου που αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 9 είναι ένας καλός τρόπος να βοηθήσουμε τα παιδιά να σκεφτούν για την πρόσθεση και την αφαίρεση όταν εστιάζουν στα μοντέλα.

Πρόσθεση

Όταν τα μέρη ενός συνόλου είναι γνωστά, χρησιμοποιείται η πρόσθεση για να κατονομάσει το όλο σε σχέση με τα μέρη. Αυτός ο αλγόριθμος, παρότι στεγρός, ορισμός της πρόσθεσης εξυπηρετεί τόσο τα προβλήματα δράσης (σύζευξη και διαχωρισμός) όσο και τα στατικά ή χωρίς δράση προβλήματα.

Καθένα από τα μοντέλα του τύπου μέρος-μέρος-όλο που φαίνονται στο Σχήμα 10.3 είναι μοντέλο για την πράξη $5 + 3 = 8$. Κάποια από αυτά είναι αποτελεσματικά συγκεκριμένες ενέργειες συναρμολόγησης ή σύζευξης, ενώ κάποια άλλα όχι. Παρατηρήστε ότι σε κάθε παράδειγμα και τα δύο μέρη είναι ευδιάκριτα, ακόμη και μετά τη σύζευξή τους. Αν χρησιμοποιήσετε πουλία, τότε θα πρέπει να κρατάτε τα δύο μέρη σε ξεχωριστές σοβίτες ή σε ξεχωριστά τμήματα ενός πίνακα ή θα πρέπει να έχουν δύο διαφορετικά χρώματα. Για να μπορέσουν τα παιδιά να διακρίνουν τη σχέση ανάμεσα στα δύο μέρη και το σύνολο, θα πρέπει να κρατήσουν στο μυαλό τους την εικόνα του 5 και του 3 ως δύο διαφορετικά σύνολα. Αν διατηρήσουμε τα δύο μέρη χωριστά, είναι δυνατόν να σκεφτούν την πράξη αφού αυτή έχει συντελεστεί ως εξής: «Ξεκίνησα με αυτές τις κόκκινες μάρκες. Μετά πρόσθεσα αυτές τις πέντε μπλε και τώρα έχω συνολικά οκτώ».

Η ευθεία των αριθμών (αριθμογραμμή) παρουσιάζει πραγματικές εννοιολογικές δυσκολίες για τα παιδιά της πρώτης και της δεύτερης τάξης και η χρήση της ως μοντέλου δεν συνιστάται γενικά σε αυτές τις τάξεις. Η ευθεία των αριθμών μετρά αποστάσεις από το μηδέν όπως κάνει και ένας χάρακας. Στις πρώτες τάξεις τα παιδιά εστιάζονται στις κοινωνικές ή στους αριθμούς της ευθείας των αριθμών παρά στα διαστήματα. Ωστόσο, αν σχεδιάσετε βέλη (τηδηματάκια) για κάθε αριθμό μιας άσκησης, θα απεικονίσετε πιο ξεκάθαρα την έννοια του μήκους. Για να αναπαράσχετε την έννοια μέρος-μέρος-όλο στην πράξη $5 + 3$, ξεκινήστε σχεδιάζοντας ένα βέλος από το 0 ως το 5, επισημαίνοντας ότι «Το πέντε είναι τόσο». Μη δείξετε την κοινωνία του 5 λέγοντας «Αυτό είναι το πέντε».

Δραστηριότητα 10.1

Εξισώσεις με Αριθμητικά Πρότυπα

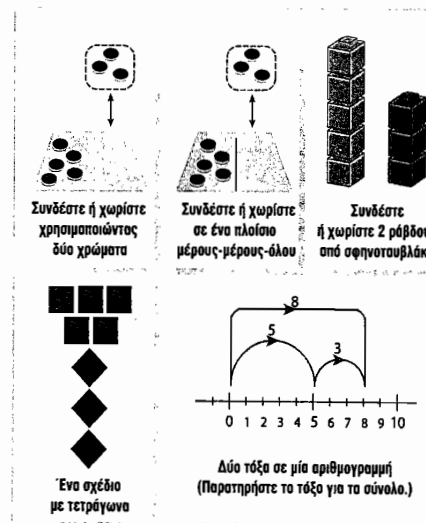
Θυμηθείτε τη Δραστηριότητα 9.17 (Κεφάλαιο 9) «Κατασκευάστε το από μέρη» και τις παραλλαγές της όπου τα παιδιά φτιάχνουν σχέδια ή σχηματίζουν σύνολα για ένα

συγκεκριμένο αριθμό. Όταν τα παιδιά δείχνουν έτοιμα να χειριστούν τα γραπτά σύμβολα, απλά δείξτε τους πώς να γράφουν μια αριθμητική πρόταση πρόσθεσης (εξίσωση) για κάθε πρότυπο. Σε αυτές τις αρχικές δραστηριότητες, τα παιδιά έλεγαν ένα συνδυασμό, όπως «Τέσσερα και πέντε κάνει εννιά». Εδώ έχουν ένα νέο συμβολικό τρόπο για να αντιστοιχίσουν όσα λένε.

Δύο παιδιά μπορούν να εργαστούν μαζί, να κάνουν κάτι με ένα μοντέλο, να πουν το συνδυασμό και να γράψουν μαζί την εξίσωση. Τα παιδιά μπορούν να παραλλάξουν τα συνολικά αθροίσματα που παράγουν κάθε φορά –εννοείται με τους αναγκαίους περιορισμούς. Θυμηθείτε ότι αυτό που κάνει τις «Εξισώσεις με Αριθμητικά Πρότυπα» να έχουν σχέση με την επίλυση προβλημάτων είναι η πρόκληση να βρούμε διαφορετικούς συνδυασμούς για έναν αριθμό.

Αφαίρεση

Σε ένα μοντέλο του τύπου μέρος-μέρος-όλο, όταν είναι γνωστά το όλο και ένα από τα μέρη, η αφαίρεση κατονομάζει το άλλο μέρος. Αυτός ο ορισμός συμφωνεί με την πολυχρησιμοποιημένη έκφραση «βγάζω». Αν ξεκινήσετε με ένα σύνολο των 8 και βγάλετε ένα σύνολο των 3, τα δύο γνωστά σύνολα είναι αυτά του 8 και του 3. Η φράση $8 - 3$, που διαβάζεται «οκτώ μείον τρία», κατονομάζει τα πέντε που υπολείπονται. Επομένως, οκτώ μείον τρία ίσον πέντε. Προσέξτε ότι τα μοντέλα στο Σχήμα 10.3, είναι μοντέλα για την αφαίρεση όπως και για την πρόσ-



ΣΧΗΜΑ 10.3 Μοντέλα μέρος-μέρος-όλου για το $5 + 3 = 8$ και $8 - 3 = 5$.

θεση (εκτός από την ενέργεια). Βοηθώντας τα παιδιά να δουν ότι χρησιμοποιούν τα ίδια μοντέλα ή εικόνες συμβάλλει στη σύνδεση των δύο πράξεων.

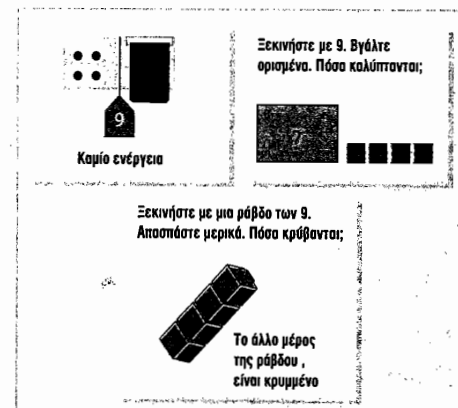
Δραστηριότητα 10.2

Αφαίρεση με Μέρος που λείπει

Ένας σταθερός αριθμός από πουλία τοποθετείται σε έναν πίνακα. Το ένα παιδί χωρίζει τα πουλία σε δύο μέρη, ενώ το άλλο κλείνει τα μάτια του. Το πρώτο παιδί καλύπτει ένα από τα δύο μέρη με ένα κομμάτι χαρτόνι, αποκαλύπτοντας μόνο το άλλο μέρος (βλ. Σχήμα 10.4). Το δεύτερο παιδί λέει την πρόταση της αφαίρεσης. Για παράδειγμα, «Εννιά μείον τέσσερα [το ορατό μέρος] κάνει πέντε [το καλυμμένο μέρος]». Το καλυμμένο μέρος μπορεί να αποκαλυφθεί, αν χρειάζεται, για να πει το παιδί πόσα υπάρχουν. Μπορεί να γραφτεί τόσο η εξίσωση της αφαίρεσης όσο και η εξίσωση της πρόσθεσης.

Η Αφαίρεση ως Προσθετική Σκέψη

Σημειώστε ότι στη Δραστηριότητα 10.2 το πρόβλημα τελειώνει με δύο σαφώς ευδιάκριτα μέρη, ακόμη και όταν γίνεται η πράξη της απομάκρυνσης. Το εξαγόμενο μέρος παραμένει στη δραστηριότητα ή στο πινακάκι ως μοντέλο για μια εξίσωση πρόσθεσης που θα γραφεί αφού γραφεί η εξίσωση της αφαίρεσης. Μία σύζηση για το πόσα μπορούμε να γράψουμε αυτές τις δύο εξισώσεις για το ίδιο μοντέλο είναι μια σημαντική ευκαιρία να συσχετίσετε την πρόσθεση με την αφαίρεση. Είναι πολύ καλύτερος από την παραδοσιακή γραπτή δραστηριότητα με τις «οικογένειες γεγονότων», στην οποία τα παιδιά λαμβάνουν μια οικογένεια αριθμών, όπως 3, 5 και 8, και καλούνται να γράψουν δύο εξισώσεις με συν και δύο εξισώσεις



ΣΧΗΜΑ 10.4 Μοντέλα για το 9-4 ως πρόβλημα μέρους που λείπει.

με μείον. Πολύ σύντομα η δραστηριότητα περιορίζεται στην απλή τοποθέτηση των αριθμών στα διάφορα κενά.

Η αφαίρεση ως προφανής σκέψη και όχι ως «φράζω από» είναι εξαιρετικά σημαντική για την εκμάθηση του τελειού χειρισμού των γεγονότων της αφαίρεσης. Επειδή και στις δύο δραστηριότητες τα παιδιά που αναπαριστούν το υπόλοιπο ή άγνωστο μέρος μένουν κρυμμένα κάτω από κάποιο κάλυμμα, όταν τις κάνουν τα παιδιά θα πρέπει να τα ενθαρρύνετε να σκεφτούν ότι έχει σχέση με το κρυμμένο μέρος: «Τι βάζουμε μαζί με το μέρος που βλέπω για να έχουμε το σύνολο». Αν, για παράδειγμα, το άθροισμα ή ο συνολικός αριθμός από πούλια είναι 9 και βγάλουμε 6 κάτω από το κάλυμμα, είναι πιθανόν το παιδί να αναρωτηθεί «6 και πόσο μας κάνει 9;» ή «Τι βάζουμε στο 6 για να κάνουμε 9;». Η νοητική ενέργεια είναι να «σκεφτεί προσθετικά» αντί να «μετρήσει ότι απομένει». Αργότερα, όταν θα εργάζεται με τα γεγονότα της αφαίρεσης, μία αφαίρεση όπως το $9 - 6 = \square$ θα πρέπει να ενεργοποιήσει το ίδιο ακριβώς πρότυπο σκέψης: «6 και πόσο μας κάνει 9;».

Μοντέλα Σύγκρισης

Η σχέση σύγκρισης έχει να κάνει με δύο διακριτά σύνολα ή ποσότητες και τη μεταξύ τους διαφορά. Στο Σχήμα 10.5 βλέπουμε διάφορους τρόπους αναπαράστασης της σχέσης διαφοράς. Το ίδιο μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν είναι άγνωστη είτε η διαφορά είτε μία από τις δύο ποσότητες.

Σημειώστε ότι δεν είναι προφανής ο τρόπος με τον οποίο θα συχετιζατε είτε την πράξη της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης με ένα πρόβλημα σύγκρισης. Από την πλεονεκτική θέση του ενήλικα, μπορείτε να διακρίνετε ότι αν ενώσετε μέρος του μεγαλύτερου ποσού με το μικρότερο ποσό, το μεγάλο ποσό θα αποτελέσει ένα μοντέλο μέρους-μέρους-όλο, που μπορεί να λύσει το πρόβλημα. Στην πραγματικότητα, πολλά παιδιά μοντελοποιούν τα προβλήματα σύγκρισης κατ' αυτόν τον τρόπο. Αλλά αυτή η ιδέα είναι πολύ δύσκολη για να τη δείξετε σε ένα παιδί αν δεν τη δομήσει το ίδιο.

Βάλτε τα παιδιά να φτιάξουν δύο ποσά, ίσως με δύο ράβδους από σφηνοτουβλάκια. Συζητήστε τη διαφορά ανάμεσα στις δύο ράβδους έτσι ώστε να εκμαιεύσετε τον τρίτο αριθμό. Αν, για παράδειγμα, τα παιδιά φτιάξουν μια ράβδο των 10 και μια ράβδο των 6, η διαφορά είναι 4. «Τι εξισώσεις μπορούμε να φτιάξουμε με αυτούς τους τρεις αριθμούς;». Ζητήστε από τα παιδιά να επινοήσουν προβλήματα πλοκής με δύο ποσά των 10 και των 6. Συζητήστε ποιες εξισώσεις ταιριάζουν στα προβλήματα που δημιουργήσαν.

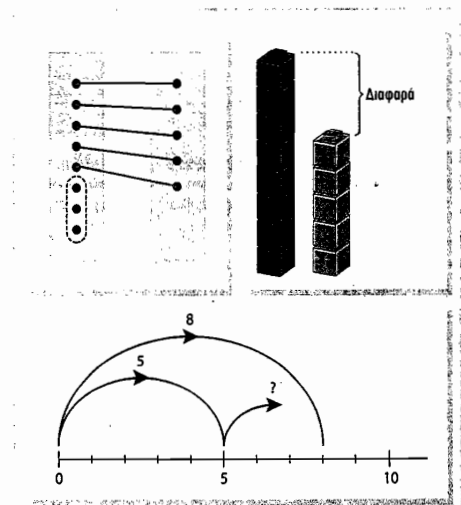
Η Ιδιότητα της Διάταξης και η Ιδιότητα του Μηδενός

Η ιδιότητα της διάταξης (ή αντιμεταθετική ιδιότητα) για την πρόσθεση λέει ότι δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία προσθε-

τούμε δύο αριθμούς. Αν και η ιδιότητα της διάταξης μπορεί να μας φάνετα προφανής (αλλά αντιστρέψτε τις δύο στοίβες από πούλια στο πλαίσιο του μέρους-μέρους-όλου), μπορεί να μην είναι τόσο προφανής, όσο πιστεύετε, στα παιδιά. Από τη στιγμή που είναι πολύ χρήσιμη στην επίλυση προβλημάτων, στην καλή γνώση των βασικών γεγονότων και στα νοερά μαθηματικά, αξίζει να αφιερώσουμε λίγο χρόνο για να βοηθήσουμε τα παιδιά να δομήσουν αυτή τη σχέση. Σημασία δεν έχει η ονομασία της ιδιότητας, αλλά η ιδέα. Ο Schifter (2001) περιγράφει μία τάξη στις αρχές της δευτέρας τάξης της οποίας τα παιδιά έχουν ανακαλύψει την ιδιότητα της «μετάθεσης» ενώ εξέταζαν αθροίσματα του δέκα. Αργότερα ο εκπαιδευτικός αναρωτιόταν αν πραγματικά κατάλαβαν αυτήν την ιδέα και ρώτησε τα παιδιά αν νόμιζαν πως θα λειτουργούσε πάντα. Πολλά από τα παιδιά της τάξης δεν ήταν σίγουρα αν ίσχυε πάντα και είχαν πολλές αμφιβολίες ότι θα ίσχυε και με μεγάλους αριθμούς. Το θέμα είναι ότι τα παιδιά μπορεί να βλέπουν και να δέχονται την ιδιότητα της διάταξης για σύνολα που έχουν βιώσει αλλά δεν είναι σε θέση να εξηγήσουν ή ακόμα και να πιστέψουν ότι αυτή η απλή, σημαντική ιδιότητα, ιδιότητα λειτουργεί σε όλους τους συνδυασμούς πρόσθεσης.

Για να βοηθήσετε τα παιδιά να εστιάσουν στην ιδιότητα της διάταξης επιλέξτε προβλήματα που έχουν τους ίδιους προσθετέους σε διαφορετική όμως σειρά. Το συγκεκριμένο για κάθε πρόβλημα θα πρέπει να είναι διαφορετικό. Για παράδειγμα:

Η Τάνια είναι στη σελίδα 32 του βιβλίου της. Αύριο εύχεται να διαβάσει άλλες 15 σελίδες. Σε ποια σελίδα θα βρίσκεται τότε;



ΣΧΗΜΑ 10.5. Μοντέλα για τη διαφορά ανάμεσα στο 8 και το 5.

Τα αποθέματα γάλακτος στην καφετέρια ήταν μόνο 15 κουτιά. Πριν το μεσημεριανό, το παιδί που ήταν υπεύθυνο για τις παραδόσεις, έφερε κι άλλο γάλα. Πρόσθεσε στο απόθεμα άλλα 32 κουτιά. Πόσα κουτιά γάλα έχει τώρα η καφετέρια;

Ρωτήστε αν πρόσεξε κανείς ότι αυτά τα δύο προβλήματα τα μοιάζουν. Κάποια παιδιά (όχι όλα), θα είδαν ότι λύνοντας το ένα πρόβλημα έλυσαν, ουσιαστικά και το άλλο.

Η παρακάτω δραστηριότητα είναι επίσης σημαντική και βοηθά με την ίδια ιδέα.

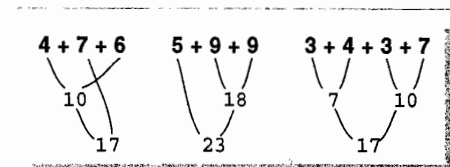
Δραστηριότητα 10.3

Περισσότεροι από Δύο Προσθετέοι

Δώστε στα παιδιά έξι σύνολα για να βρουν τρεις ή τέσσερις προσθετέους. Προετοιμάστε τους σε μία σελίδα χωρισμένη σε έξι μέρη για να υπάρχει χώρος για κάθε σύνολο. Συμπεριλάβετε τουλάχιστον ένα ζευγάρι με άρβουοισμα το δέκα ή ίσως δύο αριθμούς: $4 + 7 + 6$, $5 + 9 + 9$, ή $3 + 4 + 3 + 7$. Τα παιδιά πρέπει να δείξουν πώς πρόσθεσαν τους αριθμούς. Αφήστε τα να βρουν τα αθροίσματα χωρίς άλλες οδηγίες.

Το Σχήμα 10.6 δείχνει πώς τα παιδιά μπορούν να δείξουν τι έκαναν. Καθώς μοιράζονται τις λύσεις τους, σίγουρα θα υπάρξουν κάποια παιδιά που θα πρόσθεσαν με διαφορετικούς τρόπους, αλλά θα πήραν το ίδιο αποτέλεσμα. Από αυτή τη συζήτηση μπορείτε να τα βοηθήσετε να καταλάβουν ότι μπορούν να προσθέτουν αριθμούς με οποιαδήποτε σειρά. Χρησιμοποιείτε επίσης την προσεταιριστική ιδιότητα, αλλά η ιδιότητα της διάταξης ή άλλως αντιμεταθετική ιδιότητα είναι πιο σημαντική. Αποτελεί μια εξαιρετική δραστηριότητα για την έννοια του αριθμού γιατί πολλά παιδιά θα βρουν συνδυασμούς του δέκα ή θα χρησιμοποιήσουν διπλάσια (εύκολα δομμένα για πολλά παιδιά). Η εκμάθηση του πώς θα προσαρμόσουν τις στρατηγικές έτσι ώστε να ταιριάζουν στους αριθμούς αποτελεί την αρχή της υπολογιστικής ευελιξίας.

Τα προβλήματα με αφήγηση που περιλαμβάνουν το μηδέν ή χρησιμοποιούν το μηδέν σε σύνολα τριών προσθετέων είναι επίσης μια καλή μέθοδος για να βοηθήσετε τα παιδιά να κατανοήσουν το μηδέν στην πρόσθεση και την αφαίρεση. Συχνά,



ΣΧΗΜΑ 10.6. Τα παιδιά δείχνουν τον τρόπο που πρόσθεσαν.

τα παιδιά θεωρούν ότι $6 + 0$ είναι κάτι παραπάνω από 6, ή 12-0 κάνει 11 από τη στιγμή που «το συν κάνει τους αριθμούς μεγαλύτερους» ή το «μείον κάνει τους αριθμούς μικρότερους». Ανά να δημιουργήσετε αυθαίρετους κανόνες για την πρόσθεση και την αφαίρεση με το μηδέν, δημιουργήστε ευκαιρίες για να εντάξετε το μηδέν στη ρουτίνα της επίλυσης προβλημάτων.

Το αναλυτικό πρόγραμμα για τη δεύτερη τάξη *Investigations in Number, Data, and Space* (Έρευνες για τον Αριθμό, τα Δεδομένα και το Χώρο), δίνει ιδιαίτερη έμφαση στη σύνδεση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Στο παρακάτω απόσπασμα μπορείτε να δείτε μια δραστηριότητα με προβλήματα με αφήγηση για την πρόσθεση και την αφαίρεση καθώς και μια συζήτηση για το συγκεκριμένο τμήμα του αναλυτικού προγράμματος. Δώστε σημασία στην τεχνική του φακέλου που χρησιμοποιείται. Επιτρέψτε σε όλα τα παιδιά να λύσουν όσα περισσότερα προβλήματα μπορούν στον επιτρεπόμενο χώρο χωρίς να έχουν να αντιμετωπίσουν κενά ή ανολοκλήρωτη εργασία. Η τεχνική κάνει μια μείξη των προβλημάτων για να μπορέσουν να συζητηθούν στην τάξη όλα τα προβλήματα.



Η σειρά Fizz & Martina (Tom Snyder Productions, 1998), ενσωματώνει προβλήματα στις «πραγματικές» περιπτώσεις των δύο ηρώων, του Fizz και της Martina. Οι ιστορίες προϋποθέτουν ότι τα παιδιά θα προσέχουν και θα κρατούν σημειώσεις. Η κάθε ιστορία σταματά κάθε φορά που τίθεται ένα πρόβλημα και τα παιδιά εργάζονται σε ομάδες χωρίς το βίντεο ή τον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Συμπεριλαμβάνεται επίσης και έντυπο υλικό υποστήριξης. Το μοντέλο ταυριάζει στη μορφή του μαθήματος με επίλυση προβλημάτων που περιλαμβάνει τις φράσεις *πριν, κατά τη διάρκεια και μετά*.

Στις μέρες μας, λίγα προγράμματα προσφέρουν προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης που να αφορούν τον πραγματικό κόσμο με τέτοια ποιότητα όπως οι τύποι των προβλημάτων που έχουμε διερευνήσει. Ωστόσο, υπάρχουν και δύο άλλοι τρόποι με τους οποίους μπορείτε να εκμεταλλευτείτε τους υπολογιστές της τάξης σας χρησιμοποιώντας σχεδόν οποιοδήποτε λογισμικό που τυχόν έχετε. Πρώτον, μπορείτε να αναθέσετε προβλήματα με τον επεξεργαστή κειμένου σας ή ένα οποιοδήποτε πρόγραμμα το οποίο επιτρέπει την εύκολη σχεδίαση σχημάτων ταυτόχρονα με τη δακτυλογράφηση λέξεων. Παράδειγμα για το τελευταίο είναι το *Kid Pix* (Riverdeep Interactive Learning, 2005). Ανοίξτε ένα καινούργιο αρχείο και γράψτε ένα λεκτικό πρόβλημα στον κατάλληλο χώρο. Τα παιδιά ανοίγουν με τη σειρά τους το αρχείο και χρησιμοποιούν τις δυνατότητες σχεδίασης για να καταγράψουν τις λύσεις τους. Η εργασία των παιδιών μπορεί είτε να μην αποθηκευτεί είτε να μετονομαστεί το αρχείο, ώστε να διατηρηθεί η μορφή του δικού σας αρχείου ως δραστηριότητα.

Μία δασκάλα της πρώτης τάξης σημειώνει πως τα παιδιά της είναι πολύ καλύτερα στο σχεδιασμό προβλημάτων στον υ-

Εξερευνώντας

τον Αριθμό, τα Δεδομένα και το Χώρο

Δευτέρα Τάξη, Νομίσματα, Κουπόνια και Συνδυασμοί Έρευνα 3: Κατανοώντας την Πρόσθεση και την Αφαίρεση

Συγκεκριμένο

Τα *Νομίσματα, Κουπόνια και Συνδυασμοί* είναι μια ενότητα που εμφανίζεται νωρίς στη δεύτερη τάξη. Αποτελεί μία από τις δύο ενότητες με θέμα την εργασία στην πρόσθεση και την αφαίρεση. Στο πρώτο κομμάτι της ενότητας, δίνεται προσοχή στην ανάπτυξη στρατηγικών για συνδυασμούς πρόσθεσης (οι ιδέες υπάρχουν στο Κεφάλαιο 11 του βιβλίου). Τα παιδιά δεν εργάζονται με μικρά «γεγονότα» πρόσθεσης, αλλά λύνουν προβλήματα πρόσθεσης με διηγήσιμους αριθμούς και ελπίζουν στρατηγικές πριν ξεκινήσουν να λύνουν τα προβλήματα με αφήγηση.

Περιγραφή Δραστηριότητας

Όπως βλέπετε από τα προβλήματα που φαίνονται εδώ, τα παιδιά διερευνούν μαζί τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης. Στις συζητήσεις γύρω από τα προβλήματα υπάρχει μια σαφής προσπάθεια για χρήση των προβλημάτων με αφήγηση με σκοπό τη σύνδεση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Τα προβλήματα που φαίνονται στη διπλανή σελίδα έχουν αναγραφεί και τοποθετηθεί ξεχωριστά. Τα προβλήματα τοποθετούνται σε έξι φακέλους, όπου κάθε φάκελος περιέχει ένα πρόβλημα. Τα παιδιά μπορούν να επιλέξουν οποιονδήποτε φάκελο, να πάρουν ένα πρόβλημα και να το κολλήσουν στο χαρτί τους. Αυτό δε σημαίνει ότι ο χώρος που απομένει στο χαρτί είναι ο χώρος που δίνεται στα παιδιά για να λύσουν την άσκηση. Όταν λυθεί το πρόβλημα, μπορούν να επιλέξουν κάποιο άλλο και να το τοποθετήσουν στη σελίδα τους. Τα περισσότερα παιδιά θα λύσουν δύο με τρία προβλήματα στο χαρτί τους. Η τεχνική του φακέλου είναι ένας χρήσιμος τρόπος για τη φροντίδα των ατομικών διαφορών των παιδιών σε διάφορα θέματα.

Τα παιδιά είναι ελεύθερα να χρησιμοποιήσουν οποιδήποτε μέθοδο και ό,τι υλικά επιθυμούν, αρκεί «να δείξουν τις λύσεις τους και να γίνουν κατανοητές» (σελ. 104). Στην πραγματικότητα, για αυτό το μάθημα, τα παιδιά πρέπει να δείξουν τη λύση τους σε κάποιο άλλο παιδί για να δουν αν αυτό που έγραψαν μπορεί να το καταλάβει και κάποιος άλλος.

1. Η Κίρα και ο Τζέικ έτρωγαν φυστίκια. Υπήρχαν 39 φυστίκια στη σακούλα. Η Κίρα έφαγε τα 18 και ο Τζέικ τα υπόλοιπα. Πόσα έφαγε ο Τζέικ;	2. Η Κίρα και ο Τζέικ έκαναν χιονόμπαλες. Ο καθένας έκανε 19 χιονόμπαλες. Πόσες έκαναν συνολικά;
3. Υπήρχαν 47 μαθητές στο γυμναστήριο. Μια τάξη 23 μαθητών πήγαν πίσω στα δωμάτιά τους. Πόσοι έμειναν στο γυμναστήριο;	4. Η δεύτερη τάξη πήγε εκδρομή στο ζωολογικό κήπο. Υπήρχαν 32 μαθητές και 12 ενήλικες στην εκδρομή. Πόσοι άνθρωποι πήγαν εκδρομή;
5. Ο Μαρσέλ και η Σάουν μετρούσαν σεντς. Ο Μαρσέλ είχε 33 και η Σάουν 36. Πόσα είχαν και οι δύο;	6. Η Λιν έχει 50 σεντς μέσα σε ένα ποτήρι. Ξόδεψε 29 σεντς για ένα μολύβι. Πόσα της έμειναν;
7. Φτιάξε ένα πρόβλημα με το 30-13. Γράψε πώς έλυσες το πρόβλημα. Χρησιμοποίησε λέξεις, αριθμούς ή εικόνες για να δείξεις τη σκέψη σου.	

Σελίδα 163 από το *The Number System: Coins, Coupons, and Combinations* από τους K. Economopoulos & S. J. Russel. Investigations in Number, Data and Space. Copyright 1998 by Dale Seymour Publications. Ανατύπωση κατόπιν άδειας της Pearson Education, Inc.

Σε αυτή την ενότητα, όλα τα προβλήματα έχουν άγνωστο στο αποτέλεσμα (σύνθεση και διαχωρισμός) ή είναι προβλήματα μέρους-όλου. Σε μετέπειτα ενότητα θα συζητηθούν και προβλήματα με άγνωστο το ποσό που αλλάζει.

Σε μία ολόκληρη διδακτική ώρα όπου θα γίνει αυτή η δραστηριότητα, στα παιδιά θα δοθούν δύο προβλήματα με αφήγηση που θα περιέχουν και το ανέκδοτο και κατέβαση των παιδιών από ένα λεωφορείο. Το πρώτο είναι ένα πρόβλημα διαχωρισμού για το 29-13 και το δεύτερο είναι ένα πρόβλημα μέρους-όλου για το 16+13. Αφού ανταλλάξουν τις απόψεις τους σχετικά με τη λύση, ζητείται από τα παιδιά να σκεφτούν αν τα δύο προβλήματα μοιάζουν ή αν η λύση του ενός βοηθά τη λύση του άλλου. Επίσης, τους ζητείται να πουν αν μπορούν να γράψουν εξισώσεις για αυτά τα δύο προβλήματα. Αυτό αποτελεί ένα καλό παράδειγμα για το πώς να εστιάσουμε στη σύνδεση των εννοιών της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

πολογιστή απ' ό,τι με το χέρι, ενώ η ίδια τους αναθέτει συχνά να γράψουν προβλήματα για εικόνες που έχει δημιουργήσει η ίδια της. Φτιάξτε ένα αρχείο με ένα σχέδιο με σούλια σε δύο μέρη ή με ένα σύνολο προκαθορισμένο και το ένα μέρος να δίνεται με κάποια αναπαράσταση. Τα παιδιά γράφουν και λύνουν ένα πρόβλημα με αφήγηση στον υπολογιστή που να ταιριάζει με το σχέδιο. ■

Δομές Προβλημάτων για τον Πολλαπλασιασμό και τη Διάρθρωση

Όπως στην πρόσθεση και την αφαίρεση, υπάρχουν δομές προβλημάτων που θα σας βοηθήσουν ως εκπαιδευτικό να σχεδιάσετε και να αξιολογήσετε δραστηριότητες πολλαπλασιασμού και διάρθρωσης. Όπως και με τις δομές της πρόσθεσης, έτσι και τώρα, αυτές οι δομές είναι για εσάς και όχι για τα παιδιά.

Οι περισσότεροι ερευνητές εντοπίζουν τέσσερις διαφορετικές κλάσεις πολλαπλασιαστικών δομών (Greer, 1992). Από αυτές, οι δύο που περιγράφονται στο Σχήμα 10.7, οι *ισές ομάδες* (επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, *ευθύμοι*) και η *πολλαπλασιαστική σύγκριση*, είναι κατά κύριο λόγο οι επικρατέστερες στο δημοτικό σχολείο. Τα προβλήματα που αντιστοιχούν σε αυτές τις δομές μπορούν να αναπαρασταθούν με σύνολα από σούλια, αριθμογραμμές ή πίνακες. Αντιπροσωπεύουν ένα μεγάλο

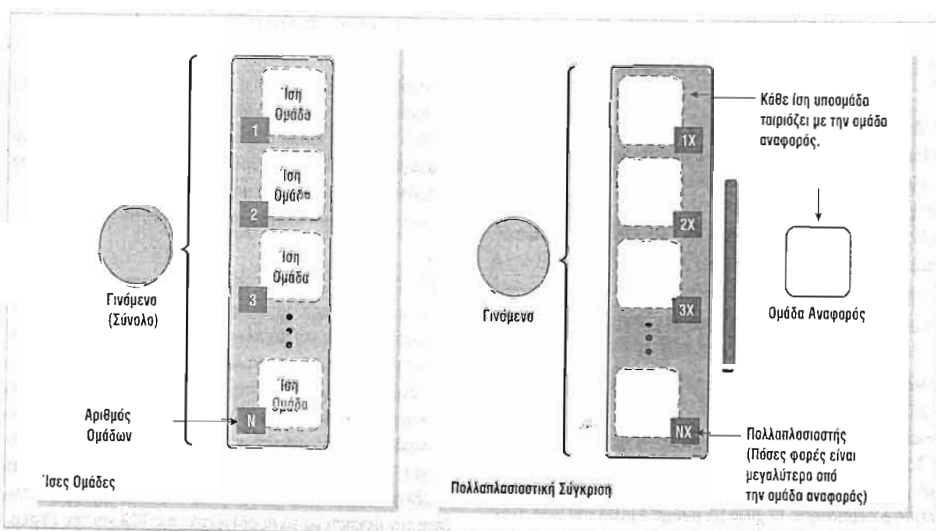
ποσοστό των πολλαπλασιαστικών προβλημάτων της καθημερινής ζωής (ο όρος *πολλαπλασιαστικός* χρησιμοποιείται εδώ για να περιγράψει όλα τα προβλήματα που έχουν δομή πολλαπλασιασμού και διάρθρωσης).

Παραδείγματα Προβλημάτων για Κάθε Δομή

Στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα ο αριθμός ή ο παράγοντας μετράει πόσα σύνολα ή μέρη ίσων μεγεθών περιέχονται. Ο άλλος παράγοντας μας λέει το μέγεθος του κάθε συνόλου ή μέρους. Παραδοσιακά, οι παράγοντες αυτοί ονομάζονται *πολλαπλασιαστής* (ο αριθμός των μερών) και *πολλαπλασιαστέος* (το μέγεθος κάθε μέρους). Οι όροι αυτοί δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στα παιδιά και δεν θα χρησιμοποιηθούν εδώ, παρά μόνο για λόγους σαφήνειας. Ο τρίτος αριθμός σε καθένα από τις δύο δομές είναι το *σύνολο* ή το *γινόμενο* και αποτελεί το άθροισμα όλων των μερών. Η ορολογία των μερών και των όλων είναι χρήσιμη όταν κάνουμε τη σύνδεση με την πρόσθεση.

Προβλήματα Ίσων Ομάδων

Όταν είναι γνωστός ο αριθμός και το μέγεθος των ομάδων, το πρόβλημα είναι μια κατάσταση πολλαπλασιασμού. Όταν είναι άγνωστος είτε ο αριθμός είτε το μέγεθος των συνόλων, καταλήγουμε σε διάρθρωση. Προσέξτε, όμως, ότι οι δύο τελευταίες περιπτώσεις δεν μοιάζουν μεταξύ τους. Τα προβλήματα



ΣΧΗΜΑ 10.7 Δύο από τις τέσσερις βασικές δομές για προβλήματα με πολλαπλασιασμό και διάρθρωση. Κάθε δομή έχει τρεις αριθμούς. Καθένας από τους τρεις αριθμούς μπορεί να είναι ο άγνωστος σε ένα τέτοιο πρόβλημα.

τα όπου είναι άγνωστο το μέγεθος των συνόλων ονομάζονται προβλήματα *δίκαιης μοιρασιάς ή μερισμού*. Το συνολικό ποσό μοιράζεται ή κατανέμεται σε ένα γνωστό αριθμό συνόλων, έτσι ώστε στη συνέχεια να καθοριστεί το μέγεθος του καθενός. Αν ο αριθμός των συνόλων είναι άγνωστος, αλλά το μέγεθος των ίσων συνόλων είναι γνωστό, τότε λέμε ότι έχουμε προβλήματα *μέτρησης ή, ορισμένες φορές, προβλήματα επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης*. Το όλο «εξεντείνεται» αφαιρώντας από αυτό σύνολο του δοσμένου μεγέθους. Αυτοί οι όροι χρησιμοποιούνται στα παραδείγματα που ακολουθούν. Θα σας είναι χρήσιμο να έχετε στο μυαλό σας τη δομή του Σχήματος 10.7, για να βλέπετε ποιοι αριθμοί δίνονται και ποιος είναι άγνωστος.

Υπάρχει ακόμα μία μικρή διαφορά ανάμεσα στα προβλήματα που θα αποκαλούσαμε προβλήματα *επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης* (Αν 3 παιδιά έχουν 4 μήλα το καθένα, πόσα μήλα υπάρχουν;) και σε εκείνα που θα αποκαλούσαμε προβλήματα *ρυθμού* (Αν υπάρχουν 4 μήλα για κάθε παιδί, πόσα μήλα θα είχαν 3 παιδιά;). Για κάθε κατηγορία, δίνονται δύο παραδείγματα προβλημάτων ρυθμού.

ΙΣΕΣ ΟΜΑΔΕΣ: ΑΓΝΩΣΤΟ ΤΟ ΟΛΟ (ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ)

Ο Μαρκ έχει 4 σακούλες μήλα. Υπάρχουν 6 μήλα σε κάθε σακούλα. Πόσα μήλα έχει συνολικά ο Μαρκ;
Αν τα μήλα κοστίζουν 7 σεντς το καθένα, πόσα πρέπει να πληρώσει η Τζιλ για 5 μήλα; (ρυθμός)
Ο Πήτερ περπάτησε για 3 ώρες με 4 μίλια την ώρα. Πόσο μακριά πήγε; (ρυθμός)

ΙΣΕΣ ΟΜΑΔΕΣ: ΤΟ ΑΓΝΩΣΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΩΝ ΟΜΑΔΩΝ (ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΜΕΡΙΣΜΟΥ)

Ο Μαρκ έχει 24 μήλα. Θέλει να τα μοιράσει εξίσου στους 4 φίλους του. Πόσα μήλα θα πάρει ο κάθε φίλος;
Η Τζιλ πλήρωσε 35 σεντς για 5 μήλα. Πόσο κόστιζε το 1 μήλο; (ρυθμός)
Ο Πήτερ περπάτησε 12 μίλια σε 3 ώρες. Με πόσα μίλια την ώρα (πόσο γρήγορα) περπάτησε; (ρυθμός)

ΙΣΕΣ ΟΜΑΔΕΣ: Ο ΑΓΝΩΣΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΟΜΑΔΩΝ (ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ)

Ο Μαρκ έχει 24 μήλα. Τα έβαλε σε σακούλες που περιείχαν 6 μήλα η καθεμία.
Πόσες σακούλες χρησιμοποίησε ο Μαρκ;
Η Τζιλ αγόρασε μήλα με 7 σεντς το ένα. Το συνολικό κόστος των μήλων της ήταν 35 σεντς. Πόσα αγόρασε η Τζιλ; (ρυθμός)
Ο Πήτερ περπάτησε 12 μίλια με ρυθμό 4 μίλια την ώρα. Πόσες ώρες χρειάστηκε ο Πήτερ για να περπατήσει τα 12 μίλια; (ρυθμός)

Πολλαπλασιαστικά Προβλήματα Σύγκρισης

Στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα σύγκρισης υπάρχουν στην ουσία δύο διαφορετικά σύνολα, όπως και στις περιπτώσεις σύγκρισης για την πρόσθεση και την αφαίρεση. Το ένα σύνολο αποτελείται από πολλαπλά αντίγραφα του άλλου. Εδώ παρέχονται δύο παραδείγματα για κάθε πιθανότητα. Στις πρώτες η σύγκριση είναι μια διαφορά ποσού ή ποσότητας. Στις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις η σύγκριση βασίζεται στο γεγονός ότι το ένα σύνολο είναι ένα συγκεκριμένο πολλαπλάσιο του άλλου.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ: ΤΟ ΑΓΝΩΣΤΟ ΠΙΝΟΜΕΝΟ (ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ)

Η Τζιλ έκοψε 6 μήλα. Ο Μαρκ έκοψε 4 φορές όσα η Τζιλ. Πόσα μήλα έκοψε ο Μαρκ;
Αυτό το μήνα ο Μαρκ εξοικονόμησε 5 φορές περισσότερα χρήματα από τον περασμένο μήνα. Τον περασμένο μήνα μάζεψε 7 ευρώ. Πόσα χρήματα μάζεψε ο Μαρκ αυτόν το μήνα;

ΣΥΓΚΡΙΣΗ: ΤΟ ΑΓΝΩΣΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ (ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΜΕΡΙΣΜΟΥ)

Ο Μαρκ έκοψε 24 μήλα. Έκοψε 4 φορές περισσότερα από την Τζιλ. Πόσα μήλα έκοψε η Τζιλ;
Ο Μαρκ εξοικονόμησε 5 φορές περισσότερα από τον τελευταίο μήνα. Αν αυτόν τον μήνα μάζεψε 35 ευρώ, πόσα είχε μάζεψει τον τελευταίο μήνα;

ΣΥΓΚΡΙΣΗ: Ο ΑΓΝΩΣΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΗΣ (ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ)

Ο Μαρκ έκοψε 24 μήλα και η Τζιλ μόνο 6. Πόσες φορές περισσότερα μήλα μάζεψε ο Μαρκ;
Αυτόν το μήνα ο Μαρκ εξοικονόμησε 35 ευρώ. Τον προηγούμενο μήνα μάζεψε 7 ευρώ. Πόσες φορές περισσότερα χρήματα μάζεψε αυτόν το μήνα ο Μαρκ;

Σταματήστε και σκεφτείτε

Αυτό που μόλις διαβάσατε είναι αρκετό και χρειάζεται σκέψη. Σταματήστε τώρα και πάρτε πούλια, τουλάχιστον 35. Χρησιμοποιήστε τα πούλια για να λύσετε καθένα από τα παραπάνω προβλήματα. Δείτε πρώτα τα προβλήματα ίσων συνόλων και λύστε τα προβλήματα του Μαρκ ή το πρώτο πρόβλημα κάθε ομάδας. Αντιστοιχίστε τα νούμερα με το μοντέλο δομής στο Σχήμα 10.7. Πού μοιάζουν και πού διαφοροποιούνται αυτά τα προβλήματα, ειδικά τα δύο προβλήματα διαίρεσης. Επαναλάβετε την άσκηση με τα προβλήματα της Τζιλ και του Πήτερ. Μπορείτε να δείτε πού μοιάζουν τα προβλήματα και πώς συνδέονται μεταξύ τους;

Όταν νιώσετε έτοιμοι με τα προβλήματα των ίσων συνόλων επαναλάβετε την ίδια διαδικασία με τα προβλήματα της πολλαπλασιαστικής σύγκρισης. Αρχίστε ξανά με το πρώτο πρόβλημα από κάθε μία από τις τρεις ομάδες και μετά με το δεύτερο. Σκεφθείτε το ίδιο ερώτημα που τέθηκε νωρίτερα.

Σκέψεις για τα Προβλήματα Πολλαπλασιασμού και Διάρθρωσης

Έρευνες δείχνουν ότι τα παιδιά του νηπιαγωγείου και της πρώτης τα καταφέρνουν εξίσου καλά στην επίλυση προβλημάτων με πολλαπλασιασμό και διαίρεση, ακόμη και αν η διαίρεση αφήνει υπόλοιπο (Carpenter, Ansell, Franke, Fennema, & Weisbeck, 1993, Carpenter, Carey, & Kouba 1990, Carpenter και συνεργάτες, 1999). Οι Mulligan & Mitchelmore (1997), στηριζόμενοι σε δικές τους έρευνες και έρευνες άλλων, προβάλλουν το ισχυρό επιχείρημα ότι τα παιδιά πρέπει να εκτίθενται και στις τέσσερις πράξεις από την πρώτη ήδη χρονιά στο σχολείο και πως ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση χρειάζεται να προβάλλονται περισσότερο στο αναλυτικό πρόγραμμα.

Διδάσκοντας Πολλαπλασιασμό και Διάρθρωση

Στα περισσότερα παραδοσιακά προγράμματα, ο πολλαπλασιασμός διδάσκεται πριν και ξεχωριστά από τη διαίρεση. Είναι βέβαια σημαντικό να συνδυάζονται ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση μετά τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού, για να βοηθήσουμε τα παιδιά να δουν πώς σχετίζονται μεταξύ τους. Στα περισσότερα αναλυτικά προγράμματα, τα θέματα αυτά είναι τα κύρια θέματα της τρίτης τάξης τα οποία συνεχίζονται σε πιο αναπτυγμένη μορφή στην τετάρτη και στην πέμπτη τάξη.

Μία από τις μεγαλύτερες δυσκολίες με τις πολλαπλασιαστικές δομές είναι η κατανόηση των συνόλων ως ξεχωριστές ενότητες καθώς και η κατανόηση ότι ένα σύνολο αποτελείται από ένα δεδομένο αριθμό αντικειμένων (Clark & Kamii, 1996, Kouba, 1989, Steffe, 1988). Τα παιδιά μπορούν να λύσουν το πρόβλημα *πόσα μήλα σε 4 καλάθια των 8 μήλων το καθένα, μετρώντας 4 σύνολα των 8 και μετά μετρώντας τα όλα μαζί*. Για να σκεφτούν τα παιδιά πολλαπλασιαστικά για αυτό το πρόβλημα ως 4 σύνολα των οχτώ, απαιτείται να σκεφτούν το κάθε σετ των οχτώ ως ένα αντικείμενο προς μέτρηση. Οι εμπειρίες δημιουργίας και μέτρησης συνόλων, ειδικά σε σχέση με το συγκεκριμένο, είναι εξαιρετικά χρήσιμες (δείτε την ανάλυση στο βιβλίο *Each Orange Had 8 Slices* στο τέλος του κεφαλαίου).

Χρησιμοποιώντας Προβλήματα Συγκεκριμένου

Πολλά από τα θέματα σχετικά με την πρόσθεση και την αφαίρεση εφαρμόζονται και στον πολλαπλασιασμό και δε χρειάζονται να αναλυθούν περισσότερο. Παραμένει σημαντικό να χρησιμοποιούμε προβλήματα συγκεκριμένου αντί για στείρα προβλήματα με απλές ιστορίες. Όπως ακριβώς και με τις δομές της πρόσθεσης, είναι καλή ιδέα να οργανώσετε κάποια μαθήματα γύρω από δύο ή τρία μόνο προβλήματα. Τα παιδιά μπορούν να λύσουν τα προβλήματα χρησιμοποιώντας όποια τεχνική επιθυμούν. Αυτό που έχει σημασία είναι να εξηγούν – κατά προτίμηση γραπτά – τι έκαναν και πώς το κατάλαβαν. Οι λέξεις, οι εικόνες και οι αριθμοί παραμένουν σημαντικά στοιχεία.

Συμβολισμός για τον Πολλαπλασιασμό και τη Διάρθρωση

Όταν τα παιδιά λύνουν απλά πολλαπλασιαστικά προβλήματα με αφήγηση προτού διδαχθούν για τον συμβολισμό του πολλαπλασιασμού, πιθανώς θα αρχίσουν να γράφουν εξισώσεις επαναλαμβανόμενων προσθέσεων για να αναπαραστήσουν ως εξίσωση αυτό που έκαναν. Αυτή είναι η ευκαιρία σας να εισάγετε τα σημάδια του πολλαπλασιασμού και να εξηγήσετε τι σημαίνουν οι δύο παράγοντες.

Η συνηθισμένη σύμβαση είναι ότι το 4 x 8 αναφέρεται σε τέσσερα σύνολα των οκτώ και όχι σε οκτώ σύνολα των τεσσάρων. Δεν υπάρχει λόγος να είμαστε ιδιαίτερα αυστηροί σχετικά με αυτή τη σύμβαση. Το σημαντικό είναι τα παιδιά να μπορούν να σας πουν τι αναπαριστά κάθε παράγοντας της εξίσωσής τους. Σε κάθετη αναπαράσταση, συνήθως ο κάτω παράγοντας δείχνει τον αριθμό των συνόλων. Όμως και πάλι η διαφοροποίηση αυτή δεν είναι ιδιαίτερα σημαντική.

Το 24 διαιρούμενο με το 6 μπορεί να αναπαρασταθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους: 24:6, 6 √ 24 και 24/6. Η σημειογραφία του κλάσματος είναι σημαντική στις μεσαίες τάξεις. Η υπολογιστική μορφή 6 √ 24 δεν θα ίσχυε προφανώς αν δεν υπήρχε η κλαστική άσκηση με χαρτάκι και μολύβι που την κάνει πραγματικότητα. Τα παιδιά έχουν την τάση να το διαβάζουν «6 διαιρούμενο με 24» λόγω της σειράς από τα αριστερά στα δεξιά των αριθμών. Γενικά, αυτό το λάθος δεν ταιριάζει με αυτό που σκέφτονται.

Για να εξαιρεθεί αυτή η δυσκολία της διαίρεσης, επινοήθηκε η ανόητη φράση «το 6 χωράει στο 24». Αυτή η φράση έχει μικρή σημασία για τη διαίρεση, ειδικά σε σχέση με μια δίκαιη μοιρασιά ή με ένα συγκεκριμένο διαίρεσης. Η ορολογία «χωράει σε» είναι πολύ γνωστή στους περισσότερους ενήλικες και αποτυπώνει από τα σχολικά εγχειρίδια εδώ και πολλά χρόνια. Αν χρησιμοποιείτε τη φράση «χωράει σε», μάλλον ήρθε η ώρα να σκεφτείτε σοβαρά να μην το ξανακάνετε.

Επιλέγοντας Αριθμούς για τα Προβλήματα

Όταν επιλέγετε αριθμούς για τα πολλαπλασιαστικά προβλήματα με αφήγηση ή δραστηριότητες πολλαπλασιασμού, υπάρχει η τάση οι μεγάλοι αριθμοί να δυσκολεύουν τα παιδιά, ενώ το 3×4 θεωρείται κάπως πιο εύκολο να κατανοηθεί απ' ό,τι το 4×17 . Όμως, η κατανόηση των αποτελεσμάτων ή των ποσοτήτων δεν επηρεάζεται από το μέγεθος των αριθμών, με την προϋπόθεση ότι αυτοί οι αριθμοί συμβαδίζουν με το επίπεδο των παιδιών. Μικρό είναι το κέρδος από την εξερεύνηση μόνο των μικρών αριθμών. Ακόμη και στην τρίτη τάξη, τα παιδιά μπορούν να δουλέψουν με μεγάλους αριθμούς χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε υπολογιστική μέθοδο έχουν στη διάθεσή τους. Ένα πρόβλημα συγκείμενου που περιέχει το 14×8 δεν είναι καθόλου μεγάλο για τους μαθητές της τρίτης ακόμα και πριν μάθουν κάποια υπολογιστική τεχνική. Όταν δίνονται τέτοιες προκλήσεις, τα παιδιά είναι πιθανό να εφεύρουν υπολογιστικές στρατηγικές.

Υπόλοιπα

Τις περισσότερες φορές, από τη διαίρεση δεν προκύπτει ένας απλός ακέραιος αριθμός. Για παράδειγμα, προβλήματα με διαρέτη το 6 θα έχουν ως αποτέλεσμα «ολόκληρο αριθμό» μόνο 1 στις 6 φορές. Όταν απουσιάζει το συγκεκριμένο ενός προβλήματος με αφήγηση, μπορούμε να χειριστούμε έναν αριθμό μόνο με δύο τρόπους: μπορεί είτε να περιμετρεί κάποια ποσότητα είτε να διαιρείται σε κλάσματα. Στο Σχήμα 10.8 το πρόβλημα 11:4 παριστάνεται με μοντέλα που αναπαριστούν κλάσματα.

Σε πραγματικές καταστάσεις, τα υπόλοιπα έχουν ορισμένες φορές τρεις επιπρόσθετες επιδράσεις στις απαντήσεις:

Το υπόλοιπο μένει εκτός, αφήνοντας μια μικρότερη απάντηση ακέραιου αριθμού.

Το υπόλοιπο μπορεί να «τείνει» στον επόμενο μεγαλύτερο αριθμό.

Η απάντηση στρογγυλοποιείται στον πιο κοντινό αριθμό ενός αποτελέσματος.

Τα επόμενα προβλήματα δείχνουν και τις πέντε πιθανότητες:

Έχετε 30 γλυκά να τα μοιραστείτε δίκαια με 7 παιδιά. Πόσα γλυκά θα πάρει κάθε παιδί;

Απάντηση: 4 γλυκά και 2 θα μείνουν (υπόλοιπο).

Κάθε βάζο έχει 8 ίντσες υγρού. Αν υπάρχουν 46 ίντσες στα βάζα, πόσα βάζα θα υπάρχουν;

Απάντηση: 5 και $6/8$ βάζα (διαμερισμένο ως κλάσμα).

Το σκοινί είναι 25 πόδια μακρύ. Πόσα 7-ποδια σκοινιά μπορούν να φτιαχτούν

Απάντηση: 3 (μένει εκτός).

Το φέριμπος χωρά 3 αυτοκίνητα. Πόσα ταξίδια πρέπει να κάνει για να κουβαλήσει 25 αυτοκίνητα στην άλλη άκρη του ποταμού;

Απάντηση: 4 ταξίδια (τείνει στον επόμενο αριθμό).

Έξι παιδιά σχεδιάζουν να μοιραστούν μια σακούλα με 50 τσιχλόφουσες. Πόσες περίπου θα πάρει το καθένα;

Απάντηση: Περίπου 8 το κάθε παιδί (στρογγυλοποίηση, αποτέλεσμα κατά προσέγγιση).

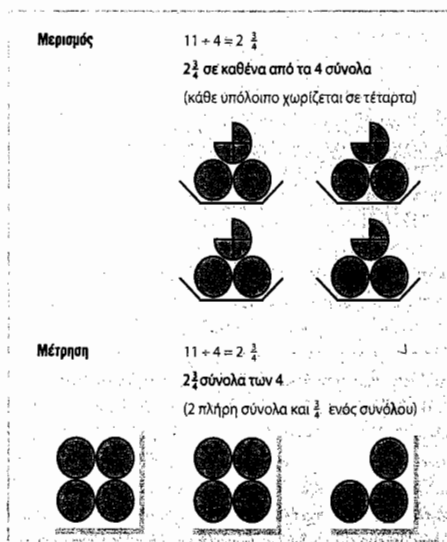
Τα παιδιά δεν θα πρέπει να σκεφτούν τα υπόλοιπα ως 3 ή ως «μείνουν», θα πρέπει να τα τοποθετούν αντίστοιχα στο συγκεκριμένο.

Σταματώ και συνεχίζω

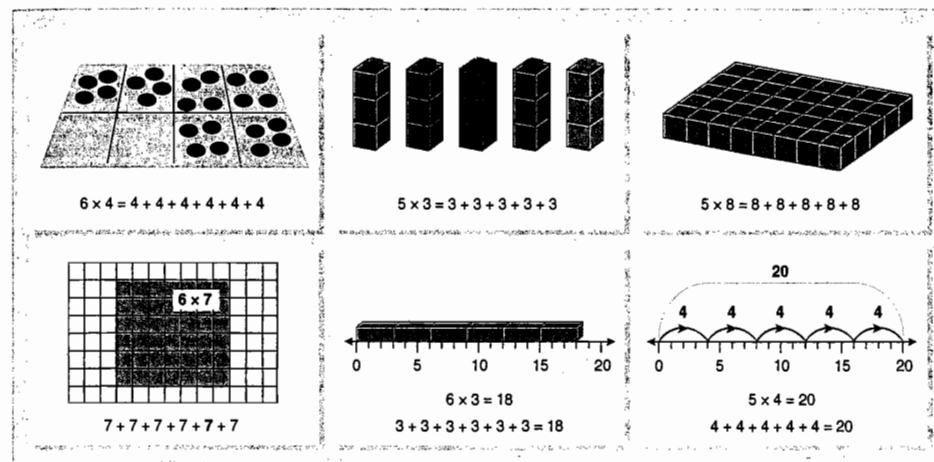
Είναι χρήσιμο να κάνετε προβλήματα σε διαφορετικά συγκεκριμένα. Συμπεριλάβετε συνεχείς ποσότητες όπως το μήκος, ο χρόνος και ο όγκος. Δείτε αν μπορείτε να σκεφθείτε προβλήματα σε κάθε κατηγορία διαίρεσης για κατηγορίες ίσων ομάδων και σύγκρισης που τα υπόλοιπα θα αντιμετωπίζονται ως κλάσμα-τα ή ως στρογγυλοποιημένα (πάνω ή κάτω) αποτελέσματα.



Είναι σημαντικό να παρέχετε προβλήματα με αφήγηση τόσο για τον πολλαπλασιασμό όσο και για τη διαίρεση στον ίδιο μάθημα, έτσι ώστε να είστε σί-



ΣΧΗΜΑ 10.8 Υπόλοιπα εκφρασμένα ως κλάσματα.



ΣΧΗΜΑ 10.9 Μοντέλα για πολλαπλασιασμό με ίσα σύνολα.

γορευοί ότι τα παιδιά ερμηνεύουν το νόημα των προβλημάτων και δεν χρησιμοποιούν απλά τους αριθμούς και τις πράξεις που δόθηκαν. Όταν δημιουργούν μοντέλα για πολλαπλασιαστικά προβλήματα ή όταν χρησιμοποιούν τις δικές τους στρατηγικές για την επίλυσή τους, τα παιδιά δεν χρησιμοποιούν πάντα την προσέγγιση που ταιριάζει με το πρόβλημα. Για παράδειγμα, αν λύνουν ένα πρόβλημα που έχει 12 ομάδες του 4, πολλά παιδιά θα προσθέσουν 4 δωδεκάρια αντί 12 τεσσάρια. Αντί να σας ανησυχεί αυτό, δείτε το ως μία ένδειξη ότι τα παιδιά κατά πάσα πιθανότητα δέχονται ή κατανοούν ότι το 12×4 και το 4×12 μας δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Ωστόσο, όταν τα παιδιά λύνουν ένα τέτοιο πρόβλημα με διαφορετικούς τρόπους, δίνεται μία εξαιρετικά ωφέλιμη ευκαιρία για συζήτηση. ■

Χρησιμοποιώντας προβλήματα βασισμένα σε μοντέλα

Στην αρχή, τα παιδιά θα είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν τα ίδια μοντέλα—σύνολα και ευθείες των αριθμών—και για τις τέσσερις πράξεις. Ένα μοντέλο που γενικά δεν χρησιμοποιείται στην πρόσθεση αλλά είναι ιδιαίτερα σημαντικό και ευρέως διδασκόμενο για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, είναι η παράταξη (array). Παράταξη είναι η οποιαδήποτε διάταξη πραγμάτων σε σειρές και στήλες, όπως ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από πλακίδια ή κύβους.

Για να κάνουν πιο σαφή τη σχέση με την πρόσθεση, οι πρώτες δραστηριότητες πολλαπλασιασμού θα πρέπει επίσης να περιλαμβάνουν και το γράφημα μιας αριθμητικής πρότασης πρόσθεσης που να συμβολίζει το ίδιο μοντέλο. Στο Σχήμα 10.9, βλέπουμε μια ποικιλία μοντέλων. Παρατηρήστε ότι τα γινόμε-

να δεν περιλαμβάνονται, αλλά γράφονται μόνο τα «ονόματα» της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Αυτός είναι ένας ακριβής τρόπος να αποφεύγουμε την κουραστική απαρίθμηση μεγάλων συνόλων. Παρόμοια προσέγγιση είναι να γράψουμε μια αριθμητική πρόταση που να εκφράζει ταυτόχρονα και τις δύο έννοιες, όπως, για παράδειγμα, $9 + 9 + 9 + 9 = 4 \times 9$.

Δραστηριότητες με Πολλαπλασιασμό και Διάρθρωση

Όπως και με τα προβλήματα πρόσθεσης, τα παιδιά μπορούν να ωφεληθούν και από ορισμένες δραστηριότητες με μοντέλα αλλά χωρίς συγκεκριμένο. Σκοπός των δραστηριοτήτων αυτού του είδους είναι να ρίξουμε βάρος στο νόημα της αριθμητικής πράξης και στα αντίστοιχα σύμβολα. Η δραστηριότητα 10.4 διανέμεται από ένα καλό πνεύμα επίλυσης προβλήματος. Η γλώσσα που θα χρησιμοποιήσετε εξαρτάται από ό,τι έχετε ήδη χρησιμοποιήσει με τα παιδιά.

Δραστηριότητα 10-4

Βρίσκοντας τους Παράγοντες

Ξεκινήστε δίνοντας έναν αριθμό που να έχει διάφορους παράγοντες: για παράδειγμα, 12, 18, 24, 30 ή 36. Ζητήστε από τα παιδιά να βρουν φράσεις πολλαπλασιασμού για τον συγκεκριμένο αριθμό. Χρησιμοποιώντας πούλια, τα παιδιά επιχειρούν να βρουν έναν τρόπο να τα χωρίσουν σε ίσα υποσύνολα. Με παρατάξεις (που μπορούν να φτιάξουν από πλακίδια ή κύβους ή να σχεδιάσουν σε χαρτί με τετραγωνάκια), τα παιδιά προσπαθούν να κα-

τασκεύασουν ορθογώνια παραλληλόγραμμα που να έχουν τον αριθμό που τους δόθηκε από τετράγωνα. Για καθένα από αυτές τις διατάξεις των συνόλων ή των κατάλληλων ορθογωνίων παραλληλόγραμμων, μπορεί να γραφτεί μια εξίσωση πρόσθεσης και μία αφαίρεσης.

Η Δραστηριότητα 10.4 μπορεί επίσης να συμπεριλάβει και έννοιες της διάρθρωσης. Όταν τα παιδιά έχουν μάθει ότι το 3 και το 6 είναι παράγοντες του 18, θα μπορούν να γράψουν τις εξισώσεις $18 : 3 = 6$ και $18 : 6 = 3$ παράλληλα με τα $3 \times 6 = 18$ και $6 + 6 + 6 = 18$ (αν υποθέσουμε ότι αναπαριστούσαμε τρία σύνολα των έξι). Η ακόλουθη παραλλαγή της ίδιας δραστηριότητας εστιάζεται στη διάρθρωση. Μια άριστη συνέχεια αυτής της δραστηριότητας θα ήταν να βάλετε τα παιδιά να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα. Ζητήστε τους να εξηγήσουν πώς ανταποκρίνονται τα δικά τους προβλήματα με όσα έκαναν με τα πούλια.

Δραστηριότητα 10.5

Μαθαίνοντας για τη Διάρθρωση

Εφοδιάστε τα παιδιά με άφθονα πούλια και βρείτε κάποιον τρόπο να τα βάζουν σε μικρές ομάδες. Τα μικρά χάρτια ποτηράκια είναι ό,τι πρέπει για την περίπτωση. Βάλτε τα παιδιά να ομαδοποιηθούν έναν αριθμό από πούλια που θα είναι το τελικό σύνολο ή το άθροισμα. Σημειώνουν αυτόν τον αριθμό: «Αρχίστε με το τριάντα ένα». Στη συνέχεια καθορίστε είτε τον αριθμό των ίσων συνόλων που πρέπει να φτιάξετε είτε το μέγεθός τους: «Χωρίστε τα πούλια σας σε τέσσερα ίσα σύνολα» ή «Φτιάξτε όσο το δυνατόν περισσότερα σύνολα των τεσσάρων». Έπειτα ζητήστε τους να γράψουν την αντίστοιχη εξίσωση πολλαπλασιασμού γι' αυτό που δείχνουν τα μοντέλα τους. Κάτω από την εξίσωση του πολλαπλασιασμού γράφουν την εξίσωση της διάρθρωσης.

Βεβαιωθείτε ότι συμπεριλαμβάνετε και τους δύο τύπους ασκήσεων: και τον αριθμό των ίσων συνόλων και το μέγεθος των συνόλων. Συζητήστε με την τάξη ως προς τις διαφορές αυτών των δύο, αλλά, ωστόσο, καθένα σχετίζεται με τον πολλαπλασιασμό και γράφεται ως εξίσωση διάρθρωσης. Σε αυτή τη φάση μπορείτε να δείξετε και τους δύο τρόπους να γράψουν τις εξισώσεις διάρθρωσης. Κάντε τη Δραστηριότητα 10.5 αρκετές φορές. Αρχίστε με απλές ποσότητες που είναι πολλαπλασιαστές του διαφέτη (χωρίς υπόλοιπο), αλλά σύντομα συμπεριλάβετε και περιπτώσεις με υπόλοιπο (σημειώστε ότι από τεχνικής άποψης είναι λάθος να γράψουμε $31 + 4 = 7 \cdot 3$. Ωστόσο, αυτή η μορφή είναι ίσως η πιο κατάλληλη για να χρησιμοποιήσουμε στην αρχή).

Η δραστηριότητα μπορεί να διαφοροποιηθεί αν αλλάξουμε το μοντέλο. Βάλτε τα παιδιά να κατασκευάσουν παρατά-

ξεις σε χαρτί με τετραγωνάκια από τετραγωνάκια πλευράς 1 εκατοστού. Παρουσιάστε τις ασκήσεις προσδιορίζοντας πόσα τετράγωνα πρέπει να υπάρχουν στην κάθε παράταξη. Τότε μπορείτε να προσδιορίσετε τον αριθμό των σειρών που θα πρέπει να φτιάξουν (μέγεθος) ή το μήκος της κάθε σειράς (μέγεθος). Πώς θα μπορούσαν να παιδιά να παραστήσουν τις σημαντικές απαντήσεις σχεδιάζοντας παρατάξεις σε χαρτί με τετραγωνάκια από τετράγωνα πλευράς 1 εκατοστού;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 10.5
Ένα διευρυμένο μάθημα που σπληνίζεται στην δραστηριότητα 10.5 μπορεί να βρεθεί στην ιστοσελίδα www.ablongman.com/vandewalle6e.



Συμμετέχοντας για την Τεχνική

Το βοηθητικό πρόγραμμα "Rectangle Division" στην ιστοσελίδα του NLVM (<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>) αποτελεί μία εξαιρετική διαδραστική παρουσίαση της διάρθρωσης με υπόλοιπο. Παρουσιάζεται ένα πρόβλημα διάρθρωσης με παράταξη δείχνοντας τον αριθμό των τετραγώνων στο γινόμενο. Οι διαστάσεις της παράταξης μπορούν να τροποποιηθούν αλλά ο αριθμός των τετραγώνων μένει σταθερός. Αν, για παράδειγμα, η εργασία είναι να δείξετε το πρόβλημα $52 : 8$, τα τετράγωνα μπορούν να προσαρμωθούν για να δείχνουν μία παράταξη 8 επί 6 με 4 έξτρα τετράγωνα σε διαφορετικά χρώματα ($8 \times 6 + 4$) καθώς επίσης και οποιαδήποτε άλλη παραλλαγή 52 τετραγώνων σε ένα παραλληλόγραμμο συν μια μικρότερη στήλη για το υπόλοιπο. Η διάρθρωση συνδέεται πολύ έντονα με τον πολλαπλασιασμό σε αυτό το βοηθητικό πρόγραμμα.

Δραστηριότητα 10.6

Το Χαλασμένο Πλήκτρο του Πολλαπλασιασμού

Η αριθμομηχανή είναι ένας καλός τρόπος να συσχετίσετε τον πολλαπλασιασμό με την πρόσθεση. Μπορείτε να πείτε στα παιδιά να βρουν διάφορα γινόμενα στην αριθμομηχανή, χωρίς να χρησιμοποιήσουν το πλήκτρο $\times$. Για παράδειγμα, μπορούν να βρουν το 6×4 πατώντας $+$ 4 $=$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ (τα διαδοχικά πατήματα του $+$ προσθέτουν κάθε φορά το 4 στο ποσό της οθόνης. Ξεκινήστε με το μηδέν και προσθέσατε το 4 έξι φορές). Μπορείτε να προτείνετε στα παιδιά να αναπαράσχουν το αποτέλεσμα τους με σύνολα από πούλια. Να επισημάνετε όμως ότι η ίδια τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό γινομένων όπως 23×459 ($+$ 459 και έπειτα 23 πατήματα του $+$). Τα παιδιά θα θελήσουν να συγκρίνουν το ίδιο γινόμενο χρησιμοποιώντας το πλήκτρο $\times$.

Ιδιαίτερα αποτελεσματικό θα ήταν να κάνετε έπειτα από «Το Χαλασμένο Πλήκτρο του Πολλαπλασιασμού» τη δραστηριότητα με «Το Χαλασμένο Πλήκτρο της Διάρθρωσης».

Δραστηριότητα 10.7

Το Χαλασμένο Πλήκτρο της Διάρθρωσης

Βάλτε τα παιδιά να εργαστούν σε ομάδες για να βρουν διαφορετικές μεθόδους για να λύσουν ασκήσεις διάρθρωσης χωρίς να χρησιμοποιήσουν το πλήκτρο της διάρθρωσης. Τα προβλήματα μπορούν να δοθούν χωρίς κάποια πλοκή. «Βρείτε δύο τουλάχιστον τρόπους να λύσετε το $61 : 14$ χωρίς να πατήσετε το πλήκτρο της διάρθρωσης». Αν μάλιστα το πρόβλημα τεθεί ως αφήγηση, κάποια μέθοδος μπορεί να του ταιριάζει καλύτερα από κάποια άλλη. Τις διαφορετικές λύσεις που έχουν τις ίδιες απαντήσεις θα μπορούσαν να ακολουθήσουν καλές συζητήσεις. Είναι σωστές και οι δύο; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

Σταματήστε και σκεφτείτε

Δεν υπάρχει λόγος να δείξετε στα παιδιά πώς να κάνουν τη Δραστηριότητα 10.7. Ωστόσο, θα ήταν πολύ καλή ιδέα να δοκιμάσετε εσείς αν μπορείτε να βρείτε τρεις τρόπους να λύσετε το $61 : 14$ σε μια αριθμομηχανή χωρίς να χρησιμοποιήσετε το πλήκτρο της διάρθρωσης. Αν χρειάζεστε κάποια υπόδειξη, δείτε την υποσημείωση*.



«Από τρίτη μέχρι την πέμπτη τάξη, τα παιδιά θα πρέπει να εστιάζουν στις έννοιες και στη σχέση μεταξύ πολλαπλασιασμού και διάρθρωσης. Είναι σημαντικό τα παιδιά να καταλάβουν ότι κάθε αριθμός σε μια έκφραση πολλαπλασιασμού ή διάρθρωσης αναπαριστά... Τα προβλήματα με μοντέλα που περιέχουν εικόνες, διαγράμματα ή άλλα υλικά βοηθούν τα παιδιά να μάθουν να αναπαριστούν οι παράγοντες και τα γινόμενά τους σε κάθε συγκεκριμένο» (σελ. 151)

Χρήσιμες Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού και της Διάρθρωσης

Όπως συμβαίνει με την πρόσθεση και την αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός διακρίνεται από κάποιες ιδιότητες χρήσιμες οι οποίες αξίζουν, επομένως, την προσοχή μας. Έμφαση θα πρέπει να δίνεται στις ιδέες και όχι στην ορολογία ή τους ορισμούς.

Η ιδιότητα της Διάταξης στον Πολλαπλασιασμό

Δεν είναι προφανές ότι 3×8 είναι το ίδιο με 8×3 ή ότι, γενικά, η σειρά των αριθμών δεν αλλάζει τίποτα (η ιδιότητα της

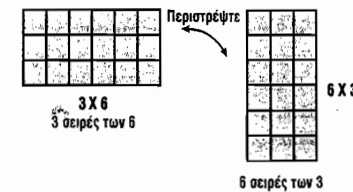
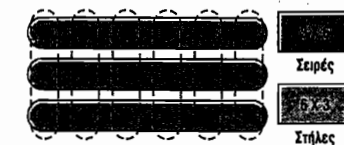
* Υπάρχουν δύο μέθοδοι ή δύο τρόποι να ανακαλύψετε πόσα 14άρια υπάρχουν στο 61 με μέτρηση. Ένας τρίτος τρόπος σχετίζεται βασικά με τη διαμέριση ή με την σνεύρεση του αριθμού με τον οποίο πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το 14 για να πληρώσουμε το 61.

διάταξης ή αντιμεταθετική ιδιότητα). Μια εικόνα με 3 σύνολα από 8 αντικείμενα δεν μπορεί να τη δει κάποιος αμέσως ως 8 σποβες των 3 αντικειμένων. Με 8 πηδηματάκια του 3 φτάνουμε στο 24, αλλά δεν είναι ξεκάθαρο ότι με 3 πηδηματάκια του 8 θα καταλήξουμε στο ίδιο σημείο.

Η παράταξη, αντίθετα, είναι αρκετά αποτελεσματική στην απεικόνιση της ιδιότητας της διάταξης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.10. Τα παιδιά θα πρέπει να σχεδιάσουν ή να κατασκευάσουν παρατάξεις και να τις χρησιμοποιήσουν για να δείξουν γιατί κάθε παράταξη αντιπροσωπεύει δύο διαφορετικές πράξεις πολλαπλασιασμού με το ίδιο γινόμενο.

Ο Ρόλος του Μηδενός και του Ένα στον Πολλαπλασιασμό

Το μηδέν, και σε μικρότερο βαθμό το ένα, θεωρούνται συχνά παράγοντες δυσκολίας για τα παιδιά. Σε ένα κείμενο της τρίτης τάξης (Charles και συνεργάτες, 1998), σε ένα μάθημα πάνω στο 0 και το 1 ως παράγοντες τα παιδιά καλούνται να εξετάσουν με αριθμομηχανή μια ευρεία ποικιλία γινομένων με το 0 ή το 1 (423×0 , 0×28 , 1536×1 κ.λπ.) και να αναζητήσουν πρότυπα. Το πρότυπο υποδηλώνει τους κανόνες για το 0 και το 1 ως παράγοντες αλλά δεν τους εξηγεί. Στο ίδιο μάθημα, ένα πρόβλημα ρωτάει πόσα γραμμάκια λίπους υπάρχουν σε 7 μερίδες σέλινο με 0 γραμμάκια λίπους σε κάθε μερίδα. Η συγκεκριμένη προσέγγιση είναι κατά πολύ προτιμότερη από έναν αυθαίρετο κανόνα, αφού ζητάει από τα παιδιά να συλλογιστούν. Καταργεί ενδιαφέροντα προβλήματα με το 0 και το 1 και συζητήστε τα αποτελέσματα. Τα προβλήματα με το 0



ΣΧΗΜΑ 10.10 Δύο τρόποι χρήσης μιας διάταξης για την απεικόνιση της αντιμεταθετικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού.

ως πρώτο παράγοντα είναι βέβαια παράξενα. Σημειώστε ότι την ευθεία των αριθμών, 5 πληθυσματικά του 0 καταλήγουν στο 0 (5 x 0). Πόσα θα ήταν 0 πληθυσματικά του 5; Άλλη μία διασκεδαστική δραστηριότητα είναι να δοκιμάσετε να παραστήσετε το 6x8 ή 0x8 με μια παράταξη (δοκιμάστε το!). Αξιολογες διευκρινίσεις είναι επίσης και οι παρατάξεις για παράγοντες του 1.

Η Επιμεριστική Ιδιότητα

Η επιμεριστική ιδιότητα αναφέρεται στην ιδέα ότι ο ένας από τους δύο παράγοντες σε ένα γινόμενο μπορεί να επιμεριστεί σε δύο ή περισσότερα μέρη και το κάθε μέρος να πολλαπλασιαστεί ξεχωριστά και μετά τα γινόμενα να προστεθούν. Το γινόμενο είναι το ίδιο όπως και με τον πολλαπλασιασμό των αρχικών παραγόντων. Για παράδειγμα, 6×9 είναι το ίδιο με το $(6 \times 5) + (6 \times 4)$. Το ενδιά έχει χωριστεί σε 5 και 4. Η έννοια που εμπλέκεται είναι πολύ χρήσιμη για το συσχετισμό ενός βασικού γεγονότος με κάποιο άλλο, ενώ έχει επίσης να κάνει και με την εκμάθηση των υπολογισμών με διψήφιους αριθμούς. Το Σχήμα 10.11 δείχνει πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο της παρατάξης για να απεικονίσει το γεγονός ότι ένα γινόμενο μπορεί να σπάσει σε δύο τμήματα.

Η παρακάτω δραστηριότητα σχεδιάστηκε για να βοηθήσει τα παιδιά να ανακαλύψουν πώς να διαχωρίσουν τους παράγοντες ή με άλλα λόγια πώς να μάθουν για την επιμεριστική ιδιότητα.

Δραστηριότητα 10.8

Κόψτε το

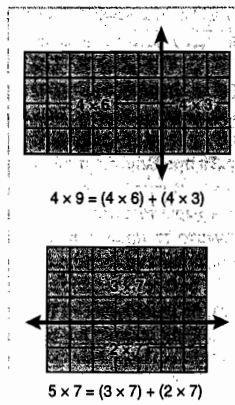
Εφοδιάστε τα παιδιά με διάφορα φύλλα με τετραγωνάκια του ενός εκατοστού. Σε κάθε ζευγάρι παιδιών δώστε ένα γινόμενο όπως 6x8 (τα γινόμενα μπορεί να ποικίλλουν ή να είναι τα ίδια). Σκοπός είναι να βρεθούν διαφορετικοί τρόποι να κοπεί το παραλληλόγραμμο σε δύο μέρη. Για κάθε φέτα οι μαθητές γράφουν μια εξίσωση. Για μια σειρά των 8, θα μπορούσαν να γράψουν $6 \times 8 = 5 \times 8 + 1 \times 8$. Το κάθε γινόμενο μπορεί να γραφεί όπως στο Σχήμα 10.11.

Γιατί Δεν Διαιρούμε με το Μηδέν;

Σε κάποια παιδιά λένε ότι απλά «δεν επιτρέπεται να διαιρούμε με το μηδέν». Για να αποφύγετε έναν αυθαίρετο κανόνα, δώστε τους να αναπαράσταν με μοντέλα προβλημάτων που αφορούν το 0: «Πάρτε τριάντα πούλια. Πόσα σύνολα από 0 μπορούμε να φτιάξουμε;» ή «Βάλτε δώδεκα κυβάρια σε μηδέν ίσες ομάδες. Πόσα έχει κάθε ομάδα;».



Η διάταξη Fizz & Martina (Tom Snyder Productions, 1998) αναφέρθηκε νωρίτερα ως μέσο για την τοποθέτηση προβλημάτων σε πραγματικά συγκείμενα. Όσον αφορά τις μεγαλύτερες τάξεις, τα



ΣΧΗΜΑ 10.11. Μοντέλα για την επιμεριστική ιδιότητα.

προβλήματα είναι ενός και δύο βημάτων, επιμερίζοντας μια μεγαλύτερη ποικιλία μαθηματικών εννοιών από αυτές που συζητήθηκαν νωρίτερα. Πολλοί εκπαιδευτικοί ελκίζονται από τη μορφή βίντεο που έχει, επειδή είναι εύκολο να χρησιμοποιηθεί.

Το *Figure This!* είναι μία υπέροχη συλλογή διευρύνσεων που διατίθεται δωρεάν στην ιστοσελίδα του NCTM (www.nctm.org). Οι 80 προκλήσεις είναι σχεδιασμένες για παιδιά των μεσαίων τάξεων. Αν και δεν είναι απλά προβλήματα με αφήγηση, πολλά από αυτά καταγίνονται με την κατανόηση των πράξεων. Το κάθε πρόβλημα ακολουθείται από ενδιαφέρουσες ερωτήσεις και όλα έχουν σχεδιαστεί για να κάνουν τα παιδιά να ασχοληθούν με εφαρμογές των μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο. Υπάρχει επίσης διαθέσιμη και μία έκδοση με CD. ■

Στρατηγικές για την Επίλυση Προβλημάτων Συγκείμενου

Μέχρι τώρα επικεντρωθήκαμε σε προβλήματα πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού. Στοιχεύαμε να βοηθήσουμε τα παιδιά να μάθουν για αυτές τις πράξεις και συγχρόνως να αρχίσουν να αναπτύσσουν κάποιες υπολογιστικές στρατηγικές.

Στις μεγαλύτερες τάξεις, παρόλο που δεν συμβαίνει πάντα αυτό, τα παιδιά βλέπουν τα προβλήματα με αφήγηση ως χάσιμο χρόνου. Εδώ θα βρείτε κάποιες τεχνικές για να τους βοηθήσετε.

Ανάλυση των προβλημάτων συγκείμενου

Μελετήστε το ακόλουθο πρόβλημα:

Στην κατασκευή του βοηθητικού δρόμου της εθνικής, γέμισαν ένα χαμηλό τμήμα του εδάφους με χώμα που μεταφέρ-

θηκε με φορτηγά. Για να γεμίσει ολόκληρο χρειάζονται 638 φορτία χώμα. Ένα κανονικό φορτηγό κουβαλάει 6 1/4 κυβικές γάρδες χώματος, οι οποίες ζυγίζουν 17,3 τόνους. Πόσοι τόνοι χώματος χρησιμοποιήθηκαν για το γέμισμα;

Τυπικά, σε ένα βιβλίο από την έκτη ως την όγδοη τάξη, συναντάμε προβλήματα αυτού του τύπου ως μέρος μιας σειράς προβλημάτων που περιστρέφονται γύρω από ένα μεμονωμένο συγκεκριμένο ή θέμα. Τα δεδομένα μπορεί να βρίσκονται σε ένα γραφήμα, μια γραφική παράσταση ή σε ένα σύντομο απόσπασμα από ειδήσεις ή μια ιστορία. Κατά πάσα πιθανότητα, τα προβλήματα περιλαμβάνουν και τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις. Τα παιδιά δυσκολεύονται να καταλήξουν στη σωστή αριθμητική πράξη ή ακόμα και να βρουν τα κατάλληλα δεδομένα για το πρόβλημα. Πολλά παιδιά θα βρουν δύο αριθμούς στο πρόβλημα και κυριολεκτικά θα μαντέψουν ποια είναι η σωστή αριθμητική πράξη. Τα παιδιά αυτά απλά δεν διαθέτουν κανένα εργαλείο για την ανάλυση των προβλημάτων. Μπορείτε να τους δώσετε δύο τουλάχιστον στρατηγικές που θα τα βοηθήσουν πολύ: σκεφτείτε την απάντηση πριν λύσετε το πρόβλημα ή λύστε ένα πιο απλό πρόβλημα που να είναι ακριβώς σαν αυτό εδώ.

Σκεφτείτε την Απάντηση Πριν Λύσετε το Πρόβλημα

Οι αδύναμοι λύτες προβλημάτων δεν κατορθώνουν να αφιερώσουν αρκετό χρόνο για να σκεφτούν το πρόβλημα και το νόημά του. Σπειύδουν να αρχίσουν τους υπολογισμούς, πιστεύοντας ότι οι υπολογισμοί λύνουν τα προβλήματα. Δεν συμβαίνει όμως αυτό. Αντίθετα, τα παιδιά θα έπρεπε να αφιερώνουν κάποιον χρόνο σε συζήτηση (και αργότερα σε σκέψη) σχετικά με την πιθανή μορφή της απάντησης. Για το πρόβλημα του παραδείγματός μας, θα μπορούσε να γίνει ως εξής:

Τι γίνεται σε αυτό το πρόβλημα; Μερικά φορτηγά έφεραν χώμα για να γεμίσουν μια τρύπα.

Τι θα μας πει η απάντηση; Πόσοι τόνοι χώματος χρειάζονταν για το γέμισμα.

Θα είναι μεγάλος αριθμός τόνων ή μικρός; Λοιπόν, υπήρχαν 17,3 τόνοι σε ένα φορτηγό, αλλά υπήρχαν πολλά φορτηγά και όχι μόνο ένα. Θα είναι μάλλον πάρα πολλοί τόνοι.

Πόσοι νομίζετε ότι θα είναι; Θα είναι πάρα πολύ μεγάλος αριθμός. Αν υπήρχαν ακριβώς 100 φορτηγά, θα ήταν 1.730 τόνοι. Μπορεί να πλησιάζει τους 10.000 τόνους. Πάρα πολλοί τόνοι!

Σε μια τέτοια κουβέντα συμβαίνουν δύο πράγματα. Πρώτον, τα παιδιά καλούνται να επικεντρωθούν στο πρόβλημα και το νόημα της απάντησης αντί για τους αριθμούς. Οι αριθμοί δεν έχουν σημασία όταν σκεφτόμαστε τη δομή του προβλή-

ματος. Δεύτερον, εστιάζοντας στη δομή του προβλήματος, τα παιδιά μπορούν να αναγνωρίσουν τους αριθμούς που είναι σημαντικοί ή τα δεδομένα που πρέπει να ψάξουν στον πένακι ή το γραφήμα καθώς και τους αριθμούς που δεν είναι σημαντικοί για το πρόβλημα. Τρίτον, η σκέψη οδηγεί σε μια πρόχειρη εκτίμηση της απάντησης. Μερικές φορές, όσον αφορά τα καθημερινά πράγματα, αυτή μπορεί να βασίζεται απλά στην κοινή λογική. Το να σκεφτούμε πάντως τι μας λέει η απάντηση και πόσο μεγάλη θα μπορούσε να είναι, αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο βήμα προς την επίλυση του προβλήματος.

Λύστε ένα Πιο Απλό Πρόβλημα

Ο λόγος για τον οποίο τα μοντέλα χρησιμοποιούνται σπάνια με προβλήματα όπως αυτό με το χώμα είναι ότι είναι αδύνατον να αναπαράσταθούν οι αριθμοί με ευκολία. Τα δολάρια και τα σεντς, οι αποστάσεις χιλιάδων μιλίων και ο χρόνος σε λεπτά και δευτερόλεπτα είναι παραδείγματα δεδομένων που πιθανότατα θα συναντήσουμε στις μεγαλύτερες τάξεις και είναι όλα δύσκολο να παρασταθούν με μοντέλα. Η γενική στρατηγική επίλυσης προβλήματος, «δοκίμασε ένα πιο απλό πρόβλημα», μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις προβλημάτων με δύσκολους αριθμούς.

Μια απλή στρατηγική περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

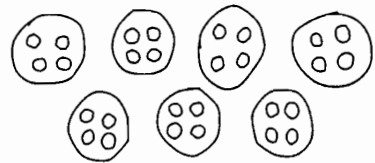
1. Αντικαταστήστε με μικρούς ακέραιους όλους τους αριθμούς του προβλήματος.
2. Παραστήστε με μοντέλο το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τους νέους αριθμούς (πούλια, σχέδιο, ευθεία των αριθμών, παρατάξη).
3. Γράψτε μια εξίσωση που να λύνει την εκδοχή του προβλήματος με τους μικρούς αριθμούς.
4. Γράψτε την αντιστοίχια εξίσωση με τους αρχικούς αριθμούς, τοποθετώντας τους στη θέση των μικρών αριθμών που τους αντικαθιστούν.
5. Χρησιμοποιήστε αριθμομηχανή για να κάνετε τους υπολογισμούς.
6. Γράψτε την απάντηση σε μια ολοκληρωμένη πρόταση και αποφασίστε αν βγάζει νόημα.

Το Σχήμα 10.12 δείχνει τι μπορεί να γίνει για το πρόβλημα με το χώμα. Δείχνει επίσης μια εναλλακτική στρατηγική στην οποία μόνο ο ένας από τους αριθμούς γίνεται μικρότερος, ενώ ο άλλος απεικονίζεται συμβολικά. Και οι δύο μέθοδοι είναι αποτελεσματικές.

Το σκεπτικό είναι να εφοδιάσουμε τα παιδιά με ένα εργαλείο που να μπορούν να χρησιμοποιούν για να αναλύουν τη δομή ενός προβλήματος και όχι απλά να μαντεύουν τι υπολογισμούς θα κάνουν. Είναι πολύ πιο χρήσιμο να βάλετε τα παιδιά να κάνουν μερικά προβλήματα όπου πρέπει να χρησιμοποιήσουν ως μοντέλο ένα σχέδιο για να δικαιολογήσουν τη λύση τους, από το να τους δώσετε απλά πολλά προβλήματα ό-

Αλλάξτε όλους τους αριθμούς:

7
636 φορτηγό με κύμα
6 $\frac{1}{4}$ γιάρδες κύματος σε ένα φορτηγό
ζυγίζει 11,037 τόνους
11,037 τόνος κύματος χρησιμοποιήθηκε



$$7 \times 4 = 28$$

$$636 \times 17.3 = 11,037$$

Αφήστε μόνο έναν αριθμό:

17.3 τόνος 17.3 τόνος 17.3 τόνος 17.3 τόνος

$$4 \times 17.3$$

$$636 \times 17.3 = 11,037$$

ΣΧΗΜΑ 10.12 Επεξεργασία ενός απλούστερου προβλήματος: δύο πιθανότητες.

που μπορούν να μαντέψουν τη λύση αλλά δεν ξέρουν αν αυτό που μαντεύουν είναι σωστό.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αποφύγετε Τη Στρατηγική της Λέξης-Κλειδί!

Συχνά προτείνεται ότι τα παιδιά πρέπει να μάθουν να βρίσκουν λέξεις-κλειδιά στα προβλήματα με αφήγηση. Μερικοί εκπαιδευτικοί κολλούν στην τάξη κάρτες με τις λέξεις-κλειδιά της εκάστοτε έννοιας. Για παράδειγμα: «όλα μαζί» και «σε όλα» σημαίνει ότι μπορείτε να προσθέσετε και το «έμειναν» και «λιγότερα» δηλώνει αφαίρεση. Η λέξη «καθένα» δηλώνει πολλαπλασιασμό. Κατ' επέκταση, οι εκπαιδευτικοί παρασύρονται από τα απλά και φορμαρισμένα προβλήματα-ιστορίες που υπάρχουν στα εγχειρίδια. Όταν τα προβλήματα γράφονται με τέτοιο τρόπο, ίσως να είναι αποτελεσματική η μέθοδος της λέξης-κλειδί.

Σε αντίθεση με αυτό, οι ερευνητές και οι μαθηματικοί είναι προσεχτικοί σε σχέση με αυτή τη στρατηγική (π.χ. Burns, 2000, Carpenter, 1985, Goldin, 1985, Kliman & Russell, 1998). Εδώ βλέπεται τα επιχειρήματα ενάντια στην προσέγγιση της λέξης-κλειδί.

1. Οι λέξεις-κλειδιά είναι παραπλανητικές. Συχνά μια λέξη-κλειδί ή φράση σε ένα πρόβλημα προτείνει μια πράξη που δεν είναι σωστή. Για παράδειγμα:

Η Μάξιν έδωσε τα 28 αυτοκόλλητα που δεν ήθελε στη Ζάιντρα. Τώρα της έμειναν 73. Πόσα είχε αρχικά η Μάξιν;

Αν δείτε και άλλα προβλήματα του Κεφαλαίου θα βρείτε και άλλες παραπλανητικές λέξεις-κλειδιά.

2. Πολλά προβλήματα δεν έχουν λέξεις-κλειδιά. Ειδικά όταν ξεφύγετε από τα απλά προβλήματα στα βιβλία των μικρών τάξεων, θα δείτε ότι η πλειοψηφία των προβλημάτων δεν έχουν λέξεις-κλειδιά. Ένα παιδί που έχει μάθει να σιρρίζεται στις λέξεις-κλειδιά δεν έχει στρατηγική. Τόσο στα προβλήματα πρόσθεσης όσο και στα προβλήματα πολλαπλασιασμού αυτού του κεφαλαίου, θα βρείτε πολλά παραδείγματα χωρίς λέξεις-κλειδιά. Προέρχονται από μια συλλογή απλών προβλημάτων που είναι σχεδιασμένα για να σας βοηθήσουν με τη δομή.
3. Η στρατηγική με λέξεις-κλειδιά στέλνει ένα απαράδεκτο μήνυμα για τα μαθηματικά. Το πιο σημαντικό στη λύση ενός προβλήματος είναι η ανάλυση της δομής-το νόημα της. Η στρατηγική με λέξεις-κλειδιά κάνει τα παιδιά να αγνοούν το νόημα και τη δομή ενός προβλήματος και να βρουν την εύκολη διόδο. Τα μαθηματικά είναι θέμα της λογικής και του νοήματος που έχουν οι καταστάσεις. Μια στρατηγική που έχει νόημα λύνει πάντα το πρόβλημα.

Προβλήματα με Δύο Βήματα

Τα παιδιά συχνά δυσκολεύονται με τα προβλήματα πολλαπλών βημάτων. Αν τα παιδιά σας θα δουλέψουν με προβλήματα πολλαπλών βημάτων βεβαιωθείτε ότι αυτά μπορούν να αναλυθούν σε προβλήματα με ένα βήμα όπως ήδη έχουμε αναφέρει. Οι ιδέες που ακολουθούν, πάρθηκαν από προτάσεις της Huinker (1994) και είναι σχεδιασμένες να βοηθήσουν τα παιδιά να δουν πώς μπορούν να συνδυαστούν δύο διαφορετικά προβλήματα.

1. Δώστε στα παιδιά ένα πρόβλημα ενός βήματος και ζητήστε τους να το λύσουν. Ωστόσο, πριν να συζητήσετε την απάντηση, βάλτε κάθε παιδί ή κάθε ομάδα να επανηρώσει ένα δεύτερο πρόβλημα που να χρησιμοποιεί την απάντηση του πρώτου προβλήματος. Τότε μπορείτε να ζητήσετε από την υ-

πόλοιτη τάξη να χρησιμοποιήσει την απάντηση στο πρώτο πρόβλημα για να λύσει το δεύτερο πρόβλημα. Ορίστε ένα παράδειγμα:

Πρώτο πρόβλημα: Πήρε 3 $\frac{1}{3}$ ώρες στους Τζόουνς να οδηγήσουν 195 μίλια μέχρι την Ουάσινγκτον. Ποιος ήταν ο μέσος όρος ταχύτητάς τους;

Δεύτερο πρόβλημα: Τα παιδιά των Τζόουνς θυμούνται ότι διέσχισαν τον ποταμό περίπου στις 10:30 ή 2 ώρες από τότε που έφυγαν απ' το σπίτι. Πόσο μακριά από το σπίτι είναι ο ποταμός;

2. Επινόηστε μια «κρυμμένη ερώτηση». Επαναλάβετε την πρώτη άσκηση ξεκινώντας με ένα πρόβλημα ενός βήματος. Θα μπορούσατε να δώσετε διαφορετικά προβλήματα σε διαφορετικές ομάδες. Αυτή τη φορά, βάλτε τα παιδιά να γράψουν και τα δύο προβλήματα όπως και πριν. Έπειτα γράψτε ένα μόνο πρόβλημα που να παραλείπει την ερώτηση του πρώτου προβλήματος. Αυτή η ερώτηση από το πρώτο πρόβλημα είναι η «κρυμμένη ερώτηση». Ορίστε ένα απλό παράδειγμα:

Πρώτο πρόβλημα: Ο Τόνυ αγόρασε τρεις ντουζίνες αυγά προς 89 σεντς την ντουζίνα. Πόσα πλήρωσε;

Δεύτερο πρόβλημα: Τι ρέστα πήρε ο Τζόνι από 5 δολάρια;

Πρόβλημα με κρυμμένη ερώτηση: Ο Τόνυ αγόρασε τρεις ντουζίνες αυγά προς 89 σεντς την ντουζίνα. Τι ρέστα πήρε ο Τζόνι από 5 δολάρια;

Βάλτε τα άλλα παιδιά να εντοπίσουν την κρυμμένη ερώτηση. Αφού όλα τα παιδιά εργάζονται σε παρόμοια δραστηριότητα αλλά με διαφορετικά προβλήματα (βεβαιωθείτε ότι έχετε ανακατέψει τις αριθμητικές πράξεις), αυξάνεται η πιθανότητα να κατανοήσουν τι σημαίνει κρυμμένη ερώτηση.

3. Δώστε τυπικά προβλήματα δύο βημάτων και ζητήστε από τα παιδιά να εντοπίσουν και να απαντήσουν στην κρυμμένη ερώτηση. Δείτε το παρακάτω πρόβλημα:

Η εταιρεία Γουίλαρντ Σέιλς αποφασίζει να προσθέσει και εργαλεία στα εμπορεύματα που πουλά. Αρχικά η Γουίλαρντ αγόρασε σε χονδρική τιμή 275 εργαλεία προς 3,69 δολάρια το καθένα. Τον πρώτο μήνα η εταιρεία πούλησε 205 εργαλεία προς 4,99 δολάρια το κομμάτι. Πόσα έβγαλε ή πόσα έχασε η Γουίλαρντ από τα εργαλεία; Νομίζετε ότι η Γουίλαρντ Σέιλς θα πρέπει να συνεχίσει να πουλά εργαλεία;

Αρχίστε μελετώντας τα ερωτήματα που τέθηκαν πιο πάνω: «Τι συμβαίνει σε αυτό το πρόβλημα;» (κάτι αγοράζεται και πωλείται σε δύο διαφορετικές τιμές), «τι θα μας πει η απάντηση;»

(πόσο ήταν το κέρδος ή η ζημία). Αυτά τα ερωτήματά σας είναι πάντα χρήσιμα για το ξεκίνημα. Αν τα παιδιά κολλήσουν, μπορείτε να ρωτήσετε: «Υπάρχει κάποια κρυμμένη ερώτηση σε αυτό το πρόβλημα;».

NCTM **Στόντορ** Η αξία της συζήτησης μεταξύ των παιδιών για να βοηθηθούν να βγάλουν νόημα και να κατανοήσουν τις πράξεις είναι προφανής στα σκάντα. Σε επίπεδο νηπιαγωγείου-δευτέρας τάξης: «Όταν τα παιδιά καλούνται να πουν ξεκάθαρα τις ιδέες τους, αναπτύσσουν μια καλύτερη κατανόηση της σκέψης τους» (σελ. 129). Σε επίπεδο τρίτης-πέμπτης τάξης: «Η χρήση μοντέλων και εικόνων παρέχει μια καλή ευκαιρία για κατανόηση και συζήτηση. Έχοντας μια συγκεκριμένη αναφορά τα παιδιά υποβοηθούνται να αναπτύξουν την κατανόησή τους που θα είναι πιο ξεκάθαρη και θα μπορεί εύκολα να τη μοιραστεί με τους άλλους» (σελ. 197).

Δύο Επιπρόσθετες Έννοιες του Πολλαπλασιασμού

Πέρα από τις ίσες ομάδες και τις πολλαπλασιαστικές συγκρίσεις που έχουμε αναλύσει σε αυτό το κεφάλαιο, υπάρχουν δύο ακόμη σημαντικοί τύποι πολλαπλασιαστικών ιδεών: οι *συνδυασμοί* ή *καρτεσιανά γινόμενα* και τα προβλήματα με *γινόμενο μετρήσεων* (π.χ. μήκος επί πλάτος ίσον εμβαδόν). Στα περισσότερα προγράμματα οι ιδέες αυτές αναφέρονται σπασμένα στο σκελος του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

Προβλήματα Συνδυασμού

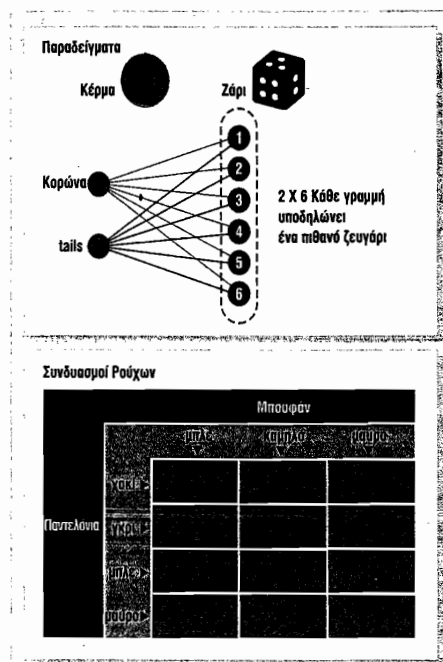
Τα προβλήματα συνδυασμών περιλαμβάνουν απαρίθμηση του αριθμού των πιθανών αντιστοιχίσεων που μπορούν να γίνουν ανάμεσα σε δύο σύνολα. Το γινόμενο αποτελείται από ζεύγη πραγμάτων, με το ένα στοιχείο του κάθε ζεύγους να προέρχεται από τα δύο δοσμένα σύνολα.

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ: ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΑΓΝΩΣΤΩ

Ο Σαμ αγόρασε 4 παντελόνια και 3 μπουφάν που μπορούν να φορεθούν όλα μαζί. Πόσους συνδυασμούς ρούχων που να αποτελούνται από ένα παντελόνι και ένα μπουφάν μπορεί να κάνει ο Σαμ;

Ένα πείραμα περιλαμβάνει ρίξιμο ενός νομίσματος (κορόνα - γράμματα) και στη συνέχεια ενός ζαριού. Πόσα διαφορετικά πιθανά αποτελέσματα μπορεί να έχει αυτό το πείραμα;

Σε αυτά τα δύο παραδείγματα το γινόμενο είναι άγνωστο και το μέγεθος των δύο συνόλων δίνεται. Είναι πιθανό να έχουμε σχετικά προβλήματα διαίρεσης για την έννοια του συν-



ΣΧΗΜΑ 10.13 Μοντέλα για προβλήματα συνδυασμών.

δυναμικού. Ωστόσο, σπάνια συναντάμε τέτοιου είδους προβλήματα.

Το Σχήμα 10.13 δείχνει δύο συνηθισμένες μεθόδους δημιουργίας μοντέλων προβλημάτων συνδυασμού: μία παράδειγμα και ένα δένδροδιάγραμμα. Η απαρίθμηση του πόσοι συνδυασμοί είναι πιθανοί από δύο πράγματα ή γεγονότα είναι σημαντική για τον καθορισμό των πιθανοτήτων. Για παράδειγμα, για να καθορίσουμε την πιθανότητα της κορώνας στο κέρμα ή για το 1 ή 6 στο ψάρι, κάποιος πρέπει να ξέρει ότι υπάρχουν δώδεκα πιθανά αποτελέσματα για αυτό το πείραμα. Η έννοια των συνδυασμών βρίσκεται πιο συχνά στο πλαίσιο των πιθανοτήτων.

Προβλήματα με Γινόμενο Μετρήσεων

Αυτό που διαφοροποιεί τα προβλήματα με γινόμενο μετρήσεων από τα υπόλοιπα είναι ότι το γινόμενο είναι στην κυριολεξία κάτι τελείως διαφορετικό σε σχέση με τους άλλους δύο παράγοντες. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το γινόμενο των δύο μεγεθών (μήκος x πλάτος) είναι το εμβαδόν, συνήθως τετραγωνικές μονάδες. Το Σχήμα 10.14 αναπαριστά τις διαφορετικές τετραγωνικές μονάδες σε σχέση με καθέναν α-

πό τους δύο παράγοντες του μεγέθους. Τέσσερα πόδια επί 7 πόδια δεν μας κάνει 28 πόδια αλλά 28 τετραγωνικά πόδια. Οι παράγοντες είναι και οι δύο μονοδιάστατες οντότητες, αλλά το γινόμενο συνίσταται από δυοδιάστατα πράγματα.

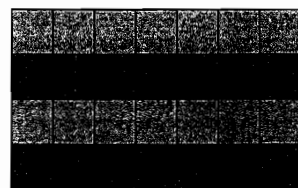
Δύο άλλα σχετικά συνηθισμένα παραδείγματα σε αυτή την κατηγορία είναι: αριθμός εργατών X ώρες που εργάστηκαν = εργάτες X ώρες και κιλοβάτ X ώρες = κιλοβατώρες.

Σύνδεση με τη Λογοτεχνία

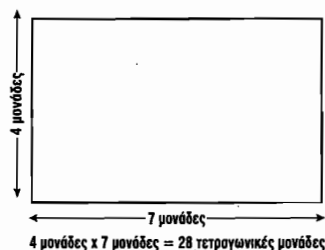
Είναι εξαιρετικά εύκολο να βρείτε ένα συναρπαστικό και διασκεδαστικό τρόπο να χρησιμοποιήσετε τη λογοτεχνία για να καλλιεργήσετε ή να διευρύνετε την κατανόηση των αριθμητικών πράξεων. Υπάρχουν πολλά βιβλία με ιστορίες ή εικόνες που αφορούν σύνολα πραγμάτων, αγορά αντικειμένων, μετρήσεις και άλλα παρόμοια, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να θέσετε κάποια προβλήματα ή, καλύτερα, να δώσετε στα παιδιά το ερέθισμα να επινσήσουν τα δικά τους προβλήματα. Ίσως το ευρύτερα μνημονεύόμενο έργο σε αυτό το πλαίσιο να είναι το *The Doorbell Rang* της Pat Hutchins (1986). Αυτό μπορείτε να το δείτε και μόνοι σας. Εδώ σας προτείνω τρία επιπλέον βιβλία:

How Many Snails? (Giganti, 1988)

Κατάλληλο για το νηπιαγωγείο ως τη δευτέρα τάξη, το βιβλίο αυτό περιλαμβάνει μια ποικιλία από εικόνες όπου τα αντικείμενα που ανήκουν σε μία συλλογή έχουν διάφορες υπο-συλ-



Υπάρχουν 4 σειρές από 7 τετράγωνα



ΣΧΗΜΑ 10.14 Μήκος επί μήκος ισούται με εμβαδόν.

λογές (μέρη και σύνολα). Για παράδειγμα, ένας ουρανός γεμάτος σύννεφα έχει σύννεφα διαφόρων τύπων. Το κείμενο ρωτά: «Πόσα σύννεφα υπάρχουν; Πόσα σύννεφα είναι μεγάλα και φουσκωτά; Πόσα σύννεφα είναι μεγάλα, φουσκωτά και γκριζα;» Αυτές οι σελίδες οδηγούν κατευθείαν σε περιπτώσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης αντίστοιχες των εννοιών του τύπου μέρος – μέρος – όλο. Αξιοσημείωτη είναι η ευκαιρία που δίνεται στα παιδιά να σκεφτούν την αφαίρεση από τη σκοπιά του μέρους που λείπει. Τα παιδιά μπορούν να σκεφτούν συλλογές που θα τους άρεσε να ζωγραφίσουν, έτσι ώστε στις υπο-συλλογές να υπάρχει ποικιλία γνωρισμάτων. Έπειτα μπορούν να θέσουν τα δικά τους ερωτήματα σχετικά με τη ζωγραφιά και να προσθέσουν τις κατάλληλες αριθμητικές προτάσεις. Στη συζήτηση, τα παιδιά θα μπορούσαν να εξηγήσουν γιατί επέλεξαν τη συγκεκριμένη εξίσωση και πώς αυτή συνδέεται με την ει-κόνα.

More Than One (Hoban, 1981)

Οι θαυμάσιες ασπρόμαυρες φωτογραφίες της Tana Hoban είναι στημένες έτσι να εισάγουν λέξεις που δηλώνουν ομάδα, όπως το πλήθος ανθρώπων, το κοπάδι ελεφάντες ή το δεμάτι ξύλα. Μια συζήτηση γύρω από αυτές τις λέξεις (οι ομάδες ζώων συνταιριάζονται αμυντικά με την επιστημονική ατμόσφαιρα –αγέλη, κοπάδι, λονταριών, μικρό σμήνος από χήνες κ.λπ.) πέρα από αυτές που υπάρχουν στο βιβλίο μπορεί να είναι από μόνη της ενδιαφέρουσα. Διαφορετικές ομάδες συνήθως περιέχουν διαφορετικούς αριθμούς πραγμάτων; Είναι πιθανόν να υπάρχουν δύο ελεφάντες σε ένα κοπάδι; Θα μπορούσαν να υπάρχουν 50; Ποιο είναι το πιο συνηθισμένο; Αυτές οι συλλογικές λέξεις δίνουν πραγματικά την ευκαιρία στα παιδιά να αναπτύξουν την έννοια της ομάδας ως μία οντότητα που όμως περιέχει αυτόνομα πράγματα. Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρ-

χουν πολλές ομάδες (κοπάδια, αγέλες, πλήθη). Αν γνωρίζουμε το μέγεθος του ενός και ξέρουμε επίσης πόσα κοπάδια υπάρχουν, ξέρουμε πόσοι είναι συνολικά οι ελεφάντες; Φανταστείτε μια περίπτωση όπου να ίσχυε πάντα αυτό: όλες οι ομάδες με συλλογικά ονόματα να είχαν τον ίδιο αριθμό πραγμάτων. Αν υπήρχαν 87 κομμάτια ξύλο σε 3 δεμάτια, πόσα θα υπήρχαν στο ένα δεμάτι; Μπορείτε να δημιουργήσετε εξυπνες ιστορίες με πολλαπλασιασμό και διαίρεση ενός και δύο βημάτων.

Each Orange Had 8 Slices (Giganti, 1992)

Κάθε ζευγάρι σελίδων δείχνει αντικείμενα ομαδοποιημένα με τρεις τρόπους. Για παράδειγμα, οι δύο σελίδες περιέχουν τέσσερα δέντρα, τρεις φωλιές πουλιών σε κάθε δέντρο και δύο αβγά σε κάθε φωλιά. Ο συγγραφέας κάνει τρεις ερωτήσεις: «Πόσα δέντρα; Πόσες φωλιές; Πόσα αβγά;». Οι τρεις αυτές ερωτήσεις μαζί με κάθε εικόνα επεκτείνουν τον πολλαπλασιασμό σε ένα γινόμενο τριών παραγόντων. Στην περίπτωση των δέντρων, των φωλιών και των αβγών, το γινόμενο είναι $4 \times 3 \times 2$. Αφού τα παιδιά θα έχουν εξοικειωθεί με την προβλέψιμη διάταξη των εικόνων του βιβλίου, θα μπορούν όχι μόνο να γράφουν ιστορίες πολλαπλασιασμού που να συνοδεύουν τις εικόνες, αλλά και να επινοούν δικές τους περιπτώσεις. Ποιες παρόμοιες περιπτώσεις μπορούν να βρεθούν μέσα στην τάξη; Ίσως θρανία, βιβλία και σελίδες ή βιβλιοθήκες, ράφια και βιβλία. Και δεν υπάρχει λόγος να περιορίσετε τη συζήτηση σε τρεις ομαδοποιήσεις αντικειμένων. Η ίδια ιδέα είναι παρούσα στις μετρήσεις: γιάρδες, πόδια, ίντσες ή γαλόνια, τέταρτα, πέντες, φλιτζάνια, ουγκιές. Μπορείτε να δώσετε νέα προβλήματα τα οποία απαιτούν διαίρεση. Κι αν είχαμε εδώ μερικές κούτες με 6 χαρτόκουτα στην καθεμία; Κάθε χαρτόκουτο έχει 4 εξαρτήματα. Αν υπάρχουν 72 εξαρτήματα, πόσες κούτες έχουμε; ■

Σκέψεις πάνω στο Κεφάλαιο 10

Μαθαίνουμε Γράφοντας

1. Βρείτε ένα συγκεκριμένο για μερικά προβλήματα με αφήγηση και έξι διαφορετικά προβλήματα σύζευξης και διαχωρισμού: σύζευξης και τρία διαχωρισμού. Και για τα έξι προβλήματα χρησιμοποιήστε την ίδια οικογένεια αριθμών: 9, 4, 13.
2. Σκεφτείτε ένα λεκτικό πρόβλημα σύγκρισης. Στη συνέχεια, αλλάξτε το πρόβλημα για να γίνει παράδειγμα για έξι διαφορετικές πιθανότητες προβλημάτων σύγκρισης.
3. Γιατί ένα πρόβλημα συγκεκριμένου μπορεί να είναι πιο αποτελεσματικό από ένα απλό πρόβλημα με αφήγηση;

4. Τι θα λαμβάνατε υπόψη σας στην επιλογή αριθμών για προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης; Το επίπεδο της τάξης θα διαφοροποιήσει τα πράγματα.
5. Πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μοντέλα, με τρόπο που να βασίζεται στην επάλυση προβλημάτων, για την πρόσθεση και την αφαίρεση;
6. Εξηγήστε πώς οι δραστηριότητες με μέρη που λείπουν προετοιμάζουν τα παιδιά να κατακτήσουν τα δεδομένα της αφαίρεσης.
7. Βρείτε λεκτικά προβλήματα με πολλαπλασιασμό για να παρουσιάσετε τη διαφορά μεταξύ ίσων ομάδων και πολλαπλασιαστικής σύγκρισης. Μπορείτε να δημιουργήσετε προβλήματα με ρυθμούς ή συνεχείς ποσότητες;

- Βρείτε δύο διαφορετικά προβλήματα για το 36:9. Για το πρώτο, το μοντέλο θα πρέπει να καταλήγει σε τέσσερα σύνολα των εννιά και για το δεύτερο, το μοντέλο θα πρέπει να καταλήγει σε εννιά σύνολα των τεσσάρων. Ποιο είναι ποιο; Ποιο από τα προβλήματα σας είναι πρόβλημα μέτρησης και ποιο μερισμού;
- Εξηγήστε το νόημα του πρώτου και δεύτερου παράγοντα του $3 \times 8 = 24$. Πώς λέγεται το 24 σε αυτή την εξίσωση;
- Περιγράψτε δραστηριότητες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης που ξεκινούν με μοντέλα και όχι με λεκτικά προβλήματα.
- Πώς θα βοηθούσατε τα παιδιά σας να μάθουν τις παρακάτω ιδιότητες του πολλαπλασιασμού: σειρά ιδιότητας ή μεταθετική, επιμεριστική ιδιότητα και ιδιότητα του μηδέν; Πώς θα βοηθούσατε τα παιδιά σας να ανακαλύψουν ότι η διαίρεση με το μηδέν δεν προσδιορίζεται και δεν είναι δυνατή;
- Βρείτε ρεαλιστικά προβλήματα διαίρεσης, μέτρησης και μερισμού που το υπόλοιπο συναντάται με τις ακόλουθες μορφές: α) έχει μείνει έξω (αλλά δεν περιόσισε), β) έγινε κλάσμα, γ) τείνει προς τον επόμενο φυσικό αριθμό.
- Εξηγήστε πώς θα βοηθούσατε τα παιδιά σας να αναλύσουν προβλήματα όταν οι αριθμοί δεν είναι μικροί ανέκδοτοι, αλλά μεγάλοι ή είναι κλάσματα ή δεκαδικοί και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν πούλια.
- Γιατί η χρήση λέξεων-κλειδιά δεν αποτελεί καλή στρατηγική διδασκαλίας;
- Εξηγήστε την ακολουθία βημάτων που προτείνονται για να βοηθηθούν τα παιδιά στην κατανόηση των προβλημάτων με δύο βήματα.

Για Διάλογο και Διερεύνηση

- Το πρόγραμμα *Cognitively Guided Instruction* δεν είναι αναλυτικό πρόγραμμα, αλλά είναι ένα ακαδημαϊκό πρόγραμμα ανάπτυξης όπου οι εκπαιδευτικοί μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τη σκέψη των παιδιών για να καθοδηγούν τη διδασκαλία. Κυρίαρχο συστατικό του CGI είναι η χρήση προβλημάτων με αφήγηση, όχι μόνο για την εκμάθηση των πράξεων αλλά και για την ανάπτυξη των αριθμών και των δεδομένων όπως και για την ανάπτυξη των υπολογισμών με μεγαλύτερους αριθμούς. Επιλέξτε την εκμάθηση των βασικών γεγονότων ή την καλλιέργεια των υπολογισμών και περιγράψτε πώς κατά τη γνώμη σας θα μπορούσαν να επιτευχθούν αυτοί οι στόχοι κυρίως μέσω των προβλημάτων. Αν είναι δυνατόν, κοιτάξτε κάποια από τα ανάλογα βίντεο και το συνοδευτικό CD στο *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction* (Carpenter και συνεργάτες, 1999), για να συγκρίνετε τις σκέψεις σας με τις δικές τους.
- Εξετάστε ένα βασικό σχολικό εγχειρίδιο μιας ή περισσότερων τάξεων. Εντοπίστε με ποιους τρόπους και σε ποια κεφάλαια αναπτύσσεται το νόημα των πράξεων. Σχολιάστε ανά περίπτωση τη σημασία των αριθμητικών πράξεων με προβλήματα με αφήγηση ενός βήματος, τη χρήση μοντέλων, την επάρκεια γνώσης των βασικών γεγονότων και που απαιτούνται υπολογισμοί.

- Παρατηρήστε πόσους διαφορετικούς τύπους προβλημάτων ιστοριών που μπορείτε να βρείτε σε ένα σχολικό βιβλίο. Στις πρώτες τάξεις αναζητήστε προβλήματα σύζευξης, απαιολής, μέρους – μέρους – όλου και σύγκρισης. Για τις τάξεις από την τετάρτη και πάνω αναζητήστε τους τέσσερις τύπους πολλαπλασιασμού (δείτε τα κεφάλαια για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση και τα ειδικά μαθήματα επίλυσης προβλημάτων). Αντιπροσωπεύονται όλοι οι τύποι προβλημάτων;

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία Συστάσεις για Περαιτέρω Διάβασμα

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M., L., Levi, I., & Empson, S. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann (Εκδόθηκε επίσης από το NTCM).

Για τους εκπαιδευτικούς, αυτό είναι το καλύτερο βιβλίο για την κατανόηση της προσέγγισης του CGI για τις πράξεις και για τη χρήση των προβλημάτων με αφήγηση για την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού, τα βασικά γεγονότα και τις διαδικασίες υπολογισμού. Τα προβλήματα με αφήγηση για όλες τις πράξεις, όπως αναλύθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, εξηγούνται λεπτομερώς μαζί με τις μεθόδους χρήσης αυτών των προβλημάτων με παιδιά. Το βιβλίο συνοδεύουν δύο CD, ένα με στιγμιότυπα από όλες τις τάξεις του CGI και ένα ακόμη που δείχνει τη χρήση από τα παιδιά των διαφορετικών στρατηγικών που περιγράφονται στο βιβλίο.

Fosnot, C., T. & Dolk, M. (2001) *Young Mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth, NH, Heinemann

FOSNOT, C. T., & DOLK M. (2001) *Young Mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth, NH, Heinemann

Κάθε ένα από αυτά τα δύο μικρά βιβλία θα σας δώσει εξαιρετικές ιδέες και λύσεις για το πώς να βοηθήσετε τα παιδιά να δομήσουν το νόημα του αριθμού και των πράξεων. Η Catherine Fosnot, σημαντική προσωπικότητα στη μαθηματική εκπαίδευση στις Ηνωμένες Πολιτείες συνεργάζεται με τη Maarten Dolk από την Ολλανδία όπου οι μαθητρονεντρικές μέθοδοι εφαρμόζονται εδώ και πολλά χρόνια. Μοιράζονται τις ιδέες τους που προέκυψαν από τις έρευνες τους αντίστοιχα. Αυτά τα βιβλία έχουν γραφεί για εκπαιδευτικούς ως πρακτικοί οδηγοί από δύο κορυφαίες προσωπικότητες στο χώρο. Κάθε ένα είναι γεμάτο με λεπτομερή παραδείγματα της δουλειάς των παιδιών.

Kouba, V. L. & Franklin, K. (1993). *Multiplication and division: Sense making and meaning*. Στο R. J. JENSEN (Ed.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (σελ. 103-126). Old Tappan, NJ: Macmillan.

Το συγκεκριμένο κεφάλαιο, το οποίο στοχεύει να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν την πολυπλοκότητα των πολλαπλασιαστικών εννοιών, είναι ολοκληρωμένο και ευανάγνωστο, καθώς παρέχει για το επίπεδο της τρίτης και της τετάρτης τάξης μια καλή θεωρητική προσέγγιση, χωρίς να έχει ιδιαίτερα τεχνικό χαρακτήρα.

Schifter, D., Bastable, V., & Russell, S. J. (1999b). *Developing mathematical ideas: Numbers and operations, Part 2: Making meaning for operations*. White Plains, NY: Cuisenaire - Dale Seymour Publications.

Σε αυτό το βιβλίο περιπτώσεων, διδάσκοντες από το νηπιαγωγείο μέχρι και την έβδομη τάξη μοιράζονται ο ένας με τον άλλο τις ιστορίες τους σχετικά με την εργασία τους με τα παιδιά καθώς αναπτύσσουν τις έννοιες για τις τέσσερις πράξεις. Οι εκπαιδευτικοί συζητούν τα είδη των ενεργειών και των καταστάσεων που χρησιμοποιούν τα παιδιά καθώς κατανοούν σταδιακά τις πράξεις. Πρόκειται για ένα βοήθημα σε έναν εκτεταμένο οδηγό διδασκαλίας. Διατίθεται επίσης και βίντεο για την ενίσχυση της σειράς. Ωστόσο και από μόνο του αυτό το βιβλίο είναι αξιόλογο.

Διαδίκτυακές Πηγές

Προτεινόμενα Βοηθητικά Προγράμματα και Δικτυακοί Σύνδεσμοι

The Factor Game

http://illuminations.nctm.org/tools/tool_detail.aspx?id=12

Ένα παιχνίδι πρόκληση στο οποίο οι παίκτες χρειάζεται να

σκεφτούν όλους τους παράγοντες των επιλεγμένων αριθμών.

Factorize

http://illuminations.nctm.org/tools/tool_detail.aspx?id=64

Με αυτό το βοηθητικό πρόγραμμα, γίνεται η σύνδεση ανάμεσα στους παράγοντες και τις διαστάσεις ενός παραλληλόγραμμου καθώς τα παιδιά δημιουργούν παραλληλόγραμμα που να ταιριάζουν στην παραγοντοποίηση ενός αριθμού.

Rectangle Division

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_193_g_1_t_1.html

Η πρόκληση έχει να κάνει με τη δημιουργία ενός παραλληλόγραμμου σε ένα χαρτί με τετραγωνάκια για να ταιριάζει με μία εξίσωση της μορφής: $43 = 9 \times _ + _$.



Επιπλέον κατάλογος βιβλίων και άρθρων που σχετίζονται με τις ιδέες που αναφέρονται σε αυτό το κεφάλαιο μπορείτε να βρείτε στο www.ablongman.com/vandewalle6e

όρους της ακολουθίας Fibonacci και δείχνει τόσο σε κλασματική όσο και δεκαδική μορφή την αναλογία των διαδοχικών όρων της ακολουθίας. Αυτός ο λόγος συγκλίνει με το χρυσό λόγο. Για πιο ολοκληρωμένες πληροφορίες για την ακολουθία Fibonacci επισκεφθείτε το www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci.

Fish Simulation Applet I

<http://mathforum.org/escotpow/puzzles/fish/applet.html>

Μία συλλογή δέχρων ψαριών πρέπει να τοποθετηθεί σε τρεις λιμνούλες για να δημιουργηθούν συγκεκριμένες αναλογίες στην κάθε λιμνούλα. Τα παιδιά πρέπει να ανακαλύψουν αν υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις και μετά να κάνουν παρόμοια προβλήματα για τα υπόλοιπα παιδιά στην τάξη.

Learning about Length, Area, Volume, Surface Area of Similar Objects

<http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap6/6.3/part2.htm>

Μια διμερής διερεύνηση που ολοκληρώνεται με τις σημειώσεις του εκπαιδευτικού. Τα βοηθητικά προγράμματα συγκρίνουν δύο ορθογώνια ή δύο πρίσματα δείχνοντας τους λόγους των μετρήσεων τόσο σε αριθμητική όσο και γραφική μορφή.

Understanding Ratios of Inscribed Figures

<http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap7/7.3/index.htm>

7.3/Index.htm

Μία καλή σύνδεση της γεωμετρίας/μέτρησης στο λόγο. Ο χρήστης διερευνά το λόγο των αριθμών εμφανίζονται πάνω στα πολύγωνα που έχουν σχηματιστεί από την ένωση των πλευρών. Αυτά τα σημεία μπορούν επίσης να προσομοιωθούν. Είναι πολύ καλά και το συνοδευτικό μάθημα καθώς και οι προτάσεις.



Επιπλέον κατάλογο βιβλίων και άρθρων που σχετίζονται με τις ιδέες που αναφέρονται σε αυτό το κεφάλαιο μπορείτε να βρείτε στο www.ablongman.com/vandewalle6e

Κεφάλαιο 20



Ανάπτυξη της Μέτρησης

Το γεγονός ότι η μέτρηση αποτελεί ένα από τα σπάνια περιεχόμενα στο *Αρχές και Στάνταρ* αποδεικνύει όχι μόνο ότι πρόκειται για ένα θέμα που συναντάμε σε όλες τις τάξεις αλλά επίσης και ένα πολύπλοκο μάθημα. Η μέτρηση δεν είναι ένα εύκολο θέμα να καταλάβουν τα παιδιά. Τα δεδομένα από τις δύο διεθνείς μελέτες (TIMSS) και από τη NAEP συνέχισαν να δείχνουν ότι τα παιδιά είναι πιο αδύνατα στον τομέα της μέτρησης από ότι σε οποιοδήποτε άλλο θέμα του αναλυτικού προγράμματος (Thompson & Preston, 2004). Υπάρχουν διάφορες υποθέσεις για αυτή την χαμηλή επίδοση. Αν και η μάθηση τόσο των καθιερωμένων όσο και των τυπικών συστημάτων μέτρησης μπορεί να είναι ένας παράγοντας που συνεπιδράει σε αυτό το γεγονός, η χαμηλή επίδοση είναι κατά πάσα πιθανότητα συνάρτηση του πώς διδάσκεται το μάθημα –υπερβολική στήριξη σε εικόνες και φύλλα εργασίας αντί για άμεσες εμπειρίες και εστίαση στις δεξιότητες με προσοχή στις έννοιες της μέτρησης.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μάθετε πώς να βοηθήσετε τα παιδιά να αναπτύξουν εννοιολογική κατανόηση της διαδικασίας μέτρησης καθώς και τα απαραίτητα εργαλεία μέτρησης. Θα μάθετε επίσης για τις άτυπες και τις καθιερωμένες μονάδες μέτρησης, για την εκτίμηση της μέτρησης συμπεριλαμβανομένων και των σημείων αναφοράς, και για την ανάπτυξη των μοντέλων μέτρησης για το εμβαδόν και τον όγκο.

Η μέτρηση, είναι απαραίτητο να έχουμε κατανόηση το χαρακτηριστικό που μετράται.

- Η εγκυρότητα της μέτρησης και του κατά προσέγγιση υπολογισμού των μετρήσεων εξαρτάται από την εξοικείωση με τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται.
- Η εκτίμηση των μέτρων και η ανάπτυξη των προσωπικών μέτρων σύγκρισης, όσον αφορά τις μονάδες μέτρησης που χρησιμοποιούνται συχνά, βοηθούν τα παιδιά να εξοικειωθούν με τις μονάδες μέτρησης, να αποφύγουν τα λάθη στις μετρήσεις, και συνεπιδράουν στην ουσιαστική χρήση της μέτρησης.
- Τα όργανα μέτρησης είναι εργαλεία που ανακαθιστούν την ανάγκη για πραγματικές μονάδες μέτρησης. Είναι σημαντικό να καταλαβαίνει κανείς πώς λειτουργούν τα όργανα αυτά ώστε να χρησιμοποιούνται σωστά και αποτελεσματικά.
- Οι μαθηματικοί τύποι για τον υπολογισμό του εμβαδού και του όγκου παρέχουν μια μέθοδο για τη μέτρηση αυτών των χαρακτηριστικών ενός αντικειμένου μόνο μέσω της χρήσης μονάδων μήκους.
- Το εμβαδόν, η περίμετρος και ο όγκος σχετίζονται μεταξύ τους, αν και όχι με ακρίβεια ή με μαθηματικούς τύπους. Για παράδειγμα, όταν τα σχήματα μας περιοχίς ή τριωδιάστατων αντικειμένων αλλάζουν αλλά διατηρούν το ίδιο εμβαδόν ή τον ίδιο όγκο, η επίδραση στην περίμετρο και στο εμβαδόν της επιφάνειας είναι προβλέψιμη.



Μαθηματικά

Συνδέσεις με το Περιεχόμενο

Η μέτρηση συνδέεται παραδοσιακά στη διδακτέα ύλη με τη γεωμετρία. Ωστόσο, η μέτρηση είναι στην πραγματικότητα πιο στενά συνδεδεμένη με άλλα μαθηματικά ζητήματα. Για να δοθεί περισσότερος χρόνος στα παιδιά να ασχοληθούν με δραστηριότητες μέτρησης με κατανοητό τρόπο, η μέτρηση θα έπρεπε να ενταχθεί τόσο στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών όσο και στο αναλυτικό πρόγραμμα των επιστημών.



Κεντρικές Ιδέες

- Η μέτρηση αφορά τη σύγκριση ενός χαρακτηριστικού ενός αντικειμένου ή μιας κατάστασης με μια μονάδα που έχει το ίδιο χαρακτηριστικό. Τα μήκη συγκρίνονται με μονάδες μήκους, οι επιφάνειες με μονάδες επιφάνειας, ο χρόνος με μονάδες χρόνου κ.τ.λ. Πριν προχωρήσουμε σε οποιαδήποτε

■ **Αριθμοί (Κεφάλαιο 9):** Οι πρώτες απόπειρες μέτρησης αποτελούν κατανοητά συγκείμενα για την έννοια της αρίθμησης. Η μέτρηση σημαντικών αντικειμένων στο οικογενειακό περιβάλλον συνδέει την ιδέα των αριθμών με τον πραγματικό κόσμο, ενισχύοντας το νόημα των αριθμών.

■ **Θεωσιακή Αξία (Κεφάλαιο 10):** Τα παιδιά χρησιμοποιούν ωφέλιμα τα πολλαπλάσια του δέκα στην πραγματοποίηση απλών μετρήσεων, όπως στη μέτρηση του ύψους της πόρτας με το σκεπτικό της σύνδεσης κύβων. Το μετρικό σύστημα της μέτρησης βασίζεται στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Η κατανόηση κάθε θέματος ενισχύει τη χρήση και την κατανόηση του άλλου.

■ **Άλγεβρα (Κεφάλαιο 15):** Οι συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για τη μελέτη και την περιγραφή των σχέσεων ανάμεσα σε διάφορα φαινόμενα, κυρίως ανάμεσα σε πράγματα που είναι μετρήσιμα. Οι μαθηματικοί τύποι που σχετίζονται με τις μετρήσεις είναι από μόνοι τους συναρτήσεις. Οι μετρήσεις παρέχουν τα δεδομένα από τα οποία μπορούν να προκύψουν οι γενικεύσεις και οι συναρτησιακές σχέσεις.

■ **Αναλογική Συλλογιστική Σκέψη (Κεφάλαιο 19):** Η χρησιμοποίηση των μέτρων σύγκρισης στον κατά προσέγγιση υπολογισμό μεγεθών (π.χ., μια πόρτα είναι περίπου 3 πόδια πλατιά άρα το δωμάτιο είναι περίπου επτά «πόρτες» ή αλλιώς 21 πόδια) προωθεί την πολλαπλασιαστική ικανότητα, μια σημαντική πλευρά της αναλογικής σκέψης. Τα μέτρα χρησιμοποιούνται στην σχεδίαση με κλίμακα. Οι αναλογίες χρησιμοποιούνται για να υπολογιστούν άγνωστα μεγέθη όμοιων σχημάτων.

■ **Κλάσματα (Κεφάλαιο 16):** Η ανάγκη για μεγάλη ακρίβεια οδηγεί σε κλασματικά μέρη των μονάδων.

■ **Γεωμετρία (Κεφάλαιο 21):** Η ανάπτυξη και η κατανόηση των μαθηματικών τύπων για τον υπολογισμό της περιμέτρου, του εμβαδού, και του όγκου απαιτούν την κατανόηση των σχετικών σχημάτων και των αντίστοιχων σχέσεων. Τα μεγέθη βοηθούν στην περιγραφή των σχημάτων, και τα γωνιακά μεγέθη παίζουν καθοριστικό ρόλο στις ιδιότητες των σχημάτων.

■ **Δεδομένα (Κεφάλαιο 22):** Η στατιστική και τα γραφήματα χρησιμοποιούνται για την περιγραφή του κόσμου μας και μας βοηθούν να απαντήσουμε σε ερωτήματα σχετικά μ' αυτόν. Συχνά αυτή η περιγραφή στηρίζεται στη χρήση μετρητικών μεγεθών. Ο σχεδιασμός γραφήματος και η μέτρηση συχνά χρησιμοποιούν τα ίδια μεγέθη αλλά και χρησιμοποιούνται στις ίδιες δραστηριότητες.

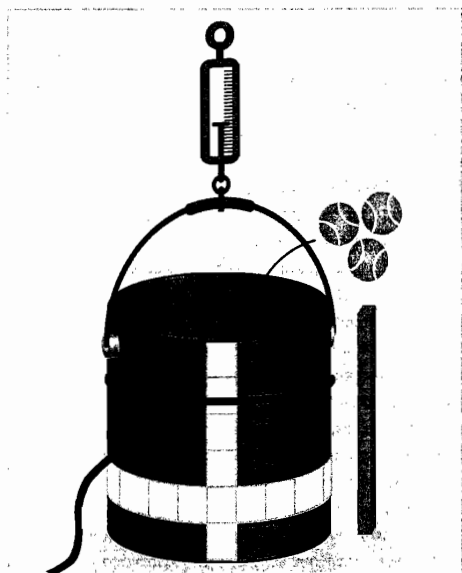
Η Σημασία και η Διαδικασία της Μέτρησης

Ας υποθέσουμε ότι ζητήσατε από τα παιδιά σας να μετρήσουν έναν άδειο κουβά. Το πρώτο πράγμα που πρέπει να ξέρουν είναι τι πρέπει να μετρήσουν στον κουβά. Θα μπορούσαν να μετρήσουν το ύψος ή το βάθος, τη διάμετρο ή την περιφέρεια-

α. Όλα αυτά είναι μεγέθη μήκους. Μπορεί να οριστεί και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας. Ο κουβάς έχει ακόμη όγκο και βάρος. Καθεμία από αυτές τις μετρήσιμες πτυχές αποτελεί ένα **χαρακτηριστικό του κουβά**.

Μόλις καθορίσουν το προς μέτρηση χαρακτηριστικό, μπορούν να επιλέξουν μια μονάδα μέτρησης. Η μονάδα αυτή πρέπει να έχει το χαρακτηριστικό το οποίο μετρούν. Το μήκος μετράται με μονάδες που διαθέτουν μήκος, ο όγκος με μονάδες που διαθέτουν όγκο και ούτω καθεξής.

Από τεχνικής άποψης, **η μέτρηση είναι ένας αριθμός που δηλώνει μια σύγκριση ανάμεσα στο χαρακτηριστικό ενός αντικειμένου (ή μιας κατάστασης ή ενός γεγονότος) που μετράται και του ίδιου χαρακτηριστικού μιας δομημένης μονάδας**



Χαρακτηριστικό: Βάρος
Μονάδες: αντικείμενα που τεντώνουν το ελατήριο της ζυγαριάς
Πόσες μονάδες θα τεντώσουν το ελατήριο τόσο όσο θα το τεντώσει ο κουβάς;

Χαρακτηριστικό: Όγκος/Χωρητικότητα
Μονάδες: κύβοι, μπαλάνια, κουπες με νερό
Πόσες μονάδες θα γεμίσουν τον κουβά;

Χαρακτηριστικό: Μήκος
Μονάδες: ράβδοι, οδοντογλυφίδες, καλαμάκια, σπάγκος
Πόσες μονάδες είναι τόσο ψηλές όσο ο κουβάς;
Πόσος σπάγκος χρειάζεται για να τυλίξουμε την περιφέρεια του κουβά;

Χαρακτηριστικό: Εμβαδόν
Μονάδες: καρτέλες αργείου, τετράγωνα χαρτί, πλακάκια
Πόσες καρτέλες θα καλύψουν την επιφάνεια του κουβά;

ΣΧΗΜΑ 20.1 Μέτρηση διαφόρων χαρακτηριστικών ενός κουβά

μέτρησης. Συνήθως χρησιμοποιούμε μικρές μονάδες μέτρησης για να καθορίσουμε κατά κάποιο τρόπο την αριθμητική σχέση (τη μέτρηση) ανάμεσα σε αυτό που μετράται και στη μονάδα. Για παράδειγμα, για να μετρήσετε ένα μήκος, μπορείτε να κάνετε τη σύγκριση τοποθετώντας στη σειρά αντίγραφα της μονάδας παράλληλα στο μήκος που μετράτε. Για να μετρήσετε το βάρος, το οποίο είναι μια βαρυτική έλξη ή μια δύναμη, το βάρος του αντικειμένου εφαρμόζεται πρώτα σε ένα ελατήριο. Στη συνέχεια, η σύγκριση γίνεται βρίσκοντας πόσες μονάδες βάρους προκαλούν την ίδια παραμόρφωση στο ελατήριο. Και στις δύο περιπτώσεις, ο αριθμός των μονάδων αποτελεί τη μέτρηση του αντικειμένου.

Για τα περισσότερα χαρακτηριστικά που μετρούνται στα σχολεία, μπορεί κανείς να πει ότι το να μετράς σημαίνει να «γεμίζεις» ή να «καλύπτεις» ή να «αντιστοιχίζεις» το χαρακτηριστικό που μετράς με μια μονάδα μέτρησης που διαθέτει το ίδιο χαρακτηριστικό (όπως φαίνεται στο σχήμα 20.1). Αυτή η αντίληψη της μέτρησης εξυπηρετεί επαρκώς τους σκοπούς αυτού του κεφαλαίου και αποτελεί έναν καλό τρόπο να συζητήσουμε με τα παιδιά για το τι είναι η μέτρηση. Με βάση αυτήν την αντίληψη, ταιριάζει να αναφέρουμε ότι η μέτρηση ενός χαρακτηριστικού είναι η απαρίθμηση των μονάδων που απαιτούνται για να γεμίσουμε, να καλύψουμε ή να αντιστοιχίσουμε το χαρακτηριστικό του αντικειμένου που μετράμε.

Συνοψίζοντας, για να μετρήσουμε κάτι πρέπει να εκτελέσουμε τα εξής τρία βήματα:

1. Αποφασίζουμε ποιο χαρακτηριστικό μετράμε.
2. Επιλέγουμε μια μονάδα που να διαθέτει το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό.
3. Συγκρίνουμε τις μονάδες γεμίζοντας, καλύπτοντας, αντιστοιχίζοντας, ή χρησιμοποιώντας κάποια άλλη μέθοδο, με το χαρακτηριστικό του αντικειμένου που μετράμε.

Τα όργανα μέτρησης όπως είναι οι χάρακες, οι ζυγαριές, τα μοιρογνωμόνια και τα ρολόγια είναι εργαλεία που κάνουν τη διαδικασία του γεμίσματος, της κάλυψης ή της αντιστοίχισης πιο εύκολη. Ο χάρακας παραθέτει τις μονάδες μήκους και τις αριθμεί. Το μοιρογνωμόνιο παραθέτει τις μοίρες και τις αριθμεί. Το ρολόι παραθέτει τις χρονικές μονάδες και τις «διαγράφει».

Ανάπτυξη των Εννοιών και των Δεξιοτήτων της Μέτρησης

Μια τυπική ομάδα παιδιών της πρώτης τάξης μετράει το μήκος της τάξης τους αλώνοντας λωρίδες του ενός μέτρου από τη μια άκρη της αίθουσας ως την άλλη. Αλλά οι λωρίδες ορισμένες φορές επακαλύπτονται, και η γραμμή θυμίζει περισσότερο φίδι που περνάει γύρω από τα θρανία. Αντιλαμβάνονται άραγε την έννοια του μήκους ως χαρακτηριστικό της τάξης;

Αντιλαμβάνονται ότι κάθε λωρίδα του ενός μέτρου έχει αυτό το χαρακτηριστικό του μήκους; Καταλαβαίνουν ότι δικό τους καθήκον είναι να γεμίσουν με μικρότερες μονάδες μήκους μία μεγαλύτερη; Το πιθανότερο είναι να καταλαβαίνουν ότι πρέπει να φτιάξουν μια γραμμή από λωρίδες η οποία να εκτείνεται από τον έναν τοίχο ως τον άλλο (κάτι στο οποίο, από τη δική τους οπτική, τα καταφέρνουν αρκετά καλά). Εκτελούν μια διαδικασία μηχανικά, χωρίς να αντιλαμβάνονται το νόημά της.

Σκεφθείτε για μια στιγμή τη δική σας κατανόηση για τη μέτρηση γωνιών με ένα μοιρογνωμόνιο. Καταλαβαίνετε τι είναι οι μονάδες και πώς μας βοηθά το μοιρογνωμόνιο να τις μετρήσουμε; Μπορείτε να σκεφθείτε έναν τρόπο που μπορείτε να τις μετρήσετε χωρίς να χρησιμοποιήσετε μοιρογνωμόνιο; Πώς είναι οι δεξιότητές σας στον υπολογισμό των γωνιών; Αν και η μέτρηση των γωνιών διδάσκεται συνήθως στις μεσαίες τάξεις (και διδάσκεται και ξανά διδάσκεται μέχρι και το γυμνάσιο), η πλειονότητα των παιδιών στη δεύτερα γυμνασίου στις Η.Π.Α. έχουν στη διάθεσή τους περιορισμένες έννοιες για τη μέτρηση των γωνιών (Strutchens, Martin, & Kenney, 2003). Αν δεν μάθατε αυτές τις έννοιες στο σχολείο είναι μάλλον απίθανο να τις αναπτύξετε από εκεί και μετά.

Ένα γενικό πλάνο Διδασκαλίας

Η θεμελιώδης κατανόηση της μέτρησης εισάγει μεθόδους για να βοηθήσουμε τα παιδιά να αναπτύξουν μια εννοιολογική γνώση της. Αυτές συνοψίζονται στον πίνακα 20.1.

Ας αναλύσουμε σύντομα καθεμία από τις τρεις διδακτικές μεθόδους που περιγράφονται σε αυτόν τον πίνακα.

Συγκρίσεις

Ο πρώτος και πιο σημαντικός στόχος είναι τα παιδιά να κατανοήσουν το χαρακτηριστικό που καλούνται να μετρήσουν. Όταν τα παιδιά συγκρίνουν αντικείμενα με βάση κάποιο μετρήσιμο χαρακτηριστικό, αυτό το χαρακτηριστικό γίνεται το επίκεντρο της δραστηριότητας. Για παράδειγμα, είναι η χωρητικότητα ενός κουτιού μικρότερη, μεγαλύτερη, ή περίπου η ίδια με εκείνη ενός άλλου; Εδώ δεν απαιτείται καμία μέτρηση, αλλά πρέπει μόνο να επινοηθεί κάποιος τρόπος σύγκρισης του ενός όγκου με τον άλλο. Το χαρακτηριστικό της «χωρητικότητας» (πόσο μπορεί να χωρέσει ένα δοχείο) είναι αναπόφευκτο.

Πολλά χαρακτηριστικά μπορούν να συγκριθούν άμεσα, όπως με την τοποθέτηση ενός μήκους ακριβώς σε ευθεία με ένα άλλο. Στην περίπτωση του όγκου ή της χωρητικότητας, πιθανόν να απαιτείται κάποια έμμεση μέθοδος, όπως να γεμίσουμε ένα κουτί με φασόλια και μετά να τα αδειάσουμε στο άλλο κουτί. Ένα άλλο παράδειγμα έμμεσης σύγκρισης είναι η χρήση ενός σπάγκου για να συγκρίνουμε το ύψος ενός καλαθιού αχρήστων με την περιμέτρου του. Ο σπάγκος είναι ένα μέσο. Είναι αδύνατον να συγκρίνεις τα δύο αυτά μήκη άμεσα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 20.1

Πλάνο για διδασκαλία της μέτρησης

Βήμα Ένα

Στόχος: Τα παιδιά να καταλάβουν ποια χαρακτηριστικά πρέπει να μετρούν.

Τύπος δραστηριότητας: Κάνετε συγκρίσεις ανάλογα με το χαρακτηριστικό. Για παράδειγμα, μικρότερο / μεγαλύτερο, βαρύτερο / ελαφρύτερο. Χρησιμοποιείτε απλές συγκρίσεις όπως είναι δυνατόν.

Σημειώσεις: Όταν είναι ξεκάθαρο ποιο αντικείμενο είναι προς μέτρηση, δε χρειάζεται περαιτέρω δραστηριότητες συγκρίσης.

Βήμα Δύο

Στόχος: Τα παιδιά να καταλάβουν πως τα αντικείμενα ή επικάλυψη ή αντίστοιχη ή κάποια άλλη σύγκριση στο χαρακτηριστικό με μονάδες μέτρησης οδηγεί σε έναν αριθμό που ονομάζεται μέτρο.

Τύπος δραστηριότητας: Χρησιμοποιείτε φυσικά μοντέλα μονάδων μέτρησης για να γεμίσετε, να καλύψετε, να αντιστοιχίσετε, ή να κάνετε την επιθυμητή σύγκριση του χαρακτηριστικού με τη μονάδα.

Σημειώσεις: Στις περισσότερες περιπτώσεις είναι καλύτερο να ξεκινήσετε με άτυπες μονάδες.

Προχωρήστε στην άμεση χρήση των τυπικών μονάδων όταν αρχίσει και σιγά-σιγά πριν χρησιμοποιήσετε μετρησιακές τύπους ή όργανα μέτρησης.

Βήμα Τρία

Στόχος: Τα παιδιά να χρησιμοποιούν τα σωστά όργανα μέτρησης με «ευελεία» και να έχουν καταλάβει τον τρόπο λειτουργίας τους.

Τύπος δραστηριότητας: Κατασκευάστε όργανα μέτρησης και χρησιμοποιήστε τα σε συγκρίσεις με τα απλά μοντέλα μονάδων για να δείξετε πως τα όργανα μέτρησης εκτελούν την ίδια λειτουργία με τις μεμονωμένες μονάδες. Βεβαιωθείτε ότι κάνετε άμεσες συγκρίσεις ανάμεσα στη αυτοσχέδια και στα καθιερωμένα όργανα μέτρησης.

Σημειώσεις: Τα αυτοσχέδια όργανα είναι συνήθως πιο καλοστημένα με άτυπες μονάδες. Αν δεν γίνει ποσοδικά η σύγκριση με τα καθιερωμένα όργανα υπάρχει κίνδυνος να χάσει τη σημασία ή η κατασκευή αυτοσχέδιων εργαλείων.

Η κατασκευή ή η δημιουργία ενός αντικειμένου, που να είναι ίδιο ως προς ένα μετρήσιμο χαρακτηριστικό με το αντικείμενο που μετράμε, είναι ένας άλλος τύπος δραστηριότητας σύγκρισης—για παράδειγμα, «κόψτε το καλαμάκι ώστε να είναι τόσο μακριά όσο αυτή η χιμωλία» ή «σχεδιάστε ένα ορθογώνιο που να έχει περίπου το ίδιο μέγεθος (το ίδιο εμβαδόν) με αυτό το τρίγωνο.»

Χρήση Μοντέλων Μονάδων

Ο δεύτερος στόχος είναι να κατανοήσουν τα παιδιά ποιες είναι η υπό σύζηση μονάδες μέτρησης για αυτό το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό και πώς αυτές χρησιμοποιούνται για να παράγουν μία μέτρηση. Άλλα από το επίπεδο της τάξης δεν θα πρέπει να υποθέτετε ότι τα παιδιά κατανοούν τις μονάδες μέτρησης για τα περισσότερα χαρακτηριστικά που α-

ναλύνουμε. Όσον αφορά τα περισσότερα χαρακτηριστικά που μετρώνται στα δημοτικά σχολεία, είναι δυνατό να υπάρχουν διαθέσιμα φυσικά μοντέλα των μονάδων μέτρησης. Ο χρόνος και η θερμοκρασία αποτελούν εξαιρέσεις. (Πολλά άλλα χαρακτηριστικά που δε μετρώνται συνήθως στα σχολεία στερούνται επίσης απλών μονάδων μέτρησης. Μερικά παραδείγματα είναι η ένταση του φωτός, η ταχύτητα, η ένταση του ήχου, το ιξώδες και η ραδιενέργεια.) Υπάρχουν μοντέλα μονάδων τόσο για τις άτυπες όσο και για τις καθιερωμένες μονάδες. Για το μήκος, για παράδειγμα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μονάδες τόσο καλαμάκια (άτυπο μοντέλο) όσο και χάρακες λωρίδες μήκους ενός ποδιού (καθιερωμένο μοντέλο).

Η πιο εύληπτη χρήση των μοντέλων μονάδων είναι, στην πραγματικότητα, να χρησιμοποιείτε όσα αντίγραφα της μονάδας απαιτούνται για να γεμίσετε ή να αντιστοιχίσετε το χαρακτηριστικό που μετράτε. Για να μετρήσετε το εμβαδόν της επιφάνειας του θρανίου με μονάδα μέτρησης την καρτέλα αρχείου, μπορείτε κυριολεκτικά να καλύψετε ολόκληρη την επιφάνεια του θρανίου με καρτέλες αρχείου. Κάτω πιο δύσκολο, ειδικά για τα μικρότερα παιδιά, είναι να χρησιμοποιείται μόνο ένα αντίγραφο της μονάδας εφαρμόζοντας τη διαδικασία της επανάληψης. Η ίδια επιφάνεια του θρανίου μπορεί να μετρηθεί με μία μόνο καρτέλα μετακινώντας την από θέση σε θέση και σημειώνοντας ποια εμβαδά έχει ήδη καλύψει αν και αυτή η διαδικασία δεν είναι αρκετή για να απεικονίσει την έννοια της μέτρησης.

Είναι χρήσιμο να μετράτε το ίδιο αντικείμενο με διαφορετικές μονάδες. Είναι καλό να προβλεφθούν τα αποτελέσματα εκ των προτέρων και να συζητηθούν στη συνέχεια. Αυτό θα βοηθήσει τα παιδιά να καταλάβουν ότι η μονάδα που χρησιμοποιείται είναι εξίσου σημαντική με το χαρακτηριστικό που μετράτε. Το γεγονός ότι οι μικρότερες μονάδες οδηγούν σε μεγαλύτερες αριθμητικά μετρήσεις, και το αντίστροφο, είναι δύσκολο για τα μικρότερα παιδιά να το κατανοήσουν. Αυτή η αντίστροφη σχέση μπορεί να γίνει αντιληπτή μόνο πραγματοποιώντας μετρήσεις με μονάδες διαφόρων μεγεθών. Οι προβλέψεις και οι σχολιασμοί των αποτελεσμάτων συνεισφέρουν στην στοχαστική φύση των δραστηριοτήτων.

Κατασκευή και Χρήση Οργάνων Μέτρησης

Η κατανόηση των οργάνων που χρησιμοποιούνται για την μέτρηση είναι ο τρίτος στόχος. Στην έκτη Εθνική Αξιολόγηση της Εκπαιδευτικής Προόδου (National Assessment of Educational Progress-Kenney & Kouba, 1997) μόνο το 24% των παιδιών της τετάρτης τάξης και το 62% των παιδιών της δεύτερης γυμνασίου μπορούσε να μετρήσει σωστά ένα αντικείμενο, το οποίο δεν ευθυγραμμίζονταν με την άκρη ενός χάρακα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 20.2. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν τη διαφορά ανάμεσα στη χρήση ενός οργάνου μέτρησης και στην κατανόηση του τρόπου λειτουργίας του. Τα παιδιά

επίσης συνάντησαν δυσκολίες όταν οι υποδιαίρεσεις ενός οργάνου μέτρησης ήταν διαφορετικές από τη μία μονάδα.

Αν τα παιδιά κατασκευάσουν απλά όργανα μέτρησης χρησιμοποιώντας μοντέλα μονάδων με τα οποία είναι εξοικειωμένα, είναι πολύ πιο πιθανό να κατανοήσουν πώς λειτουργεί ένα όργανο μέτρησης. Ο χάρακας είναι ένα καλό παράδειγμα. Αν τα παιδιά παραθέσουν απτές μονάδες κατά μήκος μιας χάραξης λωρίδας και τις χαράξουν πάνω σε διαχωριστικές γραμμές, θα διαπιστώσουν ότι αυτό που έχει σημασία σε ένα χάρακα είναι τα διαστήματα και όχι τα σημάδια ή οι αριθμοί. Είναι απαραίτητο να γίνει η σύγκριση ανάμεσα στη μέτρηση με απτά μοντέλα μονάδων και στη μέτρηση με ένα όργανο. Χωρίς αυτή τη σύγκριση, τα παιδιά πιθανόν να μην καταλάβουν ότι αυτές οι δύο μέθοδοι είναι στην ουσία δύο τρόποι επίτευξης του ίδιου σκοπού. Ζητάτε πάντα από τα παιδιά να σας εξηγούν πώς ο χάρακας, η ζυγαριά ή κάποιο άλλο όργανο συγκρίνεται με τη χρήση πραγματικών μονάδων.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στα όργανα μέτρησης που κατασκευάζονται από παιδιά για κάθε χαρακτηριστικό. Βέβαια, τα παιδιά πρέπει επίσης να χρησιμοποιούν καθιερωμένα, έτοιμα όργανα μέτρησης, όπως είναι οι χάρακες και οι ζυγαριές, και να συγκρίνουν τη χρήση τους με εκείνη των αντίστοιχων μοντέλων μονάδων.

Άτυπες Μονάδες και Καθιερωμένες Μονάδες: Λόγοι για τη Χρήση τους

Στις πρώτες τάξεις συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται μη καθιερωμένες ή άτυπες μονάδες για τη μέτρηση του μήκους και μερικές φορές του εμβαδού. Δυστυχώς, οι δραστηριότητες μέτρησης στις μεγαλύτερες τάξεις, όπου μετρώνται άλλα χαρακτηριστικά, συνήθως δεν ξεκινούν με άτυπες μονάδες. Η χρήση άτυπων μονάδων για τις πρώτες δραστηριότητες μέτρησης είναι ωφέλιμη σε όλες τις τάξεις.

- Οι άτυπες μονάδες διευκολύνουν την άμεση εστίαση στο χαρακτηριστικό που μετράται. Για παράδειγμα, σε μια συζήτηση για τη μέτρηση του εμβαδού μιας ακανόνιστης επιφάνειας μπορούν να προταθούν εναλλακτικές μονάδες, όπως φασόλια, τετράγωνα πλακάκια, κυκλικοί μετρητές κ.ά. Κάθε μονάδα καλύπτει μια διαφορετική επιφάνεια και συνεπώς θα δώσει ένα διαφορετικό αποτέλεσμα. Η ανάλυση εστιάζει στο τι σημαίνει να μετράς ένα εμβαδόν.
- Με τη χρήση άτυπων μονάδων μπορείτε να αποφύγετε τη

σύγκριση στόχων στο ίδιο εισαγωγικό μάθημα. Σκοπός του μαθήματός σας είναι να κατανοήσουν τα παιδιά τι σημαίνει να μετράς ένα εμβαδόν ή τι είναι τα τετραγωνικά εκατοστά;

- Οι άτυπες μονάδες παρέχουν μια καλή λογική εξήγηση για να προχωρήσετε στις καθιερωμένες μονάδες. Αφού οι ομάδες στην τάξη σας έχουν μετρήσει τα ίδια αντικείμενα με διαφορετικές μονάδες και συνεπώς έχουν καταλήξει σε διαφορετικά αποτελέσματα, μια συζήτηση για την ανάγκη μιας καθιερωμένης μονάδας μπορεί να έχει περισσότερο νόημα.
- Η χρήση των άτυπων μονάδων μπορεί να είναι διασκεδαστική.

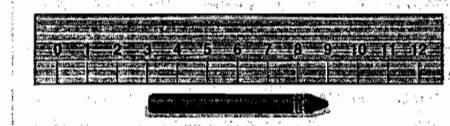
Η χρήση των καθιερωμένων μονάδων έχει επίσης σημαντική θέση στο πρόγραμμά σας για τη διδασκαλία της μέτρησης σε όλες τις τάξεις.

- Η γνώση των καθιερωμένων μονάδων αποτελεί ένα βασικό στόχο στο πρόγραμμα διδασκαλίας της μέτρησης και πρέπει να δρομολογηθεί. Τα παιδιά δεν πρέπει μόνο να εξοικειωθούν με τις καθιερωμένες μονάδες αλλά και να μάθουν τις σωστές μεταξύ τους σχέσεις.
- Μόλις μια έννοια της μέτρησης έχει αναπτυχθεί ικανοποιητικά, συχνά είναι εξίσου εύκολο να χρησιμοποιηθούν και καθιερωμένες μονάδες. Αν δεν υφίσταται κάποιος καλός διδακτικός λόγος για τη χρήση άτυπων μονάδων, γιατί να μη χρησιμοποιήσετε καθιερωμένες μονάδες εκθέτοντάς τις στα παιδιά;

Δεν υπάρχει κάποιος απλός κανόνας που να ορίζει πότε να χρησιμοποιούνται καθιερωμένες και πότε άτυπες μονάδες. Τα παιδιά θα πρέπει πιθανόν στην αρχή να μετρούν κάθε χαρακτηριστικό με άτυπες μονάδες και με τον καιρό να προοδεύουν στη χρήση καθιερωμένων μονάδων και οργάνων μέτρησης. Το χρονικό διάστημα που θα διαρκέσει η χρήση μοντέλων άτυπων μονάδων διαφέρει ανάλογα με την ηλικία των παιδιών και τα χαρακτηριστικά που μετρούνται. Τα παιδιά της πρώτης τάξης χρειάζονται περισσότερη εξάσκηση με μια ποικιλία από άτυπες μονάδες μήκους, βάρους, και χωρητικότητας. Σε αυτό το επίπεδο οι άτυπες μονάδες πιθανόν να χρησιμοποιούνται όλον το χρόνο. Αντίστροφα, στο γυμνάσιο τα οφέλη των μη καθιερωμένων μονάδων μέτρησης μπορούν να παρουσιαστούν σε μία ή δύο μέρες για τις μετρήσεις γυνών. Όταν οι άτυπες μονάδες έχουν εξυπηρετήσει το στόχο τους, προχωρήστε.

Ο Ρόλος των Εκτιμήσεων στη Μάθηση της Μέτρησης

Είναι πολύ σημαντικό να ζητήσετε από τα παιδιά να εκτιμήσουν μια μέτρηση πριν την εκτελέσουν. Αυτό ισχύει τόσο με



ΣΧΗΜΑ 20.2 «Τι μήκος έχει αυτή η μολύβι.»

τις άπτες όσο και με τις καθιερωμένες μονάδες. Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερις καλοί λόγοι για να συμπεριληφθούν εκτιμήσεις στις δραστηριότητες μέτρησης:

- Η εκτίμηση βοηθά τα παιδιά να εστιάσουν στο χαρακτηριστικό που μετράται και στη διαδικασία της μέτρησης. Σκεφτείτε πώς θα υπολογίζατε το εμβαδόν του εξώφυλλου αυτού του βιβλίου χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης συνθιγμένα τραπουλόχαρτα. Για να το πετύχετε αυτό θα πρέπει να σκεφτείτε περίπου πόσο είναι το εμβαδόν του και πόσες μονάδες θα χωρούσαν να καλύψουν αυτό το εμβαδόν.
- Η εκτίμηση παρέχει εσωτερικά κίνητρα στις δραστηριότητες μέτρησης. Είναι διασκεδαστικό να διαπιστώνετε πόσο σωστή μπορεί να είναι η εκτίμησή σας ή αν η ομάδα σας μπορεί να κάνει μια καλύτερη εκτίμηση από τις υπόλοιπες ομάδες της τάξης.
- Όταν χρησιμοποιούνται καθιερωμένες μονάδες, η εκτίμηση συνεκφέρει στην εξοικείωση με την εκάστοτε μονάδα. Αν εκτιμήσετε το ύψος της πόρτας σε μέτρα πριν τη μετρήσετε, πρέπει να επινοήσετε κάποιο τρόπο για να σκεφτείτε το μέγεθος που έχει το ένα μέτρο.
- Η χρήση ενός σημείου αναφοράς για έναν κατά προσέγγιση υπολογισμό προωθεί την πολλαπλασιαστική ικανότητα. Το πλάτος ενός καριού είναι περίπου το ένα τέταρτο του μήκους ενός γηπέδου ποδοσφαίρου-πιτάνν 25 μέτρα.

Ο Προσεγγιστικός Χαρακτήρας της Μέτρησης

Σε όλες τις δραστηριότητες μέτρησης, επισημάνετε τη χρήση της κατά προσέγγιση γλώσσας. Το θρανίο έχει μήκος περίπου ίσο με 15 πορτοκαλί ράβδους. Η καρέκλα έχει ύψος λίγο μικρότερο από 4 καλαμάκια. Η χρήση της κατά προσέγγιση γλώσσας είναι πολύ χρήσιμη για τα μικρότερα παιδιά γιατί πολλές μετρήσεις δεν οδηγούν σε ακέραιο αποτέλεσμα. Τα μεγαλύτερα παιδιά θα αρχίσουν να αναζητούν μικρότερες μονάδες ή θα χρησιμοποιούν κλασματικές μονάδες στην προσπάθειά τους να δώσουν μια ακριβή μέτρηση. Εδώ έχετε την ευκαιρία να αναπτύξετε την ιδέα ότι όλες οι μετρήσεις περιλαμβάνουν κάποιο λάθος. Κάθε μικρότερη μονάδα ή υποδιάρθρωση οδηγεί σε μεγαλύτερη ακρίβεια στις μετρήσεις. Για παράδειγμα, μια μέτρηση μήκους δεν μπορεί ποτέ να εμπεριέχει λάθος μεγαλύτερο από μιάμιση μονάδα. Κι όμως, εφόσον μαθηματικά δεν υπάρχει καμία «μικρότερη μονάδα», πάντα θα εμπεριέχεται κάποιο λάθος.



Το πρότυπο μέτρησης στο Αρχές και Στάνταρ αποτελείται από δύο βασικά μέρη. Τα πρώτα μέρη επικεντρώνεται στην ανάγκη να κατανοήσουν τα παιδιά ποια χαρακτηριστικά των αντικείμενων θα μετρήσουν και με ποιο τρόπο θα χρησιμοποιήσουν τις μονάδες για να

πραγματοποιήσουν τις μετρήσεις. Το δεύτερο μέρος εστιάζει στη χρήση των εργαλείων μέτρησης και των μαθηματικών τύπων. Οι συγγραφείς των Standards υπογραμμίζουν ότι τα παιδιά πρέπει να έχουν επαρκείς ευκαιρίες να χρησιμοποιήσουν άπτες μονάδες και ακόμη να έχουν αντίστοιχες συναισθηματικές εμπειρίες όσον αφορά τη μέτρηση—ανεξάρτητα από την τάξη τους—πριν επικεντρωθείτε στα όργανα και τους τύπους.

Μέτρηση Μήκους

Το μήκος είναι συνήθως το πρώτο χαρακτηριστικό που μαθαίνουν να μετρούν τα παιδιά. Έχετε υπόψη σας, ωστόσο, ότι η μέτρηση του μήκους δεν γίνεται αμέσως κατανοητή από τα μικρότερα παιδιά.

Συγκριτικές Δραστηριότητες

Στο νηπιαγωγείο, τα παιδιά είναι καλό να ξεκινούν με συγκρίσεις ανάμεσα σε δύο ή και περισσότερα μήκη.

Δραστηριότητα 20.1

Μακρύτερο, Κοντύτερο, Ίσο

Δημιουργήστε μια συλλογή από αντικείμενα τα οποία να είναι ταξινομημένα ανάλογα με το μήκος τους, αν είναι δηλαδή μακρύτερα, κοντύτερα, ή περίπου ίσα σε σύγκριση με ένα καθορισμένο αντικείμενο. Μπορείτε να έχετε διάφορες τέτοιες συλλογές μέσα στην τάξη. Το αντικείμενο αναφοράς μπορεί να αλλάζει περιστασιακά ώστε να δημιουργείτε διαφορετικές συλλογές. Μια παρόμοια δραστηριότητα είναι η τοποθέτηση αντικειμένων σε σειρά από το κοντύτερο στο μακρύτερο.

Δραστηριότητα 20.2

Κυνήγι Μήκους (ή Μονάδας)

Δώστε σε ζευγάρια παιδιών μια χάρτινη λωρίδα, ένα ξυλάκι, ένα κομμάτι σχοινί, ή κάποιο άλλο αντικείμενο με μια εμφανή διάσταση μήκους. Η εργασία τη μία μέρα θα είναι να βρουν πέντε πράγματα μέσα στην αίθουσα που να είναι κοντύτερα, μακρύτερα, ή περίπου το ίδιο σε μήκος με το αντικείμενο που τους δώσατε. Μπορούν να ζωγραφίσουν ή να γράψουν τα ονόματα των αντικειμένων που θα βρουν.

Στη συνέχεια μπορείτε να τους δώσετε ως μήκος προς σύγκριση μία καθιερωμένη μονάδα (π.χ. μια ράβδο ή ένα σχοινί του ενός μέτρου), και να τους ζητήσετε να επαναλάβουν τη δραστηριότητα. Με αυτόν τον τρόπο προωθείτε την εξοικείωσή τους με σημαντικές καθιερωμένες μονάδες.

Είναι σημαντικό να συγκρίνετε μήκη που δεν είναι ευθύγραμμα τμήματα. Ένας τρόπος να το πετύχετε είναι με σπά-

γχο ή με σχοινί. Τα παιδιά μπορούν να τυλίξουν το σπάγκο γύρω από αντικείμενα ψάχνοντας πράγματα, τα οποία, για παράδειγμα, να έχουν τόση περίμετρο όση είναι η απόσταση από το πάτωμα μέχρι τον αφαλό τους ή όση είναι η περίμετρος του κεφαλιού ή της μέσης τους. Η μέτρηση του σώματος είναι πάντα διασκεδαστική.

Στην επόμενη δραστηριότητα χρησιμοποιούνται έμμεσες συγκρίσεις.

ΔΙΕΥΡΥΝΩΣΗ ΠΑΡΑΘΕΣΗ

Ένα Διευρυμένο Μάθημα που στηρίζεται στη Δραστηριότητα 20.3 μπορεί να βρεθεί στην ιστοσελίδα. www.ablongman.com/vandewalle6e.

Δραστηριότητα 20.3

Κυρτά Μονοπάτια

Δημιουργήστε κυρτά ή καμπυλωτά μονοπάτια στο πάτωμα με κολλητική ταινία. Η εργασία είναι να καθοριστεί ποιο μονοπάτι είναι μακρύτερο, ποιο λιγότερο μακρύ και ούτως καθεξής. Τα παιδιά πρέπει να βρουν έναν τρόπο να φτάσουν ίσα μονοπάτια τα οποία να είναι τόσο μακριά όσο και τα καμπυλωτά έτσι ώστε να μπορούν να συγκριθούν εύκολα. (Μπορείτε εάν θέλετε να κάνετε αυτήν την πρόταση.) Δώστε σε ζευγάρια παιδιών από ένα μακρύ κομμάτι σχοινί. Η εργασία είναι ευκολότερη αν το σχοινί είναι μακρύτερο από το μονοπάτι. Τα παιδιά μπορούν να ζωγραφίσουν τις δικές τους κυρτές διαδρομές στον πίνακα, να τις σημάδψουν με ταινία στο πάτωμα, ή να ακολουθήσουν κάποια άλλη διαδρομή που εσείς θα επινοήσετε. Ζητήστε τους μαθητές να σας εξηγήσουν πώς έλυσαν το πρόβλημα. (Μπορεί επίσης να αποτελέσει μια καλή δραστηριότητα στην ύπαιθρο).

Χρήση Μονάδων Μήκους

Τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν ποικίλες άπτες μονάδες για να αρχίσουν να μετρούν μήκη, για παράδειγμα:

- **Γιγαντιαίες πατημασιές:** Κάντε περίπου 20 χάρανα αντίγραφα μιας τεράστιας πατημασιάς με μήκος περίπου 45-60 εκατοστά.
- **Λωρίδες μέτρησης:** Κόψτε βαμβακερά κομμάτια ύφασμα μήκους ενός μέτρου. Αυτά είναι χρήσιμα στη μέτρηση καμπυλωτών γραμμών και περιφερειών που ανήκουν σε μεγάλα αντικείμενα, όπως είναι η έδρα.
- **Πλαστικά καλαμάκια:** Τα καλαμάκια είναι οικονομικά και παρέχουν μεγάλες ποσότητες μιας χρήσιμης μονάδας. Επίσης κβόνονται εύκολα σε μικρότερα κομμάτια. Μπορείτε να ενώσετε καλαμάκια μεταξύ τους με τη βοήθεια ενός μακρύ σπάγκου. Τα «σχοινιά» από καλαμάκια είναι μια εξαιρετική «γέφυρα» για να περάσετε στο χάρακα ή στην ταινία μέτρησης.
- **Μικρές μονάδες:** Οδοντογλυφίδες, σφηνουτσλάκια, ξύ-

λινοι κύβοι, και συνδετήρες είναι όλα χρήσιμες μονάδες για τη μέτρηση μικρότερων μηκών. Οι ράβδοι του Cuisenaire αποτελούν ένα από τα ωραιότερα σύνολα μονάδων επειδή διατίθενται σε δέκα διαφορετικά μεγέθη, τοποθετούνται εύκολα άκρη με άκρη, και μπορούν να σχεδιαστούν μεταξύ τους. Οι συνδετήρες μπορούν να σχηματίσουν αλυσίδες, όπως και οι πλαστικοί κρόκοι αλυσίδας που διατίθενται από προμηθευτές

Η πρόκληση είναι να εξηγήσετε προσεκτικά στα παιδιά πώς να χρησιμοποιήσουν αυτές τις μονάδες μέτρησης και μετά να τα στελέτε να εφαρμόσουν πρακτικά τη μέτρηση. Αυτή η προσέγγιση θα μεταποίσει τη προσοχή των παιδιών στη διαδικασία (μετά από τη διδασκαλία σας) απομακρύνοντας την από την ανάπτυξη της κατανόησης της μέτρησης με τη χρήση των μονάδων. Στην ακόλουθη δραστηριότητα δίνεται στα παιδιά μια εργασία μέτρησης αλλά τους ζητείται να αναπτύξουν τη δική τους προσέγγιση. Μπορούν να αναπτυχθούν σωστές ιδέες για τη μέτρηση από τη συζήτηση των αποτελεσμάτων.

Δραστηριότητα 20.4

Τι ύψος έχει η δασκάλα ή ο δάσκαλος;

Εξηγήστε ότι μόλις πήρατε ένα αίτημα από τη διευθύντρια. Πρέπει να γνωρίζει ακριβώς τι ύψος έχει ο κάθε εκπαιδευτικός. Τα παιδιά πρέπει να αποφασίσουν πώς θα μετρήσουν το ύψος του καθενός και να γράψουν ένα σημείωμα στη διευθύντρια εξηγώντας τι ύψος έχει η δασκάλα ή ο δάσκαλός τους και πώς το αποφάσισαν αυτό. Μετά, εξηγήστε ότι μπορεί να είναι πιο εύκολο αν ξεπλώσετε και τα παιδιά μετρήσουν τι μήκος έχετε αντί για το ύψος. Αυτό μπορείτε να το κάνετε σε διάφορα σημεία στην τάξη. Βάλτε τα παιδιά να κάνουν σημεία στα πόδια και στο κεφάλι σας και μετά να τραβήξουν μία ευθεία γραμμή ανάμεσα σε αυτά τα σημεία.

Εξηγήστε ότι η διευθύντρια λέει πως μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιαδήποτε από αυτές τις μονάδες για να κάνετε τη μέτρησή σας. (Δώστε στα παιδιά πολλές επιλογές. Για κάθε επιλογή μονάδας, δώστε αρκετές μονάδες, περισσότερες από αυτές που θα κάλυπταν το ύψος σας.) Κάντε ζευγάρια με τα παιδιά και επιτρέψτε τους να επιλέξουν το καθένα μία μονάδα.

Η αξία αυτής της τελευταίας δραστηριότητας θα προκύψει από τη συζήτηση. Καλά ερωτήματα θα περιελάμβαναν, «Πώς κάνατε τη μέτρησή σας;», «Τα παιδιά που μέτρησαν χρησιμοποιώντας την ίδια μονάδα είχαν το ίδιο αποτέλεσμα; Γιατί όχι;», «Πώς θα μπορούσε η διευθύντρια να κάνει μια ευθεία που να έχει το ίδιο μήκος με το δάσκαλο ή τη δασκάλα;» Στη συζήτησή σας, εστιάστε στην αξία της προσεκτικής ευθυγράμμισης των μονάδων από τη μία άκρη στην άλλη. Συζητήστε τι συμβαίνει αν τοποθετήσετε τη μία μονάδα πάνω στην άλλη ή αν δεν παραμένετε σε ευθεία γραμμή.



ΣΧΗΜΑ 20.3. Φύλλο καταγραφής για μετρήσεις με άτυπες μονάδες μήκους

Επαναλάβετε την παραπάνω δραστηριότητα με άλλες δραστηριότητες μέτρησης, δίνοντας κάθε φορά μία επιλογή μονάδων και ζητώντας από τα παιδιά να εξηγήσουν τις μετρήσεις τους. Βοηθά πάντα αν τα ίδια μήκη (ύψος, περιγράμματα) μετρούνται από διαφορετικά ζευγάρια παιδιών έτσι ώστε να είναι πιθανό τα λάθη να μπορούν να συζητηθούν και να διορθωθεί η διαδικασία. Η ακόλουθη παρόμοια δραστηριότητα προσοδίδει το στοιχείο της εκτίμησης.

Δραστηριότητα 20.5

Μαντέψτε και Μετρήστε

Κάντε λίστες με πράγματα από την αίθουσα για να τα μετρήσετε (σχήμα 20.3). Για τα μικρότερα παιδιά, τοποθετήστε ένα κομμάτι κολλητικής ταινίας κατά μήκος της διάστασης που αντικείμενο που θα μετρήσετε. Στη λίστα, καθορίστε τις μονάδες που θα χρησιμοποιηθούν. Μην ξεχάσετε να συμπεριλάβετε καμπύλες ή άλλες διαστάσεις που δεν είναι ευθείες γραμμές. Συμπεριλάβετε εκτιμήσεις πριν από τις μετρήσεις. Τα μικρότερα παιδιά στην αρχή δε θα τα καταφέρουν τόσο καλά στην εκτίμηση αποστάσεων.

Για τα παιδιά που αρχίζουν να μαθαίνουν τους διψήφιους αριθμούς, προσθέστε το ακόλουθο στοιχείο στην προηγούμενη δραστηριότητα: Βάλτε τα παιδιά να φτιάξουν μία σειρά

ή μία αλυσίδα από ακριβώς δέκα μονάδες που μπορούν να χρησιμοποιήσουν για να τους βοηθήσουν με τις εκτιμήσεις τους. Πρώτα θέτουν τις μονάδες πάνω στο αντικείμενο και μετά κάνουν τις εκτιμήσεις τους.

Είναι άσκοπο να προσπαθήσετε να εξηγήσετε στα παιδιά ότι οι μεγαλύτερες μονάδες θα δώσουν μεγαλύτερες μετρήσεις και το αντίστροφο. Αντίθετα βάλτε τα παιδιά να ασχοληθούν με μία δραστηριότητα όπως η ακόλουθη στην οποία αυτό το ζήτημα αποτελεί και το θέμα.

Δραστηριότητα 20.6

Αλλαγή Μονάδων

Ζητήστε από τα παιδιά να μετρήσουν μια απόσταση με μια μονάδα. Μετά δώστε τους μια άλλη μονάδα και παρατηρήστε εάν μπορούν να προβλέψουν τη μέτρηση με τη νέα μονάδα. Τα παιδιά πρέπει να καταγράψουν την πρόβλεψή τους και την αιτιολόγησή για το πώς κατέληξαν σε αυτήν. Μετά ζητήστε τους να κάνουν την πραγματική μέτρηση. Οι ράβδοι του Cuisenaire είναι εξαιρετικές για αυτή τη δραστηριότητα. Τα μεγαλύτερα παιδιά μπορούν να προκληθούν με μονάδες που είναι πιο δύσκολα πολλαπλάσια της αρχικής μονάδας.

Στην «Αλλαγή Μονάδων» αναζητάτε την πρώτη θεμελιώδη ιδέα ότι όταν η μονάδα είναι πιο μακριά η μέτρηση είναι μικρότερη και το αντίστροφο. Ο πραγματικός υπολογισμός της δεύτερης μέτρησης είναι μια επιπρόσθετη πρόκληση και κατά κάποιο τρόπο εξαρτάται από την ηλικία των παιδιών.

Η «Αλλαγή Μονάδων» είναι μια καλή δραστηριότητα που μπορείτε να κάνετε προτού αρχίσετε τη συζήτηση για τη μετατροπή των μονάδων σε τυπικές μονάδες. Για παράδειγμα, αν η πόρτα έχει 80 μέτρα ύψος, πόσα πόδια μας κάνει; Η αλλαγή των μονάδων μέτρησης είναι μια εξαιρετική εργασία αναλογικής συλλογιστικής σκέψης για τα παιδιά του γυμνασίου.



Οι παρατηρήσεις και η συζήτηση κατά τη διάρκεια δραστηριοτήτων όπως αυτές που περιγράψαμε μόλις τώρα σας λένε πολλά για τον τρόπο που τα παιδιά κατανοούν τη μέτρηση του μήκους. Σας δίνουν μερικές επιπρόσθετες εργασίες τις οποίες μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ως μέσα αξιολόγησης, ίσως με τη μορφή προσωπικού διαλόγου:

- Δώστε ένα κουτί με διάφορα αντικείμενα και διαφορετικά μεγέθη. Οι ράβδοι Cuisenaire θα ήταν κατάλληλοι. Βάλτε τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν τα υλικά στο κουτί για να μετρήσουν ένα δοσμένο μήκος. Παρατηρήστε αν τα παιδιά καταλαβαίνουν πως όλες οι μονάδες πρέπει να έχουν το ίδιο μέγεθος. Αν χρησιμοποιηθούν δι-



Πλάτος = 5 πορτοκαλί και 4 κόκκινες ράβδοι

ΣΧΗΜΑ 20.4 Χρήση δύο μονάδων για τη μέτρηση του μήκους

αφορετικές μονάδες μήκους, ρωτήστε τα παιδιά πώς θα περιέγραφαν την μέτρησή τους.

- Ζητήστε από τα παιδιά να ζωγραφίσουν μία γραμμή ή να οριοθετήσουν μια απόσταση από ένα προκαθορισμένο αριθμό μονάδων. Παρατηρήστε αν τα παιδιά ξέρουν πώς να ευθυγραμμίζουν τις μονάδες σε μία ευθεία γραμμή χωρίς επικαλύψεις ή κενά.
- Βάλτε τα παιδιά να μετρήσουν δύο διαφορετικά αντικείμενα. Μετά ρωτήστε τους πόσο μακρύτερο είναι το μακρύτερο αντικείμενο. Παρατηρήστε αν τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις μετρήσεις για να απαντήσουν ή αν χρειάζεται μία τρίτη μέτρηση για την διαφορά.
- Δώστε ένα μήκος σπάγκου. Πείτε στα παιδιά ότι ο σπάγκος έχει μήκος 6 μονάδες. Πώς θα μπορούσαν να τον χρησιμοποιήσουν για να φτιάξουν ένα μήκος 3 μονάδων; Πώς για να κάνουν ένα μήκος 9 μονάδων; Σε αυτή την εργασία προσπαθείτε να δείτε αν τα παιδιά μπορούν να διατρέξουν νοητικά το δοσμένο μήκος (σπάγκος) βασισμένα στην κατανόηση της μέτρησής του. Δηλαδή, μπορούν τα παιδιά να οπτικοποιήσουν τις 6 μονάδες που είναι το μήκος του σπάγκου και το μισό αυτού του μήκους που είναι το 3; ■

Δύο Μονάδες και τα Κλασματικά Μέρη Τους

Τα παιδιά μερικές φορές μετρεδύνονται όταν οι μετρήσεις τους δεν οδηγούν σε ακέραιο αριθμό. Μια πρόταση που μπορείτε να κάνετε στα μικρότερα παιδιά είναι να χρησιμοποιήσουν μικρότερες μονάδες για να καλύψουν το κενό που απέμεινε, όπως φαίνεται και στο σχήμα 20.4. Μια άλλη ιδέα είναι να προτείνετε τη χρήση κλασμάτων. Και οι δύο ιδέες χρησιμοποιούνται στο πρότυπο μέτρησης. Στο μετρικό σύστημα, οι μονάδες σπάνια μετρεδύνονται, και οι κλασματικές μονάδες εκφράζονται σε δεκαδική μορφή (π.χ. 3,2 m). Στο συνηθισμένο σύστημα, χρησιμοποιούνται και οι δύο προσεγγίσεις. Μια μέτρηση των 4 ποδιών και 3 ιντσών συχνά αναφέρεται ως 51 ίντσες ή ως 4 και 1/4 πόδια. Η χρήση κλασματικών μονάδων αποτελεί καλή προετοιμασία για τα σημάδια υποδιαφέ-

σεων σε ένα χάρακα. Το παιδικό βιβλίο Inchworm and a Half δίνει ένα καλό τρόπο να εισαχθεί η ιδέα των κλασματικών μονάδων (βλ. σελ. 512).

Κατασκευή και Χρήση Χάρακα

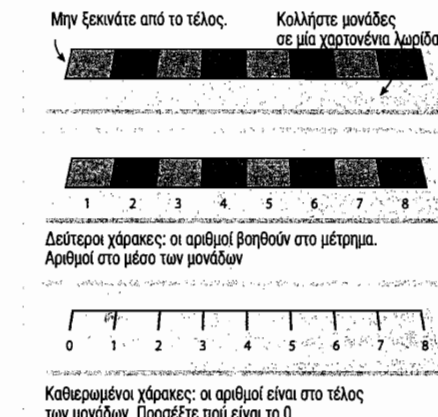
Είναι μεγάλη πρόκληση τα παιδιά να μεταπηδήσουν από τη χρήση μονάδων στη χρήση ενός χάρακα. Μία από τις καλύτερες μεθόδους για να τα βοηθήσετε να καταλάβουν τους χάρακες είναι να τα βάλετε να κάνουν τους δικούς τους χάρακες από πραγματικές μονάδες.

Δραστηριότητα 20.7

Φτιάξτε το δικό σας χάρακα

Κόψτε από πριν λωρίδες από χαρτί με μήκος 5 εκ. και πλάτος περίπου 2 εκ. Χρησιμοποιείτε δύο διαφορετικά χρώματα. Ζητήστε πώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι λωρίδες για να μετρήσετε βάζοντας τις τη μία δίπλα στην άλλη κατά μήκος. Δώστε τους μακριές λωρίδες από χαρτόνι περίπου 3 εκ. πλάτος. Χωρίς να τα καθοδηγήσετε, ζητήστε από τα παιδιά να κάνουν το δικό τους χάρακα κολλώντας τις μονάδες πάνω στο χαρτόνι. Δώστε τα και μία λίστα από πράγματα που πρέπει να μετρήσουν. Τα παιδιά χρησιμοποιούν τους δικούς τους χάρακες για να τα μετρήσουν αυτά τα πράγματα. Ζητήστε τα αποτελέσματα. Είναι πολύ πιθανό να υπάρχουν και ασυνέπειες επειδή οι χάρακες δεν φτιάχτηκαν σωστά ή επειδή τα παιδιά δεν κατάλαβαν πώς λειτουργεί ο χάρακας.

Η ίδια δραστηριότητα μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας μεγαλύτερες μονάδες όπως τα αποτυπώματα α-



ΣΧΗΜΑ 20.5 Δώστε νόημα στους αριθμούς πάνω στους χάρακες



ΣΧΗΜΑ 20.6 Χρησιμοποιείτε ένα χάρακα χωρίς σημάδια και ζητήστε από τα παιδιά να μετρήσουν ένα αντικείμενο. Τα παιδιά μετρούν τα διαστήματα ή τα σημάδια στο χάρακα. Στο παράδειγμα που παρουσιάζεται, το σωστό μήκος είναι 8 ίντσες. Ένα παιδί που μετρά τα σημάδια θα έλεγε 9 ίντσες.

πό τις πατούσες των παιδιών κολλημένα πάνω σε λωρίδες ταινίας ταμειακής μηχανής. Άλλα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν μια τυπική μονάδα (ίντσα, πόδι, εκατοστό) για να κάνουν τα σημάδια πάνω στις λωρίδες και να χρωματίσουν τα κενά με διαφορετικά χρώματα.

Αυτή η δραστηριότητα κάνει την κατασκευή ενός χάρακα μια εμπειρία που στηρίζεται σε ένα πρόβλημα. Χωρίς να υπέρ καθοδηγείτε τα παιδιά για το πώς να φτιάξουν τον χάρακα τους, μπορείτε να πάρετε πληροφορίες που να αφορούν την κατανόηση των παιδιών για τη διαδικασία μέτρησης. Ακόμα πιο σημαντικό είναι ότι οι ιδέες για τον τρόπο που μπορεί να γίνει ένας χάρακας έτσι ώστε να σας δώσει σωστές μετρήσεις θα προκύψουν από τις ιδέες των παιδιών, αποφεύγοντας να ακολουθούν τυφλά τους κανόνες. Στο τέλος αυτής της διαδικασίας όλα τα παιδιά θα πρέπει να έχουν φτιάξει από μόνα τους σωστά ένα χάρακα. Τα αντίγραφα των μονάδων πάνω στους χάρακες που έχουν κάνει τα παιδιά (αντί για σημάδια και αριθμούς) ενισχύουν τη σύνδεση ανάμεσα στα διαστήματα του χάρακα και τις πραγματικές μονάδες. Τα παιδιά θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν τους δικούς τους χάρακες για να μετρήσουν μήκη που δεν είναι μεγαλύτερα από τους ίδιους τους χάρακες και να συζητήσουν τον τρόπο που μπορεί να γίνει αυτό. Μία άλλη σημαντική πρόκληση είναι να βρείτε περισσότερους από έναν τρόπο για να μετρήσετε ένα μήκος με ένα χάρακα. Πρέπει να ξεκινήσετε με το τέλος; Τι θα γίνει αν ξεκινήσετε από τη μέση;

Τα παιδιά τελικά θα πρέπει να τοποθετήσουν αριθμούς πάνω στους χειροποίητους χάρακες τους, όπως φαίνεται στο σχήμα 20.5. Για τα μικρότερα παιδιά, οι αριθμοί μπορούν να γραφούν στο μέσο κάθε μονάδας ώστε να γίνει ξεκάθαρο ότι οι αριθμοί είναι ένας τρόπος να προ-αριθμήσουμε τις μονάδες. Όταν οι αριθμοί γράφονται κατά τον καθιερωμένο τρόπο, στο τέλος της μονάδας, ο χάρακας γίνεται μια ευθεία των αριθμών. Αυτή η μορφή είναι πιο πολύπλοκη και πρέπει να συζητηθεί προσεχτικά με τα παιδιά.



Η έρευνα έχει αποδείξει ότι όταν τα παιδιά βλέπουν τους καθιερωμένους χάρακες με τους αριθμούς χαραγμένους επάνω τους, συχνά πιστεύουν

ότι οι αριθμοί μετρούν τα σημάδια αντί να δείχνουν τις μονάδες ή τα διαστήματα ανάμεσα στα σημάδια. Αυτό είναι λανθασμένη κατανόηση των χαράκων που μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένες απαντήσεις όταν τους χρησιμοποιούν. Ως μία μέθοδο αξιολόγησης δώστε στα παιδιά ένα χάρακα, όπως στο Σχήμα 20.6, με χαραγμένα σημάδια αλλά χωρίς αριθμούς. Ζητήστε από τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν το χάρακα για να μετρήσουν ένα αντικείμενο που είναι πιο κοντό από το χάρακα. Η σωστή κατανόηση των χαράκων μπορεί να φανεί αν τα παιδιά μετρήσουν τα διαστήματα ανάμεσα στα σημάδια.

Μία άλλη καλή μέθοδος αξιολόγησης της κατανόησης του χάρακα είναι να ζητήσετε από τα παιδιά να μετρήσουν με ένα χαλασμένο χάρακα, ένα χάρακα που να λείπουν οι δύο πρώτες μονάδες. Μερικά παιδιά θα πουν ότι είναι αδύνατον να μετρήσουμε με ένα τέτοιο χάρακα επειδή δεν υπάρχει σημείο εκκίνησης. Τα παιδιά που κατανοούν τους χάρακες θα μπορέσουν να συντηριάζουν και να μετρήσουν τις μονάδες λογικά στις μετρήσεις τους. (Βλ. Barrett, Jones, Thornton, & Dickson, 2003 για μία ολοκληρωμένη ανάλυση της ανάπτυξης των μετρήσεων μήκους από τα παιδιά συμπεριλαμβανομένης και της χρήσης χάρακα).

Παρατηρώντας πώς χρησιμοποιούν τα παιδιά ένα χάρακα για να μετρήσουν ένα αντικείμενο το οποίο είναι μακρύτερο από το χάρακα μπορεί επίσης να σας δώσει σημαντικές πληροφορίες. Τα παιδιά που διαβάζουν κατά το τελευταίο σημείο στο χάρακα μπορεί να μην καταφέρουν να ολοκληρώσουν αυτήν την εργασία επειδή δεν κατανοούν ότι ο χάρακας είναι μια αναπαράσταση μιας σειράς μονάδων. ■

Η αξία που έχουν οι χειροποίητοι από τους μαθητές χάρακες μπορεί να χαθεί σε σημαντικό βαθμό αν αυτή η γνώση δε μεταφερθεί στους καθιερωμένους χάρακες. Δώστε στα παιδιά ένα καθιερωμένο χάρακα, και συζητήστε σε τι μοιάζει και σε τι διαφέρει από αυτούς που κατασκεύασαν τα ίδια. Ποιες είναι οι μονάδες; Θα μπορούσατε να φτιάξετε ένα χάρακα με χάρτινες μονάδες ίδιο με αυτόν; Θα μπορούσατε να φτιάξετε χάρτινες μονάδες και να μετρήσετε με τον ίδιο τρόπο που μετρά αυτός ο χάρακας; Τι σημαίνουν οι αριθμοί; Τι ρόλο παίζουν τα υπόλοιπα σημάδια; Από πού ξεκινούν οι μονάδες;

Σε αντίθεση με πολλά παραδοσιακά κείμενα, το πρόγραμμα μαθημάτων *Investigations in Number, Data, and Space* βάζει παιδιά της πρώτης τάξης να εξερευνούν ποικίλα χαρακτηριστικά (μήκος, βάρος, χωρητικότητα, και εμβαδόν), αλλά στη δεύτερη και τρίτη τάξη όλες οι μονάδες μέτρησης αφορούν στο μήκος. Δείτε το απόσπασμα από την τρίτη τάξη στην επόμενη σελίδα.



Στη σχολική περίοδο μέχρι την δεύτερα τάξη, τα Στάνταρ προτείνουν τα παιδιά να εξοικειωθούν με τα εξής χαρακτηριστικά: μήκος, όγκος, εμβαδόν, και χρόνος. Ωστόσο, οι συγγραφείς επισημαίνουν ότι «οι

Εξερευνώντας

Το Παιδί να Μετρήσει το Χάρακα και το Χώρο

Τρίτη Τάξη Απόσπασμα από το βιβλίο

Έρευνα & Μέτρηση

Συγκεκριμένο

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται σε αυτό το κεφάλαιο γίνονται από μέσον ενός μαθητικού χαρτί που είναι 12 ίντσες τρεις εβδομάδες και εστιασμένη στην ετήσια δραστηριότητα περιλαμβάνοντας την εκμάθηση χροιάς, μήκους, και τη μονάδων (συνήθισμένο και μετρικό), και επίσης βοηθά τα παιδιά σχεδιάζουν τη γραφή παραστάσεων δεδομένων που προέκυψαν από τις μετρήσεις τους. Τα παιδιά πιστοποιούν τεχνικές σχεδίασης, και περιέχουν τον αριθμό των δεδομένων.

Περιγραφή της Δραστηριότητας

Σε αυτήν την έρευνα, τα παιδιά εργάζονται σχεδόν για μια ολόκληρη μέρα σε τέσσερα κέντρα και για ένα άλλο χρονικό διάστημα αναπτύσσοντας ένα γράφημα με τα δεδομένα που αφορούν ένα από τα κέντρα. Τα κέντρα περιγράφονται σύντομα εδώ.

Μέτρηση και Σύγκριση: Τα παιδιά συμπληρώνουν το φυλλάδιο που φαίνεται παρακάτω και άλλο ένα παρόμοιο με αυτό.

Μέτρα Σύγκρισης που προκύπτουν από το σώμα. Με τη βοήθεια ενός άλλου φυλλαδίου, βρίσκουν προσωπικά σημεία αναφοράς στο σώμα τους με μήκη 1, 6, και 12 ίντσες.

Πόσο μακριά μπορεί να πηδήξει ένα παιδί της τρίτης τάξης; Το κάθε παιδί ξεχωριστά πραγματοποιεί ένα άλμα, μετράται η απόσταση που πηδήξε και καταγράφονται όλες οι μετρήσεις σε ένα ευθυγραμμισμένο διάγραμμα το οποίο έχει τοποθετηθεί στον τοίχο. Τα παιδιά αποφασίζουν πώς να μετρήσουν τα άλματά τους και άλλες λεπτομέρειες, όπως είναι το πλήθος των επιχειρησμένων αλμάτων.

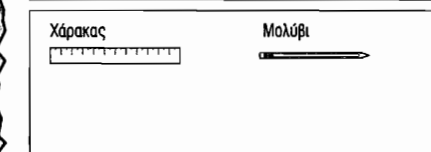
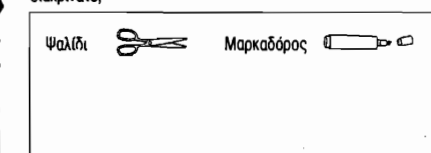
Πόσο μακριά μπορείτε να φυσήξετε ένα αντικείμενο; Τα παιδιά φυσούν το καθένα ένα αντικείμενο πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια τραπεζιού, καθορίζοντας ξανά τους δικούς τους κανόνες και συγκρίνοντας μετρήσεις από όλη την τάξη.

Τα παιδιά επιλέγουν τις δικές τους μεθόδους για να

Όνομα _____ Ημερομηνία _____
Φυλλάδιο μετρήσεων

Μετρήστε και συγκρίνετε (σελίδα 1 από 2)

1. Μετρήστε καθένα από αυτά τα αντικείμενα. Καταγράψτε τις μετρήσεις.
2. Γράψτε μια πρόταση περιγράφοντας πόσο μεγαλύτερο είναι ένα αντικείμενο από ένα άλλο. Δείτε ή εξηγήστε πώς το διακρίνατε;

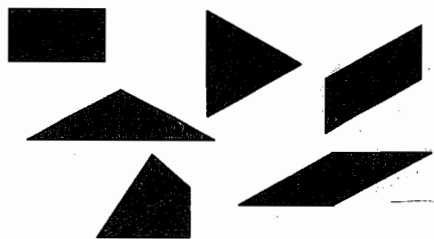


Σελίδα 90 από *Measuring Data: From Paces to Feet* των K. Economopoulos, J. Mokros, & S.J. Russell. *Investigations in Number, Data and Space* Copyright 1998 by Dale Seymour Publications. Ανάπτυξη κατόπιν άδειας της Pearson Education, Inc.

πραγματοποιήσουν τις μετρήσεις και αποφασίζουν από μόνα τους σχετικά με την ακρίβεια (π.χ. μισές μονάδες ή «περίπου»). Ολόκληρη η ενότητα για τη μέτρηση διαπραγματεύεται την εκμάθηση αναπαράστασης δεδομένων. Οι πραγματικές μετρήσεις που συγκεντρώνονται από τα παιδιά προσφέρουν πλήθος δεδομένων τα οποία καταγράφονται στο ευθυγραμμισμένο διάγραμμα. Εξετάζεται επίσης η έννοια της μέσης τιμής. Μια τελική έρευνα στη μονάδα προσφέρει δύο δραστηριότητες που περιλαμβάνουν αόριστες έννοιες της κλίμακας και της αναλογίας στα πλαίσια μιας μέτρησης.

ευθύγραμμες μετρήσεις έχουν την πιο σημαντική θέση» τα πρώτα χρόνια (σελ.103). «Οι εκπαιδευτικοί δεν μπορούν να υποθέσουν ότι τα παιδιά κατανοούν πλήρως τη μέτρηση α-

κόμη και όταν είναι σε θέση να μετρήσουν το μήκος ενός αντικειμένου που είναι ευθυγραμμισμένο με ένα χάρακα.» (σελ. 106).



ΣΧΗΜΑ 20.7 Διάφορα σχήματα, ίδιο μέγεθος

Μέτρηση Εμβαδού

Το εμβαδόν είναι ο διδιάστατος χώρος μέσα σε μία περιοχή. Όπως και με τα άλλα χαρακτηριστικά, τα παιδιά πρέπει πρώτα να κατανοήσουν αυτό το χαρακτηριστικό προτού να αρχίσουν να το μετράνε. Δεδομένα από την έβδομη Εθνική Αξιολόγηση της Εκπαιδευτικής Προόδου (National Assessment of Educational Progress) δείχνουν ότι παιδιά της τετάρτης δημοτικού και δευτέρας γυμνασίου δεν κατανοούν εντελώς την έννοια του εμβαδού (Martin & Strutchens, 2000).

Δραστηριότητες Σύγκρισης

Ένας από τους στόχους των πρώτων δραστηριοτήτων σύγκρισης με τα εμβαδά είναι να βοηθήσουμε τα παιδιά να διακρίνουν το μέγεθος (ή το εμβαδόν) από το σχήμα, το μήκος και τις άλλες διαστάσεις. Ένα μακρύ, στενό παραλληλόγραμμο πιθανόν να έχει μικρότερο εμβαδόν από ένα τρίγωνο με μικρότερες πλευρές. Αυτή η έννοια είναι για τα μικρότερα παιδιά ιδιαίτερα δύσκολη να τη συλλάβουν. Πειράγματα του Piaget υποδεικνύουν ότι πολλά παιδιά ηλικίας από 8 έως 9 χρόνων δεν καταλαβαίνουν ότι η αναπροσαρμογή των επιφανειών σε διάφορα σχήματα δεν επηρεάζει το μέγεθος του εμβαδού.

Η άμεση σύγκριση δυο εμβαδών είναι σχεδόν πάντα αδύνατη, εκτός από την περίπτωση όπου τα υπό σύγκριση σχήματα έχουν κάποια κοινή διάσταση ή χαρακτηριστικό. Για παράδειγμα, δύο παραλληλόγραμμα με το ίδιο πλάτος μπορούν να συγκριθούν άμεσα, όπως επίσης μπορούν και δύο τυχαίοι κύκλοι. Ωστόσο, η σύγκριση αυτών των ειδικών σχημάτων δε βίγει το χαρακτηριστικό του εμβαδού. Αντ' αυτού, προτείνονται δραστηριότητες όπου το ένα εμβαδόν αναπροσαρμόζεται. Κόβοντας ένα σχήμα σε δύο μέρη και ανααναμοιολογώντας τα φτιάχνοντας ένα διαφορετικό σχήμα αποδεικνύεται ότι το αρχικό και το τελικό σχήμα έχουν το ίδιο εμβαδόν, ακόμη κι αν έχουν διαφορετικό σχήμα. Αυτή η ιδέα δεν είναι καθόλου προφανής στα παιδιά των τάξεων από το νηπιαγωγείο ως τη δευτέρα τάξη.

Δραστηριότητα 20.8

Σχήματα με Δύο Κομμάτια

Κόψτε ένα μεγάλο αριθμό ορθογωνίων του ίδιου μεγέθους, περίπου 3 επί 5 ίντσες. Κάθε ζευγάρι παιδιών θα χρειαστεί έξι ορθογώνια. Ζητήστε τους να τα διπλώσουν και να τα κόψουν πάνω στη μια διαγώνιο τους, φτιάχνοντας έτσι δύο ίσα τρίγωνα. Στη συνέχεια, ζητήστε τους να αναδιατάξουν τα τρίγωνα σχηματίζοντας διάφορα σχήματα, συμπεριλαμβανομένου του αρχικού ορθογωνίου. Ο κανόνας είναι ότι μόνο πλευρές με ίδιο μήκος μπορούν να ενωθούν και μάλιστα πρέπει να ενώνονται με ακρίβεια. Ζητήστε από κάθε ομάδα να βρει όλα τα πιθανά σχήματα που μπορούν να δημιουργηθούν μ' αυτόν τον τρόπο και να κολλήσουν τα τρίγωνα σε χαρτί για να καταγράψουν έτσι κάθε σχήμα (βλ. Σχήμα 20.7). Συζητήστε το μέγεθος και το σχήμα των διαφορετικών αποτελεσμάτων. Είναι κάποιο σχήμα μεγαλύτερο από τα υπόλοιπα; Πώς είναι μεγαλύτερο; Μήπως χρησιμοποίησε κάποιος περισσότερα χαρτί για να το φτιάξει ή έχουν κατασκευαστεί όλα με την ίδια ποσότητα χαρτιού; Βοηθήστε τα παιδιά να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι, αν και κάθε σχέδιο έχει διαφορετικό σχήμα, έχουν όλα το ίδιο εμβαδόν. (Το μέγεθος στην προκειμένη περίπτωση είναι ένα χρήσιμο υποκατάστατο του εμβαδού για τα πολύ μικρά παιδιά, αν και στην πραγματικότητα δεν έχει ακριβώς την ίδια σημασία.)

Δραστηριότητα 20.9

Σύγκριση ορθογωνίων – χωρίς μονάδες

Δώστε στα παιδιά ζευγάρια ορθογωνίων όπως αυτά που ακολουθούν:

Ζευγάρι Α: Α1 είναι 2 x 9 και Α2 είναι 3 x 6

Ζευγάρι Β: Β1 είναι 1 x 10 και Β2 είναι 3 x 5

Ζευγάρι Γ: Γ1 είναι 3 x 8 και Γ2 είναι 4 x 5

Τα ορθογώνια μπορούν να μην έχουν τίποτε άλλο εκτός από τις ονομασίες. Η εργασία των παιδιών είναι να αποφασίσουν σε κάθε ζευγάρι ποιο ορθογώνιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν ή αν και τα δύο έχουν το ίδιο μέγεθος. Επιτρέψτε τους να κόψουν ή να διπλώσουν τα ορθογώνια με οποιοδήποτε τρόπο θέλουν, αλλά θα πρέπει να συμπεριλάβουν μία εξήγηση για την απόφασή τους σε κάθε ζευγάρι. Το ζευγάρι Γ θα είναι το πιο δύσκολο και ίσως να θέλετε να το κρατήσετε για αργότερα ως πρόκληση.

Στα πρώτα δύο ζευγάρια, το μικροσκοπικό ορθογώνιο μπορεί να διπλωθεί και να κοπεί είτε για να ταίριαξει (ζευγάρι Α) είτε για να συγκριθεί (ζευγάρι Β) με το δεύτερο ορθογώνιο. Για το ζευγάρι Γ, το ένα ορθογώ-

νιο μπορεί να τοποθετηθεί πάνω στο άλλο και μετά να συγκριθούν τα εκτεταμένα κομμάτια.

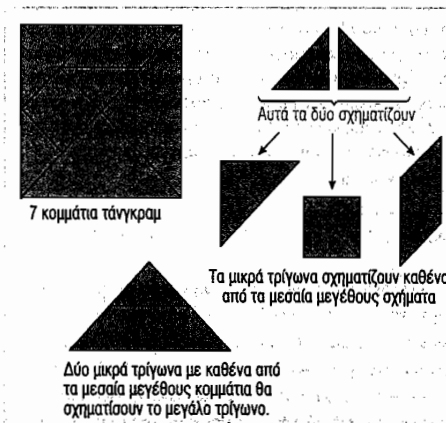
Τα τάνγκραμ, ένα πολύ παλιό και δημοφιλές σύνολο σχημάτων για πάζλ, μπορούν να χρησιμοποιηθούν με παρόμοιο τρόπο. Το καθιερωμένο σύνολο από 7 κομμάτια τάνγκραμ προκύπτει από ένα τετράγωνο, το οποίο κόβεται όπως δείχνει το Σχήμα 20.8. Τα δύο μικρά τρίγωνα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δημιουργηθεί το παραλληλόγραμμο, το τετράγωνο και το μεσαίο τρίγωνο. Τέσσερα μικρά τρίγωνα συνθέτουν το μεγάλο τρίγωνο. Έτσι δίνεται η ευκαιρία για μια παρόμοια συζήτηση σχετικά με τα κομμάτια που έχουν το ίδιο μέγεθος (εμβαδόν) αλλά διαφορετικά σχήματα (Seymour, 1971). (Τα κομμάτια τάνγκραμ διατίθενται στα Blackline Masters.)

Η ακόλουθη δραστηριότητα χρησιμοποιεί τα τάνγκραμ για να συγκρίνετε εμβαδά.

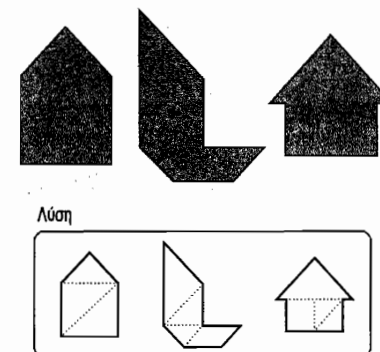
Δραστηριότητα 20.10

Εμβαδά τάνγκραμ

Σχεδιάστε το περίγραμμα διαφόρων σχημάτων κατασκευασμένων από κομμάτια τάνγκραμ, όπως στο Σχήμα 20.9. Αφήστε τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν τάνγκραμ για να αποφασίσουν ποια σχήματα έχουν το ίδιο μέγεθος, ποια είναι μεγαλύτερα και ποια μικρότερα. Τα σχήματα μπορούν να αναπαράχθούν σε χαρτί και επίσης τα παιδιά μπορούν να εργαστούν σε ομάδες. Ζητήστε τα να σας εξηγήσουν πώς κατέληξαν στα συμπεράσματά τους. Υπάρχουν ποικίλες διαφορετικές προσεγγίσεις για τη συγκεκριμένη δραστηριότητα, επομένως θα ήταν καλύτερο για τα παιδιά να καθορίσουν τις δικές τους λύσεις παρά να ακολουθήσουν τυφλά τις οδηγίες σας.



ΣΧΗΜΑ 20.8 Τα τάνγκραμ παρέχουν μια καλή ευκαιρία για τη διερεύνηση των εννοιών του μεγέθους και του σχήματος.



ΣΧΗΜΑ 20.9 Συγκρίνετε σχήματα τα οποία έχουν κατασκευαστεί από κομμάτια τάνγκραμ

Σταματήστε και σκεφτείτε

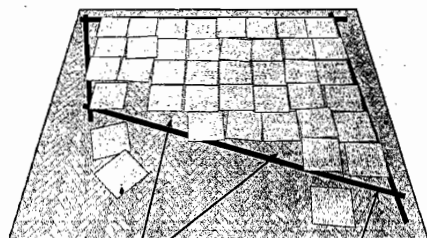
Στο σημείο αυτό θα μπορούσατε να σταματήσετε, να πάρετε ένα σετ κομματιών τάνγκραμ, και να πραγματοποιήσετε τις συγκρίσεις εμβαδών που προτείνονται στο σχήμα 20.9

Χρησιμοποιώντας Μονάδες Εμβαδού

Παρόλο που τα τετράγωνα είναι πολύ καλές (και οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες) μονάδες μέτρησης εμβαδού, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και οποιοδήποτε πλακίδιο που να γεμίζει άνετα μια επίπεδη περιοχή. Ακόμη και το γέμισμα μίας περιοχής με όμοιους κύκλους ή με φασόλια παρέχει μια χρήσιμη αντίληψη του τι σημαίνει η μέτρηση επιφανειών. Στη συνέχεια προτείνονται ορισμένες μονάδες μέτρησης εμβαδού που συλλέγονται ή κατασκευάζονται εύκολα στις μεγάλες ποσότητες που θα χρειαστείτε.

- Στρογγύλες πλαστικές μάρκες, κέρματα, ή φασόλια. Δεν είναι απαραίτητο στο αρχικό στάδιο να ταίριαζουν οι μονάδες μέτρησης εμβαδού στα κενά.
- Χρωματιστά πλακίδια (1 ίντσα πλαστικά τετράγωνα).
- Κομμένα τετράγωνα από ένα χαρτόνι. Τα μεγάλα τετράγωνα (με πλευρά περίπου 20 εκατοστά) είναι κατάλληλα για μεγάλα εμβαδά. Οι μικρότερες μονάδες θα πρέπει να έχουν πλευρά περίπου 5 με 10 εκατοστά.
- Τα φύλλα από εφημερίδες είναι άριστες μονάδες μέτρησης για πολύ μεγάλα εμβαδά.

Τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν μονάδες για να μετρήσουν επιφάνειες στην αθούσα, όπως τις επιφάνειες των θρανίων, τους πίνακες ανακοινώσεων ή τα βιβλία. Το περίγραμμα μεγάλων επιφανειών μπορεί να οριοθετηθεί με αυτοκό-



Καθένα από αυτά τα κενά μετράει για ένα τετράγωνο. Σε αυτή τη γωνία και στην απέναντι υπάρχει περίπου μισό τετράγωνο.

ΣΧΗΜΑ 20.10 Μέτρηση του εμβαδού ενός μεγάλου σχήματος σχεδιασμένου με κολλητική ταινία στο πάτωμα. Οι μονάδες είναι κομμάτια από χαρτόνι όλα κομμένα σε ίδιο σχήμα.

λητη ταινία στο πάτωμα. Τις μικρότερες περιοχές μπορείτε να τις αναπαράγετε σε χαρτί έτσι ώστε να μπορούν οι μαθητές να τις επεξεργαστούν στα θρανία τους. Τα πιο παράξενα σχήματα και οι κυρτές επιφάνειες αποτελούν μεγαλύτερη πρόκληση και κινούν πιο πολύ το ενδιαφέρον. Η επιφάνεια ενός καρπούζιού ή η παραπλευρική επιφάνεια ενός καλαδιού αχρήστων συνιστούν χρήσιμες προκλήσεις.

Σε μετρήσεις εμβαδού είναι πιθανό να υπάρχουν πολλές μονάδες που να ταιριάζουν μόνο εν μέρει. Μπορείτε να ξεκινήσετε με σχήματα στα οποία οι μονάδες θα ταιριάζουν απόλυτα. Δημιουργήστε ένα σχήμα χρησιμοποιώντας μονάδες και σχεδιάστε το περίγραμμά του. Μέχρι την τρίτη και την τετάρτη τάξη τα παιδιά θα πρέπει πια να αρχίσουν να καταπαίνονται με «ελλειπείς» μονάδες και να συναρμολογούν με το μυαλό τους δύο ή περισσότερες «ελλειπείς» μονάδες ώστε να μετρούνται σαν μία (βλ. σχήμα 20.10).

Η ακόλουθη δραστηριότητα είναι ένα καλό σημείο εκκίνησης για να δείτε τι ιδέες φέρουν τα παιδιά σας στην κατανόηση της μέτρησης του εμβαδού.

Δραστηριότητα 20.11

Γεμίστε και Συγκρίνετε

Σχεδιάστε δύο ορθογώνια και ένα άμορφο σχήμα πάνω σε ένα κομμάτι χαρτί. Φτιάξτε τα έτσι ώστε τα τρία εμβαδά να μην είναι τα ίδια αλλά να μην φαίνεται ξεκάθαρα ποιο είναι το μεγαλύτερο ή το μικρότερο. Η εργασία των παιδιών είναι να μαντέψουν ποιο από τα σχήματα είναι μεγαλύτερο και ποιο μικρότερο. Αφού έχουν καταγράψει τις υποθέσεις τους θα πρέπει να διαιλέσουν και να χρησιμοποιήσουν κάτι για να τα γεμίσουν και έτσι να αποφασίσουν. Χρωματιστά πλακίδια ή φασόλια. Τα παιδιά θα πρέπει να εξηγήσουν γραπτά τι ανακάλυψαν.

Στόχος σας στην αρχή είναι να ενισχύσετε την ιδέα ότι το εμβαδόν είναι ένα μέτρο επιφάνειας. Μην προχωρήσετε σε τύπους. Είναι πολύ πιθανόν οι διάφορες μονάδες να καταλήξουν σε διαφορετικές μετρήσεις για την ίδια επιφάνεια. Συζητήστε με τα παιδιά αυτές τις διαφορές και επιστημονάτε τις δυσκολίες που προκύπτουν στο στάδιο της εκτίμησης. Αποφύγετε να δημιουργήσετε την εντύπωση ότι υπάρχει μία «σωστή» απάντηση.

Είναι σημαντικό να υπογραμμίσουμε ότι το γέμισμα εμβαδών με μονάδες για να προσδιοριστεί μια μέτρηση δεν επιδρά σχεδόν καθόλου στην κατανόηση από τους μαθητές τύπων, όπως είναι ο $L \times W$ (μήκος $\times$ πλάτος) για τον προσδιορισμό ενός εμβαδού. Η διαδικασία γεμίσματος δεν τους βοηθά καθόλου να εστιάσουν σε διαστάσεις ή στον πολλαπλασιασμό ως μέσο απαριθμησης μονάδων. Ο μοναδικός στόχος αυτών των δραστηριοτήτων είναι να κατανήσουν τα παιδιά τη σημασία της μέτρησης.

Όχι αργότερα από την τετάρτη τάξη τα παιδιά θα πρέπει να αρχίσουν να συσχετίζουν τις ιδέες του εμβαδού με την έννοια του πολλαπλασιασμού με τη χρήση παρατάξεων στο εμβαδόν των ορθογώνων. Η ακόλουθη δραστηριότητα είναι ένα καλό πρώτο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση.

Δραστηριότητα 20.12

Σύγκριση Ορθογώνων – Τετραγωνικές Μονάδες

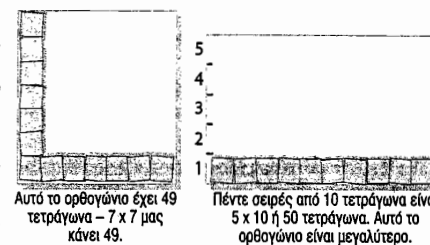
Δώστε στα παιδιά ένα ζευγάρι ορθογώνων που είτε είναι το ίδιο είτε έχουν πολύ κοντινό εμβαδόν. Τους δίνετε επίσης ένα μοντέλο ή ένα σχέδιο μιας τετραγωνικής μονάδας και τον κατάλληλο χάρακα. (Ο χάρακας θα πρέπει να μετρά ξεκάθαρα την κατάλληλη μονάδα. Τα παιδιά θα πρέπει να είναι εξοικειωμένα με τους χάρακες). Μην τους επιτρέπετε να κόψουν τα ορθογώνια. Αν θέλουν μπορούν να σχεδιάσουν επάνω τους. Η εργασία είναι να χρησιμοποιήσουν τους χάρακες τους για να καθορίσουν, με οποιοδήποτε τρόπο μπορούν, ποιο ορθογώνιο είναι μεγαλύτερο ή αν είναι τα ίδια. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν λέξεις, ζωγραφιές και αριθμούς για να εξηγήσουν τα συμπεράσματά τους. Ακολουθούν ορισμένα προτεινόμενα ζευγάρια.

4 x 10 και 5 x 8

5 x 10 και 7 x 7

4 x 6 και 5 x 5

Ο στόχος της προηγούμενης δραστηριότητας δεν είναι απαραίτητα να αναπτυχθεί ένα μοντέλο εμβαδού αλλά να εφαρμοστούν οι αναπτυσσόμενες ιδέες πολλαπλασιασμού των παιδιών στο εμβαδόν των ορθογώνων. Δεν θα χρησιμοποιήσουν όλα τα παιδιά μια πολλαπλασιαστική προσέγγιση. Για να μπορέσουν να μετρήσουν μία σειρά τετραγώνων στη μία πλευρά και μετά να την πολλαπλασιάσουν με το μήκος της άλλης, η πρώτη σειρά πρέπει να θεωρηθεί ως μία μονάδα που



ΣΧΗΜΑ 20.11 Μερικά παιδιά θα μπορούσαν να βρουν πώς πολλά τετράγωνα ταιριάζουν στην κάθε πλευρά και γνωρίζουν ότι ο πολλαπλασιασμός θα δώσει το συνολικό αριθμό.

έπειτα αναγράφεται για να γεμίσει το ορθογώνιο (Outhres, Mitchelmore, McPhail & Gould, 2003). Πολλά παιδιά θα προσαπλήσουν να σχεδιάσουν σε όλα τα τετράγωνα. Ωστόσο, κάποια μπορεί να χρησιμοποιήσουν τους χάρακές τους για να καθορίσουν τον αριθμό των τετραγώνων που θα πήγαιναν σε κάθε πλευρά και από εκεί να χρησιμοποιήσουν τον πολλαπλασιασμό για να καθορίσουν το εμβαδόν (βλ. Σχήμα 20.11). Βάζοντας τα παιδιά να μοιραστούν τις στρατηγικές τους, περισσότερα παιδιά θα εκτεθούν στη χρήση του πολλαπλασιασμού σε αυτό το συγκεκριμένο.

Χρήση Πλεγμάτων

Με εξαίρεση τον ηλεκτρονικό εξοπλισμό σχεδίασης, στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν εργαλεία σχεδιασμένα για τη μέτρηση εμβαδού. Ωστόσο, πλέγματα διαφόρων ειδών μπορούν να αντιμετωπιστούν ως ένα είδος «χάρακα για το εμβαδόν». Ένα πλέγμα με τετραγωνάκια για το εμβαδόν εκτελεί την ίδια ακριβώς λειτουργία με αυτήν που εκτελεί ένας χάρακας για το μήκος. Ξεδιλώνει δηλαδή μπροστά σας τις μονάδες. Τα πλέγματα με τετραγωνάκια είναι διαθέσιμα στα Blackline Masters. Ας σημειωθεί ότι μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και τριγωνικά πλέγματα. Δημιουργήστε διαφάνειες από χαρτί με πλέγματα. Αναθέστε στα παιδιά να τοποθετήσουν το διαφανές πλέγμα πάνω από την περιοχή που θα μετρήσουν και να αριθμήσουν τις μονάδες στο εσωτερικό του. Μια εναλλακτική μέθοδος είναι να σχεδιάσουμε το περίγραμμά μιας περιοχής πάνω σε ένα μιλμετρέ χαρτί.

Εμβαδόν και Περίμετρος

Το εμβαδόν και η περίμετρος (το μήκος γύρω από μια περιοχή) προκαλούν συνεχώς σύγχυση στα παιδιά. Πιθανόν αυτό να συμβαίνει επειδή και τα δύο αφορούν σε περιοχές που πρέπει να μετρηθούν ή επειδή τα παιδιά διδάσκονται τύπους και για τις δύο έννοιες και συνηθίζουν να τους μπερδεύουν. Όποια και να είναι η αιτία τα παιδιά ακόμη και στην πέμπτη

και έκτη τάξη συχνά συγχέουν τις δύο έννοιες. Υπάρχουν αρκετά καλά βιβλία που αναφέρονται σε αυτή τη σύγχυση. (βλ. Rectanus 1997; Shroyer & Fitzgerald, 1986.)

Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση για να αντιμετωπιστεί αυτό το ζήτημα είναι να αντιπαραβάλλετε τις δύο έννοιες όπως γίνεται και στις δύο επόμενες δραστηριότητες.

Δραστηριότητα 20.13

Σταθερές Περίμετροι

Προμηθεύστε στα παιδιά σπάγκο με θηλιά που να έχει μήκος ακριβώς 24 μονάδες. (Χρησιμοποιήστε μη ελαστικό σπάγκο. Διπλασιάστε το σπάγκο και κάντε ένα σημάδι 1 ποδιού από την θηλιά. Δέστε ένα κόμπο ακριβώς δίπλα από το σημάδι έτσι ώστε η θηλιά που θα δημιουργηθεί να είναι 24 ίντσες.) Η εργασία είναι να αποφασίσουν τι ορθογώνια με διαφορετικό μέγεθος μπορούν να δημιουργηθούν με την περίμετρο των 24 ίντσών. Τα παιδιά ίσως να θέλουν να χρησιμοποιήσουν ένα πλέγμα μιας ίντσας πάνω στο οποίο να τοποθετήσουν τους σπάγκους τους. Κάθε διαφορετικό ορθογώνιο μπορεί να καταγραφεί σε χαρτί με πλέγμα και να σημειωθεί το εμβαδόν.

Μια εναλλακτική του σπάγκου με τη θηλιά είναι να χρησιμοποιήσετε απλά χαρτί με πλέγματα του εκατοστού και να ζητήσετε από τα παιδιά να βρουν τα ορθογώνια με περίμετρο 24.

Δραστηριότητα 20.14

Σταθερά Εμβαδά

Προμηθεύστε τα παιδιά με 36 τετράγωνα πλακίδια όπως είναι τα Color Tiles. Η εργασία είναι να δουν πόσα ορθογώνια μπορούν να φτιάξουν με εμβαδόν 36, χρησιμοποιώντας δηλαδή 36 πλακίδια για να δημιουργήσουν γεμάτα ορθογώνια όχι μόνο την περίμετρό τους. Κάθε σχήμα που προκύπτει θα πρέπει να καταγράφεται σχεδιάζοντας το περίγραμμά του και τις διαστάσεις του σε χαρτί με πλέγμα. Τα χαρτιά με πλέγμα ενός εκατοστού ή μισού εκατοστού είναι πολύ καλά για αυτές τις καταγραφές. Τα παιδιά θα πρέπει να καθορίσουν και να καταγράψουν την περίμετρο για κάθε ορθογώνιο.

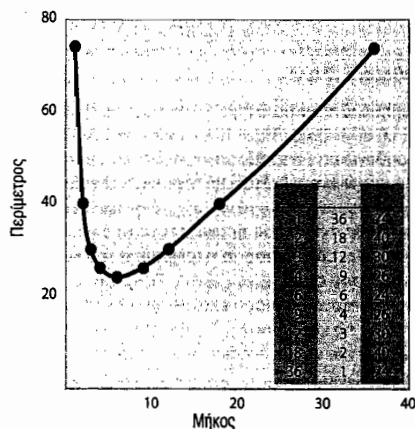


Σταμάτο και στοπάζαρι

Πριν διαβάσετε παρακάτω αναλογιστείτε τις δύο προηγούμενες δραστηριότητες. Στη δραστηριότητα «Σταθερά εμβαδά» έχουν όλες οι περίμετροι με το ίδιο μήκος. Και αν όχι, τι μπορείτε να πείτε για τα σχήματα με μεγαλύτερη ή μικρότερη περίμετρο; Στη δραστηριότητα «Σταθερές περίμετροι» θα είναι όλα τα εμβαδά ίσα. Γιατί ή γιατί όχι;

Ίσως να ξαφνιαστήκατε διαπιστώνοντας ότι δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με ίσα εμβαδά δεν έχουν απαραίτητα και ίσες περιμέτρους. Όμοια, δύο σχήματα με ίσες περιμέτρους δεν έχουν πάντα ίσα εμβαδά. Και, φυσικά, αυτή η διαπίστωση δεν περιορίζεται στα ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

Καθώς τα παιδιά ασχολούνται με τις δραστηριότητες 20.13 και 20.14 ζητήστε τους να καταγράφουν τα νέα εμβαδά και τις νέες περιμέτρους που βρίσκουν σε ένα πίνακα. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα μπορούν να κάνουν γραφήματα που να δείχνουν τις σχέσεις ανάμεσα στην πλευρά του παραλληλόγραμμου και στο εμβαδόν αλλά και την περίμετρο. Για τα δεδομένα που βρήκανε στην δραστηριότητα με τις σταθερές περιμέτρους, προτείνετε τους να σχεδιάσουν το μήκος σε σχέση με το πλάτος των διάφορων παραλληλόγραμμων. Θα πρέπει επίσης να σχεδιάσουν το μήκος σε σχέση με τα διάφορα εμβαδά. Οι σχέσεις στα γραφήματα και τους πίνακες είναι αρκετά καλά πρώτα παραδείγματα των συναρτήσεων. Για τη δραστηριότητα με τα σταθερά εμβαδά, τα παιδιά θα υποθέσουν να βρουν εννέα διαφορετικά παραλληλόγραμμα, υποθέτοντας ότι τα παραλληλόγραμμα 2×18 και 18×2 είναι διαφορετικά. Το γράφημα του μήκους σε σχέση με την περίμετρο (Σχήμα 20.12) δείχνει πως καθώς το παραλληλόγραμμο πλησιάζει το σχήμα ενός τετραγώνου, η περίμετρος μικραίνει.



ΣΧΗΜΑ 20.12 Παραλληλόγραμμα δημιουργούνται με τη χρήση 36 πλακιδίων. Το γράφημα απεικονίζει πώς το μήκος του κάθε ορθογώνιου επηρεάζει την περίμετρο. Η μικρότερη περίμετρος θα υπάρχει πάντα όταν το παραλληλόγραμμο είναι πιο «παχύ», ή σε αυτή την περίπτωση, τετράγωνο. Το γράφημα μπορεί να σχεδιαστεί χωρίς να υπάρχει καμία άλλη δεξιοτέχνη εκτός από την ικανότητα σχεδιασμού σημείων.

Αν και η εξίσωση του γραφήματος στο Σχήμα 20.12 μπορεί να είναι πολύ δύσκολο να καθοριστεί από τα παιδιά, μπορούν να σχεδιάσουν τα σημεία και να σχηματίσουν την καμπύλη. Για να πάρετε το μοντέλο παρατηρήστε ότι $A = 36 = LW$. Επομένως, $W = 36/L$. Αντικαταστήστε αυτό στον τύπο $P = 2L + 2W$ και θα πάρετε $P = 2L + 2(36/L)$.

Υπάρχει μια συσχέτιση χαρακτηριστικών που είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα. Αν διερευνήσετε τις δύο τελευταίες δραστηριότητες, πιθανόν θα παρατηρήσατε ότι, όταν το εμβαδόν είναι σταθερό, το σχήμα με τη μικρότερη περίμετρο είναι το τετράγωνο. Για μια σταθερή περίμετρο, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι επίσης το τετράγωνο. Από όλα τα σχήματα ανεξαρτήτως εκείνο με τη μικρότερη περίμετρο και με σταθερό εμβαδόν είναι ο κύκλος. Αυτό σημαίνει ότι, δεδομένου ότι το εμβαδόν είναι σταθερό, όσο «παχύτερο» είναι ένα σχήμα τόσο μικρότερη είναι η περίμετρος του, ενώ όσο «λεπτότερο» είναι το σχήμα τόσο μεγαλύτερη είναι η περίμετρος του. (Ένα αντιπροσωπευτικό αποτέλεσμα ισχύει και στις τρεις διαστάσεις. Αντικαταστήστε την περίμετρο με εμβαδόν και το εμβαδόν με όγκο.)

Μέτρηση Όγκου και Χωρητικότητας

Ο όγκος και η χωρητικότητα είναι και οι δύο όροι για τη μέτρηση του «μεγέθους» τρισδιάστατων περιοχών. Ο όρος χωρητικότητα χρησιμοποιείται γενικά για να αναφερθούμε στο ποσό που χωράει σε ένα δοχείο. Οι καθιερωμένες μονάδες χωρητικότητας περιλαμβάνουν γαλόνια, τέταρτα του γαλονιού, λίτρα και χιλιοστόμετρα, μονάδες που χρησιμοποιούνται για τα υγρά καθώς και για τα δοχεία που τα περιέχουν. Ο όρος όγκος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναφερθούμε στην χωρητικότητα ενός δοχείου, αλλά χρησιμοποιείται και για το μέγεθος των μονάδων. Οι καθιερωμένες μονάδες όγκου εκφράζονται με μονάδες μήκους, όπως οι κυβικές ίντσες ή τα κυβικά εκατοστά.

Δραστηριότητες Σύγκρισης

Η σύγκριση των όγκων στέρεων αντικειμένων είναι πολύ δύσκολη. Τα μικρότερα παιδιά θα πρέπει να εστιάσουν στη χωρητικότητα. Μια απλή μέθοδος σύγκρισης της χωρητικότητας είναι να γεμίσετε ένα δοχείο με κάτι και μετά να το αδειάσετε στο δοχείο σύγκρισης. Μέχρι την τρίτη τάξη τα παιδιά θα έχουν κατανοήσει την έννοια «χωράει περισσότερα» αναφορικά με τα δοχεία. Η έννοια του όγκου για τα στερεά αντικείμενα μπορεί να μην είναι τόσο άμεσα κατανοητή. Ακόμα και αν αυτές οι ιδέες είναι κατανοητές, μία ή δύο δραστηριότητες σύγκρισης μπορεί να είναι διασκεδαστικές.

Τα μικρά παιδιά θα πρέπει να έχουν πολλές εμπειρίες ά-

μεσης σύγκρισης της χωρητικότητας διαφορετικών δοχείων. Συγκεντρώστε μια μεγάλη ποικιλία από κονσερβοκούτια, μικρά κουτιά και πλαστικά δοχεία. Συγκεντρώστε όσο το δυνατόν περισσότερα διαφορετικά σχήματα καθώς και μερικά πλαστικά φτυαράκια. Κόψτε ένα πλαστικό δίδυμο μπουκάλι στη μέση και χρησιμοποιήστε το πάνω μέρος σαν χωνί. Το ρύζι ή τα ξερά φασόλια είναι κατάλληλα για να γεμίσετε τα δοχεία. Η άμμος και το νερό δημιουργούν πολύ μεγαλύτερη ακαταστασία.

Δραστηριότητα 20.15

Ταξινόμηση της Χωρητικότητας

Εφοδιάστε τα παιδιά με μια συλλογή από δοχεία με επικέτες, φροντίστε μία από τις οποίες να φέρει την ένδειξη «στόχος». Αποστολή των παιδιών είναι να ταξινομήσουν τη συλλογή σύμφωνα με το ποια δοχεία χωρούν περισσότερη, λιγότερη ή περίπου την ίδια ποσότητα με το δοχείο-στόχο. Δώστε τους ένα φύλλο καταγραφής όπου θα περιλαμβάνονται τα δοχεία σε λίστα και δίπλα σε κάθε δοχείο θα υπάρχουν οι επιλογές που θα πρέπει να κυκλώνουν: «χωράει περισσότερο», «χωράει λιγότερο» και «χωράει περίπου το ίδιο». Γράψτε δύο φορές τις επιλογές για κάθε δοχείο. Η πρώτη επιλογή είναι για την καταγραφή μιας εικασίας που κάνετε μετά από παρατήρηση. Η δεύτερη είναι για να καταγράψετε «τι βρήκατε». Προμηθεύστε τα παιδιά με ένα υλικό για γέμισμα (όπως φασόλια ή ρύζι), φτυαράκια και χωνιά. Αποφύγετε τις σαφείς οδηγίες, αργότερα όμως συζητήστε τις ιδέες των παιδιών για την επίλυση της δραστηριότητας.

Δραστηριότητα 20.16

Με Σειρά Χωρητικότητας

Προμηθεύστε τα παιδιά με μια σειρά από πέντε ή έξι δοχεία διαφορετικού μεγέθους και σχήματος με επικέτες, και αναθέστε τους να τα ταξινομήσουν από το μικρότερο σε όγκο στο μεγαλύτερο. Αυτό μπορεί να αποτελέσει μια πρόκληση για τα παιδιά. Μη δώσετε απαντήσεις. Αφήστε τους μαθητές να δουλέψουν σε ομάδες, ώστε να καταλήξουν σε μια λύση, και ζητήστε τους να σας εξηγήσουν πώς έφτασαν σε αυτήν.

Μην περιμένετε τα παιδιά να είναι σε θέση να προβλέψουν με ακρίβεια ποιο από τα δύο δοχεία θα έχει μεγαλύτερη χωρητικότητα. Ακόμα και οι ενήλικες δυσκολεύονται να το κρίνουν αυτό. Δοκιμάστε μόνοι σας την ακόλουθη δραστηριότητα και έπειτα με τα παιδιά. Πάρτε δύο φύλλα χαρτόνι. Με το ένα κάντε ένα σωληνωτό σχήμα (κύλινδρο) κολλώντας τις δύο μεγαλύτερες άκρες μαζί. Κάντε ένα πιο κοντό και πιο χοντρό σωλήνα από το άλλο χαρτόνι κολλώντας μαζί τις πιο κο-

ντές πλευρές. Όταν είναι κάθεται τοποθετημένοι, ποιος κύλινδρος χωράει περισσότερα, ή έχουν την ίδια χωρητικότητα;

Αυτή η εργασία αποτελεί καλή μέθοδο διερεύνησης για τα μεγαλύτερα παιδιά και τα αποτελέσματα μπορεί να σας εκπλήξουν. Προτού κάνετε αυτή τη δραστηριότητα με την τάξη σας, επιτηρήστε τους για να δείτε πόσα παιδιά διαλέγουν ποια επιλογή. Οι περισσότερες ομάδες χωρίζονται χοντρικά σε τρία μέρη: κοντός και χοντρός, ψηλός και λεπτός, ίδιος. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε μοντέλα προσπαθήστε να χρησιμοποιήσετε ένα υλικό για να γεμίσετε τους κύλινδρους όπως, μπαλίες αφρολέξ συσκευασίας, φυσιόλια ή φασόλια. Τοποθετήστε το λεπτό κύλινδρο μέσα στο χοντρό. Γεμίστε τον εσωτερικό κύλινδρο και έπειτα σηκώστε τον αφήνοντας έτσι το υλικό με το οποίο το γεμίσατε να πέσει μέσα στο χοντρό κύλινδρο.

Ο προφανής όγκος των στέρεων αντικειμένων μπορεί συχνά να μας ξεγελάσει, κάνοντας έτσι μία μέθοδο σύγκρισης δύσκολη. Για να συγκρίνουμε όγκους στερεών αντικειμένων όπως μια μπάλα και ένα μήλο πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποια μέθοδος μετατόπισης. Δώστε στα παιδιά δύο ή τρία δοχεία που στο καθένα θα υπάρχουν τα αντικείμενα που πρέπει να συγκριθούν και ένα υλικό για να τα γεμίσουν όπως ρύζι ή φασόλια. Με αυτόν τον εξοπλισμό ορισμένα παιδιά μπορεί να σκεφτούν μια δικιά τους μέθοδο σύγκρισης. Μια προσέγγιση είναι να γεμίσετε πρώτα ένα δοχείο εντελώς και μετά να αδειάσετε το περιεχόμενο σε ένα άλλο. Τοποθετήστε μετά ένα ανακείμενο στο δοχείο και γεμίστε το ξανά μέχρι πάνω χρησιμοποιώντας το ίδιο υλικό γεμίσματος από το πρώτο δοχείο. Ο όγκος του υλικού που περισσεύει είναι ίσος με τον όγκο του αντικείμενου. Σημαδεύστε το επίπεδο του υπόλοιπου υλικού πάνω στο δοχείο προτού επαναλάβετε το πείραμα και με άλλα αντικείμενα. Συγκρίνοντας το επίπεδο των υπόλοιπων από τα υλικά γεμίσματος για δύο ή περισσότερα αντικείμενα, μπορείτε να συγκρίνετε και τους όγκους.

Η ακόλουθη δραστηριότητα είναι μια τρισδιάστατη εκδοχή της δραστηριότητας με τα σταθερά εμβαδά. Εδώ ο όγκος είναι σταθερός και τα παιδιά αναζητούν μεταβολές στο εμβαδό της επιφάνειας.

Δραστηριότητα 20.17

Σταθερός όγκος: Συγκρίνοντας Πρίσματα

Δώστε σε κάθε ζευγάρι παιδιών σφηνουβλάκια ή ξύλινους κύβους. Η εργασία τους είναι, για ένα σταθερό αριθμό κύβων να φτιάξουν διαφορετικά ορθογώνια πρίσματα και να καταγράψουν το εμβαδόν της επιφάνειας για το κάθε ένα που σχηματίσαν. Ένας καλός αριθμός κύβων που μπορούμε να σας προτείνουμε είναι 64, εφόσον μία ένα μικρό εμβαδόν επιφάνειας μπορεί να προκύψει από $4 \times 4 \times 4$. Με τους 64 κύβους μπορούν να γίνουν πολλά πρίσματα. Ωστόσο, αν δεν έχετε τόσους, άλλες καλές επιλογές είναι 24 ή 36. Χρησιμοποιώντας τους πίνακες που φτιάχνουν τα παιδιά, θα

πρέπει να παρατηρήσουν οποιαδήποτε πρότυπα προκύπτουν. Ιδιαίτερα, τι συμβαίνει στο εμβαδό της επιφάνειας όταν το πρίσμα γίνεται λιγότερο σαν ένα ψηλό, λεπτό κουτί και περισσότερο σαν κύβος;

Ο στόχος εδώ είναι τα παιδιά να συνειδητοποιήσουν ότι ο όγκος δεν καθορίζει το εμβαδό της επιφάνειας και να αναγνωρίσουν ότι το πρότυπο ανάμεσα στο εμβαδό της επιφάνειας και στον όγκο είναι παρόμοιο με αυτό που βρήκαμε ανάμεσα στο εμβαδό και τη περιμέτρου. Εξ ορισμού, τα πρίσματα που μοιάζουν περισσότερο με κύβο έχουν μικρότερο εμβαδό επιφάνειας από ότι τα πρίσματα με τον ίδιο όγκο που μοιάζουν όμως λιγότερο με κύβους.

Μόλις τα παιδιά έχουν αναπτύξει τα μοντέλα για τον υπολογισμό του εμβαδού και του όγκου, μπορούν να συνεχίσουν διερευνώντας τις σχέσεις ανάμεσα στο εμβαδό της επιφάνειας και τον όγκο χωρίς να φτιάχνουν στην πραγματικότητα τα πρίσματα.

Χρήση Μονάδων Όγκου και Χωρητικότητας

Δύο τύποι μονάδων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μέτρηση του όγκου και της χωρητικότητας: στερεές μονάδες και δοχεία. Οι στερεές μονάδες είναι αντικείμενα όπως ξύλινοι κύβοι ή παλιά μπαλάκια του τένις, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να γεμίσουν το δοχείο που μετράται. Ο άλλος τύπος μοντέλου μονάδας είναι ένα μικρό δοχείο που γεμίζει και αδειάζει κατά επανάληψη στο δοχείο που μετράται. Στη συνέχεια παρατίθενται παραδείγματα μονάδων που ίσως θελήσετε να συγκεντρώσετε:

- Πλαστικά καπάκια και ιατρικά κυπελλάκια για υγρά είναι κατάλληλα για πολύ μικρές μονάδες.
- Πλαστικά βάζα και δοχεία σχεδόν κάθε μεγέθους μπορούν να χρησιμεύσουν ως μονάδες.
- Ξύλινα κυβάρια ή κομμάτια κάθε μεγέθους χρησιμεύουν ως μονάδες, αρκεί να έχετε πολλά του ίδιου μεγέθους.
- Μπορείτε ακόμη να χρησιμοποιήσετε μπιλές συσκευασίας από αεροζόλ. Αν και δεν εφαρμόζουν τέλεια το ένα με το άλλο, δεν παύουν να αποτελούν εννοιολογικές μονάδες μέτρησης όγκου.

Οι δραστηριότητες μέτρησης της χωρητικότητας είναι παρόμοιες με αυτές του μήκους και του εμβαδού. Η εκτίμηση της χωρητικότητας είναι πολύ πιο διασκεδαστική γιατί είναι πολύ πιο δύσκολη. Το να βρείτε τρόπους να μετρήσετε δοχεία όπως ένα μεγάλο χαρτόνιο κουτί σε σχέση με μία σχετικά μικρή μονάδα τύπου δοχείου μπορεί να είναι μία εξαιρετική πρόκληση για ομάδες παιδιών της τετάρτης και της πέμπτης τάξης. Αυτό μπορεί να γίνει προτού αναπτυχθούν τα μοντέλα του όγκου.

Οι όγκοι ορθογώνιων κουτιών όπως είναι ένα κουτί παπουτσιών μπορεί να καθοριστεί αν το γεμίσουμε με οποιοδήποτε από τα υλικά γεμίσματος που αναφέραμε νωρίτερα. Ωστόσο, εδώ υπάρχει μία ευκαιρία να προετοιμάσετε τα παιδιά για τα μοντέλα όγκου με ένα τρόπο παρόμοιο με αυτόν που αναλύσαμε για το εμβαδό των ορθογώνιων. Αν δώσετε στα παιδιά ένα κουτί και αρκετούς κύβους για να το γεμίσουν, κατά πάσα πιθανότητα θα μετρήσουν τους κύβους αντί να χρησιμοποιήσουν οποιαδήποτε πολλαπλασιαστική δομή. Η ακόλουθη δραστηριότητα είναι παρόμοια με τη Δραστηριότητα 20.12 «Σύγκριση Ορθογώνιων - Τετραγωνικές Μονάδες».

Δραστηριότητα 20-18

Σύγκριση Κουτιών - Κυβικές Μονάδες

Δώστε στα παιδιά ένα ζευγάρι μικρά κουτιά από χαρτόνι που έχετε διπλώσει. (Βλ. Σχήμα 20.13). Χρησιμοποιήστε μονάδες διαστάσεων που να ταιριάζουν στους κύβους που έχετε. Τα παιδιά παίρνουν δύο κουτιά, ίσα ακριβώς με ένα κύβο και τον κατάλληλο χάρακα. (Αν χρησιμοποιήσετε κύβους 2 εκατοστών κάντε ένα χάρακα που η μονάδα του να είναι ίση με 2 εκατοστά.) Η εργασία των παιδιών είναι να αποφασίσουν ποιο κουτί έχει τον μεγαλύτερο όγκο ή αν έχουν τον ίδιο όγκο.

Σας δίνουμε ορισμένες προτάσεις για τις διαστάσεις των κουτιών ($L \times W \times H = M \times N \times Y$)

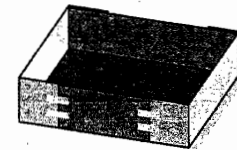
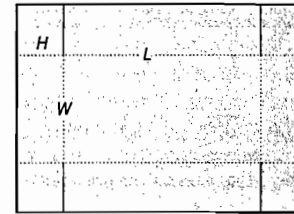
$6 \times 3 \times 4$ $5 \times 4 \times 4$ $3 \times 9 \times 3$ $6 \times 6 \times 2$ $5 \times 5 \times 3$

Τα παιδιά θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν λέξεις, ζωγραφιές και αριθμούς για να εξηγήσουν τα συμπεράσματά τους.

Μία χρήσιμη πληροφορία για αυτή τη δραστηριότητα είναι πρώτα να βρείτε πόσοι κύβοι χωράνε στον πάτο του κουτιού. Μερικά παιδιά, αν και σίγουρα όχι όλα, θα ανακαλύψουν ένα πολλαπλασιαστικό κανόνα για τον όγκο. Τα κουτιά μπορούν να γεμίσουν με κύβους για να επιβεβαιώσουν τα συμπεράσματά. Δεν θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν τύποι εκτός και αν τα παιδιά είναι σε θέση να τους εξηγήσουν. Ο στόχος σε αυτή τη δραστηριότητα δεν είναι απαραίτητα η ανάπτυξη ενός τύπου.

Κύπελλα-Μεζούρες: Κατασκευή και Χρήση

Τα όργανα για τη μέτρηση της χωρητικότητας συνήθως χρησιμοποιούνται για μικρές ποσότητες υγρών ή υλικών που μπορούμε να αδειάσουμε σε δοχεία, όπως το ρυζί ή το νερό. Τα συγκεκριμένα εργαλεία συναντώνται στην κουζίνα και στο εργαστήριο. Όπως και με τα άλλα όργανα, αν τα παιδιά κατασκευάσουν τα δικά τους, είναι πιθανόν να κατανοήσουν καλύτερα τις μονάδες και την προσέγγιση στη διαδικασία της μέτρησης.



ΣΧΗΜΑ 20.13 Κάντε μικρά κουτιά ξεκινώντας με ένα ορθογώνιο και ζωγραφίζοντας ένα τετράγωνο σε κάθε γωνία όπως φαίνεται στο σχήμα. Κόψτε πάνω στις γραμμές που είναι σχεδιασμένες με τη συνεχή γραμμή και διπλώστε το κουτί τσακίζοντας τα τετράγωνα στις γωνίες προς τα έξω και κολλώντας τα στις πλευρές όπως φαίνεται.

Μία κούπα-μεζούρα μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας για μονάδα ένα μικρό δοχείο. Επιλέξτε ένα μεγάλο, διαφανές δοχείο για τη μεζούρα και ένα μικρό δοχείο για μονάδα. Γεμίστε τη μονάδα με φασόλια ή ρυζί, αδειάστε τη στο μεγάλο δοχείο και βάλτε ένα σημάδι που να δείχνει τη στάθμη. Επαναλάβετε μέχρι η μεζούρα να γεμίσει σχεδόν ως επάνω. Αν η μονάδα είναι μικρή, ίσως χρειαστούν σημάδια μόνο ανά 5 μονάδες. Πάνω στο δοχείο δεν χρειάζεται να είναι γραμμένος ο αντίστοιχος αριθμός σε κάθε σημάδι. Τα παιδιά συχνά δυσκολεύονται να διαβάσουν κλίμακες στις οποίες δεν υπάρχει ένδειξη για κάθε σημάδι ή στις οποίες κάθε σημάδι αντιστοιχεί σε περισσότερες από μία μονάδες. Αυτή είναι μια ευκαιρία να τους βοηθήσετε να καταλάβουν πώς να ερμηνεύσουν τις γραμμές πάνω σε μια πραγματική κούπα-μεζούρα.

Τα παιδιά θα πρέπει να χρησιμοποιούν τις κούπες-μεζούρες τους και να συγκρίνουν τις μετρήσεις με εκείνες που έγιναν γεμίζοντας απευθείας το δοχείο από τη μονάδα. Η μεζούρα πιθανόν να οδηγήσει σε λάθη λόγω των ανακριβών σημάτων. Αυτή είναι μια ευκαιρία να επισημάνετε ότι τα όργανα μέτρησης από μόνα τους μπορούν να αποτελέσουν πηγή λάθους κατά τις μετρήσεις. Όσο μεγαλύτερη είναι η ακρίβεια κατασκευής ενός οργάνου και όσο πιο προσεγγιστική η βαθμολόγησή του τόσο μικρότερο είναι και το ποσοστό λάθους που οφείλεται στο όργανο.

Μέτρηση Βάρους και Μάζας

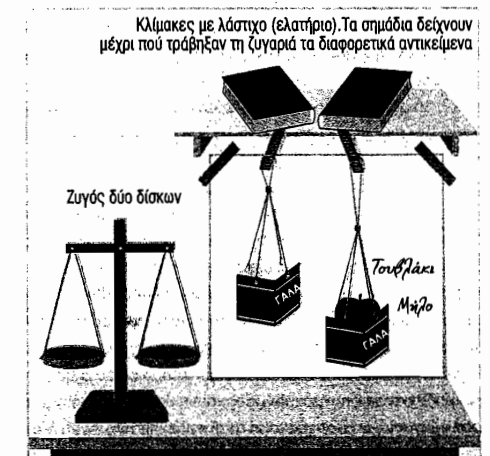
Το βάρος είναι ένα μέτρο της έλξης ή της δύναμης της βαρύτητας που ασκείται σε ένα αντικείμενο. Η μάζα είναι η πο-

σότητα της ύλης σε ένα αντικείμενο και ένα μέτρο της δύναμης που απαιτείται για την επιτάχυνσή του. Στη σελήνη, όπου η βαρύτητα είναι πολύ μικρότερη από ό,τι στη Γη, ένα αντικείμενο έχει μικρότερο βάρος αλλά την ίδια μάζα με εκείνη που έχει και στη Γη. Για πρακτικούς σκοπούς, οι μετρήσεις της μάζας και του βάρους πάνω στη Γη θα είναι περίπου ίδιες. Σε αυτή την ανάλυση, οι όροι, *βάρος* και *μάζα* θα χρησιμοποιούνται ως συνώνυμα.

Κάνοντας Συγκρίσεις

Ο πιο εύληπτος τρόπος να συγκρίνετε το βάρος δύο αντικείμενων είναι να κρατήσετε από ένα σε κάθε χέρι, να τεντώσετε τα χέρια σας και να αισθανθείτε τη σχετική έλξη προς τα κάτω που σας ασκεί το καθένα - με αυτόν τον τρόπο μπορείτε να μεταδώσετε αποτελεσματικά σε ένα μικρό παιδί τι σημαίνει «βαρύτερο» και τι «ελαφρύτερο». Αυτή η προσωπική εμπειρία μπορεί στη συνέχεια να μεταφερθεί σε έναν από τους δύο βασικούς τύπους ζυγαριάς - στην πλάστιγγα και στο καντάρι. Το Σχήμα 20.14 δείχνει μια χειροποίητη εκδοχή καθεμιάς από τις δύο. Οι απλές ζυγαριές και των δύο τύπων διατίθενται σε όλους τους καταλόγους των προμηθευτών σχολικού εξοπλισμού.

Τα παιδιά θα πρέπει πρώτα να χρησιμοποιήσουν τα χέρια τους για να εκτιμήσουν ποιο από τα δύο αντικείμενα είναι βαρύτερο. Όταν στη συνέχεια τοποθετήσουν τα αντικείμενα στους δύο δίσκους μιας ζυγαριάς, είναι αυτονόητο ότι ο δίσκος που γέρνει είναι εκείνος που φέρει το βαρύτερο αντικείμενο. Ακόμη και μια σχετικά απλή ζυγαριά θα εντοπίσει μικρές διαφορές. Αν δύο αντικείμενα τοποθετηθούν διαδοχικά σε μια ζυγαριά με ελατήριο, το βαρύτερο αντικείμενο θα



ΣΧΗΜΑ 20.14 Δύο απλές ζυγαριές

τραβήξει το δίσκο χαμηλότερα. Τόσο η πλάστιγγα όσο και το καντάρι είναι πράγματι πολύτιμα εργαλεία στην τάξη. (Πρακτικά, τα καντάρια μετρούν το βάρος και οι πλάστιγγες τη μάζα. Γιατί.)

Με κάθε είδος ζυγαριάς, οι δραστηριότητες ταξινόμησης και διάταξης μπορούν να πραγματοποιηθούν από τα πολύ μικρά παιδιά. Για τα μεγαλύτερα παιδιά, οι δραστηριότητες σύγκρισης δεν είναι απαραίτητες. (Γιατί.)

Χρήση Μονάδων Βάρους ή Μάζας

Κάθε σύνολο από ομοιόμορφα αντικείμενα με την ίδια μάζα μπορεί να λειτουργήσει ως σύνολο μονάδων βάρους. Για τα πολύ ελαφριά αντικείμενα, οι ξύλινοι ή πλαστικοί κύβοι είναι κατάλληλοι. Οι μεγάλες μεταλλικές ροδέλες που βρίσκουμε στα καταστήματα οιδητικών είναι κατάλληλες για τη ζύγιση ελαφρώς βαρύτερων αντικειμένων. Θα χρειαστεί να βασιστείτε στα καθιερωμένα βαρίδια για να ζυγίσετε αντικείμενα με βάρος ένα κιλό ή και περισσότερο.

Το βάρος δεν μπορεί να μετρηθεί άμεσα. Πρέπει να χρησιμοποιηθεί είτε ζυγός είτε μία ζυγαριά. Σε ένα ζυγό, τοποθετήστε ένα αντικείμενο στον έναν δίσκο και βαρίδια στον άλλο, ώπου οι δύο δίσκοι να ισορροπήσουν. Σε μια ζυγαριά με ελατήριο τοποθετήστε πρώτα το αντικείμενο και σημαδέψτε τη θέση στην οποία θα φτάσει ο δίσκος σε ένα κομμάτι χαρτί που θα έχετε κολλήσει πίσω από το δίσκο. Αφαιρέστε το αντικείμενο και τοποθετήστε μόνο όσα βαρίδια χρειάζονται για να τραβήξουν το δίσκο προς τα κάτω μέχρι το ίδιο σημείο. Συζητήστε πως τα ίδια βάρη θα τραβήξουν προς τα κάτω το ελατήριο ή τον μάντι με την ίδια δύναμη.

Ενώ τα παιδιά μαθαίνουν την έννοια του βαρύτερου και του ελαφρύτερου σχετικά χωρίς, η αντίληψη των μονάδων βάρους ή μάζας είναι λίγο πιο δύσκολη. Σε κάθε τάξη, ακόμη και μια σύντομη εμπειρία με άτυπες μονάδες βάρους αποτελεί μια καλή προετοιμασία για τις τυπικές μονάδες και κλίμακες.

Κατασκευή και Χρήση μιας Ζυγαριάς

Οι περισσότερες ζυγαριές που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας ζωή, δείχνουν έναν αριθμό όταν ένα αντικείμενο τοποθετείται πάνω ή μέσα σε αυτές. Δεν υπάρχουν ορατές μονάδες. Πώς όμως δίνει η ζυγαριά το σωστό αριθμό; Κατασκευάζοντας μια ζυγαριά που να δείχνει ένα αριθμητικό αποτέλεσμα χωρίς τη προσφυγή σε μονάδες, τα παιδιά μπορούν να διαπιστώσουν πώς λειτουργούν οι ζυγαριές.

Μέχρι την τρίτη τάξη τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν άτυπες μονάδες βάρους και να βαθμονομήσουν μια απλή ζυγαριά με λαστιχο σαν κι αυτή του Σχήματος 20.14. Μονάστε κάπου τη ζυγαριά, τοποθετήστε ένα κομμάτι χαρτί από πίσω και βαρίδια στο δίσκο. Κάθε πέντε βαρίδια, κάνετε

και ένα σημάδι στο χαρτί. Τα σημάδια που προκύπτουν αντιστοιχούν στα σημάδια που είναι χαραγμένα στο καντράν μιας τυπικής ζυγαριάς. Ο δίσκος λειτουργεί ως δείκτης. Στο καντράν της ζυγαριάς, η κίνηση του δίσκου προς τα κάτω αυτόματα προκαλεί τη μετακίνηση του δείκτη. Η αξία αυτής της δραστηριότητας έγκειται στο ότι διαπιστώνεται πώς κατασκευάζονται οι ζυγαριές. Ακόμη και οι ψηφιακές ζυγαριές με οθόνη πλήρους ένδειξης βασίζονται στην ίδια αρχή.

Μέτρηση του Χρόνου

Ο χρόνος είναι λίγο διαφορετικός από τα άλλα χαρακτηριστικά που μετράμε συνήθως στα σχολεία επειδή δεν μπορούμε να τον δούμε ή να τον αισθανθούμε. Είναι ακόμα πιο δύσκολος για τα μικρά παιδιά, δεν μπορούν να κατανοήσουν τις μονάδες χρόνου ή να δείξουν πώς ταιριάζουν σε μία δεδομένη χρονική περίοδο ή διάρκεια.

Σύγκριση της Διάρκειας

Μπορείτε να αντιληφθείτε το χρόνο ως τη διάρκεια ενός γεγονότος από την αρχή του ως το τέλος του. Όπως και με τα άλλα χαρακτηριστικά, για να μπορέσουν τα παιδιά να κατανοήσουν επαρκώς το χαρακτηριστικό του χρόνου, θα πρέπει να κάνουν συγκρίσεις γεγονότων που έχουν διαφορετική διάρκεια. Αν δυο γεγονότα ξεκινούν την ίδια στιγμή, η μικρότερη διάρκεια θα τελειώσει πρώτα και η άλλη θα διαρκέσει περισσότερο. Για παράδειγμα, ποια σβούρα γυρνάει πιο γρήγορα; Ωστόσο, αυτή η μορφή σύγκρισης εστιάζει στη λήξη της διάρκειας αντί για την ίδια τη διάρκεια. Για να μπορέσετε να σκεφθείτε το χρόνο ως κάτι που μπορείτε να τον μετρήσετε, θα βοηθήσει ιδιαίτερα να συγκρίνετε δύο γεγονότα που δεν ξεκινούν ταυτόχρονα. Αυτό απαιτεί να μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κάποια μορφή μέτρησης χρόνου.

Μια άτυπη μονάδα μέτρησης του χρόνου θα μπορούσε να είναι η διάρκεια της ταλάντωσης ενός εκκρεμούς, που έγινε με ένα μπαλάκι του τένις που κρέμεται από το ταβάνι με ένα μακρύ σπάγκο. Ο μακρύς σπάγκος παράγει μια αργή ταλάντευση και επομένως μπορείτε να καταφέρετε να τη μετρήσετε. Το σταθερό στάξιμο μιας σταγόνας από μια χολασμένη βρύση σε ένα άδειο δοχείο είναι μια άλλη επιλογή. Το επίπεδο του νερού σημειώνεται στο τέλος της περιόδου. Όταν αδειάζετε το σημειωμένο δοχείο και το χρησιμοποιήσετε για να χρονομετρήσετε μία δεύτερη διάρκεια, τα δύο σημάδια μπορούν να συγκριθούν. Ένα πλεονέκτημα της μεθόδου με τη σταγόνα είναι ότι δεν υπάρχουν μονάδες να μετρήσετε. Απλές δραστηριότητες που θα μπορούσαν να συγκριθούν είναι αυτές που ακολουθούν.

- Να στοιβάξετε δέκα κύβους ένα-ένα και έπειτα να τους αφαιρέτε ένα-ένα.



ΣΧΗΜΑ 20.15 Ο υπολογισμός του χρόνου προσεγγιστικά με τη χρήση ενός ρολογιού με ένα δείκτη

- Η εκτύπωση του αλφάβητου.
- Να περπατάτε αργά σε ένα προκαθορισμένο μονοπάτι.
- Να κάνετε μία ράβδο από 15 κύβους Unifix.

Κάθε δραστηριότητα την κάνει μόνο ένα παιδί, έτσι ώστε να μην υπάρχει ανταγωνισμός ή αντιπαλότητα μεταξύ τους.

Η Ανάγνωση του Ρολογιού

Το συνηθισμένο όργανο μέτρησης του χρόνου είναι το ρολόι. Ωστόσο, το να μάθουμε να λέμε το χρόνο δεν έχει μεγάλη σχέση με τη μέτρηση του χρόνου. Έχει όμως μεγάλη σχέση με τις δεξιότητες στο να μάθουμε να διαβάζουμε ένα όργανο. Η ανάγνωση του ρολογιού είναι μια δεξιότητα που είναι δύσκολο να διδαχθεί.

Ορισμένες Δυσκολίες

Οι δυσκολίες που συναντούν τα μικρά παιδιά στο διάβασμα του ρολογιού πιθανόν να οφείλονται στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Τα παιδιά συνήθως διδάσκονται πρώτα να διαβάσουν στα ρολόγια τις ώρες, μετά τα μισάωρα και τα τέταρτα της ώρας και στο τέλος τα πεντάλεπτα και τα διαστήματα του ενός λεπτού. Στα πρώτα στάδια αυτής της διαδικασίας, τα παιδιά βλέπουν ρολόγια ρυθμισμένα ακριβώς στην ώρα ή στο μισάωρο. Πολλά παιδιά που διαβάζουν ένα ρολόι ρυθμισμένο στις 7:00 ή στις 2:30 δεν έχουν ιδέα τι ώρα είναι στις 6:58 ή στις 2:33.

Τα ψηφιακά ρολόγια επιτρέπουν στα παιδιά να διαβάσουν τις ώρες εύκολα, δεν συνδέουν όμως τόσο καλά τις ώρες μεταξύ τους. Για να ξέρει το παιδί ότι η ψηφιακή ένδειξη 7:58 σημαίνει ότι η ώρα είναι σχεδόν 8, το παιδί πρέπει να γνωρίζει ότι η μία ώρα έχει 60 λεπτά, ότι το 58 είναι κοντά στο 60 και ότι τα 2 λεπτά δεν είναι πολύς χρόνος. Αυτές τις έννοιες δεν τις έχουν εμπεδώσει τα περισσότερα παιδιά της πρώτης και πολλά παιδιά από τη δεύτερα. Το αναλογικό ρολόι (με τους δείκτες) δείχνει στα παιδιά πόσο «απέχουν» οι ώρες μεταξύ τους χωρίς να χρειάζεται να κατανοούν τους μεγάλους αριθμούς ή ακόμη και πόσα λεπτά έχει μία ώρα. Επιπρόσθετα, η καθιερωμένη προσέγγιση στην ανά-

γνωση του ρολογιού αγνοεί τις εμφανείς διαφορετικές ενέργειες και λειτουργίες των δύο δεικτών. Ο μικρός δείκτης δηλώνει, γενικά, το χρόνο κατά προσέγγιση (στην πλησιέστερη ώρα) και ο μεγάλος δείκτης δηλώνει το χρόνο (τα λεπτά) πριν ή ύστερα από κάποια ώρα. Όταν κοιτάζουμε τον ωροδείκτη, εστιάζουμε το βλέμμα μας εκεί που δείχνει. Με το λεπτοδείκτη το σημείο εστίασης βρίσκεται στο διάστημα που έχει διανύσει γύρω από το ρολόι ή το διάστημα που του μένει για να φτάσει πάλι στο πάνω μέρος.

Προτεινόμενη Προσέγγιση

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι πιθανό να βοηθήσουν τα παιδιά να κατανοήσουν και να διαβάσουν τα αναλογικά ρολόγια.

1. Ξεκινήστε με ένα ρολόι με έναν δείκτη. Ένα ρολόι που έχει μόνο ωροδείκτη μπορεί να διαβαστεί με αρκετή ακρίβεια. Χρησιμοποιήστε σε μεγάλο βαθμό την κατά προσέγγιση γλώσσα: «Είναι περίπου 7». «Είναι λίγο μετά τις 9». «Είναι κάπου ανάμεσα στις 2 και στις 3» (βλ. Σχήμα 20.15).
2. Σχολιάστε τι συμβαίνει στον μεγάλο δείκτη καθώς ο μικρός δείκτης πηγαίνει από τη μία ώρα στην επόμενη. Όταν ο μεγάλος δείκτης βρίσκεται στο 12, ο ωροδείκτης δείχνει ακριβώς σε έναν αριθμό. Αν ο ωροδείκτης είναι περίπου στα μισά ανάμεσα στους αριθμούς, που περίπου θα βρίσκεται ο λεπτοδείκτης; Αν ο ωροδείκτης βρίσκεται λίγο μετά ή λίγο πριν από μια ώρα (10 με 15 λεπτά), πού θα είναι περίπου ο λεπτοδείκτης;
3. Χρησιμοποιήστε δύο αληθινά ρολόγια, ένα μόνο με τον ωροδείκτη και ένα με δύο δείκτες. (Αφαιρέστε το λεπτοδείκτη από ένα παλιό ρολόι.) Καλύψτε το ρολόι με τους δύο δείκτες κατά διαστήματα μέσα στη μέρα, δείχνετε στα παιδιά το ρολόι με τον ένα δείκτη. Συζητήστε το χρόνο κατά προσέγγιση. Ζητήστε από τα παιδιά να προβλέψουν πού θα πρέπει να βρίσκεται ο λεπτοδείκτης. Εσεκπαστε το άλλο ρολόι και ελέγξτε.
4. Διδάξτε το χρόνο μετά από μια ορισμένη ώρα σε 5 λεπτά διαστήματα. Αφού θα έχετε φτάσει στο σημείο 3, μετρήστε ανά πεντάδες κατά τη φορά του ρολογιού. Αντί να προβλέψουν ότι ο λεπτοδείκτης δείχνει το 4, ενθαρρύνετε τα παιδιά να πουν ότι είναι περίπου 20 λεπτά μετά την ώρα (περίπου και 20). Καθώς θα αναπτύσσονται οι δεξιότητές τους, προτείνετε στα παιδιά πάντα να κοιτούν πρώτα τον μικρό δείκτη ή αλλιώς τον ωροδείκτη για να μάθουν περίπου τι ώρα είναι και μετά να εστιάζονται στο λεπτοδείκτη για μεγαλύτερη ακρίβεια.
5. Προβλέψτε την ένδειξη ενός ψηφιακού ρολογιού όταν σας δείξουν ένα αναλογικό ρολόι και, αντίστροφα. Ρυθμίστε ένα αναλογικό ρολόι όταν σας δείξουν ένα ψηφιακό. Αυτό γίνεται τόσο για τα ρολόγια με έναν δείκτη όσο και για εκείνα με δύο δείκτες.

Συναφείς Έννοιες

Τα παιδιά χρειάζεται επίσης να μάθουν για τα δευτερόλεπτα, τα λεπτά και τις ώρες και να αποκτήσουν κάποια αντίληψη σχετικά με τη διάρκεια των συγκεκριμένων μονάδων. Μπορείτε να τους βοηθήσετε καταβάλλοντας συνεχή προσπάθεια να σημειώνετε τη διάρκεια σύντομων και χρονοβορών γεγονότων κατά τη διάρκεια της μέρας. Η χρονομέτρηση σύντομων συμβάντων του ½ με 2 λεπτών και διασκεδαστική είναι και χρήσιμη. Ένα καλό πρότυπο είναι οι τηλεοπτικές εκπομπές και οι διαφημίσεις. Αναθέστε στα παιδιά να χρονομετρήσουν οικεία γεγονότα από την καθημερινή τους ζωή: το βούρτσισμα των δοντιών, το βραδινό φαγητό, τη διαδρομή με το ποδήλατο ως το σχολείο, το χρόνο που αφιερώνουν στην ομάδα μελέτης.

Καθώς τα παιδιά μαθαίνουν περισσότερα για τους διψήφιους αριθμούς, μπορείτε να κάνετε και τη σύνδεση ανάμεσα στο χρονικό διάστημα μετά την ώρα και στο χρόνο που μένει πριν από την ώρα. Αυτό τους χρησιμεύει όχι μόνο όταν λένε την ώρα, αλλά και για την αριθμητική τους αίσθηση. Παρατηρήστε ότι στην ακολουθία που προτείνεται τονίζεται σχεδόν αποκλειστικά ο χρόνος μετά την ώρα. Ο χρόνος πριν ή έως την ώρα μπορεί να ακολουθηθεί αργότερα.

Η ακολουθία δραστηριότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βοηθήσετε τα παιδιά από τη δεύτερη τάξη και πάνω, ακόμα και αν δεν έχετε ακολουθήσει την προηγούμενη ακολουθία με τα ρολόγια με τον ένα δείκτη.

Δραστηριότητα 20.19

Ρολόγια με ένα δείκτη

Προετοιμάστε μία σελίδα με φατσούλες ρολογιών (δείτε τα Blackline Masters). Σε κάθε ρολόι ζωγραφίστε ένα ωροδείκτη. Συμπεριλάβετε τοποθετήσεις που να είναι περίπου και τέταρτο, παρά τέταρτο, και μισή, και μερικές που να είναι κοντά στην ολόκληρη ώρα αλλά όχι ακριβώς. Για κάθε φατσούλα ρολογιού η εργασία των παιδιών είναι να γράψουν την ψηφιακή ώρα και να ζωγραφίσουν τον λεπτοδείκτη στο ρολόι εκεί που νομίζουν ότι πρέπει να είναι.



Η Δραστηριότητα «Ρολόγια με ένα Δείκτη» είναι μια καλή μέθοδος αξιολόγησης των δεξιοτήτων των παιδιών για την ανάγνωση των ρολογιών. Αν τα παιδιά στη τρίτη τάξη ή σε μεγαλύτερη τάξη δυσκολεύονται να διαβάσουν τα ρολόγια, η εργασία με τα ρολόγια με ένα δείκτη που προτείνουμε νωρίτερα θα προσφέρει μια διαφορετική προσέγγιση.

Ο Χρόνος που έχει Πέρασει

Ο καθορισμός του χρόνου που έχει περάσει είναι μία δεξιό-

τητα που απαιτείται από τα παιδιά από τα περισσότερα αναλυτικά προγράμματα. Είναι επίσης μια δεξιότητα που μπορεί να φανεί δύσκολη στα παιδιά, ιδιαίτερα όταν η χρονική περίοδος περιλαμβάνει και το μεσημέρι. Τα παιδιά πρέπει να ξέρουν πόσα λεπτά έχει η ώρα. Σε μία εθνική αξιολόγηση, μόνο το 58% των παιδιών της δευτέρας γυμνασίου μπορούσαν να πουν πόσες ώρες ισούνται με 150 λεπτά (Jones & Arbaugh, 2004). Αν τους δοθεί η ψηφιακή ώρα ή ο χρόνος που έχει περάσει μετά την ώρα, τα παιδιά θα πρέπει να μπορούν να πουν πόσα λεπτά μένουν μέχρι την επόμενη ώρα. Αυτό σίγουρα θα πρέπει να είναι μια νοσητική διαδικασία για τα παιδιά των 5 λεπτών. Αποφύγετε να βάλετε τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν χαρτί και μολύβι για να αφαιρέσουν το 25 από το 60.

Το να βρουν το χρόνο από τις, ας πούμε, 8:15 π.μ. μέχρι τις 11:45 π.μ. είναι μια δραστηριότητα με πολλά βήματα, ασχετως του τρόπου με τον οποίο γίνεται. Είναι δύσκολο να παρακολουθείτε αυτά τα ενδιάμεσα βήματα, όπως είναι και το να αποφασίσετε τι θα κάνετε πρώτα. Σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσατε να μετρήσετε τις ώρες από τις 8:15 μέχρι τις 11:15 και να προσθέσετε 30 λεπτά. Τι θα κάνατε όμως αν τα δύο σημεία, που ξεκινάει και τελειώνει ο χρόνος, είναι 8:45 και 11:15; Δεν θα βοηθούσε να προτείνετε μια μεμονωμένη μέθοδο ή έναν αλγόριθμο.

Επόμενο ζήτημα είναι τα π.μ. και μ.μ. Το πρόβλημα δεν οφείλεται τόσο στο γεγονός ότι τα παιδιά δεν καταλαβαίνουν τι συμβαίνει στο ρολόι το μεσημέρι ή τα μεσάνυχτα, όσο στο πρόβλημα που έχουν να μετρήσουν τις ενδιάμεσες ώρες.

Στην μέχρι τώρα ανάλυση, έχουμε ασχοληθεί με μία μόνη μορφή του προβλήματος. Υπάρχει επίσης και η εργασία του να βρουν τον χρόνο έναρξης αν τους έχουν δοθεί ο χρόνος λήξης και ο χρόνος που πέρασε. Παραμένοντας πιστοί στο πνεύμα της επίλυσης προβλημάτων και στη χρήση των μοντέλων, σκεφθείτε τα ακόλουθα.

Προτείνετε στα παιδιά να σχεδιάσουν μια κενή χρονογραμμή, ως γενικό μοντέλο για όλα αυτά τα προβλήματα του χρόνου που έχει περάσει (παρόμοια με την κενή ευθεία των αριθμών που αναλύσαμε στο Κεφάλαιο 13 για τον υπολογισμό). Κάποια παραδείγματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 20.16. Είναι σημαντικό να μην είστε υπερβολικά περιγραφικοί λέγοντας στα παιδιά πώς να χρησιμοποιήσουν τη χρονογραμμή εφόσον υπάρχουν πολλές εναλλακτικές. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 20.16(α), ένα παιδί μπορεί να μετρήσει τις ολόκληρες ώρες από τις 10:45 (11:45, 12:45, 1:45, 2:45, 3:45) και μετά να αφαιρέσει 15 λεπτά.

Μέτρηση γωνιών

Η μέτρηση γωνιών παρουσιάζει δυσκολίες για δύο λόγους. Πρώτον, επειδή το χαρακτηριστικό του μεγέθους μιας γωνίας συχνά παρανοείται, και, δεύτερον, επειδή εισάγεται η χρήση

μοιρογνωμόνιου χωρίς να έχει γίνει πρώτα κατανοητό πώς λειτουργεί αυτό το όργανο.

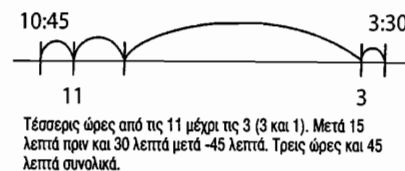
Σύγκριση γωνιών

Το χαρακτηριστικό του μεγέθους μιας γωνίας θα μπορούσε να ονομαστεί «άπλωμα των οσέλων της γωνίας». Οι γωνίες αποτελούνται από δύο πλευρές με απεριόριστο μήκος (ημιευθείες) και από μια κοινή μεταξύ τους κορυφή. Η μόνη διαφορά στο μέγεθός τους είναι το πόσο ευρύ ή πόσο στενό είναι το άνοιγμα ανάμεσα στα δύο οσέλη.

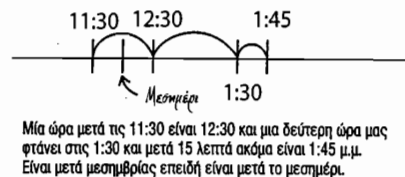
Ορισμένοι, συγγραφείς ζητούν από τα παιδιά να σκεφτούν πόσο έχει περιστραφεί η μια πλευρά μακριά από την άλλη. Δύο χάρακες που συγκρατούνται μαζί στα άκρα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παρουσίαση αυτής της ιδέας. Όπως περιστρέφεται ο ένας χάρακας, είναι φανερό ότι μεγαλώνει το μέγεθος της γωνίας. Ωστόσο, όταν βλέπουμε γωνίες, τα οσέλη έχουν ήδη περιστραφεί. Βλέπετε τις γωνίες ενός τριγώνου ως μία πλευρά που κινούμενη περιστροφικά απομακρύνθηκε από την άλλη;

Για να βοηθήσετε τα παιδιά να αντιληφθούν τι σημαίνει «άπλωμα των οσέλων», μπορείτε να συγκρίνετε απευθείας δύο γωνίες δημιουργώντας το ίχνος της μίας σε διαφανές χαρτί και

(α) Το σχολείο άρχισε αργά σήμερα στις 10:45 π.μ. Αν σχολάσατε στις 3:30, πόσο χρόνο ήσασταν σήμερα στο σχολείο;



(β) Το παιχνίδι άρχισε στις 11:30 π.μ. Αν διαρκεί 2 ώρες και 15 λεπτά, πότε θα τελειώσει;



ΣΧΗΜΑ 20.16 Ένα απλό σχέδιο μιας γραμμής μπορεί να φανεί χρήσιμο στην επίλυση προβλημάτων για το χρόνο που πέρασε. Δεν θα πρέπει να πείτε στα παιδιά πώς να χρησιμοποιήσουν την ευθεία των αριθμών. Για κάθε ένα από τα παραδείγματα που παρουσιάζονται εδώ, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με διαφορετικό τρόπο. Η αξία της χρονογραμμής βρίσκεται στο ότι τα παιδιά βλέπουν που είναι το μεσημέρι και παρακολουθούν τα διάφορα μέρη των ενδιάμεσων χρόνων.

τοποθετώντας την πάνω στην άλλη. Βεβαιωθείτε ότι δεν παραλείψατε να αναθέσετε στα παιδιά να συγκρίνουν γωνίες με πλευρές διαφορετικού μήκους. Μια μεγάλη γωνία με κοντές πλευρές πιθανόν να δείχνει μικρότερη από μια στενή γωνία με μακριές πλευρές. Πρόκειται για μια συνηθισμένη παρανόηση από την πλευρά των παιδιών. Μόλις τα παιδιά είναι σε θέση να διακρίνουν μια μεγάλη γωνία από μια μικρή, ανεξάρτητα από το μήκος των πλευρών της γωνίας, μπορείτε να προχωρήσετε στη μέτρηση των γωνιών.

Χρησιμοποιώντας Μονάδες Μέτρησης των Γωνιών

Μία μονάδα για τη μέτρηση της γωνίας μπορεί να είναι μια γωνία. Τίποτε άλλο δεν έχει το ίδιο χαρακτηριστικό του ανοίγματος που θέλουμε να μετρήσουμε. (Σε αντίθεση με την κοινή γνώμη, δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσετε μόνες για να μετρήσετε γωνίες).

Δραστηριότητα 20.20

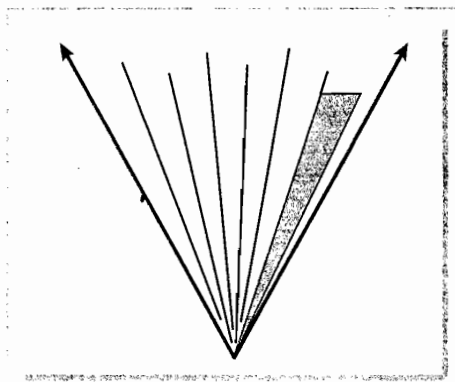
Μια γωνία – μονάδα

Προμηθεύετε κάθε παιδί με μια καρτέλα αρχαιοελληνικής ή με ένα μικρό κομμάτι χαρτόνι. Ζητήστε τους να σχεδιάσουν μια στενή γωνία στο χαρτόνι με έναν χάρακα και μετά να την κόψουν. Η γωνία που προκύπτει μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί ως μονάδα μέτρησης των γωνιών, μετρώντας πόσες φορές θα χωρέσει σε μια δοσμένη γωνία, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 20.17. Μοιράστε ένα φύλλο εργασίας με γωνίες διαφόρων μεγεθών επάνω και αναθέστε στα παιδιά να τις μετρήσουν χρησιμοποιώντας τη μονάδα τους. Επειδή θα έχουν φτιάξει τις δικές τους γωνίες – μονάδες μέτρησης, τα αποτελέσματα θα διαφέρουν και μπορούν να σχολιαστούν σχετικά με το μέγεθος των μονάδων.

Η δραστηριότητα 20.20 διευκρινίζει ότι η μέτρηση μιας γωνίας είναι το ίδιο με τη μέτρηση ενός μήκους ή ενός εμβαδού. Οι γωνίες-μονάδες χρησιμοποιούνται για να γεμίσουν ή να καλύψουν το «άπλωμα» μιας γωνίας, όπως ακριβώς οι μονάδες μήκους γεμίζουν ή καλύπτουν ένα μήκος. Μόλις αυτή η έννοια γίνει πλήρως κατανοητή, μπορείτε να προχωρήσετε στη χρήση των εργαλείων μέτρησης.

Κατασκευή Μοιρογνωμόνιου

Το μοιρογνωμόνιο είναι ένα από τα λιγότερο κατανοητά όργανα μέτρησης που υπάρχουν στα σχολεία. Μέρους της δυσκολίας οφείλεται στο γεγονός ότι οι μονάδες (μόρες) είναι πάρα πολύ μικρές. Θα ήταν τεχνικά αδύνατον να κοπεί μια μόνο μόρα και να χρησιμοποιηθεί, για παράδειγμα, στη Δραστηριότητα 20.20. Ένα άλλο πρόβλημα είναι ότι δεν υπάρχουν ορατές



ΣΧΗΜΑ 20.17 Χρησιμοποιώντας μια μικρή σφήνα κομμένη από μια καρτέλα αρχειοθέτησης και ως μονάδα μέτρησης γωνίας, αυτή η γωνία είναι περίπου $7 \frac{1}{2}$ τέτοιες σφήνες. Η ακρίβεια στη μέτρηση με αυτές τις μη τυπικές γωνίες είναι λιγότερο σημαντική από ότι η ιδέα του πώς μια γωνία χρησιμοποιείται για να μετρήσει μια άλλη γωνία.

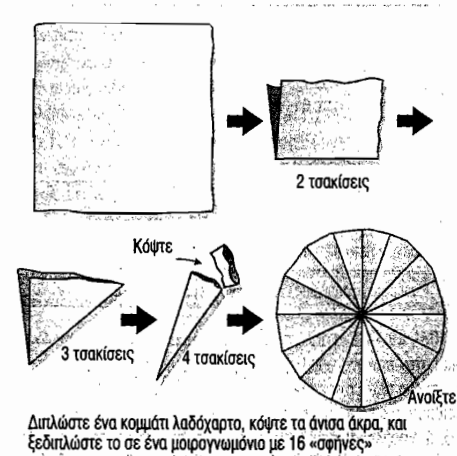
γωνίες, παρά μόνο μικρά σημάδια γύρω από το εξωτερικό άκρο του μοιρογνωμονίου. Τέλος, η αριθμηση που υπάρχει στα περισσότερα μοιρογνωμόνια ακολουθεί τόσο τη φορά του ρολογιού όσο και την αντίθετη φορά κατά μήκος των μαρκαρισμένων άκρων. «Ποιους αριθμούς θα χρησιμοποιήσω;» Κατασκευάζοντας ένα μοιρογνωμόνιο με μια μεγάλη γωνία ως μονάδα, όλα αυτά τα περίεργα χαρακτηριστικά μπορούν να γίνουν κατανοητά. Μια προσεκτική σύγκριση με ένα τυπικό μοιρογνωμόνιο θα σας επιτρέψει να χρησιμοποιήσετε αυτό το όργανο αφού θα το έχετε πρώτα κατανοήσει.

Κόψτε περίπου ένα πόδι από κοινή λαδόκολλα για κάθε παιδί. Πείτε στα παιδιά να διπλώσουν το χαρτί στα δύο και να τσακίσουν καλά στο σημείο που το διπλώσαν. Πείτε τους να διπλώσουν και πάλι στη μέση, έτσι ώστε οι διπλωμένες άκρες να ενωθούν. Επαναλάβετε το ίδιο άλλες δύο φορές, ενώοντας κάθε φορά τις διπλωμένες άκρες και τσακίζοντας τες καλά. Κόψτε ή σκίστε την εξωτερική άκρη από το τελικό σφηνοειδές σχήμα αφήνοντας 4 ή 5 ίντσες από την κορυφή και ξεδιπλώστε. Αν η διαδικασία πραγματοποιηθεί σωστά, 16 γωνίες θα περιβάλλουν το κέντρο, όπως φαίνεται στο σχήμα 20.18. Αυτό λειτουργεί ως ένα εξαιρετικό μοιρογνωμόνιο με μονάδα μια γωνία που ισοδυναμεί με το ένα όγδοο μιας ευθείας γωνίας. Είναι αρκετά διαφανές ώστε να μπορεί να τοποθετηθεί πάνω από μια γωνία σχεδιασμένη σε χαρτί, στον πίνακα ή στο διαφανοσκόπιο με σκοπό τη μέτρηση γωνιών, όπως δείχνει το Σχήμα 20.19. Με ένα μοιρογνωμόνιο κατασκευασμένο από λαδόχαρτο, τόσο μικρό όσο αυτό του Σχήματος 20.19 μπορούν να γίνουν αποδεκτές εκτιμήσεις μετρήσεων. Στο συγκεκριμένο σχήμα, έχει μετρηθεί μια γωνία ενός τυχαίου πολυγωνικού σχήματος. Χρησιμοποιήστε ένα μοι-

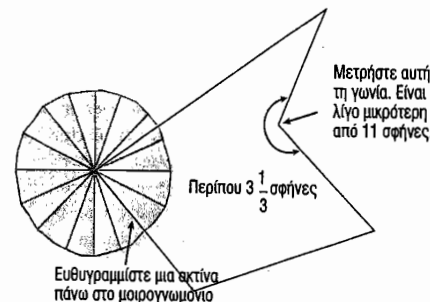
ρογνωμόνιο από λαδόχαρτο για να μετρήσετε τις υπόλοιπες τέσσερις γωνίες αυτού του πολυγώνου όσο πιο προσεκτικά γίνεται. Κάντε κλασματικές εκτιμήσεις. Το άθροισμα και των πέντε εσωτερικών γωνιών θα πρέπει να πλησιάζει τις 24 σφήνες. Υπάρχουν δύο δυνατοί τρόποι να μετρήσετε τη γωνία που δείχνει το βέλος. Πώς θα μετρούσατε αυτή τη γωνία, αν το μοιρογνωμόνιό σας ήταν μόνο ένα ημικύκλιο και όχι ολόκληρος ο κύκλος;

Το μοιρογνωμόνιο από λαδόχαρτο κάνει αρκετά ξεκάθαρο το γεγονός πώς ένα μοιρογνωμόνιο γεμίζει μια προς μέτρηση γωνία με γωνίες-μονάδες. Κατά τη μέτρηση γωνιών, τα παιδιά μπορούν εύκολα να εκτιμήσουν το μισό, το ένα τρίτο ή το ένα τέταρτο μιας «σφήνας», όπως θα μπορούσε να ονομαστεί αυτή η άτυπη γωνία-μονάδα μέτρησης. Είναι αρκετά ακριβής για να μετρήσετε, για παράδειγμα, τις εσωτερικές γωνίες ενός πολυγώνου και να ανακαλύψετε τη συνηθισμένη σχέση ανάμεσα στο πλήθος των πλευρών και στο άθροισμα των εσωτερικών γωνιών. Για ένα τρίγωνο, το άθροισμα είναι 8 σφήνες, το οποίο γράφεται ως 8° . Για ένα τετράπλευρο, το άθροισμα είναι 16° . Και, γενικά, το άθροισμα για ένα n -γωνο είναι $(n-2) \times 8^\circ$. Ο δείκτης σφ είναι ένας πρόδρομος για το σύμβολο των μοιρών ($^\circ$).

Το Σχήμα 20.20 δείχνει πώς ένα ημικύκλιο από χαρτόνι μπορεί να μετατραπεί σε μοιρογνωμόνιο που μετρά τις γωνίες σε «σφήνες». Η συγκεκριμένη χαρτονένια εκδοχή είναι σχετικά πλησιέστερη στο κοινό μοιρογνωμόνιο, καθώς οι ακτίνες στην κορυφή δεν εκτείνονται προς τα κάτω και τα σημάδια αριθμούνται και προς τις δυο κατευθύνσεις. Η μόνη διαφορά ανάμεσα σε αυτό και σε ένα τυπικό μοιρογνωμόνιο είναι το μέγεθος της γωνίας-μονάδας μέτρησης. Η τυπική γωνία-μο-



ΣΧΗΜΑ 20.18 Κατασκευή ενός μοιρογνωμονίου από λαδόχαρτο.



ΣΧΗΜΑ 20.19 Μέτρηση των γωνιών ενός πολυγώνου με τη χρήση ενός μοιρογνωμονίου από λαδόχαρτο

νάδα μέτρησης είναι η μοίρα, η οποία είναι απλά μια πολύ μικρή γωνία. Ένα τυπικό μοιρογνωμόνιο δε βοηθά ιδιαίτερα στη διδασκαλία της σημασίας μιας μοίρας. Αλλά μια αναλογία ανάμεσα στις σφήνες και στις μοίρες, και ανάμεσα στα δύο αυτά μοιρογνωμόνια είναι μια πολύ αποτελεσματική προσέγγιση.

Εισαγωγή στις Τυπικές Μονάδες

Όπως επιστημονήθηκε και νωρίτερα, υπάρχει μια σειρά από λόγους για τους οποίους διδάσκεται η μέτρηση με τη χρήση άτυπων μονάδων. Ωστόσο, για να αποκτήσουν το νόημα των μετρήσεων, τα παιδιά χρειάζεται να είναι εξοικειωμένα με τις κοινές μονάδες μέτρησης, να είναι σε θέση να κάνουν εκτιμήσεις με αυτές τις μονάδες, και να ερμηνεύσουν σωστά τις μετρήσεις, που εκφράζονται με τις τυπικές μονάδες.

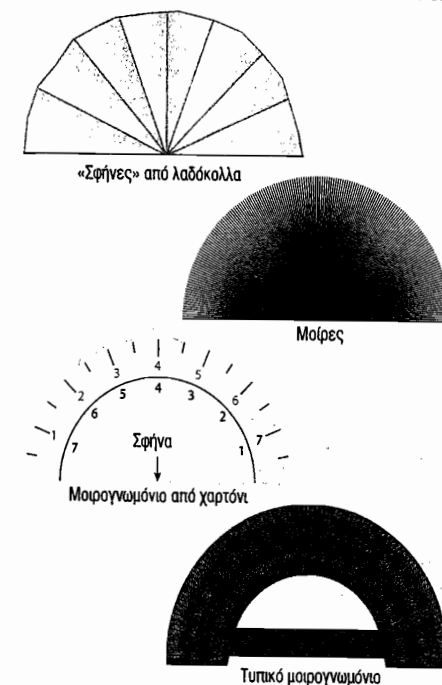
Το μεγαλύτερο ίσως λάθος κατά τη διδασκαλία της μέτρησης είναι το γεγονός ότι δεν γίνεται ο καθορισμός και η διάκριση σε δύο τύπους αντικειμενικών στόχων: πρώτον, να γίνει κατανοητή η έννοια και η τεχνική της μέτρησης ενός ορισμένου χαρακτηριστικού και, δεύτερον, η εκμάθηση των τυπικών μονάδων που χρησιμοποιούνται συνήθως για τη μέτρηση ενός χαρακτηριστικού. Οι δύο αυτοί στόχοι μπορούν να αναταχθούν ξεχωριστά. Όταν επιχειρείται η επίτευξη και των δύο ταυτόχρονα, είναι πιθανόν να προκληθεί σύγχυση.



Στάματ και Σκοπάζομα

Πόσους από τους πέντε λόγους για τους οποίους χρησιμοποιούνται άτυπες μονάδες μέτρησης μπορείτε να ανακαλέσετε; Ποιοι από αυτούς σας φαίνονται πιο σημαντικοί και γιατί;

Διαβάστε ξανά τη λίστα με τους λόγους για τη χρήση των άτυπων μονάδων στη σελίδα 479. Μόνο ορισμένοι από αυτούς ισχύουν σε κάθε περίπτωση που θα συναντήσετε. Για να μη



Τα σημάδια στο μοιρογνωμόνιο με σφήνες από χαρτόνι είναι οι ακτίνες σε εκείνο από λαδόχαρτο. Τα σημάδια στο πλαστικό μοιρογνωμόνιο είναι οι ακτίνες των μοιρών. Μια μοίρα είναι απλά μια πολύ μικρή γωνία. Μια μεγάλη εικόνα των 180 μοιρών βρίσκεται διαθέσιμη στο Blackline Masters.

ΣΧΗΜΑ 20.20 Συγκρίσεις μοιρογνωμονίων και μονάδων μέτρησης γωνιών

σταταλήσετε χρόνο από το πρόγραμμα διδασκαλίας σας σχετικά με τη μέτρηση είναι σημαντικό να ξέρετε γιατί χρησιμοποιείτε άτυπες ή μη καθιερωμένες μονάδες μέτρησης. Μόνο όταν τα παιδιά θα έχουν άνεση με τη μέτρηση ενός χαρακτηριστικού, μπορούν να επικεντρωθούν σε ανακατέμεινα όπως κόπες-μεζούρες και τέταρτα του γαλονιού ή στο πλήθος των ιντσών σε ένα πόδι ή των ποδών μιας γιάρδας ή να έχουν αίσθηση της ποσότητας του γραμμαριού ή των κιλών.

Διδακτικοί στόχοι

Επιστημονούνται τρεις γενικοί στόχοι σχετικά με τις τυπικές μονάδες μέτρησης:

1. **Εξοικείωση με τη μονάδα.** Εξοικείωση σημαίνει ότι τα παιδιά θα πρέπει να έχουν μια βασική αντίληψη για το μέγεθος των συνηθέστερα χρησιμοποιούμενων μονάδων και για το χαρακτηριστικό που μετρούν. Χωρίς αυτή τη

εξοικείωση είναι ανέφικτη η κατανόηση της μέτρησης. Είναι πιο σημαντικό να γνωρίζουν πόσο είναι περίπου 1 λίτρο νερού ή να είναι σε θέση να υπολογίσουν ότι ένα ράφι έχει περίπου 5 πόδια μήκος, παρά να έχουν την ικανότητα να μετρούν με ακρίβεια κάποιο από τα δυο.

2. **Ικανότητα επιλογής της κατάλληλης μονάδας.** Σχετική με την εξοικείωση είναι η γνώση των μονάδων μέτρησης που είναι κατάλληλες για την κάθε περίπτωση. Η επιλογή της κατάλληλης μονάδας έχει επίσης να κάνει με τη ζητούμενη ακρίβεια. (Θα μετρούσατε το γκαζόν σας για να αγοράσετε σπόρους για γρασίδι με την ίδια ακρίβεια που θα μετρούσατε ένα παράθυρο για να αγοράσετε ένα τζάμι;) Τα παιδιά χρειάζονται εξάσκηση στο να χρησιμοποιούν την κοινή λογική για την επιλογή των κατάλληλων τυπικών μονάδων.
3. **Γνώση ορισμένων σημαντικών σχέσεων μεταξύ των μονάδων.** Πρέπει να δοθεί έμφαση στις σχέσεις που χρησιμοποιούνται πιο συχνά, όπως στη σχέση ανάμεσα στις ίντσες, τα πόδια και τις γιάρδες, ή σε εκείνη ανάμεσα στα χιλιόμετρα και στα λίτρα. Οι μονότονες ασκήσεις μετατροπής ελάχιστα ενισχύουν την κατανόηση της μέτρησης. Ο στόχος του συχετισμού των μονάδων είναι ο λιγότερο σημαντικός από όλους τους στόχους της μέτρησης.

Εξοικείωση με τις Μονάδες

Δύο τύποι δραστηριοτήτων μπορούν να βοηθήσουν στην εξοικείωση με τις τυπικές μονάδες: (1) οι συγκρίσεις που εστιάζουν σε μία συγκεκριμένη μονάδα και (2) οι δραστηριότητες που διαμορφώνουν προσωπικά σημεία αναφοράς ή μέτρα σύγκρισης για τις μεμονωμένες μονάδες ή για απλά πολλαπλάσια των μονάδων.

Δραστηριότητα 20.21

Σχετικά με μια μονάδα

Προμηθεύετε τα παιδιά με ένα μοντέλο μιας τυπικής μονάδας, και αναθέστε τους να αναζητήσουν αντικείμενα που να έχουν περίπου τις ίδιες διαστάσεις με τη συγκεκριμένη μονάδα. Για παράδειγμα, για να εξοικειωθούν με το μέτρο, δώστε στα παιδιά ένα κομμάτι σχοινί μήκους 1 μέτρου. Ζητήστε τους να φτάσουν λίστες με πράγματα μήκους περίπου ενός μέτρου. Δημιουργήστε ξεχωριστές λίστες για τα αντικείμενα με λίγο μικρότερο (ή μεγαλύτερο), ή με το διπλάσιο (ή το μισό) μήκος. Ενθαρρύνετε τους να βρουν οικεία αντικείμενα από την καθημερινή τους ζωή. Στην περίπτωση του μήκους, μην παραλείψετε να συμπεριλάβετε τα κυκλικά μήκη. Αργότερα, τα παιδιά μπορούν να δοκιμάσουν να προβλέψουν αν ένα αντικείμενο, που θα τους δώσετε, έχει μήκος που υπερβαίνει, πλησάζει ή είναι μικρότερο του 1 μέτρου.

Η ίδια δραστηριότητα μπορεί να πραγματοποιηθεί και με άλλες μονάδες μήκους. Μπορείτε μάλιστα να ζητήσετε από τους γονείς να βοηθήσουν τα παιδιά να βρουν οικείες αποστάσεις που να είναι περίπου 1 μίλι ή 1 χιλιόμετρο. Προτείνετε μέσω μιας επιστολής να ελέγξουν τις αποστάσεις στη γειτονιά, ως το σχολείο ή το εμπορικό κέντρο, ή τις αποστάσεις κατά μήκος άλλων διαδρομών, που συχνά ακολουθούν.

Για μονάδες χωρητικότητας όπως η κούπα, το τέταρτο του γαλονιού και το λίτρο, τα παιδιά χρειάζονται από ένα δοχείο που να χωράει ή να έχει ένα σημάδι για μία μεμονωμένη μονάδα. Θα πρέπει τότε να βρουν άλλα δοχεία στο σπίτι και στο σχολείο που να χωρούν περίπου το ίδιο, περισσότερο και λιγότερο. Θυμηθείτε ότι τα σχήματα των δοχείων μπορεί να είναι πολύ παραπλανητικά κατά την εκτίμηση της χωρητικότητάς τους.

Για τις καθιερωμένες μονάδες βάρους του γραμμαρίου, του χιλιόγραμμου, της ουγκιάς και της λίβρας, οι μαθητές μπορούν να συγκρίνουν αντικείμενα σε ένα ζυγό δύο δίσκων, χρησιμοποιώντας απλά αντίγραφα κάθε μονάδας. Ίσως θα ήταν πιο αποτελεσματικό αν εργάζονταν με 10 γραμμάρια ή 5 ουγκιάς. Μπορείτε να ενθαρρύνετε τα παιδιά να φέρουν οικεία αντικείμενα από το σπίτι για να τα συγκρίνουν στη ζυγαριά της τάξης.

Οι τυπικές μονάδες εμβαδού εκφράζονται με μονάδες μήκους, όπως είναι οι τετραγωνικές ίντσες και εκατοστά ή τα τετραγωνικά πόδια και μέτρα. Συνεπώς είναι σημαντική η εξοικείωση με τα μήκη. Η εξοικείωση με τη μονάδα της μοίρας δεν είναι τόσο σημαντική όσο η αντίληψη των 30, 45, 60 και 90 μοιρών.

Η δεύτερη προσέγγιση για την εξοικείωση με τις μονάδες είναι να ξεκινήσετε με κάποια πολύ γνώριμα αντικείμενα και να χρησιμοποιήσετε τις διαστάσεις τους ως σημεία αναφοράς ή μέτρα σύγκρισης. Το άνοιγμα μιας πόρτας είναι λίγο ψηλότερο από 2 μέτρα. Μια σακούλα αλεύρι αποτελεί μια καλή αντιστοιχία για τα 5 κιλά. Το δωμάτιό σας πιθανόν να έχει μήκος περίπου 10 πόδια. Ένας συνδετήρας ζυγίζει περίπου 1 γραμμάριο και έχει πλάτος περίπου 1 εκατοστό. Ένα γαλόνι γάλα ζυγίζει λίγο λιγότερο από 4 λίτρα.

Δραστηριότητα 20.22

Αναφορές σε οικεία αντικείμενα

Για κάθε μονάδα μέτρησης στην οποία επιθυμείτε να εστιάσετε, ζητήστε από τα παιδιά να κάνουν έναν κατάλογο με πέντε τουλάχιστον οικεία τους αντικείμενα και να τα μετρήσουν χρησιμοποιώντας τη συγκεκριμένη μονάδα. Για τα μήκη, ενθαρρύνετε τους να συμπεριλάβουν μακριά και κοντά αντικείμενα για το βάρος, να βρουν τόσο ελαφριά όσο και βαριά αντικείμενα και συνεχίστε έτσι για όλες τις μονάδες μέτρησης. Οι μετρήσεις θα πρέπει να στογγυλοποιούνται σε φυσικούς αριθμούς. Συζητήστε τις λίστες στην τάξη, έτσι ώστε να ακουστούν όλες οι διαφορετικές ιδέες.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον όσον αφορά το μήκος παρουσιάζουν τα μέτρα σύγκρισης που προκύπτουν από το σώμα μας. Εξοικειωνόμαστε με αυτά όλο και περισσότερο με την πάροδο του χρόνου και μπορούμε να τα χρησιμοποιούμε ως κατά προσέγγιση χάρακες σε πολλές περιπτώσεις. Παρότι τα μικρά παιδιά μεγάλωνουν πολύ γρήγορα, τους είναι χρήσιμο να γνωρίζουν έστω και κατά προσέγγιση τα μήκη που φέρουν πάνω τους.

Δραστηριότητα 20.23

Προσωπικά Μέτρα Σύγκρισης

Μετρήστε το σώμα σας. Πόσο είναι περίπου το μήκος του πέλματος σας, της δασκελιάς σας, της παλάμης σας (τεντωμένης και σε μπουνιά), το πλάτος του δαχτύλου σας, το μήκος των βροχιόνων σας σε έκταση (από το ένα δάχτυλο στο άλλο και από τα δάχτυλα ως τη μύτη), η απόσταση γύρω από τον καρπό σας και γύρω από τη μέση σας και το ύψος σας ως τη μέση, ως τους ώμους και ως το κεφάλι; Πιθανόν να μην είστε σε θέση να τα θυμηθείτε όλα, κάποια όμως δεν αποκλείεται να αποδειχθούν χρήσιμα μέτρα σύγκρισης, ενώ άλλα να είναι άριστα μοντέλα μεμονωμένων μονάδων. (Κατά μέσο όρο, το πλάτος του νυχιού ενός παιδιού είναι περίπου 1 εκατοστό, και οι περισσότεροι άνθρωποι μπορούν να βρουν ένα μήκος των 10 εκατοστών κάποιο στο χέρι τους.)

Για να θυμάστε καλύτερα αυτές τις αντιστοιχίες, θα πρέπει να τις χρησιμοποιήσετε σε δραστηριότητες όπου τα μήκη, οι όγκοι και άλλα μεγέθη συγκρίνονται με τα μέτρα σύγκρισης για την εκτίμηση των μετρήσεων.

Επιλογή των Κατάλληλων Μονάδων

Θα έπρεπε να μετρήσουμε την αίθουσα σε πόδια ή σε ίντσες; Τους ταμιντόλιθους θα έπρεπε να τους ζυγίσουμε σε γραμμάριο ή σε χιλιόγραμμο; Οι απαντήσεις σε τέτοιου είδους ερωτήσεις προϋποθέτουν περισσότερα από την απλή γνώση του μεγέθους των μονάδων, αν και αυτή είναι ασφαλώς απαραίτητη. Πρέπει επίσης να λαμβάνεται υπόψη η ανάγκη για ακρίβεια. Αν μετρούσατε τον τοίχο σας για να κόψετε μια ανάλυση μεγέθους ταπεταζαρία ή ξυλεπένδυση, θα χρειαζόταν να τον μετρήσετε με μεγάλη ακρίβεια. Η μικρότερη μονάδα θα ήταν η ίντσα ή το εκατοστό, ενώ θα χρησιμοποιούσατε και μικρά κλασματικά μέρη. Αν όμως υπολογίζατε πόσες σειρές ανάγλυφον διακοσμητικών των 8 ποδιών πρέπει να αγοράσετε, θα ακούσε μάλλον το πιο κοντινό μέγεθος σε πόδια.

Δραστηριότητα 20.24

Μαντέψτε τη μονάδα

Βρείτε παραδείγματα μετρήσεων κάθε τύπου στις εφημερίδες, σε πινακίδες ή σε άλλα παραδείγματα της

καθημερινής ζωής. Παρουσιάστε το γενικότερο πλαίσιο και τις μετρήσεις, αλλά χωρίς μονάδες. Το ζητούμενο είναι να προβλεφθεί τι μονάδες μέτρησης χρησιμοποιήθηκαν. Ζητήστε από τα παιδιά να συζητήσουν τις επιλογές τους.

Σημαντικές Τυπικές Μονάδες και Σχέσεις

Τόσο τα συνηθισμένα όσο και τα μετρικά συστήματα περιλαμβάνουν πολλές μονάδες που δεν χρησιμοποιούνται στην καθημερινή ζωή. Ο Πίνακας 20.2 αποτελεί έναν κατάλογο με τις πιο συνηθισμένες μονάδες στο κάθε σύστημα. Το εθνικό ή το τοπικό σας αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών αποτελεί τον καλύτερο οδηγό για να αποφασίσετε ποιες μονάδες μπορούν να μάθουν τα παιδιά σας. Θυμηθείτε ότι τα σχολικά βιβλία έχουν γραφεί για να ικανοποιήσουν τις ανάγκες πολλών πολιτειών και για αυτό μπορεί να αγριάζουν μονάδες που δεν υπάρχουν στο αναλυτικό σας πρόγραμμα. Αυτές οι υπερβολικές πληροφορίες μπορεί να είναι βαρετές. Η εξοικείωση με τις συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες μονάδες θα πρέπει να είναι ο κεντρικός άξονας κάθε διδασκαλίας σχετικής με τις τυπικές μονάδες. (Δείτε Δραστηριότητες 20.21, 20.22 και 20.23).

Αυτές οι σχέσεις ανάμεσα στις μονάδες μέσα είτε στα μετρικά ή στα συνηθισμένα συστήματα αποτελούν συμβάσεις. Όντας τέτοιες, πρέπει απλά να πούμε στα παιδιά τι είναι αυτές οι σχέσεις, και πρέπει να σκεφθείτε δραστηριότητες για να τις ενισχύσετε. Μπορεί κάποιος να υποστηρίξει ότι η γνώση για το πόσο γρήγορα σε ένα φλιτζάνι ή πόσο είναι ένα τέταρτο του γαλονιού, ή να μπορούν να μετρήσουν με βήματα ένα μέτρο - εξοικείωση με τις μονάδες - είναι πιο σημαντικό από το να ξέρουμε πόσα φλιτζάνια είναι ένα τέταρτο του γαλονιού ή πόσες ίντσες είναι ένα μέτρο. Ωστόσο, στις μεσαίες τάξεις, η γνώση των βασικών σχέσεων γίνεται ακόμη πιο σημαντική στις εξετάσεις. Το αναλυτικό σας πρόγραμμα πρέπει να είναι ο οδηγός σας.

Το συνηθισμένο σύστημα έχει πολύ λίγα πρότυπα ή κανόνες για να καθοδηγήσουν τα παιδιά στην μετατροπή των μονάδων. Οι μονάδες για τα υγρά ή τη χωρητικότητα αφορούν κυρίως πολλαπλάσια του 2, του 4 και του 8, αλλά δεν υπάρχει σταθερό πρότυπο. Οι σχέσεις ανάμεσα στις ίντσες, τα πόδια και τις γιάρδες είναι πολύ συνηθισμένη και μπορεί να αποτελέσει την πηγή καλών λεκτικών προβλημάτων που αφορούν τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση.

Όμως το μετρικό σύστημα σχεδιάστηκε συστηματικά γύρω από τις δυνάμεις του δέκα. Μια κατανόηση του ρόλου της υποδιαστολής για τον καθορισμό της θέσης των μονάδων είναι μια δυναμική έννοια για να κάνουμε μετρικές μετατροπές (Βλ. Κεφάλαιο 18, Σχήμα 18.6). Καθώς τα παιδιά αρχίζουν να κατανοούν τη δομή των δεκαδικών συμβόλων, το μετρικό σύστημα μπορεί και πρέπει να αναπτυχθεί και στις επτά θέσεις: τρία προβλήματα για μικρότερες μονάδες (δέκατο,

ΠΙΝΑΚΑΣ 20.2

Συνηθέστερες Μονάδες Μέτρησης

	Σύστημα Μέτρησης	Καθιερωμένο Σύστημα Μέτρησης
Μήκος	χιλιοστό εκατοστό μέτρο χιλιόμετρο	ίντσα πόδι μέτρο μίλι
Εμβαδόν	τετραγ. εκατοστό τετραγ. μέτρο	τετραγωνική ίντσα τετραγωνικό πόδι τετραγωνική γάρδα
Όγκος	κυβικό εκατοστό κυβικό μέτρο	κυβική ίντσα κυβικό πόδι κυβική γάρδα
Χωρητικότητα	χιλιοστόλιτρο λίτρο	ουγκιά* κούπα τέταρτο γαλόνι
Βάρος	γραμμάριο κilo μετρικός τόνος	ουγκιά* λίβρα τόνος

*: στο συνηθισμένο σύστημα των ΗΠΑ ο όρος ουγκιά αντιστοιχεί σε μια μονάδα βάρους, από την οποία αν πάρουμε 16 μονάδες, θα έχουμε ένα κιλό, καθώς επίσης και σε μια μονάδα όγκου ή χωρητικότητας, από την οποία αν πάρουμε 8 μονάδες θα έχουμε μια κούπα-μέζουρα. Αν και οι δύο μονάδες έχουν το ίδιο όνομα, δε συσχετίζονται.

εκατοστό-, χιλιοστό-) και τρία για τις μεγαλύτερες μονάδες (δέκα-, εκατό-, χίλιο-). Αποφύγετε μηχανικούς κανόνες όπως «Για να κάνετε τα εκατοστά μέτρα, μετακινήστε την υποδιαστολή δύο θέσεις στα αριστερά». Όταν τα παιδιά από μόνα τους δεν δημιουργούν εννοιολογικές, λογικές μεθόδους για τις μετατροπές, οι κανόνες που ακούγονται αυθαίρετοι είναι σίγουρο ότι θα αποτύχουν και θα ξεχαστούν.

Δεν θα πρέπει να γίνονται ποτέ ακριβείς μετατροπές ανάμεσα στα μετρικά και τα συνηθισμένα συστήματα. Για όσο καιρό ζούμε σε μία χώρα που χρησιμοποιεί δύο μετρικά συστήματα, είναι χρήσιμες οι «ήπιες» ή «φιλικές» μετατροπές. Για παράδειγμα ένα λίτρο είναι «μια γουλιά περισσότερο» από ένα τέταρτο του γαλονιού και ένα μέτρο είναι λίγο πιο μακριά από μία γάρδα. Το ίδιο ισχύει και για τις οικείες αναφορές. Εκατό μέτρα είναι περίπου το μήκος ενός ποδοσφαιρικού γηπέδου ή περίπου 110 γιάρδες.

Κατά την αξιολόγηση της κατανόησης των παιδιών και την εξοικείωση με τις συνηθισμένες μονάδες, υπάρχει ο κίνδυνος να εστιάσουμε σε παραδοσιακές δραστηριότητες μετατροπής. Σκεφθείτε αυτές τις δύο δραστηριότητες:

1. 4 πόδια = _____ ίντσες.
2. Υπολογίστε το μήκος αυτού του σχολινού σε πόδια και μετά σε ίντσες. Πώς αποφασίζετε για την εκτίμησή σας;

Και οι δύο δραστηριότητες συσχετίζονται τα πόδια και τις ίντσες. Ωστόσο, στη δεύτερη δραστηριότητα απαιτείται τα παιδιά να είναι εξοικειωμένα και με τις μονάδες. Με μια δραστηριότητα εκτίμησης μπορούμε να παρατηρήσουμε αν τα παιδιά χρησιμοποιούν την πρώτη εκτίμηση για να κάνουν τη δεύτερη (κατανόηση και χρήση της σχέσης ποδιού-ίντσας) ή αντίθετα κάνουν δύο ξεχωριστές εκτιμήσεις. Αυτή η δραστηριότητα μας επιτρέπει να δούμε πώς γίνεται μία εκτίμηση. Αυτή η πληροφορία δεν είναι διαθέσιμη στις δύο περιορισμένες και περισσότερο παραδοσιακές δραστηριότητες. ■

Εκτίμηση των Μετρήσεων

Η εκτίμηση των μετρήσεων είναι μια διαδικασία χρήσης νοητικών και οπτικών πληροφοριών για τη μέτρηση ή την πραγματοποίηση μετρήσεων χωρίς όργανα μέτρησης. Πρόκειται για μια πρακτική δεξιότητα. Σχεδόν κάθε μέρα υπολογίζουμε κατά προσέγγιση κάποιες μετρήσεις. Έχω αρκετή ζάχαρη για να φτιάξω τα κουλουράκια; Μπορείς να πετάξεις την μπάλα στα 50 πόδια; Μήπως η βαλίτσα είναι υπέρβαρη; Πόσο μακριά είναι περίπου ο φράχτης;

Πέρα από την αξία τους έξω από την τάξη, οι εκτιμήσεις σε δραστηριότητες μέτρησης βοηθούν τα παιδιά να εστιάσουν την προσοχή τους στο χαρακτηριστικό που μετρούν, ενισχύουν εσωτερικά κίνητρα και τους βοηθούν να εξοικειωθούν με τις καθιερωμένες μονάδες. Κατά συνέπεια, η εκτίμηση μετρήσεων όχι μόνο βελτώνει τη διδασκαλία της μέτρησης αλλά και καλλιεργεί μια πολύτιμη για τη ζωή δεξιότητα.

Τεχνικές Εκτίμησης Μετρήσεων

Όπως ακριβώς για τις υπολογιστικές εκτιμήσεις, υπάρχουν ειδικές στρατηγικές και για την εκτίμηση των μετρήσεων. Ειδικότερα μπορούν να διδαχτούν τέσσερις στρατηγικές:

1. **Αναπτύξτε και χρησιμοποιήστε μέτρα σύγκρισης ή σημεία αναφοράς για σημαντικές μονάδες.** Η συγκεκριμένη στρατηγική έχει επίσης αναφερθεί ως τρόπος εξοικείωσης με τις μονάδες. Η έρευνα έχει αποδείξει ότι τα παιδιά που έχουν αποκτήσει νοητικά κριτήρια ή σημεία αναφοράς και τα έχουν χρησιμοποιήσει σε δραστηριότητες μέσα στην τάξη είναι πολύ καλύτεροι εκτιμητές από ό,τι τα παιδιά που δεν έχουν μάθει κάτι τέτοιο (Joram, 2003). Τα σημεία αναφοράς θα πρέπει να είναι πράγματα που μπορεί να τα φανταστεί εύκολα το παιδί. Ένα παράδειγμα είναι ένα κρεβάτι, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 20.21. Τα παιδιά θα πρέπει να έχουν ένα καλό σημείο αναφοράς για μεμονωμένες μονάδες, καθώς και χρήσιμα πολλαπλάσια των τυπικών μονάδων.

2. **Χρησιμοποιήστε τον «τεμαχισμό» όπου χρειάζεται.** Το Σχήμα 20.21 δείχνει ένα παράδειγμα. Πιθανόν να είναι ευκολότερο να εκτιμήσετε το μέγεθος των μακρότερων κομματιών

κατά μήκος του τοίχου παρά να εκτιμήσετε ολόκληρο το μήκος απευθείας. Το βάρος μια στοιβάς βιβλίων υπολογίζεται πιο εύκολα αν δοθεί κάποια εκτίμηση για το πόσο ζυγίζει ένα συνηθισμένο βιβλίο.

3. **Χρησιμοποιήστε υποδιαίρεσεις.** Πρόκειται για μια στρατηγική παρόμοια με τον τεμαχισμό, όπου ο εκτιμητής τεμαχίζει υποθετικά το αντικείμενο. Για παράδειγμα, αν το μήκος του τοίχου που πρέπει να εκτιμηθεί δεν έχει ήδη κάποια τμήματα που να μπορούν να χρησιμοποιηθούν, μπορείτε να τον χωρίσετε νοητά στη μέση και έπειτα σε τέταρτα ή ακόμη και σε όγδοα, τεμαχίζοντάς τον κατ' επανάληψη στο μέσο, ώσπου να προκύψει ένα πιο ευκολόχρηστο μήκος. Τόσο οι μετρήσεις μικρούς όσο και οι μετρήσεις όγκου και εμβαδού προσφέρονται για τη χρήση αυτής της τεχνικής.

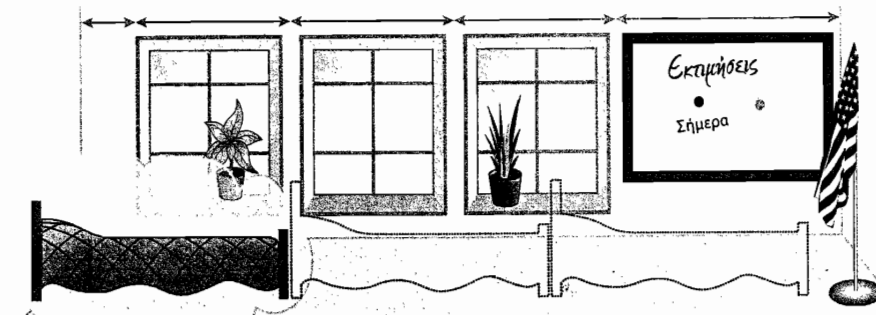
4. **Επαναλαμβάνετε συνεχώς μια μονάδα νοητά ή στην πραγματικότητα.** Για το μήκος, το εμβαδόν ή τον όγκο, ορισμένες φορές είναι εύκολο να ξεχωρίζουμε με το μάτι τις μεμονωμένες μονάδες. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα χέρια σας, ή να κάνετε σημάδια ή να διπλώσετε ώστε να καταγράψετε την πορεία σας. Για το μήκος, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να χρησιμοποιείτε κάποια από τις διαστάσεις του σώματος ως μονάδα και να κάνετε επαναλήψεις με αυτήν. Αν ξέρετε, για παράδειγμα, ότι η δρασκελιά σας είναι περίπου τα 3/4 του μέτρου, μπορείτε να περπατήσετε κατά μήκος μιας απόστασης και μετά να πολλαπλασιάσετε για να πάρετε μια εκτίμηση. Το πλάτος του χεριού και του ποδιού είναι χρήσιμα για τις μικρότερες μετρήσεις.

Συμβουλές για τη Διδασκαλία των Εκτιμήσεων

Καθεμία από τις τέσσερις στρατηγικές που μόλις αναφέραμε αν θα πρέπει να διδαχθεί απευθείας και να συζητηθεί με τα

παιδιά. Τα προτεινόμενα σημεία αναφοράς για τις χρήσιμες μετρήσεις μπορεί να αναπτυχθούν και να καταγραφούν σε έναν πίνακα στην τάξη. Συμπεριλάβετε και ανακείμενα που βρίσκονται στο σπίτι. Αλλά η καλύτερη προσέγγιση για τη βελτίωση των δεξιοτήτων σας εκτιμήσεις είναι να αναθέσετε στα παιδιά να κάνουν πολλές εκτιμήσεις. Λάβετε υπόψη σας τις εξής συμβουλές:

1. Βοηθήστε τα παιδιά να μάθουν τις στρατηγικές ζητώντας τους να χρησιμοποιήσουν μια συγκεκριμένη προσέγγιση. Οι μετέπειτα δραστηριότητες θα πρέπει να επιτρέπουν στα παιδιά να επιλέγουν όποιες τεχνικές επιθυμούν.
2. Συζητάτε κατά περιόδους πώς διάφορα παιδιά έκαναν τις εκτιμήσεις τους. Με αυτόν τον τρόπο θα τους βοηθήσετε να καταλάβουν ότι δεν υπάρχει μόνο ένας σωστός τρόπος εκτίμησης, ενώ παράλληλα θα τους υπενθυμίσετε διάφορες χρήσιμες προσεγγίσεις.
3. Δεχτείτε μια συγκεκριμένη κλίμακα εκτιμήσεων. Σκεφτείτε σε γενικές γραμμές τι συνιστά μια καλή εκτίμηση. Μία απόκλιση της τάξης του 10% για το μήκος είναι καλή. Όπως επίσης και μια απόκλιση της τάξης του 30% για το βάρος ή τη χωρητικότητα.
4. Μερικές φορές ζητήστε από τα παιδιά να σας δώσουν ένα εύρος από μετρήσεις που πιστεύουν ότι περιλαμβάνουν την πραγματική μέτρηση. Αυτή δεν είναι μόνο μια πρακτική προσέγγιση στην καθημερινή ζωή, αλλά βοηθά και να εστιάσουμε στον προσεγγιστικό χαρακτήρα της εκτίμησης.
5. Κάντε την εκτίμηση των μετρήσεων μια συνεχή δραστηριότητα. Μπορείτε κάθε μέρα να αναρτάτε στον πίνακα των ανακοινώσεων μια μέτρηση προς εκτίμηση. Τα παιδιά μπορούν να δίνουν τις εκτιμήσεις τους γραπτά και να τις συζητάτε για ένα λεπτό. Στα μεγαλύτερα παιδιά μπο-



Εκτιμήστε το μήκος του δωματίου. Χρησιμοποιήστε: παράθυρα, πίνακα ανακοινώσεων και ενδιάμεσα κενά ως «μονάδες». Χρησιμοποιήστε: μήκος κρεβατιού – φαίνεται να χωρούν περίπου τρία κρεβάτια στο δωμάτιο – συν λίγο ακόμη.

ΣΧΗΜΑ 20.21 Εκτίμηση μετρήσεων με τεμαχισμό.

ρείτε να δώσετε την ελευθερία να δημιουργούν τα πράγματα που θα εκτιμήσουν, δίνοντας τη συγκεκριμένη δραστηριότητα κάθε εβδομάδα και σε διαφορετική ομάδα.

Δραστηριότητες Εκτίμησης Μετρήσεων

Οι δραστηριότητες εκτίμησης δεν χρειάζεται να είναι περίπλοκες. Κάθε δραστηριότητα μέτρησης μπορεί να έχει και ένα σκέλος που να ζητά «πρώτα μια εκτίμηση». Για να δώσετε μεγαλύτερη έμφαση στη διαδικασία της εκτίμησης καθαυτή, αλλά σκεφτείτε πράγματα που μπορούν να εκτιμηθούν και ζητήστε από τα παιδιά να κάνουν τις εκτιμήσεις τους. Παρακάτω παρατίθενται μερικές προτάσεις:

Δραστηριότητα 20.25

Γρήγορη Εκτίμηση

Επιλέξτε ένα αντικείμενο όπως ένα κουτί, ένα καρπούζι, ένα βάζο ή ακόμη και το διευθυντή του σχολείου. Κάθε μέρα, επιλέξτε ένα διαφορετικό χαρακτηριστικό ή διάσταση για να εκτιμήσετε. Για το καρπούζι, για παράδειγμα, τα παιδιά μπορούν να εκτιμήσουν το μήκος του, την περιφέρεια, το βάρος, τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειάς του.

Δραστηριότητα 20.26

Κυνήγι Θησαυρού των Εκτιμήσεων

Διεξάγετε κυνήγι θησαυρού για μετρήσεις. Δώστε στις ομάδες μια λίστα με μετρήσεις και ζητήστε τους να βρουν πράγματα που να έχουν πάνω κάτω αυτές τις μετρήσεις. Μην επιπλέετε κανένα όργανο μέτρησης. Η λίστα θα μπορούσε να περιλαμβάνει τα ακόλουθα στοιχεία:

Ένα μήκος 3,5 μέτρων.

Κάτι που να ζυγίζει περισσότερο από 1 κιλό, αλλά λιγότερο από 2 κιλά.

Ένα δοχείο που να χωράει 200 χιλιοστόλιτρα (ml).

Αφήστε τα παιδιά να προστείνουν πώς θα κρίνουν την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Μερικές φορές παραβλέπεται η εκτίμηση του μεγέθους της γωνίας και δίνεται πολύ προσοχή στην μέτρηση με το μοιρογνωμόνιο. Τα παιδιά θα πρέπει να κατανοούν τις 90 μοίρες, τη γωνία που σχηματίζεται από κάθετες γραμμές. Εφόσον 45 μοίρες είναι ακριβώς το μισό μιας ορθής γωνίας, αυτό αποτελεί επίσης μια σημαντική αναφορά και τα παιδιά θα πρέπει να μπορούν να εκτιμήσουν μία γωνία αν είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή περίπου το ίδιο με 90 μοίρες και με 45 μοίρες. Οι γωνίες που είναι μεγαλύτερες από 90 μοίρες θα πρέπει να συζητηθούν τότε με 135 μοίρες (90 + 45) και 180 μοίρες. Τα πολ-

λαπλάσια των 30 μοιρών, ή τα τρίτα μιας ορθής γωνίας, είναι επίσης χρήσιμα για ακόμα καλύτερες εκτιμήσεις.

NCTM
Στάδιο

Ανάμεσα στην τρίτη και την πέμπτη τάξη, το έγγραφο Αρχές και Στάνταρ προτείνει διάφορες στρατηγικές εκτίμησης οι οποίες είναι παρόμοιες με αυτές που μόλις διαβάσατε. Επισημαίνεται σε αυτό ότι οι τεχνικές εκτίμησης θα διαφέρουν κάθε φορά ανάλογα με την περίπτωση. Οι συγγραφείς ενθαρρύνουν τους εκπαιδευτικούς να παρακινούν τα παιδιά τους να μοιράζονται στην τάξη τόσο τις εκτιμήσεις τους όσο και τις στρατηγικές εκτίμησης, που ακολούθησαν.



Οι δραστηριότητες εκτίμησης είναι ένας καλός τρόπος να αξιολογήσετε την κατανόηση των παιδιών τόσο για τις μετρήσεις όσο και για τις καθιερωμένες μονάδες. Χρησιμοποιήστε πραγματικά αντικείμενα και αποστάσεις μέσα στην τάξη όσο και έξω από αυτήν. Ο χρόνος και οι μακρινές αποστάσεις θα πρέπει να εκτιμηθούν με συγκρίσεις σε γεγονότα και αποστάσεις που έχουν νόημα για τα παιδιά. Ζητήστε από τα παιδιά να εξηγήσουν πώς έφτασαν σε αυτήν την εκτίμηση για να πάρετε μια ολοκληρωμένη εικόνα των γνώσεών τους για τις μετρήσεις. Αν ζητάτε μόνο μία αριθμητική εκτίμηση μπορεί να καλυφτεί η ελλιπή κατανόησης και δεν θα σας δώσουν τις πληροφορίες που χρειάζεστε για να βοηθήσετε τα παιδιά με ενισχυτική διδασκαλία. ■

Ανάπτυξη Τύπων για το Εμβαδόν και τον Όγκο

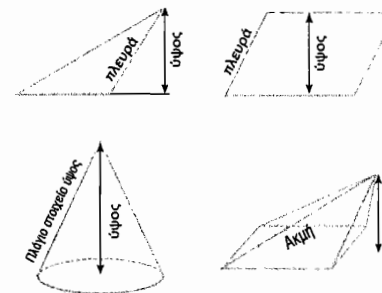
Μην κάνετε το λάθος να προσπεράσετε την ανάπτυξη των τύπων με τα παιδιά σας ακόμα και αν τα πολιτειακά και τοπικά σας αναλυτικά προγράμματα εξετάσεων επιτρέπουν στα παιδιά να έχουν πρόσβαση σε τέτοιους τύπους κατά τη διάρκεια των εξετάσεων. Η εννοιολογική ανάπτυξη των τύπων είναι πολλή πιο σημαντική από το να παρέχει αλλά στα παιδιά τύπους. Όταν τα παιδιά αναπτύσσουν τύπους, κερδίζουν σε επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης των ιδεών και των σχέσεων που εμπλέκονται και ασχολούνται με μία από τις πραγματικές διαδικασίες της ενασχόλησής με τα μαθηματικά. Υπάρχει μικρότερη πιθανότητα τα παιδιά να μετερδύνουν το εμβαδόν και την περίμετρο ή να διαλέξουν το λάθος τύπο για ένα διωνύμιο. Για παράδειγμα, τα παιδιά μπορούν να δουν πώς όλοι οι τύποι για το εμβαδόν συνδέονται με μία ιδέα: το μήκος της βάσης επί το ύψος. Τα παιδιά που καταλαβαίνουν πώς προκύπτουν οι τύποι δεν τους θεωρούν ως μυστήρια, τείνουν να τους θυμούνται πιο εύκολα και ενισχύουν την ιδέα ότι τα μαθηματικά έχουν λογική. Η χρήση των τύπων με αποστήθιση από ένα βιβλίο δεν προσφέρει κανένα από αυτά τα πλεονεκτήματα.

Συνήθειες Δυσκολίες

Τα αποτελέσματα της Εθνικής Αξιολόγησης της Εκπαιδευτικής Προόδου (NAEP) δείχνουν ξεκάθαρα ότι τα παιδιά δεν έχουν καλή κατανόηση των τύπων. Για παράδειγμα στην έκτη NAEP, μόνο το 19% των παιδιών της τετάρτης τάξης και το 65% των παιδιών της έκτης τάξης μπόρεσαν να δώσουν το εμβαδόν ενός χαλιού με μήκος 9 πόδια και πλάτος 6 πόδια. (Keeney & Kouba, 1997). Ένα συνηθισμένο λάθος είναι να μετερδύνουν τους τύπους για το εμβαδόν και την περίμετρο. Τέτοιου είδους επιδόσεις οφείλονται κατά κύριο λόγο στην υπερβολική προσοχή που δίνεται στους τύπους χωρίς να υπάρχει σχεδόν καθόλου το σχετικό υπόβαθρο. Δεν έχει καμία απολύτως αξία να πείτε στα παιδιά από πού προέκυψε αυτός ο τύπος.

Οι δραστηριότητες στο Σχήμα 20.20 δεν μπορούν να λυθούν με απλούς τύπους. Απαιτούν κατανόηση των εννοιών και πώς λειτουργούν οι τύποι. Το «Μήκος επί Πλάτος» δεν αποτελεί ορισμό του εμβαδού.

Ένα άλλο συνηθισμένο λάθος όταν τα παιδιά χρησιμοποιούν τύπους προκύπτει από την αποτυχία τους να δομήσουν στο μυαλό τους την έννοια του ύψους και της βάσης τόσο σε διδάσκατα όσο και τριτοβάθμια γεωμετρικά σχέδια. Τα σχήματα στο Σχήμα 20.23 έχει το καθένα μία κυρτή πλευρά και ένα ύψος που έχουν δοθεί. Τα παιδιά τείνουν να τα μετερδύνουν αυτά τα δύο. Οποιαδήποτε πλευρά ή επίπεδη επιφάνεια μπορεί να ονομαστεί σε αυτό το σχήμα βάση. Για κάθε βάση που έχει το σχήμα, υπάρχει και το αντίστοιχο ύψος. Αν το σχήμα έπρεπε να μπει σε ένα δωμάτιο ή πάνω σε μια επιλεγμένη βάση, το ύψος θα ήταν το ύψος της πιο κοντής πόρτας από την οποία θα μπορούσαμε να το περάσουμε χωρίς να το γείρουμε, δηλαδή η κάθετη απόσταση από τη βάση. Τα παιδιά έχουν πολλές πρώιμες εμπειρίες με τον τύπο μήκος-επί-πλάτος για τα παραλληλόγραμμα στα οποία το ύψος είναι ακριβώς το ίδιο με το μήκος της πλευράς. Έτσι αυτό να τους προκαλεί και τη σύγχυση. Προτού συζητηθούν οι τύποι που πε-



ΣΧΗΜΑ 20.23 Τα ύψη των σχημάτων δεν μετρώνται πάντα κατά μήκος μιας πλευράς ή μιας επιφάνειας.

ριλαμβάνουν ύψος, τα παιδιά θα πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίσουν που μπορεί να μετρηθεί το κάθε ύψος για οποιαδήποτε βάση έχει το κάθε σχήμα.

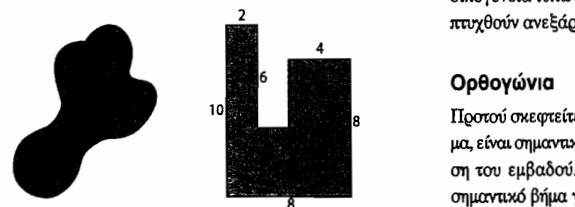
Το Εμβαδόν των Ορθογώνιων, των Παραλληλογράμμων, των Τριγώνων και των Τραπεζίων

Ο τύπος για το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι ο πρώτος που αναπτύσσεται και συνήθως παρουσιάζεται ως $E = M \times \Pi$ «εμβαδόν ίσο με μήκος επί πλάτος». Προτρέχοντας σε άλλους τύπους εμβαδού, τύπους εμβαδού, μια ισοδύναμη αλλά πιο συνεκτική ιδέα θα ήταν $E = b \times u$ «εμβαδόν ίσον βάση επί ύψος». Η διατύπωση βάση επί ύψος μπορεί να γενικευτεί σε όλα τα παραλληλόγραμμα (όχι μόνο τα ορθογώνια), ενώ χρησιμοποιεί και στην ανάπτυξη των τύπων εμβαδού για τα τρίγωνα και τα τραπέζια. Επιπλέον, η ίδια προσέγγιση μπορεί να επεκταθεί και στις τρεις διαστάσεις, όπου ο όγκος των κυλίνδρων εκφράζεται ως το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος. Ο τύπος βάση επί ύψος, λοιπόν, βοηθά να συνδεθεί μια μεγάλη οικογένεια τύπων, οι οποίοι διαφορετικά θα έπρεπε να αναπτυχθούν ανεξάρτητα.

Ορθογώνια

Προτού σκεφτείτε τύπους για τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, είναι σημαντικό τα παιδιά να έχουν μια ξεκάθαρη κατανόηση του εμβαδού. Ωστόσο, η έρευνα υποδηλώνει ότι είναι σημαντικό βήμα για τα παιδιά να περάσουν από την απαρίθμηση τετραγώνων μέσα σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμα στην εννοιολογική κατανόηση των τύπων. Ο Batista (2003) διαπίστωσε πως τα παιδιά προσπαθούν συχνά να γεμίσουν τα κενά ορθογώνια παραλληλόγραμμα με ζωγραφισμένα τετραγώνων και μετά να μετρήσουν το αποτέλεσμα ένα τετράγωνο τη φορά.

«Πώς θα καθορίζατε τα εμβαδά αυτών των σχημάτων;»



Σημείωση: Πολλά παιδιά πιστεύουν ότι τέτοιου είδους σχήματα δεν έχουν εμβαδόν ή ότι είναι αδύνατον να καθορισθεί το εμβαδόν τους επειδή δεν υπάρχουν αντίστοιχοι τύποι.

ΣΧΗΜΑ 20.22 Κατανόηση του χαρακτηριστικού του εμβαδού

Μια σημαντική έννοια για να διερευνήσουμε είναι το νόημα του πολλαπλασιασμού όπως φαίνεται στους πίνακες. Δείτε στα παιδιά σειρές και στήλες αντικειμένων ή τετραγώνων, όπως και στο Σχήμα 20.24 και συζητήστε γιατί ο πολλαπλασιασμός μας λέει το τελικό ποσό. Δεν πολλαπλασιάζετε τετράγωνα επί τετράγωνα ή κουκίδες επί κουκίδες. Αντίθετα, μετράμε είτε μία μεμονωμένη σειρά ή στήλη και μετά βρίσκουμε πόσες στήλες ή σειρές υπάρχουν συνολικά. Αυτή είναι η ίδια έννοια που θα πρέπει να εφαρμόσετε στο εμβαδόν ενός ορθογώνιου. Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα μήκος με ένα πλάτος, δεν πολλαπλασιάζουμε «τετράγωνα επί τετράγωνα». Αντίθετα το μήκος μιας πλευράς μας δείχνει πόσα τετράγωνα μπορούν να χωρέσουν σε αυτή την πλευρά. Αν αυτή η ομάδα των τετραγώνων θεωρηθεί ως μονάδα, τότε το μήκος της άλλης πλευράς (όχι ο αριθμός τετραγώνων) θα μας πει πόσες σειρές τετραγώνων θα χωρέσουν σε αυτό το ορθογώνιο.

Μια καλή δραστηριότητα για να ξεκινήσετε με τη διερεύνηση σας είναι η Δραστηριότητα 20.12, «Σύγκριση ορθογωνίων – τετραγωνικές μονάδες», (σελ. 488). Τα παιδιά που ζωγραφίζουν σε όλα τα τετράγωνα και τα μετράνε δεν έχουν σκεφτεί αρκετά τη σειρά των τετραγώνων ως μία μεμονωμένη σειρά που μπορεί να διπλασιαστεί. Σχετικές δραστηριότητες, που βασίζονται στην έρευνα του Battista (2003) απεικονίζονται στο Σχήμα 20.25.

Καθώς τα παιδιά συζητούν τις μεθόδους για τον καθορισμό του εμβαδού των ορθογωνίων σε αυτές τις δραστηριότητες, ακούστε και επισημάνετε το σκεπτικό των παιδιών που μιλούν για μία σειρά ή στήλη τετραγώνων ως μία ομάδα. Προκαλέστε τα παιδιά να βρουν το εμβαδόν ενός ορθογωνίου δινοτάς τους μόνο ένα χάρακα και το ίδιο το ορθογώνιο. Ωστόσο, ζητήστε να χρησιμοποιήσουν λέξεις και εικόνες για να εξηγήσουν τα αποτελέσματά τους.

Όταν τα παιδιά έχουν σχηματίσει μια προσέγγιση για το εμβαδόν που να βασίζεται στην ιδέα της σειράς των τετραγώνων (καθορισμένα από το μήκος της πλευράς) πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό αυτών των σειρών (καθορισμένος από το μήκος της άλλης πλευράς), ήρθε η ώρα να παγώσετε αυτές τις ιδέες. Εξηγήστε στα παιδιά ότι σας αρέσει η ιδέα της μέτρησης μιας πλευράς για να πείτε πόσα τετράγωνα θα χωρέσουν σε μία σειρά κατά μήκος αυτής της πλευράς. Θα θέλατε να σκέφτονται ή να ονομάζουν αυτή τη σειρά ως βάση του ορθογωνίου αν και ορισμένοι άνθρωποι την ονομάζουν μήκος ή πλάτος. Τότε την άλλη πλευρά μπορείτε να την ονομάσετε ύψος. Όμως ποια πλευρά είναι η βάση; Βεβαιωθείτε ότι τα παιδιά οδηγούνται στο συμπέρασμα πως οποιαδήποτε πλευρά θα μπορούσε να είναι η βάση. Αν χρησιμοποιήσετε τον τύπο $E = b \times u$, τότε θα οδηγηθείτε στο ίδιο αποτέλεσμα εμβαδού χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε πλευρά ως βάση.

Από τα Ορθογώνια Παράλληλογράμμο στα Παράλληλογράμμο

Από τη στιγμή που τα παιδιά κατανοήσουν τον τύπο βάση επί ύψος για τα ορθογώνια, η επόμενη πρόκληση είναι να καθορίσουν το εμβαδόν των παραλληλογράμμων. Μη δώσετε κανέναν τύπο ή άλλη επεξήγηση. Αντ' αυτού, δοκιμάστε την ακόλουθη δραστηριότητα, η οποία για μία ακόμη φορά ζητά από τα παιδιά να σκεφτούν το δικό τους τύπο.

Δραστηριότητα 20.27

Εμβαδόν Παράλληλογράμμου

Δώστε στα παιδιά δύο ή τρία παραλληλόγραμμα σχεδιασμένα πάνω σε ένα μιλιμετρέ χαρτί ή για πιο δύσκολη πρόκληση σε μια λευκή κόλλα χαρτί. Αν έχουν σχεδιαστεί σε λευκή κόλλα δώστε τους όλες τις διαστάσεις, το μήκος και των τεσσάρων πλευρών και το ύψος. Η εργασία τους είναι να εφαρμόσουν ότι έχουν μάθει για το εμβαδόν των ορθογωνίων παραλληλογράμμων και να καθορίσουν το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου. Τα παιδιά θα πρέπει να διαμορφώσουν μία μέθοδο για την εξεύρεση του εμβαδού του παραλληλόγραμμου, η οποία θα μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε παραλληλόγραμμο ακόμα και αν δεν έχει σχεδιαστεί σε χαρτί μιλιμετρέ.

Αν τα παιδιά κολλήσουν, ζητήστε τους να βρουν ποιες ομοιότητες έχει το παραλληλόγραμμο με ένα ορθογώνιο ή πώς μπορούμε να μετατρέψουμε σε ορθογώνιο το παραλληλόγραμμο. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 20.26, ένα παραλληλόγραμμο μπορεί πάντα να μετατραπεί σε ορθογώνιο με την ίδια βάση, το ίδιο ύψος και το ίδιο εμβαδόν. Έτσι ο τύπος για το εμβαδόν ενός παραλληλόγραμμου είναι ακριβώς ο ίδιος με εκείνον του ορθογωνίου: βάση επί ύψος.

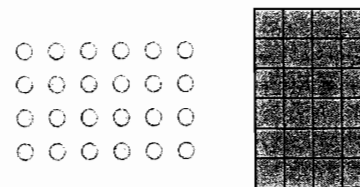
Από τα Παράλληλογράμμο στα Τρίγωνα

Είναι πολύ σημαντικό για τα παιδιά να κατανοήσουν τον τύπο των παραλληλόγραμμων πριν διερευνήσουν το εμβαδόν των τριγώνων. Έχοντας αυτό ως βάση, θα βρουν σχετικά εύκολο το εμβαδόν του τριγώνου. Για μία ακόμη φορά χρησιμοποιήστε μία προσέγγιση που στηρίζεται στα προβλήματα, όπως στην επόμενη δραστηριότητα.

Δραστηριότητα 20.28

Εμβαδόν ενός τριγώνου

Δώστε στα παιδιά τουλάχιστον δύο τρίγωνα σχεδιασμένα σε χαρτί μιλιμετρέ. Αποφύγετε τα ορθογώνια τρίγωνα επειδή είναι μια πιο εύκολη ιδιαίτερη περίπτωση. Η πρόκληση για τα παιδιά είναι να χρησιμοποιήσουν αυτά που έχουν μάθει για το εμβαδόν των παραλληλόγραμμων και να βρουν το εμβαδόν του κάθε τριγώνου

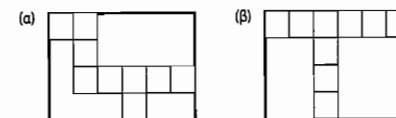


ΣΧΗΜΑ 20.24 Κατά την προετοιμασία για τον τύπο του εμβαδού, ξαναδείτε την έννοια του πολλαπλασιασμού όπως εφαρμόζεται στους πίνακες. Ένας παράγοντας μας λέει πόσα σε μία στήλη ή σειρά. Ο άλλος παράγοντας μας λέει πόσες σειρές ή στήλες.

και να αναπτύξουν μία μέθοδο που θα λειτουργεί για κάθε τρίγωνο. Θα πρέπει να είναι σίγουροι ότι η μέθοδός τους λειτουργεί για όλα τα τρίγωνα που τους δόθηκαν καθώς και για ένα ακόμα που θα ζωγραφίσουν.

Αν τα παιδιά κολλήσουν μπορείτε να τους προσφέρετε βοήθεια. Μπορείτε να βρείτε ένα παραλληλόγραμμο που να σχετίζεται με κάποιο τρόπο με το τρίγωνο σας; Αν δεν αρκεί αυτό, προτείνετε να διπλώσουν ένα χαρτί στη μέση, να σχεδιάσουν ένα τρίγωνο πάνω στο διπλωμένο χαρτί και να το κόψουν, φτιάχνοντας δύο πανομοιότυπα αντίγραφα. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν τα αντίγραφα για να βρουν ποια τρίγωνα σχετίζονται με το παραλληλόγραμμο.

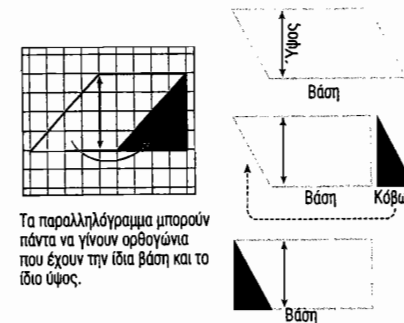
Όπως φαίνεται στο Σχήμα 20.27, δύο ίσα τρίγωνα μπορούν πάντα να τοποθετηθούν έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα



(γ) Δείτε στα παιδιά μια σειρά τετραγώνων κατά μήκος μιας πλευράς και μετά εφαρμόστε τα. Επαναλάβετε με μία σειρά τετραγώνων στην άλλη πλευρά.



ΣΧΗΜΑ 20.25 Τρεις διαφορετικές δραστηριότητες σε διαδοχική σειρά για τον καθορισμό του εμβαδού. Τα παιδιά σε κάθε περίπτωση πρέπει να πουν πόσα τετράγωνα θα γεμίσουν τον ορθογώνιο. (Βασίζεται στις προτάσεις του Battista, 2003).



ΣΧΗΜΑ 20.26 Εμβαδόν παραλληλογράμμου.

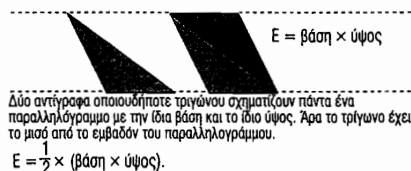
παραλληλόγραμμο με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος του κάθε τριγώνου. Το εμβαδόν του τριγώνου θα είναι έτσι το μισό από εκείνο του παραλληλόγραμμου. Ζητήστε από τα παιδιά να διερευνήσουν και τα τρία πιθανά παραλληλόγραμμα, ένα για κάθε πλευρά του τριγώνου, που θα λειτουργεί ως βάση. Θα είναι άραγε το εξαγόμενο εμβαδόν πάντα το ίδιο;

Από τα Παράλληλογράμμο στα Τραπεζίδια

Αφού έχουν αναπτυχθεί οι τύποι για τα παραλληλόγραμμο και τα τρίγωνα, τα παιδιά σας πιθανόν να ενδιαφέρονται να καταπιαστούν με τα τραπέζια χωρίς περαιτέρω βοήθεια. (Βλ. Σχήμα 4.1, σελ.81, για ένα παράδειγμα μια εντελώς ανοιχτής πρόκλησης.) Υπάρχουν τουλάχιστον δέκα διαφορετικές μέθοδοι για να φτάσουμε σε έναν τύπο για τα τραπέζια, καθεμία από τις οποίες σχετίζεται με το εμβαδόν των παραλληλόγραμμων ή των ορθογωνίων. Μια από τις καλύτερες μεθόδους χρησιμοποιεί την ίδια γενική προσέγγιση που εφαρμόστηκε και για τα τρίγωνα. Προτείνετε στα παιδιά να δοκιμάσουν να εργαστούν με δύο τραπέζια που να είναι πανομοιότυπα, ακριβώς όπως έκαναν και με τα τρίγωνα. Το Σχήμα 20.28 παρουσιάζει πώς αυτή η μέθοδος καταλήγει στον τύπο. Τώρα, όχι μόνο συνδέονται μεταξύ τους όλοι αυτοί οι τύποι, αλλά χρησιμοποιήθηκαν και παρόμοιες μέθοδοι για τη διατύπωσή τους.

Εδώ παρατίθενται μερικές ιδέες, καθεμία από τις οποίες οδηγεί σε μια διαφορετική προσέγγιση για την εύρεση του εμβαδού ενός τραpezιού:

- Σχηματίστε ένα παραλληλόγραμμο στο εσωτερικό του τραpezιού που σας δόθηκε χρησιμοποιώντας τρεις από τις πλευρές του.
- Σχηματίστε ένα παραλληλόγραμμο χρησιμοποιώντας τρεις πλευρές που να περιβάλλει το τραpezίο.
- Σχεδιάστε μια διαγώνιο σχηματίζοντας δύο τρίγωνα.



ΣΧΗΜΑ 20.27 Δύο τριγώνω σχηματίζουν πάντα ένα παραλληλόγραμμο.

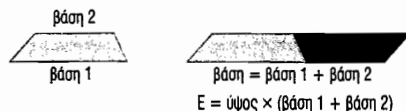
- Σχεδιάστε μια γραμμή που να ενώνει τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών. Το μήκος αυτής της γραμμής είναι ο μέσος όρος των μηκών των δύο παραλλήλων πλευρών.
- Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο στο εσωτερικό του τραπεζίου αφηρώντας δύο τρίγωνα και μετά τοποθετήστε αυτά τα δύο τρίγωνα μαζί.

II Σταμιά και στοκάζομα

Πιστεύετε ότι τα παιδιά θα πρέπει να μάθουν ειδικούς τύπους για το εμβαδόν ενός τετραγώνου; Γιατί ή γιατί όχι; Πιστεύετε ότι τα παιδιά χρειάζονται τύπους για την περίμετρο των τετραγώνων και των ορθογώνιων;



Η σχέση ανάμεσα στα εμβαδά των ορθογώνιων, των παραλληλογράμμων και των τριγώνων μπορεί να απεικονιστεί πολύ παραστατικά αν χρησιμοποιήσουμε ένα δυναμικό πρόγραμμα γεωμετρίας όπως το The Geometer's Sketchpad (Key Curriculum Space) ή το Geometry Inventor (Riverdeep). Σχεδιάστε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα σε δύο παράλληλες ευθείες, όπως δείχνει το Σχήμα 20.29. Στη συνέχεια συνδέστε τα άκρα τους για να σχηματίσετε ένα παραλληλόγραμμο και δύο τρίγωνα. Ένα ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες και το κάθετο σε κάθε μία δηλώνει το ύψος. Καθένα από τα δυο ευθύγραμμα τμήματα μπορεί να μετακινηθεί προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά ώστε να «μετασχηματιστεί» το παραλληλόγραμμο και τα τρίγωνα, χωρίς όμως να αλλάξει η βάση ή το ύψος. Όλες οι μετρήσεις του εμβαδού παραμένουν αμετάβλητες! ■



Δύο τραπεζία σχηματίζουν πάντα ένα παραλληλόγραμμο με το ίδιο ύψος και με βάση ίση με το άθροισμα των βάσεων του τραπεζίου. Άρα

$$E = \frac{1}{2} \times \text{ύψος} \times (\text{βάση 1} + \text{βάση 2})$$

ΣΧΗΜΑ 20.28 Δύο τραπεζία σχηματίζουν πάντα ένα παραλληλόγραμμο.

Τύποι για Κύκλους

Η σχέση ανάμεσα στην περιφέρεια ενός κύκλου (την απόσταση γύρω από αυτόν ή την περίμετρο) και το μήκος της διαμέτρου (μια ευθεία που περνά από το κέντρο και συνδέει δύο σημεία πάνω στον κύκλο) είναι μία από τις πιο ενδιαφέρουσες ανακαλύψεις που μπορούν να κάνουν τα παιδιά. Η περιφέρεια κάθε κύκλου έχει περίπου 3,14 φορές το μήκος της διαμέτρου. Η ακριβής αναλογία είναι ένας άρρητος αριθμός κοντά στο 3,14 και συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα π . Έτσι $\pi = \text{Π}/\delta$ ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο. Σε μια ελαφρώς διαφορετική διατύπωση $\text{Π} = \pi \times \delta$. Το μισό της διαμέτρου είναι η ακτίνα (ρ), οπότε η ίδια εξίσωση μπορεί να γραφεί $\text{Π} = 2\pi\rho$. (Στο Κεφάλαιο 21 θα γίνει διεξοδική αναφορά στην έννοια του π και στο πώς μπορούν οι μαθητές να ανακαλύψουν το σημαντικό αυτό λόγο.)

Το Σχήμα 20.30 παρουσιάζει ένα πείραγμα για τον τύπο $E = \pi \times \rho^2$ για το εμβαδόν. Αυτή η διατύπωση συναντάται συχνά στα σχολικά βιβλία.

Ανεξάρτητα από την προσέγγιση που ακολουθείτε εσείς για να αναπτύξετε τον τύπο του εμβαδού, θα πρέπει να ενθαρρύνετε τα παιδιά να αναπτύξουν μια δική τους προσέγγιση. Θα μπορούσατε, για παράδειγμα, να δείξετε στα παιδιά πώς να τοποθετήσουν 8 ή 12 κυκλικούς τομείς σε ένα σχήμα που να μοιάζει με παραλληλόγραμμο. Αποστολή τους θα είναι να το χρησιμοποιήσουν ως υπόδειξη για τη διατύπωση ενός τύπου για το εμβαδόν του κύκλου. Πιθανόν να χρειαστεί να τα βοηθήσετε να προσέξουν ότι η διάταξη των κυκλικών τομών είναι ένα κατά προσέγγιση παραλληλόγραμμο και ότι όσο μικρότεροι είναι οι κυκλικοί τομείς τόσο πιο πολύ μοιάζει η διάταξη με ορθογώνιο. Η ολοκληρωμένη όμως διατύπωση του πειραγμένου για τον τύπο θα πρέπει να γίνει από τα παιδιά.

Ο Όγκος των Συνηθισμένων Στερεών

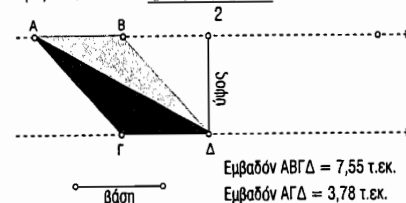
Οι σχέσεις ανάμεσα στους τύπους για τον όγκο είναι απολύτως ανάλογες με εκείνες για το εμβαδόν. Καθώς θα διαβάσετε, παρατηρήστε τις ομοιότητες ανάμεσα στα ορθογώνια και στα πρίσματα, ανάμεσα στα παραλληλόγραμμα και τα «πλάγια» (μη ορθά) πρίσματα, καθώς και ανάμεσα στα τρίγωνα και τις πυραμίδες. Δεν σχετίζονται μόνο οι τύποι, αλλά και η διαδικασία για την ανάπτυξη των τύπων είναι παρόμοια.

Όγκοι Κυλίνδρων

Ο κύλινδρος είναι ένα στερεό με δύο ίσες παράλληλες βάσεις και πλευρές με παράλληλα στοιχεία που συνδέουν αντίστοιχα σημεία στις βάσεις. Υπάρχουν διάφορες ειδικές κατηγορίες κυλίνδρων, συμπεριλαμβανομένων των πρισμάτων (με πολύγωνα ως βάσεις), των ορθών πρισμάτων, των ορθογώνιων πρισμάτων και των κύβων (βλ. Κεφάλαιο 21). Το ενδιαφέ-

ρευνήστε το εμβαδόν παραλληλογράμμων και τριγώνων.

$$\begin{aligned} \text{βάση} &= 2,61 \text{ εκ.} & \text{βάση} \times \text{ύψος} &= 7,55 \text{ τ.εκ.} \\ \text{ύψος} &= 2,89 \text{ εκ.} & (\text{βάση} \times \text{ύψος}) \times \frac{1}{2} &= 3,78 \text{ τ.εκ.} \end{aligned}$$



Σύρετε το Α ή το Γ για να αλλάξετε τη μία διάσταση του παραλληλογράμμου. Σύρετε το Δ για να αλλάξετε το ύψος.

ΣΧΗΜΑ 20.29 Ένα δυναμικό λογισμικό γεωμετρίας δείχνει ότι τα σχήματα με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος διατηρούν το ίδιο εμβαδόν.

ρον είναι ότι όλα αυτά τα στερεά έχουν τον ίδιο τύπο για τον όγκο, ο οποίος τύπος είναι ανάλογος προς τον τύπο του εμβαδού για τα παραλληλόγραμμα.

Δραστηριότητα 20.29

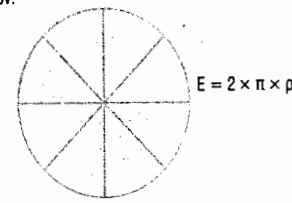
Όγκος Κουτιών

Εφοδιάστε τα παιδιά με μερικά χάρτινα κουτιά παπουτσιών, ή με παρόμοια χαρτονένια κουτιά, με μερικούς κύβους και με ένα χάρακα. Όπως έγινε και με τα ορθογώνια, το ζητούμενο είναι να καθοριστεί πόσοι κύβοι χωρούν μέσα στο κουτί. Το πιο πιθανό είναι τα κουτιά να μην έχουν για διαστάσεις ακέραιους αριθμούς, για αυτό πείτε στα παιδιά σας να αγνοήσουν τα κλασματικά τμήματα των κύβων. Παρόλο που ίσως να έχουν ήδη δει ή χρησιμοποιήσει κάποιον τύπο για τον όγκο, σε αυτήν τη δραστηριότητα δεν πρέπει να βασιστούν στον τύπο. Αντί για αυτό, πρέπει να επινοήσουν μια μέθοδο ή έναν τύπο που θα μπορούν να εξηγήσουν. Αν χρειάζονται κάποια βοήθεια, προτείνετε τους να αρχίσουν βρίσκοντας πόσοι κύβοι χωρούν στον πάτο του κουτιού.

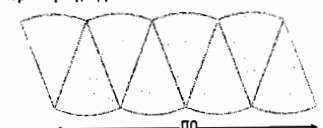
Η ανάπτυξη του τύπου για τον όγκο που θα προκύψει από αυτήν τη δραστηριότητα είναι ακριβώς όμοια με την ανάπτυξη του τύπου για το εμβαδόν του ορθογώνιου. Το Σχήμα 20.31 δείχνει ότι η ανάπτυξη αυτή μοιάζει με αυτή του εμβαδού. Το εμβαδόν της βάσης (αντί για το μήκος της βάσης των ορθογώνιων) καθορίζει πόσοι κύβοι μπορούν να τοποθετηθούν στη βάση σχηματίζοντας μία μονάδα, ένα στρώμα κύβων (αντί για τετράγωνα). Τότε το ύψος του κουτιού καθορίζει πόσα τέτοια στρώματα θα γεμίσουν το κουτί ακριβώς όπως και το ύψος του ορθογώνιου καθορίζει πόσες σειρές τετραγώνων θα γεμίσουν το ορθογώνιο.

Θυμηθείτε ότι μπορούμε να δούμε ένα παραλληλόγραμμο ως ένα ορθογώνιο, που έχει ολισθήσει, όπως το αναπαράστηκα με ένα δυναμικό λογισμικό γεωμετρίας (Σχήμα 20.29). Δείξτε στα παιδιά μια στοιβα από τρεις ή τέσσερις δέσμες τραπεζοειδών (ή μια στοιβα βιβλία ή χαρτιά). Όταν στοιβάζονται σε μια κάθετη ευθεία, σχηματίζουν ένα ορθογώνιο στερεό. Ο όγκος, όπως ειπώθηκε μόλις τώρα, είναι. $V = E \times u$, όπου το E συμβολίζει το εμβαδόν ενός τραπεζοειδούς. Αν τώρα δίνουμε στη στοιβα μια λοξή, μη ορθή κατεύθυνση προς τη μια πλευρά όπως δείχνει το Σχήμα 20.32, ποιος θα είναι ο όγκος του νέου αυτού στερεού; Τα παιδιά θα πρέπει να είναι σε θέ-

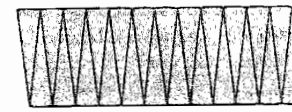
Ο κύκλος και κάθε σχήμα που αποτελείται από τομείς έχουν το ίδιο εμβαδόν.



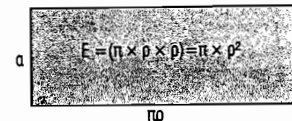
8 τομείς σχηματίζουν προσεγγιστικά ένα «παραλληλόγραμμο».



24 τομείς πλησιάζουν ακόμη περισσότερο το παραλληλόγραμμο.



Καθώς αυξάνεται ολόένα ο αριθμός των τομών το σχήμα πλησιάζει όλο και περισσότερο το ορθογώνιο (ένα ιδιαίτερο παραλληλόγραμμο).



Τα παιδιά μπορούν να κόψουν έναν κύκλο σε οκτώ τομείς ή και σε περισσότερους και να τους αναποθετήσουν έτσι ώστε να σχηματίζουν προσεγγιστικά ένα παραλληλόγραμμο με διαστάσεις τη μισή περιφέρεια επί την ακτίνα.

ΣΧΗΜΑ 20.30 Ανάπτυξη τύπου για το εμβαδόν του κύκλου

ση να υποστηρίξουν με επιχειρήματα ότι αυτό το σχήμα έχει τον ίδιο όγκο (και τον ίδιο τύπο για τον όγκο) με την αρχική στοίβα.

Τι θα γινόταν αν τα τραπουλόχαρτα της δραστηριότητας είχαν κάποιο άλλο σχήμα; Αν ήταν κυκλικά, ο όγκος θα ισοδυναμούσε και πάλι με το εμβαδόν της βάσης επί του ύψους. Αν ήταν τριγωνικά, θα ίσχυε το ίδιο. Το συμπέρασμα είναι ότι ο όγκος οποιοδήποτε κυλίνδρου ισούται με το *εμβαδόν της βάσης επί του ύψους*.

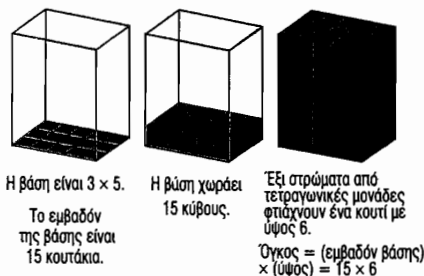
Ο Όγκος του Κώνου και της Πυραμίδας

Θυμηθείτε ότι όταν τα παραλληλόγραμμα και τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος, τα εμβαδά έχουν μια σχέση 2 προς 1. Το ενδιαφέρον είναι ότι η σχέση ανάμεσα στον όγκο των κυλίνδρων και των κώνων με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος είναι 3 προς 1. Δηλαδή, το *εμβαδόν* είναι για τα διδασκαστά σχήματα ότι είναι ο *όγκος* για τα τρισδιάστατα.

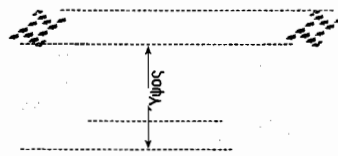
Για να διερευνήσετε αυτή τη σχέση χρησιμοποιήστε πλαστικά μοντέλα για τα συγγενή αυτά σχήματα όπως τα Power Solids. Βάλτε τα παιδιά να εκτιμήσουν πόσες φορές η πυραμίδα θα χωρέσει στο πρίσμα. Έπειτα αφήστε τους να επαληθεύσουν την πρόβλεψή τους γεμίζοντας την πυραμίδα με νερό ή σάι και, στη συνέχεια, αδειάζοντάς τα μέσα στο πρίσμα. Θα ανακαλύψουν ότι 3 πυραμίδες ακριβώς γεμίζουν ένα πρίσμα με την ίδια βάση και ύψος. (Βλ. Σχήμα 20.33)

Ο όγκος ενός κώνου ή πυραμίδας είναι ακριβώς το ένα τρίτο του όγκου του αντίστοιχου κυλίνδρου με την ίδια βάση και ύψος.

Χρησιμοποιώντας την ιδέα της βάσης επί ύψους, είναι πιθανό να διερευνήσουμε την επιφάνεια μιας σφαίρας (4 φορές το εμβαδόν ενός κύκλου με την ίδια ακτίνα) και τον όγκο μιας σφαίρας (το 1/3 φορές της επιφάνειας με την ίδια ακτίνα). Δηλαδή, η επιφάνεια της σφαίρας είναι $4\pi r^2$ και ο όγκος $\frac{1}{3}(4\pi r^2) \times r$ ή $\frac{4}{3}\pi r^3$. Μια περιγραφή αυτής της διερεύνησης μπορεί να βρεθεί στους Van de Walle & Lovin (2006).



ΣΧΗΜΑ 20.31 Όγκος πρίσματος

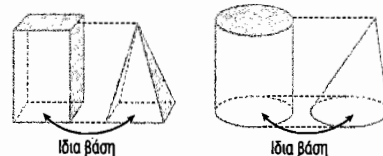


ΣΧΗΜΑ 20.32 Δύο κύλινδροι με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος έχουν τον ίδιο όγκο

Επανεξετάζοντας τους Τύπους

Παρατηρήστε πώς όλοι οι τύποι που έχουμε συζητήσει συνδέονται:

- Τα παραλληλόγραμμα είναι στην πραγματικότητα απλά ορθογώνια που έχουν μετακινηθεί για να γίνουν πιο κυρτές οι πλευρές. Το εμβαδόν και για τα δύο είναι $B \times u$ ή μήκος βάσης επί ύψος.
- Τα τρίγωνα αποδεικνύεται ότι είναι απλά μισά παραλληλόγραμμα με την ίδια βάση και ύψος. Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(1/2) B \times u$.
- Τα τραπέζια σχετίζονται επίσης με τα παραλληλόγραμμα και τα τρίγωνα. Για παράδειγμα, όλα τα τραπέζια μπορούν να γίνουν δύο τρίγωνα. Τα ύψη όλων είναι ίδια. Χρησιμοποιήστε το B για την μεγαλύτερη παράλληλη πλευρά και b για την μικρότερη και το εμβαδόν του τραπέζιου είναι $\frac{1}{2} (B + b) \times u$. (Αν και αυτό μπορεί να απλοποιηθεί αυτή η εκδοχή του τύπου είναι ένας εύκολος τρόπος για να το θυμάστε).
- Το εμβαδόν ενός κύκλου μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας όλο και μικρότερα τμήματα έτσι ώστε να μπορεί να μετατραπεί σε παραλληλόγραμμο. Η βάση του



Ο όγκος μιας πυραμίδας ή ενός κώνου είναι το ένα τρίτο του όγκου ενός πρίσματος ή ενός κυλίνδρου με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος

ΣΧΗΜΑ 20.33 Σύγκριση των όγκων των πρισμάτων και των πυραμίδων και των όγκων των κώνων και των κυλίνδρων.

σχεδόν παραλληλόγραμμο είναι μισή από την περιμέτρο (πr) και το ύψος είναι η ακτίνα. Έτσι, το $\beta \times u$ γίνεται $(\pi r) \times r$ ή πr^2 .

Έπειτα προχωρήσαμε σε τρεις διαστάσεις και βοήθαμε παρόμοια αποτελέσματα.

- Όλοι οι κύλινδροι (π.χ. κάθετα πρίσματα ή κουτιά, κυρτά πρίσματα, κυκλικοί κύλινδροι και στην πραγματικότητα οι κύλινδροι με οποιοδήποτε σχήμα βάσης) έχουν τον ίδιο τύπο όγκου. Είναι σχεδόν παρόμοιος με τον τύπο για τα παραλληλόγραμμα: $E \times u$ όπου το E αναπαριστά το εμβαδόν της βάσης αντί για το μήκος της βάσης.
- Ενώ τα τρίγωνα είναι το μισό του εμβαδού του σχετικού παραλληλόγραμμου, οι κώνοι (συμπεριλαμβανομένης της ιδιαίτερης περίπτωσης των πυραμίδων) είναι το ένα τρίτο του όγκου των σχετικών κυλίνδρων (και πρισμάτων). Αυτό σημαίνει ότι ο όγκος όλων των πυραμίδων και των κώνων είναι το ένα τρίτο των αντίστοιχων πρισμάτων και κυλίνδρων: $1/3 (E \times u)$

Δεν υπάρχει καλύτερος τρόπος να παρουσιαστεί η συσχέτιση των μαθηματικών ιδεών από την παρουσίαση των σχέσεων όλων αυτών των τύπων με μία και μόνη έννοια, αυτή της βάσης επί ύψος.

Όπως παρουσιάστηκε σε ολόκληρο το τελευταίο μέρος του κεφαλαίου, μια εννοιολογική προσέγγιση στην ανάπτυξη αυτών των τύπων βοηθά τα παιδιά να κατανοήσουν αυτά τα εργαλεία ως λογικούς και αποτελεσματικούς τρόπους να μετρήσουν τα διαφορετικά χαρακτηριστικά των αντικειμένων που μας περιβάλλουν. Αφού έχουν αναπτύξει τύπους με λογικούς τρόπους, τα παιδιά δεν χρειάζεται πια να τους απομνημονεύουν ως αποσπασματικά τμήματα των μαθηματικών γεγονότων, αλλά μπορούν να δημιουργήσουν τύπους από αυτά που ήδη γνωρίζουν. Τα μαθηματικά είναι λογικά!

Το Στάνταρ υπογραμμίζει ότι η ανάπτυξη των τύπων του εμβαδού και του όγκου είναι ένα «πεδίο ιδιαίτερα προσβάσιμο και πλούσιο» για μελέτη από την έκτη δημοτικού μέχρι τη δευτέρα γυμνασίου (σελ. 244) και ότι τα παιδιά του γυμνασίου θα πρέπει να συνδέουν τη μελέτη μετρήσεων του μήκους, του εμβαδού και του όγκου με τη μελέτη της ομοιότητας και των αναλογιών. Αυτό περιλαμβάνει την έρευνα των αναλογιών ανάμεσα σε μεγέθη όμοιων σχημάτων και την αναζήτηση σχέσεων μεταξύ αυτών των μεγεθών.

Σύνδεση με τη Λογοτεχνία

Διάφορα βιβλία φαντασίας για γίγαντες ή άγνωστες χώρες και παράδοξα γεγονότα δίνουν το έναυσμα για συ-

γκρίσεις των μετρήσεων με την καθημερινή μας ζωή. Υπάρχει επίσης ένας μεγάλος αριθμός από βιβλία που προάγουν συγκεκριμένες έννοιες για τη μέτρηση, βιβλία σχεδιασμένα να βοηθήσουν τα παιδιά να εξερευνήσουν ενδιαφέρουσες πτυχές της μέτρησης. Οι παρακάτω επιλογές είναι ενδεικτικές.

How Big is a foot? (Myller, 1990)

Η ιστορία σε αυτό το βιβλίο προσελκύει ιδιαίτερα τα μικρότερα παιδιά. Ο βασιλιάς μετρά τη βασιλιάσα του (μαζί με το στέμμα) χρησιμοποιώντας τα πόδια του και παραγγέλλει ένα κρεβάτι που να έχει 6 πόδια μήκους και 3 πόδια πλάτος. Ο παργιός του αρχαμαραγκού, ο οποίος είναι πολύ μικρόσωμος, φτιάχνει το κρεβάτι, σύμφωνα με το δικό του πόδι. Τα προβλήματα που προκύπτουν γεννούν την ανάγκη για τυπικές μονάδες. Αλλά τα παιδιά παρακινούνται επίσης να χρησιμοποιήσουν τις δικές τους μεθόδους μέτρησης για διαφορετικούς σκοπούς. Οι Lubinski και Thiessen (1996) δείχνουν πώς δημιουργούν τα παιδιά έναν «χάρακα» με πατημασιές συνδεδεμένες μεταξύ τους και μοιράζονται με τον αναγνώστη δραστηριότητες που διεξήγαγαν σε ένα τμήμα της πρώτης τάξης.

Jim and the Beanstalk, Briggs 1970

Σε μια παραλλαγή του κλασικού παραμυθιού Ο Τζακ και η Φασολιά, ο Τζιμ βοηθά το γίγαντα, ο οποίος έχει γεράσει πολύ. Ο Τζιμ του φτιάχνει ένα γιγανταίο ζευγάρι γυαλιά και στο τέλος παίρνει και τα μέτρα του γίγαντα για μασέλα και περούκι. Όπως και με τα βιβλία για τις έννοιες της αναλογίας που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 19, η ιδέα του πόσο μεγάλα θα είναι αυτά τα γιγάντια αντικείμενα κινεί την περιέργεια των παιδιών, ενώ εξίσου συναρπαστική είναι και η συζήτηση σχετικά με άλλα μεγάλα αντικείμενα που θα ταίριαζαν στην ιστορία.

Παρόμοια ιστορία έχουμε στο κλασικό έργο του Jonathan Swift Τα Ταξίδια του Γκιούλιβερ. Ένα εγχειρίδιο της τετάρτης τάξης με τίτλο My Travels with Gulliver (Education Development Center, 1991) καθοδηγεί τα παιδιά πώς να σχεδιάσουν εικόνες και να χρησιμοποιήσουν κάποιες μετρήσεις για να εξερευνήσουν τους τόπους που συναντά ο Γκιούλιβερ στο ταξίδι του. Η χώρα των Brobdingnag είναι ένα μέρος όπου τα αντικείμενα είναι δέκα φορές μεγαλύτερα από το κανονικό.

Counting on Frank (Clement, 1991)

Ο σκύλος, ο Φρανκ, και το μικρό του αφεντικό, ο αφηγητής της ιστορίας, καταπνέονται με μια σειρά από εκτιμήσεις για τα καθημερινά αντικείμενα: το μήκος μιας ευθείας που μπορούν να σχεδιάσουν με έναν συνηθισμένο στυλογράφο, πόσο Φρανκ χωράνε στην κρεβατοκάμαρα ή πόση ώρα θα χρεια-

στεί για να γεμίσει όλο το μπάνιο με νερό αν βούλωνε η μπα- νιέρα. Αυτές οι ευφάνταστες ιδέες και τα εύθιμα σχέδια εύ- κολα παρακινούν τα παιδιά να κάνουν τις δικές τους εκτιμήσεις. Τα μικρότερα παιδιά ίσως δεν θα είναι σε θέση να προχωρήσουν πέρα από μια εικασία για κάποιες από τις ιδέες που τα ίδια σκέφτηκαν. Στην τρίτη τάξη, τα παιδιά μπο- ρούν πια να διερευνήσουν κατά πόσο ανταποκρίνεται η εκτί- μησή τους στην πραγματικότητα. Αυτό το βιβλίο μπορεί να παρακινήσει τα παιδιά να διερευνήσουν τον μήκος, το βάρος, τον όγκο, το εμβαδόν και το χρόνο και να συνδέσουν καθέ- να από αυτά με τον προσωπικό τους κόσμο. «Αν γέμιζα το δω- μάτιο μου με παραγεμισμένους σάκους, υπολογίζω ότι θα χρειαζόταν 3.000 σάκοι. Όλοι μαζί θα ζύγιζαν πάνω από 15.000 κιλά. Αν κάθε σάκος ήταν τόσο μεγάλος όσο το αυτο- κίνητο του μπαμπά μου, θα έπαιναν ένα χώρο μεγάλο όσο έ- να γήπεδο ποδοσφαίρου». Είναι διασκεδαστικό να φαντάζεται κανείς τέτοιες ιδέες, η υλοποίηση των οποίων μπορεί να επα- ληθευθεί στην πραγματικότητα με μετρήσεις και υπολογι- σμούς. Μια ιδέα είναι να ζητήσετε τη συμβολή των μελών της τάξης σας για τη δημιουργία ενός αποκλειστικά δικού τους βι- βλίου για τον Φρανκ και τη σύνταξη ενός παρατηρήματος που να εξηγεί τις εκτιμήσεις τους.

Inchworm and a half (Pinczes, 2001)

Σε αυτό το θαυμάσιο εικονογραφημένο βιβλίο ένα σκουλη- κάκι τριγυρνά χαρωπά μετρώντας διάφορα λαχανικά του κή-

που. Μια μέρα οι μετρήσεις δεν βγαίνουν και το σκουληκά- κι είναι πολύ αναστατωμένο. Ευτυχώς, ένα μικρότερο σκου- ληκάκι πέφτει πάνω στα λαχανικά και τα μετράει με μιάμιση μονάδα. Τέλος, εμφανίζεται και ένα άλλο σκουληκάκι που μπο- ρεί και μετρά με κλάσματα. Η ιστορία παίζει μια σπουδαί- α σύνδεση ανάμεσα στα κλάσματα και στις έννοιες των μετρήσεων, ιδιαίτερα για την εισαγωγή των κλασματικών μο- νάδων μέτρησης. Οι Moyer και Mailley (2204) περιγράφουν μια καλή σειρά δραστηριοτήτων που εμπνεύστηκαν από αυ- τό το βιβλίο.

8.000 Stones (Wolkstein, 1972)

Πρόκειται για ένα ενδιαφέρον λαϊκό παραμύθι για τον Υπέρ- τατο Κυβερνήτη της Κίνας, ο οποίος επιθυμεί να βρει έναν τρό- πο να ζυγίσει έναν ελέφαντα που του έχουν κάνει δώρο. Ο γιος του αυτοκράτορα λύνει το πρόβλημα τοποθετώντας τον ελέ- φαντα σε μια βάρκα και παρατηρώντας τη στάθμη του νερού στα πλαϊνά. Η ποσότητα σε βάρος που παράγει το ίδιο απο- τέλεσμα είναι και το βάρος του ελέφαντα. Αυτή είναι μια ε- ξαιρετική εισαγωγή μεθόδου μέτρησης για τα παιδιά του γυμνασίου. Όχι μόνο μπορούν να πειραματιστούν με την ίδια τη μέθοδο ζύγισης, αλλά μπορούν να κάνουν έρευνα και σε άλλες μετρήσεις και να ανακαλύψουν πώς γίνονται αυτές. Για παράδειγμα, πώς μετράμε τη θερμοκρασία με ένα θερμό- μετρο υδραργύρου και πώς με ένα διμεταλλικό θερμόμετρο, εκείνο που κάνει έναν δείκτη να περιστρέφεται; ■

Σκέψεις πάνω στο Κεφάλαιο 20

Μαθαίνουμε γράφοντας

1. Εξηγήστε τι σημαίνει να μετράμε κάτι. Η εξήγηση που δώ- σατε ισχύει το ίδιο για το μήκος, το εμβαδόν, το βάρος, τον όγκο και το χρόνο;
2. Ένα γενικό σχέδιο διδασκαλίας για τη μέτρηση έχει τρία μέ- ρη. Εξηγήστε πώς ο τύπος της δραστηριότητας που χρησιμο- ποιείται σε κάθε μέρος επιτυγχάνει το διδακτικό στόχο.
3. Παρατέθηκαν πέντε λόγοι για τη χρήση άτυπων μονάδων στις διδακτικές δραστηριότητες αντί για τις τυπικές μονάδες. Ποιος από αυτούς σας φαίνεται πιο σημαντικός, και γιατί;
4. Για καθένα από τα παρακάτω χαρακτηριστικά, περιγράψ- τε μια δραστηριότητα σύγκρισης, μία ή δύο πιθανές άτυπες μονάδες, και μια ομαδική δραστηριότητα που να περιλαμ- βάνει και μια συνιστώσα με εκτιμήσεις: α) Μήκος β) Εμβα- δόν γ) Όγκος δ) Βάρος ε) Χωρητικότητα

5. Με έναν χάρακα, σχεδιάστε ένα τρίγωνο, ένα τετράπλευρο και ένα πεντάγωνο. Δώστε σε καθένα το μέγεθος περίπου μι- ας σελίδας τετραδίου. Φτιάξτε ένα μοιρογνωμόνιο από λαδό- χαρτο και μετρήστε κάθε εσωτερική γωνία. Το άθροισμα των γωνιών κάθε σχήματος πλησιάζει εκείνο που προβλέψατε;
6. Τι είναι η μοίρα; Πώς θα βοηθούσατε τα παιδιά να μάθουν τι είναι η μοίρα;
7. Τι γνώσεις πρέπει να έχουν τα παιδιά για τις τυπικές μονά- δες; Από αυτές, ποια είναι η περισσότερο και ποια η λιγό- τερο σημαντική;
8. Αναπτύξτε με κάποια συσχέτιση τους τύπους για το εμβαδόν των ορθογώνιων, των παραλληλογράμμων, των τριγώνων και των τραπέζιων. Σχεδιάστε εικόνες και αιτιολογήστε.
9. Εξηγήστε πώς αναπτύσσεται ο τύπος του όγκου για ένα ορ- θογώνιο παραλληλεπίπεδο με τρόπο ανάλογο με τη μέθοδο ανάπτυξης του τύπου εμβαδού για ένα ορθογώνιο.

10. Εξηγήστε πώς καθορίζεται το εμβαδόν ενός κύκλου με τον βασικό τύπο για το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου. (Αν έχετε ένα σύνολο από κλασματικά «κομμάτια πίτας», μπο- ρείτε να τα χρησιμοποιήσετε ως κυλινδρικούς τομείς).

11. Περιγράψτε τις διαφορές ανάμεσα στην τυπική προσέγγιση για τη διδασκαλία της ανάγνωσης ενός ρολογιού και της προσέγγισης με το ρολόι του ενός δείκτη που σχολίασαμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Για Διάλογο και Διερεύνηση

1. Κατασκευάστε το δικό σας όργανο μέτρησης για μια άτυπη μονάδα μέτρησης. Χρησιμοποιήστε το όργανο αυτό για να κάνετε μια μέτρηση και στη συνέχεια κάντε την ίδια μέτρη- ση απευθείας με το μοντέλο της μονάδας. Ποια είναι η αξία και ποιοι οι περιορισμοί κάθε μεθόδου; Έχει σημασία να βά- λετε τα παιδιά να κάνουν τη μέτρηση και με τους δύο τρό- πους;
2. Συχνά το κεφάλαιο με θέμα τη μέτρηση σε κάποιο διδακτι- κό βιβλίο καλύπτει το μήκος, το εμβαδόν, τον όγκο και τη χωρητικότητα με μετρικές και συνηθισμένες μονάδες. Αυτό συνεπάγεται επιφανειακή παρουσίαση του κάθε χαρακτη- ριστικού. Μια εναλλακτική λύση για τον εκδότη είναι, να ε- πικεντρωθεί σε έναν χώρο μέτρησης σε κάθε τάξη γνωριζο- ντας ότι με αυτό τον τρόπο δεν θα ταυτίζεται με τις οδηγίες των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών σε πολλές πολι- τείες και περιφέρειες. Βρείτε το βιβλίο του δασκάλου από ένα βασικό σχολικό βιβλίο μιας τυχαίας τάξης και κοιτάξ- τε τα κεφάλαια για τη μέτρηση. Πόσο καλά καλύπτει το βι- βλίο τις ιδέες της μέτρησης; Πώς θα τροποποιούσατε ή θα επεκτείνετε τα μαθήματα που θα συναντούσατε εκεί;

του εκπαιδευτικού καθώς και πολύτιμες εργασίες. Υπάρ- χουν και άλλα.

Nilbach, E. & Lehrer, R. (1996). Developing spatial sense through area measurement. *Teaching Children Mathematics*, 2, 473-476.

Πρόκειται για ένα εντυπωσιακό άρθρο. Οι συγγραφείς πε- ριγράφουν έξι αρχές μέτρησης, δίνοντας ιδιαίτερη προσο- χή στη μέτρηση του εμβαδού. Στη συνέχεια προχωρούν στην περιγραφή κάποιων ωραίων δραστηριοτήτων με παιδιά της πρώτης και της δεύτερης τάξης καθώς και των απαντήσεων των παιδιών. Πολύ συχνά θεωρούμε δεδομένες απλές ιδέ- ες μέτρησης. Αυτό το άρθρο παραθέτει μια σκόπια στην πραγματικότητα- βασισμένη σε έρευνα.

National Council of Teachers of Mathematics (2004) Measurement (focus Issue) *Mathematics Teaching in Middle School*, 9. Συχνά το θέμα των μετρήσεων παραλείπεται στις μεγαλύτε- ρες τάξεις. Το κεντρικό τεύχος αυτής της περιοδικής έκδο- σης του NCTM για το γυμνάσιο είναι γεμάτο με σπουδαίες πληροφορίες για τους εκπαιδευτικούς αυτών των τάξεων. Σε πολλά άρθρα δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στο σχεδιασμό κλιμάκων ή άλλων τιμημάτων της αναλογικής συλλογιστικής σκέψης, που αποτελούν ένα σπουδαίο τρόπο να ενσωματω- σετε τη μέτρηση στο αναλυτικό σας πρόγραμμα. Επιπλέον, υπάρχει ένα ολόκληρο άρθρο που αφορά την ενσωμάτωση των αναλυτικών προγραμμάτων. Αυτό το περιοδικό θα απο- τελούσε καλή προσθήκη στο υλικό της αναφοράς.

Pumala V., A., & Klabunde, D., A. (2005) Learning Measurement through practice. *Mathematics Teaching in Middle School*, 10, 452-460.

Ένας μαθηματικός και ένα καθηγητής των φυσικών επιστη- μών, που στενάζουν ότι τα παιδιά τους ξέρουν τόσα λί- γα για τη μέτρηση, συνεργάζονται σε μία σειρά έξι δραστη- ριοτήτων για να βοηθήσουν τα παιδιά τους να μάθουν για τη μέτρηση και να τα μάθουν μέσω ενασχόλησης. Στο άρ- θρο περιλαμβάνονται περιγραφές των δραστηριοτήτων και λεπτομερείς ρουμπρίκες μαζί με τη δουλειά των παιδιών. Αυτοί οι εκπαιδευτικοί σκέφτηκαν πολύ αυτή τη διδακτική συνέχεια και μπορείτε να ωφεληθείτε από τη δουλειά τους. Ένα σπουδαίο άρθρο!

Διαδικτυακές Πηγές

Προτεινόμενα Βοηθητικά Προγράμματα και Δικτυακοί Σύνδεσμοι

Clockwise

www.shodor.org/Interactive/activities/clock2/index.htm

Παρουσιάζεται ένα ρολόι φατσούλα και ο χρήστης εισάγει την ψηφιακή ώρα. Υπάρχουν τρία επίπεδα δυσκολίας.

Cubes

http://illuminations.nctm.org/tools/tool_detail.aspx?id=6

Ένα εξαιρετικό διαδραστικό βοηθητικό πρόγραμμα που πα- ρουσιάζει τον όγκο ενός παραλληλόγραμμου πρίσματος (κουτί). Μονάδες μεμονωμένων κύβων, σειρές κύβων, ή

Προτεινόμενη βιβλιογραφία

Συστάσεις για Περαιτέρω Διάβασμα

Clemets D., H., (Ed.) (2003) *Learning and Teaching Measurement: 2003 Yearbook*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Μια πολύτιμη πηγή πληροφοριών, αυτό το βιβλίο φέρνει μια πρακτική και ερευνητική οπτική στις μετρήσεις που επεκτεί- νεται και παρέχει επιπλέον πληροφορίες σε σχέση με τις ι- δέες σε αυτό το κεφάλαιο. Οι Grante και Kline αναλύουν την έναρξη των μετρήσεων στις τάξεις από το νηπιαγωγείο μέχρι και τη δεύτερη. Ο Clark και οι συνάδελφοι του από την Αυστραλία προσφέρουν στρατηγικές αξιολόγησης μαζί με ένα πλαίσιο εργασίας για τη διδασκαλία της μέτρησης. Ο Joram παρουσιάζει λεπτομερώς τη σημασία των σημείων αναφοράς στις εκτιμήσεις. Τα δύο κεφάλαια που αναλύουν την έρευνα σε σχέση με τη διδασκαλία του εμβαδού και του όγκου βοήθησαν να διαμορφώσουμε τις ιδέες αυτού του κε- φαλαίου. Είναι σημαντικό να διαβάσετε ολόκληρα αυτά τα κεφάλαια. Οι Schifter και Syzmek προσφέρουν την οπτική

στρώματα κύβων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να γεμίσουν ένα πρίσμα.

Geoboard

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_279_g_4_t_3.html

Αυτό ο ηλεκτρονικός γεωμετρικός πίνακας μετρά το εμβαδόν και την περίμετρο οποιουδήποτε σχήματος φτιάχνεται. Αυτό που είναι καλό είναι ότι οι μετρήσεις δεν φαίνονται μέχρι ο χρήστης να κάνει κλικ στο κομμάτι Measures. Τα παιδιά μπορούν να προβληθούν να κάνουν σχήματα με συγκεκριμένα εμβαδά και / ή περιμέτρους.

How High

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_275_g_3_t_4.html

Παρουσιάζονται δύο κύλινδροι μαζί με το εμβαδόν μιας βάσης που παρουσιάζεται ως πλέγμα τετραγώνων. Ένας κύλινδρος γεμίζει μέχρι ένα συγκεκριμένο ύψος. Η εργασία είναι να καθορίσετε το ύψος αυτού του ίδιου υγρού όταν το βάσουμε σε ένα δεύτερο δοχείο.

Image Tool

www.shodor.org/interactive/activities/imagetool/index.html

Ο χρήστης μπορεί να μετρήσει γωνίες, αποστάσεις και εμβαδά σε πολλές διαφορετικές εικόνες (οι επιλογές περιλαμβάνουν χάρτες, αεροφωτογραφίες και άλλα). Το στοιχείο της κλίμακας επιτρέπει στο χρήστη να θέσει την κλίμακα που χρησιμοποιείται για την μέτρηση των αποστάσεων και των εμβαδών. Μοναδικό!

Match Clocks

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_317_g_2_t_4.html

Ο χρήστης ταιριάζει είτε την ψηφιακή ώρα στην αναλογική

ή το αντίστροφο. Τα προβλήματα θέτονται με τυχαία σειρά και δεν υπάρχουν έλεγχοι για το επίπεδο δυσκολίας.

Perimeter Explorer

www.shodor.org/interactive/activities/perimarea/index.html

Οι χρήστες θέτουν μια ομάδα σταθερών αριθμών τετραγωνικών μονάδων και το βοηθητικό πρόγραμμα δημιουργεί τυχαία σχήματα σε ένα πλέγμα με αυτό το εμβαδόν. Ο στόχος είναι να καθοριστεί η περίμετρος. Υπάρχει επίσης και το Area Explorer (με σταθερή περίμετρο) και το Shape Explorer, το οποίο ζητά από το χρήστη να δώσει τόσο το εμβαδόν όσο και την περίμετρο των τυχαίων σχημάτων.

Turtle Pond

http://illuminations.nctm.org/tools/tool_detail.aspx?id=83

Σε αυτή τη δραστηριότητα ο χρήστης εισάγει τις εντολές για την απόσταση και τη γωνία σε μία συνέχεια (όπως το Logo) για να κινήσει μια χελώνα σε μια λιμνούλα. Βοηθά στον υπολογισμό της απόστασης και της γωνίας.

What Time Will It Be?

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_318_g_2_t_4.html

Παρουσιάζονται λεκτικά προβλήματα με το χρόνο που έχει περάσει. Παρουσιάζονται δύο ρολόγια, το ένα με το χρόνο εκκίνησης και το άλλο για να γίνει μια ομάδα. Μερικά προβλήματα είναι ψηφιακά, και άλλα αναλογικά.



Επιπλέον κατάλογο βιβλίων και άρθρων που σχετίζονται με τις ιδέες που αναφέρονται σε αυτό το κεφάλαιο μπορείτε να βρείτε στο www.ablongman.com/vandewalle6e

Κεφάλαιο 21



Γεωμετρία

Γεωμετρικές Εννοιες

Η γεωμετρία στις τάξεις από το νηπιαγωγείο μέχρι τη δευτέρα γυμνασίου επιτέλους λαμβάνεται σοβαρά υπόψη. Η γεωμετρία συνήθιζε να είναι το κεφάλαιο που παραλείπονταν ή που αναβαλλόταν για το τέλος τους έτους. Πολλοί εκπαιδευτικοί δεν ένιωθαν άνετα με τη γεωμετρία, συσχετίζοντας την με το Λύκειο και τις αποδείξεις. Ούτε την θεωρούσαν σημαντική, διότι ελάχιστα μόνον εξεταζόταν, στα σταθμισμένα τεστ. Τώρα αποτελεί μέρος της διδακτέας ύλης σχεδόν σε κάθε πολιτεία και περιοχή.

Η αλλαγή αυτή οφείλεται κατά ένα μεγάλο μέρος στην επιρροή του κινήματος NCTM Standards το 1989. Μία δεύτερη σημαντική επιρροή αποτέλεσε το ενδιαφέρον προς μια θεωρητική οπτική γωνία, που μας βοήθησε να κατανοήσουμε τους τρόπους που σκέπτονται τα παιδιά για τις έννοιες του χώρου.



Κεντρικές Ιδέες

1. Αυτό που κάνει τα σχήματα ανόμοια και διαφορετικά μπορεί να καθοριστεί από μία σειρά γεωμετρικών ιδιοτήτων. Για παράδειγμα, τα σχήματα έχουν πλευρές που είναι είτε παράλληλες, είτε κάθετες είτε τίποτα από τα δύο. Μπορούν να έχουν είτε γραμμική συμμετρία, είτε περιστροφική συμμετρία είτε τίποτα από τα δύο. Μπορούν να είναι είτε όμοια, είτε να συμπίπτουν, είτε τίποτα από τα δύο.
2. Τα σχήματα μπορούν να μετακινηθούν στο επίπεδο ή στο χώρο. Αυτές οι αλλαγές μπορούν να περιγραφούν με όρους μεταφράσεων (γλιστρήματα), αντανάκλασεων (τυνάζματα), και περιστροφών (στροφές).
3. Τα σχήματα μπορούν να περιγραφούν όσον αφορά στη θέση τους στο επίπεδο ή στο χώρο. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε συστήματα συντεταγμένων για να περιγράψουμε τις θέσεις αυτές με επακρίβεια. Από την πλευρά της, η αναλυ-

τική οπτική ενός σχήματος προσφέρει έναν άλλον τρόπο κατανόησης ορισμένων ιδιοτήτων των σχημάτων, των αλλαγών στη θέση (των μετασχηματισμών), και πώς εμφανίζονται ή αλλάζουν μέγεθος (νοερή απεικόνιση).

4. Τα σχήματα μπορούν να ιδωθούν από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Η ικανότητα να αντιλαμβανόμαστε τα σχήματα από διαφορετικές οπτικές γωνίες μας βοηθάει να κατανοήσουμε τις σχέσεις ανάμεσα στα διδιάστατα και τριδιάστατα σχήματα και να αλλάξουμε τη θέση και το μέγεθος των σχημάτων νοερά.

Μαθηματικά

Συνδέσεις με το Περιεχόμενο

Μία καλή κατανόηση της γεωμετρίας έχει ξεκάθαρες και σημαντικές συνέπειες σε άλλα θέματα της διδακτέας ύλης. Εκμεταλλευτείτε αυτές τις συνδέσεις όποτε είναι δυνατόν

- **Μέτρηση (Κεφάλαιο 20):** Η μέτρηση και η γεωμετρία ενυγραμμίζονται ολοφάνερα κατά την ανάπτυξη των τύπων του εμβαδού και του όγκου και την κατανόηση των σχέσεων εμβαδού/περίμετρου και επιφάνειας/όγκου. Η αναλυτική γεωμετρία παρέχει νέους τρόπους για να καθορίσουμε τα μήκη, τα εμβαδά και τους όγκους. Η Πυθαγόρεια σχέση είναι συγχρόνως μία αλγεβρική, γεωμετρική και μετρική σχέση.
- **Αναλογική συλλογιστική Σκέψη (Κεφάλαιο 19):** Τα όμοια γεωμετρικά αντικείμενα έχουν αναλογικές διαστάσεις και παρέχουν οπτική απεικόνιση της αναλογίας αυτής.
- **Άλγεβρα (Κεφάλαιο 15):** Η γραφική παράσταση στο σύστημα των συντεταγμένων παρέχει μία αναλυτική εξέταση της ιδέας της κλίσης, καθώς και της σχέσης καθετότητας και παραλληλότητας. Η Πυθαγόρεια σχέση μας δίνει μία αλγεβρική προσέγγιση της απόστασης μεταξύ των σημείων σε ένα επίπεδο. Οι μεταμορφώσεις των σχημάτων (γλιστρήματα, τυνάζματα και στροφές) μπορούν να περιγραφούν με τις

συντεταγμένες, επιτρέποντας την ψηφιακή διαχείριση των σχημάτων. Ολόκληρος ο κόσμος του σχεδιασμού στους Η/Υ βασίζεται στο «πάνταρεμα» της γεωμετρίας με την άλγεβρα.

■ **Ακέραιοι αριθμοί (Κεφάλαιο 24):** Το επίπεδο των συντεταγμένων παρέχει μία σύνδεση, διότι τόσο οι θετικοί όσο και οι αρνητικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται στην περιγραφή της θέσης στο επίπεδο και στο χώρο.

Καθώς τα παιδιά μελετούν κλασματικά μέρη σχημάτων, τα κλάσματα συσχετίζονται με τη γεωμετρία. Η σύνδεση αυτή είναι πιθανά περισσότερο παιδαγωγική παρά μαθηματική.

Γεωμετρικοί Στόχοι για τα Παιδιά

Είναι πολύ χρήσιμο να σκέφτεστε τους γεωμετρικούς σας στόχους σε δύο πολύ διαφορετικά πλαίσια: τη συλλογιστική σκέψη του χώρου, ή την αίσθηση του χώρου και το συγκεκριμένο περιεχόμενο όπως αυτό που βρίσκεται κατά πάσα πιθανότητα στους πολιτειακούς ή τοπικούς σας στόχους. Το πρώτο από αυτά τα δύο πλαίσια αφορά τον τρόπο που σκέφτονται τα παιδιά και τη συλλογιστική τους σκέψη για τα σχήματα και το χώρο. Υπάρχει μια πολύ καλή θεωρητική βάση που στηρίζεται σε έρευνες για την ανάπτυξη της γεωμετρικής συλλογιστικής σκέψης που καθοδηγεί αυτό το πλαίσιο. Το δεύτερο πλαίσιο είναι το περιεχόμενο με την πιο παραδοσιακή έννοια, να γνωρίζουμε τις συμμετρίες, τα τρίγωνα, τις παράλληλες γραμμές και άλλα. Οι συγγραφείς του *Principles and Standards for School Mathematics* (Αρχές και Στάνταρ για τα Σχολικά Μαθηματικά) του NCTM έχουν βοηθήσει στην περιγραφή των στόχων του περιεχομένου σε όλες τις τάξεις. Χρειάζεται να καταλαβαίνουμε και τις δύο αυτές πλευρές της γεωμετρίας – τη συλλογιστική και το περιεχόμενο – για να μπορέσουμε να βοηθήσουμε την καλύτερη δυνατή ανάπτυξη των παιδιών.

Αίσθηση του Χώρου και Γεωμετρική Συλλογιστική Σκέψη

Η αίσθηση του χώρου μπορεί να οριστεί ως μία διαίσθηση για τα σχήματα και τις μεταξύ τους σχέσεις. Ατομα με αίσθηση του χώρου αντιλαμβάνονται τις γεωμετρικές όψεις του περιβάλλοντός τους και τα σχήματα που δημιουργήθηκαν από αντικείμενα αυτού.

Η αίσθηση του χώρου περιλαμβάνει την ικανότητα του νοερού οραματισμού αντικειμένων και των χωρικών σχέσεων – να περιγράφονται πράγματα στο μυαλό σας. Περιλαμβάνει μία άνεση με τις γεωμετρικές περιγραφές αντικειμένων και θέσεων. Οι άνθρωποι με ανεπτυγμένη την αίσθηση του χώρου εκτιμούν τη γεωμετρική μορφή στην τέχνη, τη φύση και την αρχιτεκτονική. Είναι ικανοί να χρησιμοποιούν γεωμετρικές ιδέες για να περιγράφουν και να αναλύουν τον κόσμο τους.

Πολλοί άνθρωποι λένε ότι δεν είναι πολύ καλοί με τα σχήματα ή ότι έχουν μικρή αίσθηση του χώρου. Η κοινή πεποίθηση είναι ότι είτε γεννιόμαστε με την αίσθηση του χώρου είτε όχι. Αυτό, απλώς, δεν είναι σωστό. Τώρα γνωρίζουμε ότι οι πλούσιες εμπειρίες με τα σχήματα και τις σχέσεις στο χώρο, όταν παρέχονται συνεχώς, με την πάροδο του χρόνου μπορούν πράγματι να αναπτύξουν την αίσθηση του χώρου. Δίχως τις γεωμετρικές εμπειρίες, οι περισσότεροι άνθρωποι δεν αναπτύσσουν την αίσθηση ή τη συλλογιστική του χώρου. Για την περίοδο από το 1990 μέχρι το 1996, τα δεδομένα του NAEF έδειξαν μία σταθερή, συνεχή βελτίωση στη γεωμετρική σκέψη των παιδιών σε όλες τις τάξεις που εξετάστηκε, την τετάρτη, τη δευτέρα γυμνασίου και την τρίτη λυκείου (Martin & Strutchens, 2000). Τα παιδιά δεν έγιναν ξαφνικά πιο έξυπνα. Το πιθανότερο είναι ότι υπήρξε μία αυξανόμενη έμφαση στη γεωμετρία σε όλες τις τάξεις. Ωστόσο, πρέπει να γίνουν πολύ περισσότερα αν τα παιδιά στις Η.Π.Α. προορίζονται να φτάσουν στο ίδιο επίπεδο με τα αντίστοιχα παιδιά στην Ευρώπη και την Ασία.

II Σταματώ και στοάζομαι

Αναλογισθείτε για μια στιγμή τις πεποιθήσεις σας σχετικά τις ικανότητες ενός ατόμου στον τομέα της αίσθησης του χώρου. Τι πιστεύετε ότι κάνει κάποιους ανθρώπους να έχουν καλύτερη αίσθηση του χώρου από άλλους;

NCTM
Στάνταρ

Τα Στάνταρ στηρίζουν την ιδέα ότι όλα τα παιδιά μπορούν να αναπτύξουν τις γεωμετρικές τους ικανότητες και την κατανόησή τους. «Η ιδέα της δόμησης της γεωμετρικής κατανόησης καθώς προχωρούν από μια τάξη στην άλλη, από την άτυπη στην πιο τυπική σκέψη, είναι συνεπής με την άποψη των θεωρητικών και των ερευνητών» (σελ.41).

Το Περιεχόμενο της Γεωμετρίας

Για μεγάλο χρονικό διάστημα, η διδασκτέα ύλη για τη γεωμετρία στις Ηνωμένες Πολιτείες ήταν κατά κάποιον τρόπο ένα εκλεκτικό μείγμα από δραστηριότητες και λίστες από «λέξεις τυπωμένες με έντονους χαρακτήρες» – δινόντας υπερβολική έμφαση στην εκμάθηση της ορολογίας. Συγχρόνως, η αυξανόμενη έμφαση που δίνεται στη γεωμετρία έχει γεννήσει μία τεράστια ποικιλία υπέροχων δραστηριοτήτων για τα παιδιά. Ευντυχώς, οι συγγραφείς του *Principles and Standards for School Mathematics* (Αρχές και Στάνταρ για τα Σχολικά Μαθηματικά) μας παρέχουν ένα πλαίσιο περιεχομένου για το σχολικό πρόγραμμα σπουδών από το νηπιαγωγείο μέχρι και την τρίτη λυκείου. Όπως συμβαίνει με καθένα από τα Στάνταρ του περιεχομένου, έτσι και το standard της γεωμετρίας έχει έναν αριθμό στόχων που ισχύουν για όλες τις τάξεις. Οι τέσσερις στόχοι της γεωμετρίας μπορούν εύκολα να συνοψισθούν με

τους ακόλουθους τίτλους: Σχήματα και Ιδιότητες, Μετασχηματισμός, Θέση στο χώρο και Νοερή Απεικόνιση.

- Το *Σχήματα και Ιδιότητες* περιλαμβάνει τη μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων, τόσο των διδασκαστων όσο και των τριδιάστατων, καθώς επίσης και τη μελέτη των σχέσεων που θεμελιώνονται σε ιδιότητες.
- Το *Θέση στο χώρο* περιλαμβάνει τη μελέτη μεταφράσεων, αντανάκλασεων και περιστροφών (γλιστρήματα, τινάγματα και στροφές) και τη μελέτη της συμμετρίας.
- Το *Τοποθεσία αναφέρεται* πρωτίστως στο συντονισμό της γεωμετρίας ή άλλων τρόπων συγκεκριμενοποίησης του πώς τοποθετούνται τα αντικείμενα στο επίπεδο ή στο χώρο.
- Το *Νοερή απεικόνιση*, περιλαμβάνει την αναγνώριση σχημάτων στο περιβάλλον, την ανάπτυξη σχέσεων διδασκαστων και τριδιάστατων αντικειμένων και από άλλες οπτικές γωνίες.

Η αξία αυτών των στόχων του περιεχομένου είναι ότι επιτελούν υπάρχει ένα πλαίσιο του περιεχομένου, που να χωρίζει τις τάξεις με τέτοιον τρόπο, ώστε τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και οι σχεδιαστές του προγράμματος σπουδών, να μπορούν να εξετάζουν την ανάπτυξη από χρόνο σε χρόνο. Για να έχετε μια πιο λεπτομερή εικόνα αυτών των τομέων του αναλυτικού προγράμματος, γυρίστε στο Παράρτημα Α και εξετάστε τους στόχους του NCTM και τις προσδοκίες για κάθε έναν σε όλες τις τάξεις. Οι δραστηριότητες σε αυτό το κεφάλαιο ομαδοποιούνται ανάλογα σε αυτές τις τέσσερις κατηγορίες για να σας βοηθήσουν ακόμη περισσότερο.

Η Ανάπτυξη της Γεωμετρικής Συλλογιστικής Σκέψης

Δεν σκέπτονται όλοι οι άνθρωποι τις γεωμετρικές έννοιες με τον ίδιο τρόπο. Ασφαλώς δεν είμαστε όλοι ίδιοι, αλλά μπορούμε όλοι να αναπτύξουμε την ικανότητά μας να σκεπτόμαστε και να συλλογιστούμε σε γεωμετρικά συγκεκριμένα. Η έρευνα δύο Ολλανδών παιδαγωγών, του Pierre van Hiele και της Dina van Hiele-Geldof, μας διαφύτισε γύρω από τις διαφορές στη γεωμετρική σκέψη και πώς αυτές έχουν προκύψει.

Το έργο των van Hiele άρχισε το 1959 και αμέσως προσέλκυσε μεγάλο ενδιαφέρον στη Σοβιετική Ένωση, αλλά για σχεδόν δύο δεκαετίες σχεδόν αγνοήθηκε (Hoffer, 1983, Hoffer & Hoffer, 1992). Σήμερα όμως, η θεωρία van Hiele έχει γίνει ο παράγοντας που επηρεάζει περισσότερο το πρόγραμμα σπουδών για το μάθημα της γεωμετρίας στις Η.Π.Α.

Επίπεδα Γεωμετρικής Σκέψης κατά van Hiele

Το πιο χαρακτηριστικό γνώρισμα του μοντέλου είναι η ιεράρ-

χιση σε πέντε επίπεδα των τρόπων κατανόησης των ιδεών του χώρου. Καθένα από τα πέντε επίπεδα περιγράφει τις διαδικασίες συλλογιστικής σκέψης που χρησιμοποιούνται στα γεωμετρικά συγκεκριμένα. Τα επίπεδα περιγράφουν πώς σκεπτόμαστε και ποιους τύπους γεωμετρικών ιδεών σκεπτόμαστε, παρά το πόσες γνώσεις έχουμε. Μία συσπώδης διαφορά από το ένα επίπεδο στο άλλο είναι τα αντικείμενα της σκέψης – τα μπορούμε δηλαδή να επεξεργαστούμε γεωμετρικά.

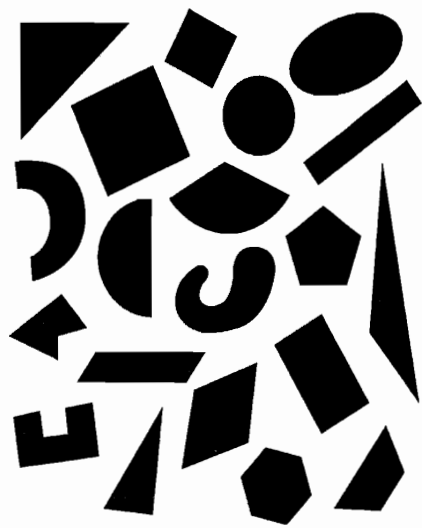
Επίπεδο 0: Νοερή Απεικόνιση

Τα αντικείμενα της σκέψης είναι τα σχήματα και η μορφή τους, δηλαδή με τι «μοιάζουν».

Τα παιδιά σε αυτό το πρώτο επίπεδο αναγνωρίζουν και κατονομάζουν τα σχήματα βασισμένα στα καθολικά, οπτικά χαρακτηριστικά τους – μία προσέγγιση του σχήματος που μοιάζει με την ψυχολογία της μορφής Gestalt. Αυτά τα παιδιά είναι ικανά να κάνουν μετρήσεις, ακόμα και να συζητούν για τις ιδιότητες των σχημάτων, όμως αυτές οι ιδιότητες δεν προκύπτουν από τα σχήματα στο χέρι. Η εμφάνιση του σχήματος είναι που τις καθορίζει για το παιδί. Ένα τετράγωνο είναι ένα τετράγωνο «επειδή μοιάζει με τετράγωνο». Λόγω του ότι η εμφάνιση παίζει κυρίαρχο ρόλο στο επίπεδο αυτό, η μορφή μπορεί να υπερισχύει των ιδιοτήτων του σχήματος. Παράδειγματος χάριν, ένα τετράγωνο που έχει περιτραφεί έτσι που όλες οι πλευρές του να σχηματίζουν με την κάθετο μία γωνία 45 μοιρών, μπορεί τώρα πια να είναι ένα διαμάντι και όχι πλέον ένα τετράγωνο. Τα παιδιά σε αυτό το επίπεδο θα ταξινομήσουν και θα κατατάξουν τα σχήματα βασισμένα στη μορφή τους – «Τα βάζω μαζί επειδή όλα είναι ματερά» (ή «χοντρά», ή «μοιάζουν με οπίκα», ή «βαθουλώνουν κατά τέτοιον τρόπο» και ούτω καθεξής). Εστιάζοντας στις μορφές των σχημάτων, τα παιδιά είναι ικανά να δουν πώς τα σχήματα είναι όμοια και πώς διαφορετικά. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, τα παιδιά στο συγκεκριμένο επίπεδο να μπορούν να δημιουργήσουν και να αρχίσουν να κατανοούν τις ταξινομήσεις των σχημάτων.

Τα προϊόντα της σκέψης στο επίπεδο 0 είναι οι κατατάξεις ή ομαδοποιήσεις των σχημάτων που φαίνονται όμοια.

Στο επίπεδο 0 η έμφαση δίνεται στα σχήματα που μπορούν να παρατηρήσουν τα παιδιά, να αντιληφθούν, να κατασκευάσουν, να χωρίσουν και να συλλάβουν με πολλούς τρόπους. Ο γενικός στόχος είναι η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο τα σχήματα παρουσιάζουν μεταξύ τους ομοιότητες και διαφορές και η χρησιμοποίηση αυτών των ιδεών για τη δημιουργία ομάδων από σχήματα (τόσο φυσικά όσο και νοερά). Κάποιες από αυτές τις ομάδες σχημάτων έχουν ονόματα – ορθογώνια, τρίγωνα, πρίσματα, κύλινδροι κ.ο.κ. Ιδιότητες των σχημάτων, όπως παράλληλες πλευρές, συμμετρία, ορθές γωνίες κ.ά., εισάγονται σε αυτό το επίπεδο αλλά μόνο με έναν άτυπο τρόπο από την παρατήρηση.



ΣΧΗΜΑ 21.1 Μια ποικιλία σχημάτων για ταξινόμηση. Δείτε τα Blackline Masters για μεγαλύτερες συλλογές.

Αν και η θεωρία του van Hiele εφαρμόζεται σε όλα τα παιδιά που διδάσκονται οποιοδήποτε γεωμετρικό περιεχόμενο, μπορεί να είναι πιο εύκολο να εφαρμόσετε αυτή τη θεωρία στην κατηγορία Σχήματα και Ιδιότητες. Η ακόλουθη δραστηριότητα είναι μια καλή αναταράχωση μιας αντίστοιχης δραστηριότητας για το επίπεδο 0.

Δραστηριότητα 21.1

Ταξινόμηση Σχημάτων

Χωρίστε τα παιδιά σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων με μία συλλογή από 2 – Δ Σχήματα, όμοια με αυτά στο σχήμα 21.1. Εδώ υπάρχουν διάφορες σχετικές δραστηριότητες, που θα μπορούσαν να γίνουν με τη σειρά.

- Κάθε παιδί επιλέγει τυχαία ένα σχήμα. Στη συνέχεια, τα παιδιά λένε ένα-δύο πράγματα που βρίσκουν ενδιαφέροντα στο σχήμα τους. Δεν υπάρχουν σωστές ή λάθος απαντήσεις.
- Καθένα από τα παιδιά επιλέγει τυχαία δύο σχήματα. Το ερώτημα της άσκησης είναι να βρουν στα σχήματά τους μία ομοιότητα και μία διαφορά (βάλτε τα να επιλέξουν τα σχήματά τους, προτού τους πείτε την άσκηση).
- Η ομάδα επιλέγει ένα σχήμα τυχαία και το τοποθετεί στο κέντρο του χώρου εργασίας. Αυτό που πρέπει να κάνουν είναι να βρουν όλα τα άλλα σχήματα που είναι όμοια με το κεντρικό σχήμα, αλλά όλα σύμφωνα με τον ίδιο κανόνα. Λόγου χάρη, εάν πουν «Αυ-

τό μοιάζει με το σχήμα μας επειδή έχει μία καμπύλη πλευρά και μία ευθεία», τότε όλα τα άλλα σχήματα που βάζουν στη συλλογή πρέπει να έχουν αυτές τις ιδιότητες. Προκαλέστε τα να κάνουν μία δεύτερη ταξινόμηση με το ίδιο κεντρικό σχήμα, αλλά χρησιμοποιώντας μια διαφορετική ιδιότητα.

- Βάλτε τα παιδιά να μοιραστούν στην τάξη τους κανόνες τους για την ταξινόμηση και δώστε παραδείγματα. Όλα τα παιδιά τότε θα σχεδιάσουν ένα καινούριο σχήμα, το οποίο επιπλέον θα ταιριάζει με την ομάδα σύμφωνα με τον ίδιο κανόνα. Θα πρέπει να γράψουν για το καινούριο τους σχήμα το λόγο που ταιριάζει στον κανόνα.
- Κάντε μία «κρυφή ταξινόμηση». Εσείς ή ένα από τα παιδιά δημιουργεί μία μικρή συλλογή από πέντε περίπου σχήματα που ταιριάζουν με ένα στο μυστικό κανόνα. Αφήστε τα άλλα που ανήκουν στην ομάδα σας στη στοιβα. Τα άλλα παιδιά προσπαθούν να βρουν επιπλέον κομμάτια που να ανήκουν στην ομάδα και / ή να μαντέψουν το μυστικό κανόνα.

Ανάλογα με το επίπεδο της τάξης, αυτή η δραστηριότητα θα εκμαιεύσει μια μεγάλη ποικιλία ιδεών καθώς τα παιδιά επεξεργάζονται τα σχήματα. Στα περισσότερα από αυτά θα υπάρχουν ιδέες όπως, «καμπυλόγραμμο» και «μοιάζει με πύραυλο», αντί για τυπικές γεωμετρικές έννοιες. Όμως τα παιδιά μπορεί να αρχίσουν να παρατηρούν περισσότερο εξεζητημένες ιδιότητες και ο εκπαιδευτικός μπορεί να αρπάξει την ευκαιρία για να τους δώσει ονόματα καθώς τα παιδιά τα περιγράφουν. Για παράδειγμα τα παιδιά μπορεί να παρατηρήσουν ότι κάποια σχήματα έχουν γωνίες «σαν τετράγωνο» (ορθές γωνίες) ή ότι «αυτά τα σχήματα είναι το ίδιο και στις δύο πλευρές» (συμμετρία γραμμών).

Ωστόσο, αυτό που κάνει τη δραστηριότητα απόλυτα κατάλληλη για το επίπεδο 0, δεν είναι η παρουσία ή η απουσία των παραδοσιακών γεωμετρικών ιδιοτήτων ή όρων. Αντίθετα, τα παιδιά λειτουργούν με τα σχήματα που βλέπουν μπροστά τους. Επιπλέον, για τα παιδιά στο επίπεδο 0, τα σχήματα μπορεί να αλλάζουν ή να έχουν διαφορετικές ιδιότητες καθώς ανασηματώνονται ή περιτρέφονται. Ο στόχος αυτής της δραστηριότητας είναι να μπορέσουν τα παιδιά να δουν ότι υπάρχουν ομοιότητες και διαφορές στα σχήματα. Σχηματίζοντας ομάδες σχημάτων, μπορεί να αρχίσουν να φαντάζονται σχήματα που να ανήκουν σε αυτές τις κατατάξεις και δεν υπάρχουν μπροστά τους.

Επίπεδο 1: Ανάλυση

Τα αντικείμενα της σκέψης στο επίπεδο 1 είναι περισσότερο κατατάξεις σχημάτων παρά μεμονωμένα σχήματα.

Τα παιδιά στο επίπεδο της ανάλυσης είναι ικανά να εξετάσουν όλα τα σχήματα μέσα σε μία ομάδα παρά το κάθε σχήμα μόνο του. Αντί να συζητούν για ένα από το ορθόγωνο, μπορούν

να συζητούν για όλα τα ορθόγωνα. Εστιάζοντας προς μία κατηγορία σχημάτων, τα παιδιά μπορούν να συλλογιστούν τι είναι αυτό που κάνει ένα ορθόγωνο να είναι ένα ορθόγωνο (τέσσερις πλευρές, οι απέναντι πλευρές παράλληλες, οι απέναντι πλευρές ισομήκεις, τέσσερις ορθές γωνίες, ίσες διαγώνιοι, κτλ.). Τα χαρακτηριστικά που δεν έχουν σχέση (π.χ., το μέγεθος ή ο προσανατολισμός) αποκτούν δευτερεύουσα σημασία. Σε αυτό το επίπεδο, τα παιδιά αρχίζουν να εκτιμούν ότι διαφορετικά σχήματα ανήκουν στην ίδια συλλογή λόγω των ιδιοτήτων τους. Οι ιδέες για ένα μεμονωμένο σχήμα μπορούν τώρα να γενικευθούν σε όλα τα σχήματα που ανήκουν σε μία κατηγορία. Αν ένα σχήμα ανήκει σε μία συγκεκριμένη ομάδα όπως οι κύβοι, τότε έχει τις αντίστοιχες ιδιότητες της ομάδας αυτής. «Όλοι οι κύβοι έχουν έξι ίσες έδρες, κάθε μία από τις οποίες είναι ένα τετράγωνο». Αυτές οι ιδιότητες μονάχα υπονοούνταν στο επίπεδο 0. Τα παιδιά που λειτουργούν στο επίπεδο 1 μπορεί να είναι ικανά να καταγράφουν όλες τις ιδιότητες των τετραγώνων, των ορθογώνων και των παραλληλόγραμμων, ωστόσο δεν είναι σε θέση να αντιληφθούν ότι αυτές είναι υποκατηγορίες ή μία της άλλης, ότι δηλαδή όλα τα τετράγωνα είναι ορθόγωνα και όλα τα ορθόγωνα παραλληλόγραμμα. Κατά τον ορισμό ενός σχήματος, τα άτομα που βρίσκονται στο επίπεδο 1 πιθανότατα θα καταγράψουν σε λίστες όλες τις ιδιότητες που γνωρίζουν για αυτό.

Τα προϊόντα της σκέψης στο επίπεδο 1 είναι οι ιδιότητες των σχημάτων.

Μία σημαντική διαφορά ανάμεσα στα επίπεδα 1 και 0 είναι το αντικείμενο της μαθητικής σκέψης. Ενώ τα παιδιά στο επίπεδο 1 θα συνεχίσουν να χρησιμοποιούν μοντέλα και σχέδια σχημάτων, αρχίζουν να τα βλέπουν ως εκπροσώπους των τάξεων των σχημάτων. Η κατανόησή τους για τις ιδιότητες των σχημάτων –όπως η συμμετρία, οι κάθετες και παράλληλες γραμμές κ.ο.κ.– συνεχίζει να βελτιώνεται.

Στην παρακάτω δραστηριότητα ζητείται από τα παιδιά να ανακαλέσουν όσο το δυνατόν περισσότερες ιδιότητες των σχημάτων μπορούν. Τις ιδιότητες αυτές θα τις έχουν μάθει σε προηγούμενες δραστηριότητες, πιθανώς στο επίπεδο 0. Μπορεί να περιλαμβάνουν ιδέες, όπως τη συμμετρία, τις γωνίες, (ορθή, αμβλεία, οξεία), τις παράλληλες και τις κάθετες και την έννοια των ομόλογων τμημάτων των γραμμών και των γωνιών.

Δραστηριότητα 21.2

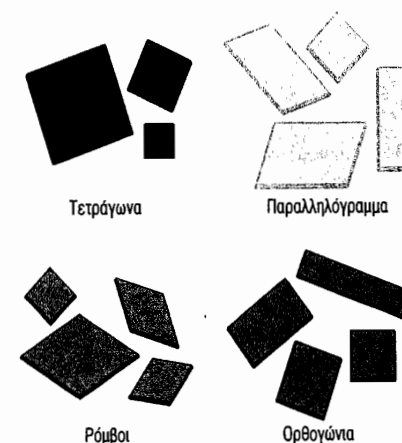
Λίστες Ιδιοτήτων για τα Τετράπλευρα

Ετοιμάστε φύλλα εργασίας για τα παραλληλόγραμμα, τους ρόμβους, τα ορθόγωνα και τα τετράγωνα (βλέπε το Blackline Masters). Σε κάθε φύλλο υπάρχουν τρία ή τέσσερα παραδείγματα αυτής της κατηγορίας του σχήματος. Τα παραδείγματα απεικονίζονται στο Σχήμα 21.2. Αναθέστε στα παιδιά να εργαστούν σε ο-

μάδες των τριών ή των τεσσάρων σε έναν τύπο τετραπλεύρου. Η εργασία τους είναι να γράψουν σε λίστες όσες περισσότερες ιδιότητες μπορούν. Κάθε ιδιότητα στη λίστα θα πρέπει να μπορεί να αποδοθεί σε όλα τα σχήματα του φύλλου τους. Θα χρειαστούν μία απλή κάρτα-αρχείου για να ελέγξουν τις ορθές γωνίες, για να συγκρίνουν τα μήκη των πλευρών και να σχεδιάσουν ευθείες γραμμές. Οι καθάρφτες (για τον έλεγχο της γραμμικής συμμετρίας) και το χαρτί αντηγραφής (για ισότητα των γωνιών και περιστροφική συμμετρία) είναι εξίσου χρήσιμα εργαλεία. Ενθαρρύνετε τα παιδιά να χρησιμοποιούν τη λέξη «τουλάχιστον», όταν περιγράφουν την ποσότητα από κάτι: για παράδειγμα, «τα ορθόγωνα έχουν τουλάχιστον δύο ευθείες συμμετρίες», τη στιγμή που τα τετράγωνα –συμπεριλαμβανομένων και των ορθογώνων– έχουν τέσσερις.

Βάλτε τα παιδιά να ετοιμάσουν τις λίστες τους με τις ιδιότητες κάτω από αυτές τις επικεφαλίδες: Πλευρές, Γωνίες, Διαγώνιοι και Συμμετρίες. Έπειτα, οι ομάδες μοιράζονται τις λίστες τους στην τάξη και στο τέλος θα αναπτυχθεί μία λίστα για κάθε σχήμα από ολόκληρη την τάξη.

Αυτή η δραστηριότητα και η προηγούμενη δραστηριότητα κατάταξης περιλαμβάνουν μία εξέταση των σχημάτων. Αν και αυτή η δραστηριότητα εστιάζει περισσότερο στις γεωμετρικές ιδιότητες, είδαμε ότι αυτές οι ιδιές ιδιότητες μπορεί να έχουν αναπτυχθεί και κατά τη διάρκεια μίας προηγούμενης δραστηριότητας. Αυτό που διακρίνει αυτή τη δραστηριότητα από την κατάταξη του επιπέδου 0 είναι το αντικείμενο του συλλογισμού των παιδιών. Ενώ εδώ υπάρ-



ΣΧΗΜΑ 21.2 Σχήματα για τη «Λίστα Ιδιοτήτων για τα Τετράπλευρα». Τα φύλλα εργασίας μπορούν να βρεθούν στα Blackline Masters

χουν λίγα διαθέσιμα σχέδια, τα παιδιά πρέπει να φανταστούν ότι οι ιδιότητες εφαρμόζονται σε όλες τις κατηγορίες των σχημάτων. Αν εργάζονται με τετράγωνα, για παράδειγμα, οι παρατηρήσεις τους πρέπει να ισχύουν τόσο για το τετραγωνικό μίλι όσο και για την τετραγωνική ίντσα.

Επίπεδο 2: Άτυπα Συμπεράσματα

Τα αντικείμενα της σκέψης στο επίπεδο 2 είναι οι ιδιότητες των σχημάτων.

Καθώς τα παιδιά αρχίζουν να επεξεργάζονται τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων χωρίς τους περιορισμούς ενός συγκεκριμένου αντικειμένου, είναι σε θέση να αναπτύξουν σχέσεις μεταξύ δύο ιδιοτήτων καθώς και ανάμεσα σε όλες αυτές τις ιδιότητες. «Εάν και οι τέσσερις γωνίες είναι ορθές, τότε το σχήμα πρέπει να είναι ορθογώνιο. Εάν είναι τετράγωνο, τότε όλες οι γωνίες του είναι ορθές. Εάν είναι τετράγωνο, τότε πρέπει να είναι ορθογώνιο». Με μία μεγαλύτερη ικανότητα να χρησιμοποιούν συλλογιστική της μορφής «εάν-τότε», τα σχήματα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν χρησιμοποιώντας λιγότερα χαρακτηριστικά τους. Για παράδειγμα, τέσσερις ίσες πλευρές και τουλάχιστον μία ορθή γωνία επαρκούν για τον ορισμό ενός τετραγώνου. Τα ορθογώνια είναι παραλληλόγραμμα που έχουν μία γωνία ορθή. Οι παρατηρήσεις προχωρούν πέρα από τις ιδιότητες αυτές καθιστώντας και αρχίζουν να εστιάζονται σε λογικά επιχειρήματα για τις ιδιότητες. Τα παιδιά που βρίσκονται στο επίπεδο 2 θα μπορέσουν να ακολουθήσουν και να εκτιμήσουν ένα άτυπο, συμπερασματικό επιχειρήμα για τα σχήματα και τις ιδιότητές τους. Οι «αποδείξεις» μπορεί να είναι περισσότερο ενστικτώδεις παρά αυστηρά συμπερασματικές. Ωστόσο, υπάρχει η εκτίμηση ότι ένα λογικό επιχειρήμα είναι αναπόφευκτο. Μία εκτίμηση όμως της αξιωματικής δομής ενός τυπικού συμπερασματικού συστήματος, παραμένει αφανής.

Τα προϊόντα της σκέψης στο επίπεδο 3 είναι οι σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων.

Το χαρακτηριστικό των δραστηριοτήτων του επιπέδου 2 είναι ότι περιλαμβάνουν άτυπες λογικές αιτιολογήσεις. Τα παιδιά έχουν αναπτύξει την κατανόηση των διαφορών ιδιοτήτων των σχημάτων. Τώρα πρέπει να ενθαρρύνετε τα παιδιά να κάνουν εικασίες και ερωτήσεις όπως: «Γιατί;» ή «Τι θα γινόταν αν;». Αντιπαραθέστε το απαιτούμενο σκεπτικό της ακόλουθης δραστηριότητας με αυτό της «Λίστας Ιδιοτήτων» που έχει σχεδιαστεί ως συνέχεια της (οι δύο δραστηριότητες δημιουργούν ένα ζευγάρι με το οποίο μπορείτε να ασχοληθείτε για πολλές μέρες).

Δραστηριότητα 21.3

Λίστες Ελάχιστων Ορισμών

(Αυτή η δραστηριότητα πρέπει να γίνει ως συνέχεια της

«Λίστας Ιδιοτήτων», την οποία περιγράψαμε νωρίτερα). Μόλις η τάξη συμφωνήσει για τις λίστες ιδιοτήτων του παραλληλόγραμμου, του ρόμβου, του ορθογώνιου και του τετραγώνου (και κατά πάσα πιθανότητα του τραπέζιου) αναρτήστε αυτές τις λίστες ή δακτυλογραφήστε τις και κάντε αντίγραφο. Η εργασία των παιδιών αφού χωριστούν σε ομάδες είναι να βρουν λίστες Ελάχιστων Ορισμών, ή ΛΕΟ, για το κάθε σχήμα. Η Λίστα Ελάχιστων Ορισμών είναι μια υπο-ομάδα των ιδιοτήτων για ένα σχήμα που το «ορίζει» και είναι «ελάχιστη». Το «ορίζει» εδώ σημαίνει ότι οποιοδήποτε σχήμα έχει όλες τις ιδιότητες της ΛΕΟ πρέπει να είναι το ίδιο. Επομένως, η ΛΕΟ για ένα τετράγωνο αποτελεί εγγύηση ότι έχετε ένα τετράγωνο. Το «ελάχιστη» σημαίνει ότι αν μία και μόνη ιδιότητα αφαιρεθεί από τη λίστα τότε αυτή πλέον δεν «ορίζει». Για παράδειγμα, μια ΛΕΟ για ένα τετράγωνο είναι ένα τετράπλευρο με τέσσερις ίσες πλευρές και τέσσερις ορθές γωνίες. Τα παιδιά θα πρέπει να προσπαθήσουν να βρουν τουλάχιστον δύο ή τρεις ΛΕΟ γι' αυτό το σχήμα. Η λίστα την οποία προτείνουν μπορεί να αμφισβητηθεί είτε ότι δεν «ορίζει» είτε ότι δεν είναι «ελάχιστη». Μια λίστα δεν είναι ελάχιστη αν αφαιρώντας μία ιδιότητα η λίστα εξακολουθεί να ορίζει το σχήμα. Μία λίστα δεν είναι οριστική αν αντι-παράδειγμα – ένα σχήμα διαφορετικό από αυτό που περιγράφεται – μπορεί να δημιουργηθεί χρησιμοποιώντας μόνο τις ιδιότητες στη λίστα.

Ιδιαίτερη σημασία στη δραστηριότητα με τις «Λίστες Ελάχιστων Ορισμών» έχει το στοιχείο της λογικής. «Αν ένα τετράπλευρο έχει αυτές τις ιδιότητες τότε πρέπει να είναι τετράγωνο». Η λογική επίσης εμπλέκεται κατά τη διαδικασία απόδειξης ότι μια λίστα είναι λανθασμένη – είτε μη οριστική είτε μη ελάχιστη. Εδώ τα παιδιά αρχίζουν να μαθαίνουν τη φύση του ορισμού και την αξία των αντι-παραδειγμάτων. Στην πραγματικότητα, οποιαδήποτε ΛΕΟ αποτελεί και έναν πιθανό ορισμό. Αυτός ο λογικός συλλογισμός δεν ήταν απαραίτητος στη δραστηριότητα της «Λίστας Ιδιοτήτων». Η άλλη πλευρά αυτής της δραστηριότητας που την καθιστά ξεκάθαρη δραστηριότητα για το επίπεδο -2 είναι ότι τα παιδιά εστιάζονται στις λίστες των ιδιοτήτων των σχημάτων – τα ίδια στοιχεία που νωρίτερα ήταν το προϊόν της δραστηριότητας του επιπέδου-1. Συνέπεια της δραστηριότητας ΛΕΟ είναι ότι τα παιδιά δημιουργούν μία συλλογή νέων σχέσεων που υπάρχουν τόσο ανάμεσα όσο και μεταξύ των ιδιοτήτων.

Επίπεδο 3: Συμπεράσματα

Τα αντικείμενα της σκέψης στο επίπεδο 3 είναι οι σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων.

Στο επίπεδο 3, τα παιδιά μπορούν να εξετάσουν και άλλα πράγματα πέρα από τις ιδιότητες μόνον των σχημάτων. Η προηγούμενη συλλογιστική σκέψη έχει παράγει εικασίες που

αφορούν στις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων. Είναι αυτές οι εικασίες σωστές; Είναι «αληθινές»; Καθώς γίνεται η ανάλυση των άτυπων επιχειρημάτων, η δομή ενός συστήματος εξ ολοκλήρου με αξιώματα, ορισμούς, θεωρήματα, πορίσματα και δεδομένα αρχίζει να αναπτύσσεται και να εκτιμάται ως το αναγκαίο μέσο για την εδραίωση της γεωμετρικής αλήθειας. Στο επίπεδο αυτό, τα παιδιά αρχίζουν να εκτιμούν την ανάγκη ενός συστήματος λογικής, το οποίο να στηρίζεται σε ελάχιστες υποθέσεις και από το οποίο να μπορούν να προέλθουν και άλλες αλήθειες. Τα παιδιά σε αυτό το επίπεδο μπορούν να δουλέψουν με αφηρημένες έννοιες για τις γεωμετρικές ιδιότητες, να συναγάγουν συμπεράσματα βασισμένα περισσότερο στη λογική παρά στη διαίσθηση. Ένα παιδί που λειτουργεί στο επίπεδο 3 μπορεί σαφώς να παρατηρήσει ότι οι διαγώνιοι ενός ορθογώνιου διχοτομούν τη μία την άλλη, όπως ακριβώς μπορεί και ένα παιδί σε ένα χαμηλότερο επίπεδο σκέψης. Ωστόσο, στο επίπεδο 3, εκτιμούν την ανάγκη να το αποδείξουν με μία σειρά συμπερασματικών επιχειρημάτων. Το παιδί στο επίπεδο 2, αντίθετα, δέχεται το επιχειρήμα αλλά αδυνατεί να εκτιμήσει την ανάγκη αποδείξεώς του.

Τα προϊόντα της σκέψης στο επίπεδο 3 είναι συμπερασματικά αξιωματικά συστήματα για τη γεωμετρία.

Ο τύπος της αιτιολόγησης που χαρακτηρίζει ένα παιδί στο επίπεδο 3 είναι ο ίδιος που απαιτείται και σε μια τυπική τάξη γεωμετρίας στο λύκειο. Εκεί τα παιδιά βασίζονται σε μια λίστα με αξιώματα και ορισμούς για να δημιουργήσουν θεωρήματα. Επίσης αποδεικνύουν θεωρήματα χρησιμοποιώντας ξεκάθαρες εκφράσεις λογικής αιτιολόγησης, ενώ η αιτιολόγηση του επιπέδου 2 μπορεί να είναι αρκετά άτυπη. Στα καλύτερα μαθήματα γεωμετρίας, τα παιδιά θα ασχοληθούν με δραστηριότητες στις οποίες θα ανακαλύψουν τις σχέσεις τις οποίες αργότερα θα αποδείξουν. Αυτό είναι παρόμοιο με τις ανακαλύψεις που κάνουν τα παιδιά κατά τη δημιουργία Λιστών Ελάχιστων Ορισμών.

Κατά μία γενικότερη έννοια, τα παιδιά στο μάθημα της γεωμετρίας στο λύκειο εργάζονται για τη δημιουργία ενός ολοκληρωμένου γεωμετρικού συμπερασματικού συστήματος. Συνήθως αυτό είναι το Ευκλείδειο σύστημα που περιγράφει καλύτερα τον κόσμο στον οποίο ζούμε. Μπορεί επίσης να διερευνήσουν και άλλα γεωμετρικά συστήματα, όπως η γεωμετρία στην οποία όλες οι γραμμές σχεδιάζονται στην επιφάνεια μιας σφαίρας ή τη «γεωμετρία του ταξί» όπου οι γραμμές μπορεί να ακολουθούν μόνο ένα παραλληλόγραμμο πλέγμα «δρόμων». Αυτά τα συστήματα αποτελούν προϊόντα της σκέψης τους.

Επίπεδο 4: Αυστηρότητα

Τα αντικείμενα της σκέψης στο επίπεδο 4 είναι τα συμπερασματικά αξιωματικά συστήματα για τη γεωμετρία.

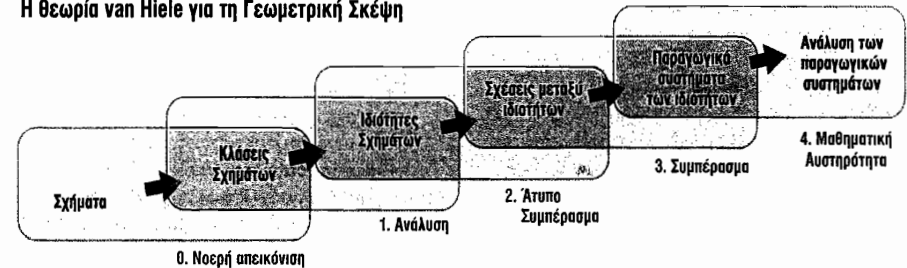
Στο υψηλότερο επίπεδο της ιεραρχίας των van Hiele, τα αντικείμενα της προσοχής είναι τα ίδια τα αξιωματικά συστήματα, και όχι απλά τα συμπεράσματα μέσα σε ένα σύστημα. Υπάρχει μία εκτίμηση για τις διακρίσεις και τις σχέσεις ανάμεσα στα διαφορετικά αξιωματικά συστήματα. Για παράδειγμα, η σφαιρική γεωμετρία βασίζεται περισσότερο σε γραμμές που είναι σχεδιασμένες πάνω σε μία σφαίρα παρά σε ένα επίπεδο ή κανονικό χώρο. Αυτή η γεωμετρία έχει τη δική της συλλογή από αξιώματα και θεωρήματα. Αυτό είναι γενικά το επίπεδο ενός φοιτητή μαθηματικών στο κολέγιο, που μελετά τη γεωμετρία ως κλάδο της μαθηματικής επιστήμης.

Τα προϊόντα της σκέψης στο επίπεδο 4 είναι συγκρίσεις και αντιπαραθέσεις ανάμεσα στα διαφορετικά αξιωματικά συστήματα της γεωμετρίας.

Χαρακτηριστικά των Επιπέδων van Hiele

Σίγουρα παρατηρήσατε ότι τα προϊόντα της σκέψης καθενός επιπέδου είναι ταυτόσημα με τα αντικείμενα της σκέψης του επόμενου. Αυτή η σχέση αντικείμενο – προϊόν μεταξύ των

Η θεωρία van Hiele για τη Γεωμετρική Σκέψη



ΣΧΗΜΑ 21.3 Σε κάθε επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης, οι ιδέες που έχουν δημιουργηθεί γίνονται τα αντικείμενα εστίασης της σκέψης του επόμενου επιπέδου.

επιπέδων της θεωρίας van Hiele απεικονίζεται στο Σχήμα 21.3. Τα αντικείμενα (ιδέες) πρέπει να δημιουργηθούν κατά τέτοιο τρόπο, ώστε οι σχέσεις ανάμεσα σε αυτά να αντικείμενα να μπορούν να γίνουν το σημείο εστίασης του επομένου επιπέδου. Σε αυτήν την έννοια κλειδί της θεωρίας προσάθεται τέσσερα χαρακτηριστικά σχετικά με τα επίπεδα της σκέψης, που χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής.

1. Τα επίπεδα είναι διαδοχικά. Προκειμένου να φτάσουν σε οποιοδήποτε επίπεδο πάνω από το επίπεδο 0, τα παιδιά πρέπει να περάσουν από όλα τα προηγούμενα επίπεδα. Η διέλευση από ένα επίπεδο σημαίνει ότι κάποιος έχει αποκτήσει εμπειρία στη γεωμετρική σκέψη κατάλληλη για το επόμενο επίπεδο και ότι έχει δημιουργήσει στο μυαλό του τους τύπους ανακείμενων ή τις σχέσεις που είναι τα αντικείμενα εστίασης της σκέψης του επόμενου επιπέδου.
2. Τα επίπεδα δεν εξαρτώνται από την ηλικία, με την έννοια των αναπτυξιακών σταδίων του Piaget. Στο επίπεδο 0 θα μπορούσε να είναι ένα παιδί της τρίτης δημοτικού ή του γυμνασίου. Πράγματι, κάποια παιδιά και ενήλικοι παραμένουν για πάντα στο επίπεδο 0, ενώ ένας σημαντικός αριθμός ενηλίκων δεν φτάνει ποτέ στο επίπεδο 2. Όμως, η ηλικία σαφώς σχετίζεται με το σύνολο και τους τύπους των γεωμετρικών εμπειριών που έχουμε. Για αυτόν το λόγο, είναι λογικό όλα τα παιδιά μέχρι τη δευτέρα τάξη να βρίσκονται στο επίπεδο 0, όπως επίσης η πλειοψηφία των παιδιών στην τρίτη και τετάρτη τάξη.
3. Η γεωμετρική εμπειρία είναι ο μεγαλύτερος και μοναδικός παράγοντας που επηρεάζει την πρόοδο από το ένα επίπεδο στο άλλο. Δραστηριότητες που επιτρέπουν στα παιδιά να εξερευνήσουν, να συζητήσουν και να αλληλεπιδράσουν με το περιεχόμενο του επομένου επιπέδου καθώς αυξάνουν τις εμπειρίες στο τρέχον επίπεδο τους, έχουν τις μεγαλύτερες πιθανότητες να βελτιώσουν το επίπεδο σκέψης αυτών των παιδιών.
4. Όταν η διδασκαλία ή η γλώσσα βρίσκονται σε ένα επίπεδο υψηλότερο από εκείνο του παιδιού, τότε θα υπάρξει μία έλλειψη επικοινωνίας. Τα παιδιά που καλούνται να παλέψουν με αντικείμενα της σκέψης τους που δεν έχουν δομηθεί σε προηγούμενο επίπεδο, μπορεί να οδηγηθούν στην αποσπαστικότητα και να έχουν μία προσωρινή μόνο και επιφανειακή επιτυχία. Ένα παιδί μπορεί, παραδείγματος χάριν, να απομνημονεύσει ότι όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια, χωρίς να έχει κατασκευάσει αυτήν τη σχέση. Ένα παιδί μπορεί επίσης να απομνημονεύσει μία γεωμετρική απόδειξη, αλλά να αποτύχει να δημιουργήσει τα βήματα που οδηγούν σε αυτήν ή να κατανόησει τη λογική που τη διέπει (Fuchs, Geddes, & Tischler, 1988, Geddes & Fortunato, 1993).

Συνέπειες στη Διδασκαλία

Εάν η θεωρία van Hiele είναι σωστή –και υπάρχουν πολλές αποδείξεις για να το υποστηρίξουν– τότε ο κύριος στόχος του προγράμματος σπουδών από το νηπιαγωγείο μέχρι τη δευτέρα γυμνασίου πρέπει να είναι η βελτίωση του επιπέδου της γεωμετρικής σκέψης των παιδιών. Εάν τα παιδιά πρέπει να είναι επαρκώς προετοιμασμένα για το πρόγραμμα σπουδών της συμπερασματικής γεωμετρίας στο Λύκειο, τότε είναι σημαντικό για τη συλλογιστική τους σκέψη να έχουν φτάσει στο επίπεδο 2 στο τέλος της δευτέρας γυμνασίου.

Δεν είναι όλοι οι εκπαιδευτικοί ικανοί να οδηγήσουν τα παιδιά στο επόμενο επίπεδο. Παρ' όλα αυτά, όλοι οι εκπαιδευτικοί θα έπρεπε να γνωρίζουν ότι οι εμπειρίες που παρέχονται είναι ο σημαντικότερος παράγοντας για την ανέλιξη των παιδιών σε αυτήν την αναπτυξιακή σκάλα. Κάθε εκπαιδευτικός θα έπρεπε να μπορεί να δει κάποια ανάπτυξη στη γεωμετρική συλλογιστική σκέψη κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς.

Η θεωρία van Hiele και η αναπτυξιακή οπτική γωνία αυτού του βιβλίου υπογραμμίζουν την αναγκαιότητα διδασκαλίας στο επίπεδο σκέψης του παιδιού. Παρ' όλα αυτά, σχεδόν κάθε δραστηριότητα μπορεί να τροποποιηθεί, ώστε να γεφυρώσει δύο επίπεδα σκέψης, ακόμη και μέσα στην ίδια τάξη. Για πολλές δραστηριότητες, ο τρόπος με τον οποίο αλληλεπιδρούμε με διαφορετικά παιδιά θα τα αναβαθμίζει τη δραστηριότητα στο δικό τους επίπεδο και θα τα αναβαθμίζει ή θα τα προκαλέσει να λειτουργήσουν στο αμέσως πιο πάνω επίπεδο.

Οι ακόλουθες ενότητες περιέχουν περιγραφές των τύπων των δραστηριοτήτων και των ερωτήσεων, που είναι κατάλληλες για καθένα από τα τρία πρώτα επίπεδα. Εφαρμόστε αυτές τις περιγραφές στις δραστηριότητες που αναθέτετε στα παιδιά και χρησιμοποιήστε τις ως οδηγός την αλληλεπίδρασή σας με αυτά. Η χρήση φυσικών υλικών, σχεδίων και μοντέλων H/Y είναι απαραίτητη σε κάθε επίπεδο.

Διδασκαλία στο επίπεδο 0

Οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες στη γεωμετρία, κατάλληλες για το επίπεδο 0, θα έπρεπε:

- Να περιέχουν πολλές ταξινομήσεις και κατηγοριοποιήσεις. Η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο τα σχήματα παρουσιάζουν ομοιότητες και διαφορές είναι ο πρωταρχικός στόχος του επιπέδου 0. Καθώς τα παιδιά εμβαθύνουν στο περιεχόμενο, οι τύποι των πραγμάτων που εξετάζουν θα γίνουν πιο περίπλοκοι. Σε ένα πρώτο στάδιο μπορεί να συζητούν για γνωρίσματα σχημάτων, που δεν ακούγονται γεωμετρικά, όπως «χοντρο» ή ακόμα και το χρώμα των κομματιών. Όταν εισάγονται ιδιότητες, όπως η συμμετρία και οι αριθμοί των πλευρών

και των γωνιών, τα παιδιά θα έπρεπε να προκαλούνται να χρησιμοποιήσουν αυτά τα χαρακτηριστικά για την κατηγοριοποίηση των σχημάτων.

- Να περιλαμβάνουν μία επαρκή ποικιλία παραδειγμάτων από σχήματα, έτσι ώστε άσχετα στοιχεία να μη γίνονται σημαντικά. Τα παιδιά χρειάζονται αρκετές ευκαιρίες για να σχεδιάσουν, να κτίσουν, να κατασκευάσουν, να ενώσουν και να χωρίσουν σχήματα, τόσο διδάσκατα όσο και τριτοδίδατα. Οι δραστηριότητες αυτές θα έπρεπε να δομηθούν γύρω από συγκεκριμένα χαρακτηριστικά ή ιδιότητες, ώστε τα παιδιά να αναπτύξουν μία κατανόηση των γεωμετρικών ιδιοτήτων και να αρχίσουν να τις χρησιμοποιούν φυσικά.

Για να βοηθήσετε τα παιδιά να κινηθούν από το επίπεδο 0 στο επίπεδο 1, θα πρέπει να τους προκαλέσετε να δοκιμάσουν ιδέες για τα σχήματα με μια ποικιλία παραδειγμάτων από μια συγκεκριμένη κατηγορία. Πείτε τους, «Ας δούμε αν αυτό ισχύει και για τα άλλα ορθογώνια» ή «Μπορείτε να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο που δεν έχει μία ορθή γωνία». Σε γενικές γραμμές, τα παιδιά θα πρέπει να προκαλούνται να δουν αν οι παρατηρήσεις που έγιναν για ένα συγκεκριμένο σχήμα εφαρμόζονται και σε άλλα παρόμοια σχήματα.

Διδασκαλία στο επίπεδο 1

Οι μορφωτικές δραστηριότητες που είναι κατάλληλες για το επίπεδο 1 θα έπρεπε:

- Να εστιάζουν περισσότερο στις ιδιότητες των σχημάτων παρά στην ταυτοποίησή τους. Καθώς μαθαίνονται καινούριες γεωμετρικές έννοιες, ο αριθμός ιδιοτήτων που έχουν τα σχήματα μπορεί να διευρυνθεί.
- Να εφαρμόζουν τις ιδέες σε όλες τις κατηγορίες σχημάτων (π.χ. όλα τα ορθογώνια, όλα τα πρίσματα) παρά στα μεμονωμένα μοντέλα. Να αναλύουν τις ομάδες των σχημάτων για τον καθορισμό νέων ιδιοτήτων. Για παράδειγμα, να βρίσκουν τρόπους ταξινόμησης για όλα τα πιθανά τρίγωνα. Από αυτές τις ομάδες να καθορίζουν τους τύπους των τριγώνων. Ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, όπως το *The Geometer's Sketchpad* (Key Curriculum Press), είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για την εξερεύνηση πολλών παραδειγμάτων από μία ομάδα σχημάτων.

Για να βοηθήσετε τα παιδιά να προχωρήσουν από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 2, προκαλέστε τα με ερωτήσεις του τύπου «Γιατί;» και με ερωτήσεις που περιέχουν κάποια συλλογιστική σκέψη. Για παράδειγμα, «Αν οι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι όλες ίσες, θα έχετε πάντοτε ένα τετράγωνο;» και «Μπορείτε να βρείτε ένα αντι-παράδειγμα;»

Διδασκαλία στο επίπεδο 2

Οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες στη γεωμετρία που είναι κατάλληλες για το επίπεδο 2, θα έπρεπε:

- Να ενθαρρύνουν τη δημιουργία και εξέταση υποθέσεων και εικασιών. «Πιστεύετε ότι αυτό ισχύει πάντα;» «Ισχύει για όλα τα τρίγωνα ή μόνο για τα ισοπλευρά;»
- Να εξετάζουν τις ιδιότητες των σχημάτων για τον καθορισμό των αναγκαίων και επαρκών όρων για διαφορετικά σχήματα ή έννοιες. «Ποιες ιδιότητες των σχημάτων πιστεύετε ότι θα σου εγγυηθούν ότι θα έχεις ένα τετράγωνο;»
- Να χρησιμοποιούν τη γλώσσα των άτυπων συμπερασμάτων: όλα, μερικά, κανένα, εάν... τότε, και αν, κ.ο.κ.
- Να ενθαρρύνουν τα παιδιά να προσπαθούν να εκφράσουν άτυπες αποδείξεις. Εναλλακτικά, να απαιτούν από τα παιδιά να βγάδουν νόημα από άτυπες αποδείξεις που διατύπωσαν άλλα παιδιά ή εσείς.

Επιλογή Δραστηριότητας και Επίπεδα της Σκέψης

Εάν διδάσκετε από το νηπιαγωγείο μέχρι την τρίτη τάξη, τότε σχεδόν όλα τα παιδιά σας βρίσκονται στο επίπεδο 0. Παρ' όλα αυτά, τουλάχιστον μέχρι την τρίτη σίγουρα θα θέλετε να αρχίσετε να προκαλείτε τα παιδιά που βλέπετε ότι είναι ικανά. Στις μεγαλύτερες τάξεις μπορεί να έχετε παιδιά σε δύο ή ακόμη και σε τρία επίπεδα μέσα στην ίδια τάξη. Πώς ανακαλύπτετε το επίπεδο του κάθε παιδιού; Όταν το καταλάβετε, πώς θα επιλέξετε σωστά τις δραστηριότητες που ταιριάζουν στο επίπεδο των παιδιών;

Δεν υπάρχει κάποιο απλό τεστ για να ταξινομήσετε τα παιδιά σε κάποιο συγκεκριμένο επίπεδο. Ωστόσο, εξετάστε τις περιγραφές για τα πρώτα δύο επίπεδα. Καθώς θα διευθύνετε μία δραστηριότητα, ακούστε τους τύπους των παρατηρήσεων που κάνουν τα παιδιά. Μπορούν να μιλήσουν για τα σχήματα ως ομάδες; Αναφέρονται, για παράδειγμα, στα «ορθογώνια» ανά να στηρίζουν τη συζήτηση σε ένα συγκεκριμένο ορθογώνιο; Συνειδητοποιούν ότι συγκεκριμένες ιδιότητες μπορούν να αποδοθούν σε έναν τύπο σχήματος ή απλά σε ένα σχήμα; Αναλαμβάνονται ότι τα σχήματα δεν αλλάζουν όταν αλλάξει ο προσανατολισμός; Με απλές παρατηρήσεις όπως αυτές, σύντομα θα μπορείτε να διακρίνετε το επίπεδο 0 από το επίπεδο 1.

Στις μεγαλύτερες τάξεις, προσπαθήστε να σπρώξετε τα παιδιά από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 2. Εάν δεν είναι ικανά να ακολουθήσουν ή να εκτιμήσουν λογικά επιχειρήματα και δεν έχουν άνεση με τις εικασίες και τη συλλογιστική σκέψη «αν-τότε», τα παιδιά αυτά πιθανότατα βρίσκονται ακόμα στο επίπεδο 1 ή και χαμηλότερα.

Το υπόλοιπο του κεφαλαίου αυτού προσφέρει ένα δείγ-

μα δραστηριοτήτων, που οργανώνονται ευρύτερα γύρω από τους τέσσερις στόχους περιεχομένου των NCTM Στάνταρ: Σχήματα και Ιδιότητες, Θέση στο χώρο, Μετασχηματισμός και Νοερή Απεικόνιση. Μέσα σε αυτές τις ομαδοποιήσεις, οι δραστηριότητες ομαδοποιούνται ακόμα περισσότερο σύμφωνα με τα τρία πρώτα επίπεδα van Hiele. Έχετε στο νου σας ότι όλες αυτές οι υποδιαρέσεις είναι αρκετά ρευστές. Μία δραστηριότητα που βρίσκεται σε ένα επίπεδο μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί στο παρακείμενο επίπεδο, απλά με τον τρόπο που παρουσιάζεται στα παιδιά. Όπως θα διαπιστώσετε, ακόμη και οι υποδιαρέσεις του περιεχομένου επικαλύπτονται.

Οι δραστηριότητες που αντικατοπτρίζουν σαφέστερα τα επίπεδα van Hiele βρίσκονται στις ενότητες Σχήματα και Ιδιότητες. Καθώς ερευνάτε κάποιες από τις δραστηριότητες σε κάθε ενότητα, καλό θα ήταν να αρχίσετε να ανταλλάσσετε για ποιον λόγο μία δραστηριότητα είναι κατάλληλη για το ένα επίπεδο ή το άλλο. Μην ανησυχείτε για το πώς θα ταιριάζετε τα επίπεδα και τις δραστηριότητες που σας κάνουν να αγωνιάτε κατά την επιλογή μιας δραστηριότητας. Ένας πρόχειρος οδηγός είναι ο εξής: εάν διδάσκετε από το νηπιαγωγείο μέχρι τη δεύτερη τάξη, ξεκινήστε με το επίπεδο 0. Για τις τάξεις τρίτη, τετάρτη και πέμπτη, κοιτάξτε τα επίπεδα 0 και 1, για τις τάξεις από την έκτη δημοτικού μέχρι την δεύτερα γυμνασίου, κοιτάξτε τις δραστηριότητες για τα επίπεδα 1 και 2.

Μαθαίνοντας για τα Σχήματα και τις Ιδιότητες

Αυτός είναι ο τομέας που σκέφτονται οι περισσότεροι άνθρωποι όταν σκέφτονται τη γεωμετρία από το νηπιαγωγείο μέχρι το γυμνάσιο. Τα παιδιά δουλεύουν τόσο με διδιάστατα όσο και με τριδιάστατα αντικείμενα. Ανακαλύπτουν τι κάνει αυτά τα σχήματα να μοιάζουν και τι να διαφέρουν και κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας ανακαλύπτουν τις ιδιότητες αυτών των σχημάτων. Καθώς ανακαλύπτονται και περιγράφονται οι ιδιότητες, μπορούν να τους δοθούν τα συμβατικά ονόματα. Τα παιδιά, αν έχουν επαρκείς εμπειρίες, θα αναπτύξουν ταξινομήσεις των ιδιαίτερων σχημάτων – τριγώνων, παραλληλόγραμμων, κύλινδρων, πυραμίδων και άλλα – και θα μάθουν ότι ορισμένες ιδιότητες εφαρμόζονται σε ολόκληρες τις ταξινομήσεις. Τελικά, θα διερευνήσουν τον τρόπο με τον οποίο οι ιδιότητες των σχημάτων επιβάλλουν λογικές συνέπειες στις γεωμετρικές σχέσεις και θα αναπτύξουν τη δεξιότητα να αιτιολογούν τα σχήματα και τις ιδιότητες.

Σχήματα και Ιδιότητες για το Επίπεδο 0

Τα παιδιά χρειάζονται εμπειρίες με μεγάλη ποικιλία διδιάστατων και τριδιάστατων σχημάτων. Τα τριγώνια θα έπρεπε



ΣΧΗΜΑ 21.4 Με την ταξινόμηση των σχημάτων τα παιδιά αρχίζουν να αναγνωρίζουν τις ιδιότητες.

να είναι κάτι περισσότερο από απλώς ισόπλευρα. Τα σχήματα θα έπρεπε να έχουν καμπύλες πλευρές, ευθείες πλευρές και συνδυασμό αυτών. Με αυτόν τον τρόπο, τα ονόματα και οι ιδιότητες των σχημάτων μπορούν να εισαχθούν περιστασιακά.

Ταξινόμηση και Κατηγοριοποίηση

Καθώς τα μικρά παιδιά επεξεργάζονται ταξινομήσεις σχημάτων, να περιμένετε από αυτά την παρατήρηση χαρακτηριστικών που εσείς ποτέ δεν θεωρήσατε ως «πραγματικά» γεωμετρικά γνωρίσματα, όπως «καμπυλόγραμμο» και «μοιάζει με πύραυλο». Τα παιδιά σε αυτό το επίπεδο θα αποδώσουν επίσης στα σχήματα ιδέες που δεν αποτελούν μέρος αυτών, όπως των σχημάτων «κουτάκι ψηλά» ή «έχει μία πλευρά που είναι ίδια με την άκρη του πίνακα».

Για ποικιλία στα διδιάστατα σχήματα, δημιουργήστε τα δικά σας υλικά. Μία καλή συλλογή βρίσκεται στο παράρτημα Blackline Masters, που ονομάζεται 2-Δ Σχήματα. Βγάλτε πολλάπλά αντίγραφα, ώστε όλες οι ομάδες των παιδιών να

μπορούν να δουλέψουν με τα ίδια σχήματα. Μόλις ολοκληρώσετε την κατασκευή των συλλογών σας, μια καλή αρχική δραστηριότητα είναι αυτή που περιγράφηκε στην σελίδα 518, «Ταξινόμηση Σχημάτων».

Σε οποιαδήποτε δραστηριότητα ταξινόμησης, τα παιδιά θα πρέπει να αποφασίζουν τον τρόπο της ταξινόμησης και όχι ο ηγούμενος. Αυτό δίνει τη δυνατότητα στα παιδιά που πραγματοποιούν τη δραστηριότητα να χρησιμοποιήσουν τις ιδέες που εκείνοι κατέχουν και κατανοούν. Ακούγοντας τα είδη γνωρισμάτων που χρησιμοποιούν στην ταξινόμησή τους, θα μπορέσετε να πείτε ποιες ιδιότητες γνωρίζουν και χρησιμοποιούν και πώς σκέπτονται για τα σχήματα. Το Σχήμα 21.4 απεικονίζει λίγους από τους πολλούς δυνατούς τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να ταξινομηθεί μία συλλογή.

Η κρυφή δραστηριότητα ταξινόμησης στη Δραστηριότητα 21.1 είναι μία επιλογή για την εισαγωγή μίας νέας ιδιότητας. Για παράδειγμα, ταξινομείτε τα σχήματα έτσι, ώστε όλα να έχουν μία ορθή γωνία ή μία «τετράγωνη γωνία». Όταν τα παιδιά ανακαλύπτουν τον κανόνα σας, έχετε την ευκαιρία να μιλήσετε περισσότερο για εκείνη την ιδιότητα.

Η ακόλουθη δραστηριότητα γίνεται και αυτή με 2-Δ Σχήματα.

Δραστηριότητα 21.4

Ποιο Είναι Το Σχήμα Μου;

Από τα Blackline Masters, φτιάξτε μία συλλογή από 2-Δ Σχήματα σε χαρτί. Κόψτε περίπου το ένα τρίτο των σχημάτων και επικολλήστε το καθένα στο εσωτερικό μιας διπλωμένης στη μέση σελίδας από χαρτί για κατασκευές για να φτιάξετε φακέλους με «κρυφά σχήματα».

Σε μία ομάδα, ένα παιδί ορίζεται ως αρχηγός και του δίνεται ο φάκελος με το κρυφό σχήμα. Τα άλλα παιδιά πρέπει να βρουν το σχήμα που ταιριάζει με το σχήμα που βρίσκεται μέσα στο φάκελο. Για το σκοπό αυτόν, κάνουν ερωτήσεις στις οποίες ο αρχηγός μπορεί να απαντήσει μόνο με ένα «να» ή ένα «όχι». Η ομάδα μπορεί να ταξινομήει τα σχήματα καθώς θέτει ερωτήσεις, προκειμένου να λιγοστέψουν οι πιθανότητες. Δεν επιτρέπεται να δείξουν ένα συγκεκριμένο κομμάτι και να ρωτήσουν «Είναι αυτό;». Αντίθετα, πρέπει να συνεχίσουν να κάνουν ερωτήσεις που μειώνουν τις επιλογές σε ένα σχήμα. Το τελευταίο κομμάτι συγκρίνεται με αυτό που υπάρχει στο φάκελο.

Η δυσκολία της Δραστηριότητας 21.4 εξαρτάται πολύ από το σχήμα του φακέλου. Όσο περισσότερα σχήματα της συλλογής μοιάζουν με το κρυφό σχήμα, τόσο πιο δύσκολη είναι η δραστηριότητα.

Οι περισσότερες δραστηριότητες στην «Ταξινόμηση Σχημάτων» μπορούν και θα έπρεπε να γίνονται επίσης με τριδιάστατα σχήματα. Η δυσκολία εντοπίζεται στην εύρεση και

δημιουργία μιας συλλογής με αρκετές διαφορές. Οι γεωμετρικοί κύβοι είναι μία μεγάλη συλλογή από ξύλινους κύβους, που μπορούν να αποκτηθούν μέσω διαφόρων διανομέων. Η ποικιλία είναι καλή, αλλά κανένας κύβος δεν έχει καμπύλες επιφάνειες. Ελέγξτε τους καταλόγους για άλλες συλλογές. Σκεφτείτε να συνδυάσετε πολλές διαφορετικές συλλογές για να επιτύχετε στην ποικιλία. Μία άλλη επιλογή είναι να συλλέξετε πραγματικά αντικείμενα όπως τενεκεδάκια κουτάκια, κουτιά, μπάλες και σχήματα Styrofoam. Το Σχήμα 21.5 απεικονίζει μερικές κατηγοριοποιήσεις από στερεά.



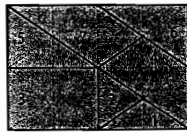
Οι τρόποι με τους οποίους τα παιδιά περιγράφουν τα σχήματα στην «Ταξινόμηση Σχημάτων» και σε άλλες παρόμοιες δραστηριότητες μας δίνουν μια καλή ιδέα για το επίπεδο της σκέψης τους. Οι ταξινομήσεις που γίνονται από τα παιδιά στο επίπεδο 0 θα περιοριστούν αυστηρά στα σχήματα που μπορούν όντως να τα εντάξουν σε μία ομάδα. Καθώς αρχίζουν να σκέφτονται σε σχέση με τις ιδιότητες των σχημάτων, θα δημιουργήσουν κατηγορίες που βασίζονται στις ιδιότητες, και το λεξιλόγιό τους θα μας δώσει να καταλάβουμε ότι υπάρχουν πολύ περισσότερα σχήματα σε αυτή την ομάδα από αυτά που έχουν προστά τους. Τα παιδιά μπορεί να πουν πράγματα όπως, «Αυτά τα σχήματα έχουν τετράγωνες γωνίες όπως αυτές των ορθογώνιων» ή «Αυτά μοιάζουν με κουτιά. Όλα τα κουτιά έχουν τετράγωνες (ορθογώνιες) πλευρές».



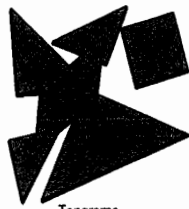
ΣΧΗΜΑ 21.5 Πρώμες κατηγοριοποιήσεις τριδιάστατων σχημάτων.



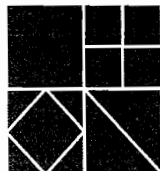
Σχέδια με κύβους.



Το παζλ από μωσαϊκό 7 κομματιών κατασκευάζεται σε χαρτί με τετραγωνάκια (van Hiele, 1999).



Tangrams



Δοκιμάστε να κόψετε τα τετράγωνα ή τα τρίγωνα με άλλους τρόπους για να πάρετε κομμάτια που συσχετίζονται (Lindquist, 1987b).



Τρίγωνα κομμένα από τετράγωνα.

ΣΧΗΜΑ 21.6 Οι δραστηριότητες με πλακίδια μπορούν να περιλαμβάνουν μία ποικιλία σχημάτων ή να μπορούν να σχεδιαστούν με ένα μόνο σχήμα.

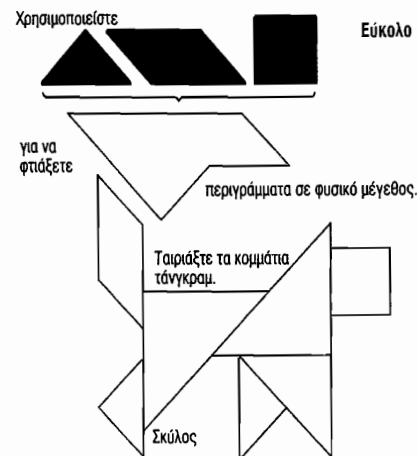
Κατασκευή και Ανατομία των Σχημάτων

Τα παιδιά έχουν ανάγκη να ερευνήσουν ελεύθερα τους τρόπους με τους οποίους τα σχήματα ενώνονται για να σχηματίσουν μεγαλύτερα σχήματα καθώς και τους τρόπους με τους οποίους τα μεγαλύτερα σχήματα μπορούν να δημιουργηθούν από μικρότερα. Ανάμεσα στα διδάσκαλα σχήματα για αυτές τις δραστηριότητες, τα πιο γνωστά είναι τα σχέδια κύβων τα τάνγκραμ. Σε ένα άρθρο του 1999, ο Piette van Hiele περιγράφει μία ενδιαφέρουσα συλλογή από πλακίδια, που την αποκαλεί μωσαϊκό παζλ (βλέπε σχήμα 21.6). Μία άλλη εξαιρετική συλλογή από ψηφίδες για κατασκευές είναι μία συλλογή από τρίγωνα, κομμένα από τετράγωνα (ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα). Σχέδια για το μωσαϊκό παζλ και τα τάνγκραμ μπορούν να βρεθούν στα Blackline Masters.

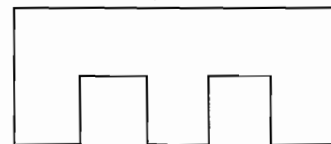
Το Σχήμα 21.7 δείχνει τέσσερις διαφορετικούς τύπους από παζλ τάνγκραμ σε αυξανόμενη σειρά δυσκολίας. Είναι διαθέσιμα πολυαριθμικά βιβλία με πηγές, εξ ολοκλήρου αφιερωμένα στα τάνγκραμ, αλλά και το *e-Standards* του NCTM περιλαμβάνει ένα βοηθητικό πρόγραμμα σχετικό με τα τάνγκραμ (Παράδειγμα 4.4). Μία μορφή του προγράμματος αυτού περιλαμβάνει οκτώ σχήματα που μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας και τα επτά κομμάτια. Η ηλεκτρονική εκδοχή των τάνγκραμ έχει το πλεονέκτημα της κινητι-

κότητας και το γεγονός ότι μπορείτε να είστε πολύ περισσότερο ελεύθεροι στην τακτοποίηση των σχημάτων. Το *Investigations in Number, Data, and Space*, χρησιμοποιεί τα Pattern blocks στην πρώτη τάξη σε μια δραστηριότητα παρόμοια με τα τάνγκραμ. Όπως μπορείτε να δείτε στο απόσπασμα, τα Pattern blocks όπως το μωσαϊκό παζλ, προσφέρουν σημαντική ελαστικότητα για τα μικρά παιδιά σε αυτόν τον φέρουν σημαντική ελαστικότητα για τα μικρά παιδιά σε αυτόν τον τύπο δραστηριότητας.

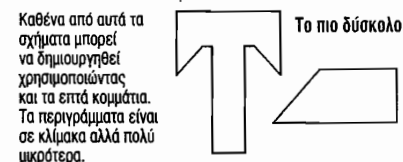
Η αξία του μωσαϊκού παζλ των van Hiele υπάρχει εν μέρει χάρη στο γεγονός ότι η συλλογή περιλαμβάνει πέντε διαφορετικές γωνίες (βλέπε Σχήμα 21.8). Εάν ταιριάζει,



Ταιριάζετε και τα επτά κομμάτια σε αυτό το σχήμα. Δυσκολότερο



Περιγράμματα σε Φυσικό μέγεθος.



Καθένα από αυτά τα σχήματα μπορεί να δημιουργηθεί χρησιμοποιώντας και τα επτά κομμάτια. Τα περιγράμματα είναι σε κλίμακα αλλά πολύ μικρότερα.

ΣΧΗΜΑ 21.7 Τέσσερις τύποι παζλ τάνγκραμ απεικονίζουν μία σειρά από επίπεδα δυσκολίας.

Εξερευνώντας τον Αριθμό, τα Δεδομένα και το Χώρο

Πρώτη Τάξη, Quilt Squares and Block Towns

Έρευνα 1:2-Δ Σχήματα και Σχέδια

Συγκείμενο

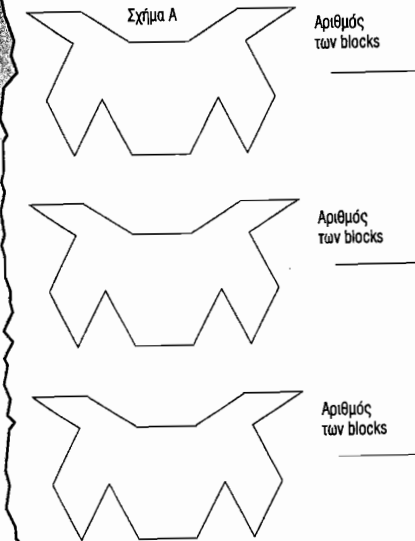
Η δραστηριότητα έχει σχεδιαστεί για την εβδομήντη περίοδο της έρευνας. Οι προηγούμενες έρευνες και τα πορίσματα από αυτές που θα ακολουθήσουν αναμενόμενα, όπως αυτή, στην εύρεση διαφορετικών τρόπων για το γέμισμα ενός περιγράμματος με σχέδια κύβων. Το πρόγραμμα *Investigations* έχει επίσης μία εκδοχή στον H/Y που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα *Shapes* (Clements & Sarama, 1995), που περιγράφεται στη σελίδα 561. Το μεγαλύτερο μέρος της εργασίας που προηγείται αυτού του μαθήματος γίνεται ατομικά με στάσεις. Σε αυτό το σημείο, το πρόγραμμα του H/Y χρησιμοποιείται επίσης και με έναν ελεύθερο τρόπο, με τον οποίο τα παιδιά δημιουργούν τα δικά τους σχέδια στην οθόνη. Άλλα υλικά που χρησιμοποιούνται σε αυτήν την ενότητα περιλαμβάνουν γεωμετρικούς πίνακες και μία συλλογή καρτών με σχήματα για ταξινόμηση.

Περιγραφή της Δραστηριότητας

Μέχρι τώρα, τα παιδιά έχουν συνηθίσει να γεμίζουν σχήματα με σχέδια κύβων. Επίσης, έχουν καταχωρήσει την εργασία τους με έναν από διάφορους πιθανούς τρόπους: κολλώντας χαρτόνι ή αυτοκόλλητες εκδοχές σχεδίων με κύβους ή χρωματίζοντας τα σχέδιά τους με το χέρι. Σε προηγούμενες δραστηριότητες κατέγραψαν τον αριθμό των φορών που χρησιμοποιήθηκε το κάθε τετραγωνάκι. Σε αυτήν τη δραστηριότητα θα γεμίσουν το ίδιο σχήμα τουλάχιστον τρεις φορές, προσπαθώντας κάθε φορά να χρησιμοποιήσουν διαφορετικό αριθμό κύβων. Τα παιδιά δουλεύουν σε ζευγάρια, με ένα από τα φύλλα εργασίας (που παρουσιάζονται εδώ) για κάθε ζευγάρι παιδιών. Καθώς ο εκπαιδευτικός αλληλεπιδρά με τα παιδιά, εστιάζει τη δραστηριότητα στον τρόπο προσέγγισης που υιοθετούν τα παιδιά. Μερικά παιδιά χρησιμοποιούν τα προφανή σχήματα (τα εξάγωνα και τα τραπέζια) και έχουν δυσκολίες στην εύρεση άλλων μεθόδων. Άλλα χρησιμοποιούν μόνο τρίγωνα ή μόνο τραπέζια.

Ο αριθμός είναι ένα επιπρόσθετο ανακείμενο εστίασης της δραστηριότητας. Τα παιδιά ενθαρρύνονται στο να προσπαθήσουν να βρουν έναν άλλο τρόπο να γεμίσουν το σχέδιο με περισσότερους ή λιγότερους κύβους ή έναν αριθ-

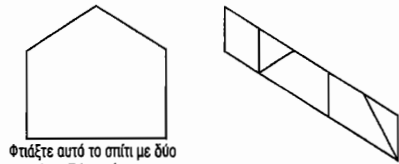
Διαφορετικοί τρόποι για γεμίστε



Η σελίδα 187 από το βιβλίο 2-Δ και 3-Δ Γεωμετρία: *Quilt Squares and Block Towns* του S.J.Russell, D.H.Clements and Sarama. *Investigations in Number, Data and Space*. Copyright 1998 από τις εκδόσεις Dale Seymour. Επανεκτύπωση κατόπιν άδειας του Pearson Education, Inc.

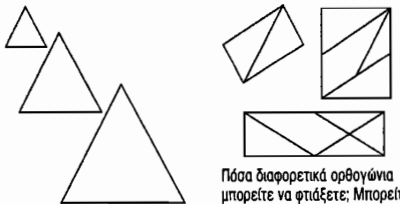
μό τετραγώνων που βρίσκεται ανάμεσα στα δύο διαφορετικά σύνολα. Αυτή η εστίαση στον αριθμό έχει τη δυνατότητα να ενθαρρύνει τα παιδιά να αντικαταστήσουν μικρότερους κύβους με ένα ισοδύναμο μεγαλύτερο κύβο (απουσιναρμόλωση σχημάτων), ή μεγαλύτερα τετράγωνα με μικρότερα (συνδυασμός σχημάτων).

Στη συζήτηση με ολοκλήρωση τη τάξη, τα παιδιά καταγράφουν σε λίστες όλα τα διαφορετικά σύνολα που βρήκαν (υπάρχουν οκτώ διαφορετικές λύσεις). Οι ερωτήσεις στρέφονται γύρω από τη δυνατότητα μιας λύσης με ακόμη περισσότερα ή λιγότερα τετράγωνα ή κάποιων επιπρόσθετων λύσεων στο ενδιαμέσο. Ο/η εκπαιδευτικός αναζητεί την άνεση των παιδιών με αυτήν τη συλλογιστική και το χειρισμό των σχημάτων στις αντικαταστάσεις.



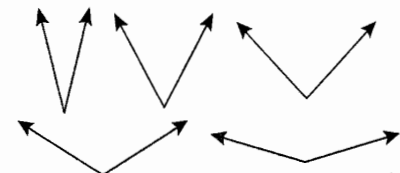
Φτιάξτε αυτό το σπίτι με δύο κομμάτια. Τώρα κάντε το με διαφορετικό τρόπο. Μπορείτε να το κάνετε με τρία κομμάτια; Με πόσους τρόπους; Τι λέτε για τέσσερα κομμάτια;

Αυτό είναι ένα μακρύ παραλληλόγραμμο. Ποια άλλα παραλληλόγραμμο μπορείτε να κάνετε;



Φτιάξτε μεγεθύνσεις του ισόπλευρου τριγώνου.

Πόσα διαφορετικά ορθογώνια μπορείτε να φτιάξετε; Μπορείτε να φτιάξετε ένα από αυτά με περισσότερους από έναν τρόπους;



Πόσες διαφορετικού μεγέθους γωνίες μπορείτε να βρείτε σε αυτήν τη συλλογή κομματιών; Βάλτε τα σε σειρά από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη.

ΣΧΗΜΑ 21.8 Ένα δείγμα δραστηριοτήτων με μωσαϊκό παζλ. Βασισμένο στους van Hiele, P.M. (1999). Αναπτύσσοντας τη γεωμετρική σκέψη μέσω δραστηριοτήτων που αρχίζουν με παιχνίδι. *Teaching Children Mathematics*, 5, 310-316.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα κομμάτια προκειμένου να μιλήσετε για τετράγωνες γωνίες (ορθές γωνίες) και για γωνίες που είναι μεγαλύτερες ή μικρότερες από μία ορθή γωνία (αμβλείες ή οξείες γωνίες).

Ο γεωμετρικός πίνακας είναι ένα από τα καλύτερα εργαλεία για το «σχεδιασμό» διδασκάντων σχημάτων. Εδώ υπάρχουν μόνο τρεις από τις πολλές δυνατές δραστηριότητες που είναι κατάλληλες για το επίπεδο 0.

Δραστηριότητα 21.5

Αντιγραφή σε Γεωμετρικό Πίνακα

Αντιγράψτε σχήματα, και σχέδια από έτοιμες κάρτες, όπως στο Σχήμα 21.9. Αρχίστε με σχέδια που γίνονται από τις κουκκίδες, όπως αυτές σε ένα γεωμετρικό

πίνακα, και αργότερα βάλτε παιδιά να αντιγράψουν σχέδια χωρίς κουκκίδες.

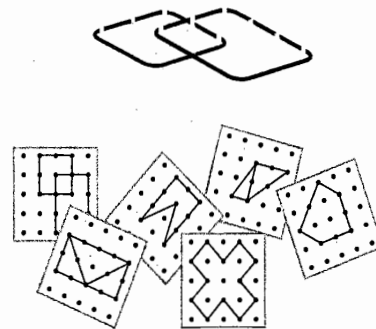
Δραστηριότητα 21.6

Ομόλογα μέρη

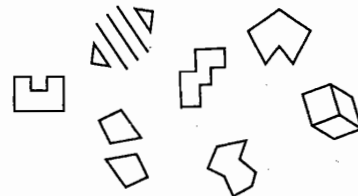
Αντιγράψτε ένα σχήμα από μία κάρτα και βάλτε τα παιδιά να τα διαιρέσουν ή να τα κόψουν σε μικρότερα σχήματα πάνω στο γεωμετρικό τους πίνακα. Προσδιορίστε τον αριθμό των μικρότερων σχημάτων. Επίσης, προσδιορίστε αν θα είναι όλα ίσα ή απλώς του ίδιου τύπου με αυτά που υπάρχουν στο Σχήμα 21.10. Εξαρτώμενη από τα περιεχόμενα σχήματα, η δραστηριότητα αυτή ανάλογα με τα σχήματα που περιέχονται μπορεί να γίνει αρκετά εύκολα ή σχετικά απαιτητική.

Να έχετε πολλούς γεωμετρικούς πίνακες διαθέσιμους στην αίθουσα. Είναι καλύτερο να έχετε για δύο ή τρία παιδιά 10 ή 12 πίνακες σε μία θέση από το να έχετε μόνον ένα για το

Βάλτε τα παιδιά να αντιγράψουν σχήματα από κάρτες με μοτίβα σε ένα γεωμετρικό πίνακα



Εκτός από τις κάρτες με σχέδια με ή χωρίς κουκκίδες, βάλτε τα παιδιά να αντιγράψουν πραγματικά σχήματα -τραπέζια, σπίτια, γράμματα της αλφαβήτου κτλ.



ΣΧΗΜΑ 21.9 Σχήματα σε γεωμετρικούς πίνακες

κάθε παιδί. Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί να φτιαχτεί και να συγκριθεί μία ποικιλία σχημάτων προτού αυτά αλλάξουν.

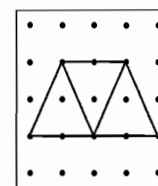
Να διδάξετε στα παιδιά εξασκήσεις να αντιγράφουν τα διάκατα σχήματα στους γεωμετρικούς πίνακες. Οι φωτοτυπίες τους επιτρέπουν να δημιουργήσουν ολοκληρωμένες συλλογές σχεδίων που ολοκληρώνουν μία δραστηριότητα. Τα σχέδια μπορούν να τοποθετηθούν σε έναν πίνακα, σε φυλλάδιο για κατηγοριοποίηση και συζήτηση, να γίνουν βιβλιαράκια που απεικονίζουν μία νέα ιδέα που συζητείται και να σταλούν σπίτι για να δείξουν στους γονείς τι συμβαίνει στη γεωμετρία.

Τα μικρότερα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν χαρτί με ένα μεγάλο γεωμετρικό πίνακα σε κάθε φύλλο. Αργότερα, ένας χάρτης τετράγωνος πίνακας 10 cm είναι αρκετός. Τα μεγαλύτερα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν καμβάδες με κουκκίδες σε εκατοστά. Όλα βρίσκονται στα Blackline Masters.

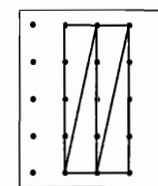
Για να βοηθήσετε τα παιδιά στις πολύ μικρές τάξεις να αντιγράψουν σχέδια των γεωμετρικών πινάκων, συστήστε τους πρώτα να μαρκάρουν τις κουκκίδες για τις γωνίες του σχήματός τους («δευτερεύς σειρά, τελευταίο κομμάτι»). Ταυτίζοντας τις γωνίες, είναι πολύ πιο εύκολο για τα παιδιά να σχεδιάσουν γραμμές για να φτιάξουν το σχήμα.



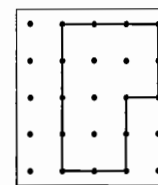
Το e-Standards παρέχει έναν πολύ καλό ηλεκτρονικό γεωμετρικό πίνακα. Παρόλο που βρίσκεται στην ενότητα από το νηπιαγωγείο μέχρι τη δεύτερη τάξη και τιτλοφορείται *Investigating*



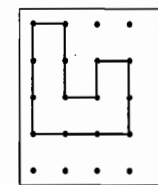
Τρία τρίγωνα όλα το ίδιο.



Τέσσερα τρίγωνα.



Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός τριγώνων που θα ταίριαζαν σε αυτό;



Γεμίστε με τρία ίδια ορθογώνια.

Αρχίστε με ένα σχήμα και κόψτε το σε μικρότερα σχήματα. Προσθέστε ιδιαίτερες συνθήκες, για να κάνετε τη δραστηριότητα πιο απαιτητική.

ΣΧΗΜΑ 21.10 Διαίρωντας σχήματα

the Concept of a Triangle, στην πραγματικότητα είναι ένα καλό πρόγραμμα για το γεωμετρικό πίνακα για κάθε τάξη. Σας επιτρέπει να διαλέξετε και να διαγράψετε ομάδες, καθώς και σημεία όπου δύο γραμμές συναντώνται για να σχηματίσουν μία γωνία. Το πρόγραμμα Geoboard από την National Library of Virtual Manipulatives (<http://nlvm.usu.edu/en/nav/library.html>) είναι ουσιαστικά το ίδιο, αλλά με σημαντικό υπολογισμό της περιμέτρου και του εμβαδού με το πάτημα ενός πλήκτρου και χωρίς ανάκληση των σημείων όπου δύο γραμμές συναντώνται για το σχηματισμό μιας γωνίας (αντί να μετακινηθεί ένα τέτοιο σημείο για να συμπέσει με ένα άλλο). Το *Mighty Math: Number Heroes* (Riverdeep) έχει επίσης, έναν ηλεκτρονικό γεωμετρικό πίνακα στη συνιστώσα του GeoComputer. Τα παιδιά μπορούν να μετακινηθούν ένα ολόκληρο σχήμα σε οποιαδήποτε μερής του γεωμετρικού πίνακα χωρίς αλλαγές. Τα σχήματα μπορούν να χρωματισθούν και να πεταχτούν ψηλά ή να περυστραφούν 90 μοίρες -κινήσεις που δεν είναι απλές για να επιτευχθούν σ' έναν αληθινό πίνακα. ■

II Σημειώ και σκεπάζομαι

Αν δεν έχετε χρησιμοποιήσει ποτέ ένα γεωμετρικό πίνακα, τότε παίξτε με τον ηλεκτρονικό πίνακα του e-Standards. Αν γνωρίζετε για τους γεωμετρικούς πίνακες, αλλά δεν έχετε χρησιμοποιήσει ποτέ έναν ηλεκτρονικό γεωμετρικό πίνακα, τώρα θα ήταν μία καλή ευκαιρία να δοκιμάσετε έναν.

Χαρτιά με ταξινομημένες κουκκίδες και καμβάδες με τετραγωνάκια αποτελούν εναλλακτικές λύσεις για τους γεωμετρικούς πίνακες. Ουσιαστικά, όλες οι δραστηριότητες που προτείνονται για τις ψηφίδες και τους γεωμετρικούς πίνακες μπορούν να γίνουν σε χαρτί με κουκκίδες ή σε καμβά με τετραγωνάκια. Μία αλλαγή στον τύπο του χαρτί αλλάζει τη δραστηριότητα και προσφέρει νέες ευκαιρίες για απόκτηση γνώσεων και ανακαλύψεις. Η Blackline Masters έχει μία ποικιλία χαρτιών με κουκκίδες και καμβάδες με τετραγωνάκια.

Η κατασκευή τρισδιάστατων σχημάτων είναι λίγο δυσκολότερη, συγχρόνως με εκείνη των διδιάστατων. Μία ποικιλία από υλικά εμπορίου επιτρέπουν μία αρκετά δημιουργική κατασκευή γεωμετρικών στερεών (για παράδειγμα, 3D Geoshapes, Polyhedron και το Zome System). Τα 3D Geoshapes και Polyhedron είναι παραδείγματα υλικών που αποτελούνται από πλαστικά πολύγωνα, τα οποία σπάζουν μαζί απότομα για να φτιάξουν τρισδιάστατα μοντέλα. Το Zome System είναι μία συλλογή που κολλάει και συνδέει: μπορούν να δημιουργηθούν σκελετικά μοντέλα πολύ διαφορετικά. Το Zome είναι πιθανώς πάρα πολύ δύσκολο για να χρησιμοποιηθεί σε μικρότερες τάξεις από την τρίτη. Τα ακόλουθα είναι τρεις ιδιαίτερα χρήσιμες συστάσεις για προσεγγίσεις σκελετικών μοντέλων που γίνονται στο σπίτι.

- Πλαστικοί αναδεντήρες με πηλό ή καθαριστικά σωλήνων.

Τα πλαστικά μπορούν να κοπούν εύκολα σε διαφορετικά μήκη. Χρησιμοποιείστε μικρά κομμάτια πηλού (με διάμετρο περίπου 1 με 2cm) για να συνδέσετε τις γωνίες. Αυτό είναι ένα καλό μοντέλο, εφόσον οι δομές δεν είναι πολύ περίπλοκες. Για μια εναλλακτική μέθοδο σύνδεσης, εισάγετε καθαριστικά σωλήνων μήκους 2 ιντσών στα άκρα των αναδευτήρων.

- **Πλαστικά καλαμάκια με εύκαμπτους αρμούς.** Κόψτε τα καλαμάκια κατά μήκος με ψαλίδι από την κορυφή μέχρι το εύκαμπο μέρος. Αυτές οι κομμένες άκρες μπορούν εν συνεχεία να εισαχθούν στις άκρες άκρες που βρίσκονται στο κάτω μέρος από άλλα καλαμάκια, φτιάχνοντας έτσι ένα δυνατό και συνάμα εύκαμπο αρμό. Τρία ή περισσότερα καλαμάκια ενώνονται με αυτόν τον τρόπο για να σχηματίσουν διδιάστατα πολύγωνα. Για να φτιάξετε σκελετωειδή στερεά, χρησιμοποιείστε μονωτική ταινία ή σύρμα προκειμένου να ενώσετε τα πολύγωνα, πλευρά προς πλευρά.
- **Ράβδοι από τυλιγμένη εφημερίδα.** Φανταστικοί υπερμέγεθες σκελετοί μπορούν να φτιαχτούν με τη χρησιμοποίηση εφημερίδων και αυτοκόλλητης ταινίας. Τυλίξτε τρία μεγάλα φύλλα εφημερίδας κατά τη διαγώνιο, για να σχηματίσετε μία ράβδο. Όσο πιο σφιχτά τυλίγεται την εφημερίδα, τόσοες λιγότερες πιθανότητες υπάρχουν να λυγίσει. Στερεώστε το ρολό στο κέντρο με ένα μικρό κομμάτι αυτοκόλλητης ταινίας. Τα άκρα των ράβδων είναι λεπτά και ευλύγιστα για περίπου 6 ίντσες, όπου υπάρχει λιγότερη εφημερίδα. Ενώστε τις ράβδους συναρθερώνοντας αυτά τα λεπτά μέρη και δένοντάς τα με αυτοκόλλητη ταινία. Χρησιμοποιήστε την αυτοκόλλητη ταινία ελεύθερα, τυλίγοντάς την αρκετές φορές γύρω από κάθε αρμό. Και άλλες ράβδοι μπορούν να ενωθούν, αφού θα έχουν ήδη δεθεί με ταινία ανά δύο ή τρεις (βλέπε Σχήμα 21.11).

Με αυτά τα χειροποίητα μοντέλα, τα παιδιά θα πρέπει να συγκρίνουν την ακαμψία ενός τριγώνου με την έλλειψη ακαμψίας των πολυγώνων που έχουν περισσότερες από τρεις πλευρές. Τονίστε ότι τα τρίγωνα χρησιμοποιούνται σε πολλές γέφυρες, σε μακριές δοκούς οικοδομικών γερανών, σε πύλες και σε δομικά μέρη κτηρίων. Ζητήστε το λόγο για τον οποίο μπορεί να ισχύει αυτό. Καθώς τα παιδιά κατασκευάζουν σκελετικές δομές, θα ανακαλύψουν ότι θα χρειαστεί να προσθέσουν διαγώνια μέλη προκειμένου να σχηματίσουν τρίγωνα. Όσα περισσότερα είναι τα τρίγωνα, τόσο λιγότερες πιθανότητες υπάρχουν να καταρρεύσει η κατασκευή τους.

Η μέθοδος της τυλιγμένης εφημερίδας προκαλεί ενθουσιασμό, διότι οι κατασκευές γίνονται γρήγορα μεγάλες. Αφήστε τα παιδιά να εργαστούν σε ομάδες των τεσσάρων ή των πέντε ατόμων. Σύντομα θα ανακαλύψουν τι κάνει την κατασκευή άκαμπτη καθώς και τις ιδέες ισορροπίας και σχηματισμού. Τα παιδιά του δημοτικού μπορούν να ωφεληθούν

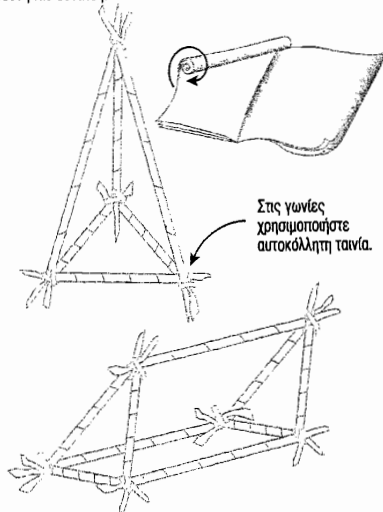
από τη δημιουργία κατασκευών με ακανόνιστο σχήμα. Στα μεγαλύτερα παιδιά μπορεί να υπάρξει η απαίτηση για πιο καλοσχηματισμένα σχήματα.

Ψηφιδωτά

Το ψηφιδωτό είναι ένα σχέδιο από ψηφίδες σε ένα επίπεδο, χρησιμοποιώντας ένα ή περισσότερα σχήματα σε ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο χωρίς τρύπες ή κενά. Η κατασκευή ψηφιδωτών είναι ένας καλλιτεχνικός τρόπος για τα παιδιά του επιπέδου 0 από την πρώτη δημοτικού μέχρι την δευτέρα γυμνασίου για να διερευνήσουν μοτίβα σε σχέδια και να δουν πως συνδέονται τα σχήματα για να σχηματίσουν άλλα σχήματα. Δραστηριότητες για ψηφιδωτά με ένα σχήμα ή δύο σχήματα μπορούν να διαφέρουν σημαντικά από την πλευρά του βαθμού δυσκολίας.

Ακόμα και τα ψηφιδωτά με ένα σχήμα γίνονται πιο εύκολα με κάποια σχήματα από κάποια άλλα. Για παράδειγμα, τα τετράγωνα ή τα ισοσκελή τρίγωνα δημιουργούν εύκολα

Τυλίξτε φύλλα εφημερίδας πολύ σφιχτά κατά τη μία διαγώνιο. Αφραδίστε με αυτοκόλλητη ταινία. Το σφιχτό τυλίγμα κάνει τις ράβδους πιο δυνατές.

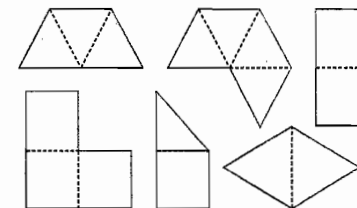


ΣΧΗΜΑ 21.11 Μεγάλες σκελετικές δομές και ειδικά σχήματα μπορούν να κατασκευαστούν με σφιχτά τυλιγμένες εφημερίδες. Τα μικρά παιδιά μπορούν να δομήσουν κατασκευές με ακανόνιστο σχήμα. Στα μεγαλύτερα παιδιά μπορεί να υπάρξει η πρόκληση να δημιουργήσουν σχήματα με συγκεκριμένες ιδιότητες. Κάντε τις άκρες να επικαλύπτουν ή μία την άλλη κατά 6 ίντσες για να διασφαλίσετε ότι η κατασκευή σας είναι γερή.

ψηφιδωτά, αν και παρέχουν πολύ μικρή γεωμετρική πρόκληση. Στο Σχήμα 21.12 παρουσιάζονται πολλά σχήματα που συνιστούν πολύ καλά πλακίδια για τα πρώτα ψηφιδωτά.

Μερικά σχήματα προσφέρονται περισσότερο για την κατασκευή ψηφιδωτών από κάποια άλλα (βλέπε Σχήμα 21.13). Όταν τα σχήματα μπορούν να τοποθετηθούν μαζί σε περισσότερα από ένα μοτίβα, δυσκολεύει το επίπεδο επίλυσης προβλημάτων και αυξάνεται η δημιουργικότητα. Κυριολεκτικά εκατοντάδες σχήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως πλακίδια για ψηφιδωτά.

Τα περισσότερα παιδιά θα ωφεληθούν από την χρησιμοποίηση πραγματικών ψηφιδών για τη δημιουργία μοτίβων. Απλές ψηφίδες από χαρτόνι μπορούν να κοπούν γρήγορα με χαρτοκόπτη. Άλλες ψηφίδες μπορούν να αποτυπωθούν σε χαρτί πατιούρας και με ψαλίδι να κοπούν συγχρόνως πολλές μαζί. Τα μεγαλύτερα παιδιά μπορεί να έχουν αποκτήσει την ικανότητα να χρησιμοποιούν καμβάδες με κουκκίδες ή ευθείες γραμμές και να σχεδιάσουν τα ψηφιδωτά τους με μολύβι και χαρτί. Για να σχεδιάσετε ένα ψηφιδωτό, χρησιμοποιήστε ένα μόνο χρώμα, ώστε η εστίαση να βρίσκεται στις χωρικές σχέσεις. Για την ολοκλήρωση ενός ψηφιδωτού με καλλιτεχνική όψη προσθέστε χρωματικά σχέδια. Με τα μικρότερα παιδιά χρησιμοποιήστε δύο χρώματα και ποτέ πε-

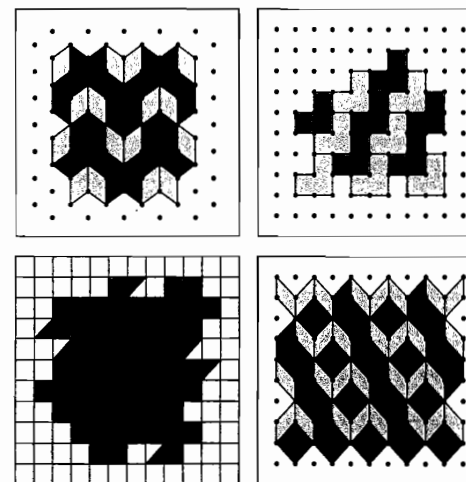


ΣΧΗΜΑ 21.12 Αυτά τα απλά σχήματα αποτελούν καλά πλακίδια για να τα χρησιμοποιήσετε στα ψηφιδωτά στις πρώτες τάξεις. Οι γραμμές με τις κουκκίδες δείχνουν πώς δημιουργούνται τα σχήματα από τετράγωνα ή ισοσκελή τρίγωνα. Δεν συμπεριλαμβάνονται στα πλακίδια των παιδιών.

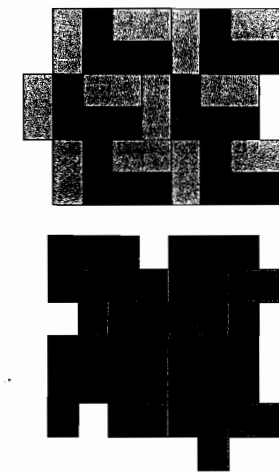
ρισσότερα από τέσσερα. Επιπλέον, τα χρωματικά σχέδια επαναλαμβάνονται τακτικά σε όλο το ψηφιδωτό.

Τα ψηφιδωτά μπορούν να γίνουν κολλώντας χάρτινες ψηφίδες σε μεγάλα φύλλα χαρτί, σχεδιάζοντάς τις σε καμβάδες με κουκκίδες ή με γραμμές, και με κομμάτια από χαρτόνι. Εργαστείτε από το κέντρο προς τα έξω, αφήνοντας τις μη τελειωμένες άκρες να δίνουν την αίσθηση ότι το μοτίβο σας συνεχίζεται επ' άπειρον.

Τα ψηφιδωτά μπορούν να σχεδιαστούν σε χαρτί με κουκκίδες ή να γίνουν από χάρτινα πλακίδια κατασκευής. Αποτελούν καλή πρόκληση και είναι μια ευκαιρία τόσο για καλλιτεχνική δημιουργία όσο και για χωρικό συλλογισμό.



ΣΧΗΜΑ 21.13 Ψηφιδωτά



II Σημειώ και στοάζομαι

Κοιτάξτε το κάτω αριστερά ψηφιδωτό στο Σχήμα 21.13. Ποιο μεμονωμένο πλακίδιο (έναν συνδυασμό από ολόκληρα και μισά τετράγωνα) έφτιαξε αυτό το μοτίβο;

Σχήματα και Ιδιότητες για τα Παιδιά στο Επίπεδο 1

Καθώς τα παιδιά προχωρούν στη συλλογιστική σκέψη του επιπέδου 1, η προσοχή τους στρέφεται περισσότερο στις ιδιότητες που έχουν οι παραδοσιακές ταξινομήσεις των σχημάτων. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου είναι λογικό να μάθουν

τα παιδιά τα σωστά ονόματα των σχημάτων και τις ιδιότητές τους.

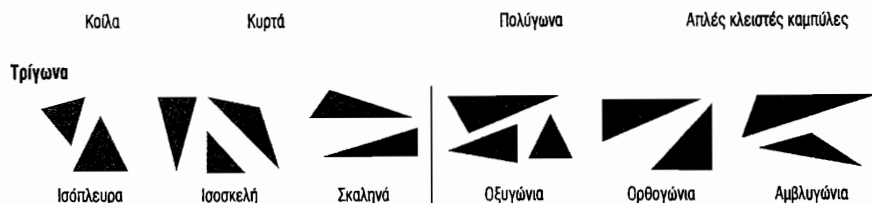
Για να είμαστε ξεκάθαροι παρουσιάζονται εδώ οι σημαντικοί ορισμοί των διδιάστατων και τριδιάστατων σχημάτων. Θα παρατηρήσετε ότι οι ορισμοί των σχημάτων περιλαμβάνουν τις σχέσεις ανάμεσα και μεταξύ των σχημάτων.

Ειδικές Κατηγορίες των Διδιάστατων Σχημάτων

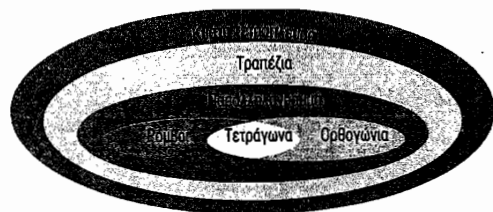
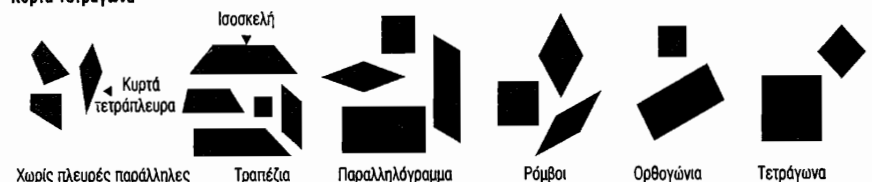
Στον Πίνακα 21.1 αναφέρονται ορισμένες κατηγορίες διδιάστατων σχημάτων. Παραδείγματα για αυτά τα σχήματα μπορείτε να βρείτε στο Σχήμα 21.14.

Στην κατηγοριοποίηση των τετραπλεύρων και των πα-

Απλές Κλειστές Καμπύλες



Κυρτά Τετράγωνα



Η συλλογιστική του επιπέδου 1 δεν αναγνωρίζει αυτές τις υπο-σχέσεις.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να τα ταξινομήσετε τα πολύγωνα. Πολλά που έχουν τρεις και τέσσερις πλευρές έχουν ειδικά ονόματα.

ΣΧΗΜΑ 21.14 Κατηγοριοποίηση των διδιάστατων σχημάτων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 21.1

Κατηγορίες Διδιάστατων Σχημάτων

Σχήμα	Περιγραφή	Σχήμα	Περιγραφή
Απλές Κλειστές Καμπύλες Κοίλα, Κυρτά	Μία διαισθητική περιγραφή του κοίλου θα μπορούσε να είναι "αυτό που έχει βαθύλωμα". Αν μία απλή κλειστή καμπύλη δεν είναι κοίλη, τότε είναι κυρτή. Θα ήταν ίσως πιο ενδιαφέρουσα η έρευνα με μεγαλύτερα παιδιά για έναν ακριβέστερο ορισμό του κοίλου.	Τρίγωνα Τρίγωνα	Πολύγωνα με τρεις πλευρές ακριβώς.
Συμμετρικά, μη συμμετρικά	Τα σχήματα μπορεί να έχουν μία ή περισσότερες γραμμές συμμετρίας και μπορεί να έχουν ή να μην έχουν περιστροφική συμμετρία. Αυτές οι έννοιες απαιτούν μία πιο λεπτομερή διερεύνηση.	Ταξινομημένα βάσει πλευρών Ισόπλευρα Ισοσκελή	Όλες οι πλευρές είναι ίσες. Τουλάχιστον δύο πλευρές είναι ίσες. Δεν υπάρχουν ίσες πλευρές.
Πολύγωνα Κοίλα, κυρτά Συμμετρικά Μη συμμετρικά Κανονικά	Απλές κλειστές καμπύλες με ίσες όλες τις πλευρές.	Σκαληνά Ταξινομημένα βάσει γωνιών Ορθογώνια Οξυγώνια	Έχουν μία ορθή γωνία. Όλες οι γωνίες είναι μικρότερες από μια ορθή γωνία.
	Όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες είναι ίσες.	Αμβλυγώνια	Μία γωνία είναι μεγαλύτερη από από μια ορθή γωνία.
		Κυρτά τετράπλευρα Κυρτά τετράπλευρα	Κυρτά πολύγωνα με 4 πλευρές ακριβώς.
		Χαρταετός	Δύο απέναντι ζεύγη ίσων διαδοχικών πλευρών.
		Τραπεζίδιο	Τουλάχιστον ένα ζεύγος παράλληλων πλευρών.
		Ισοσκελές τραπεζίδιο	Δύο μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.
		Παράλληλογράμμο Ορθογώνιο	Δύο ζεύγη παράλληλων πλευρών. Παράλληλογράμμο με μία ορθή γωνία.
		Ρόμβος	Παράλληλογράμμο με όλες τις πλευρές ίσες.
		Τετράγωνο	Παράλληλογράμμο με μία ορθή γωνία και ίσες όλες τις πλευρές.

ραλληλογράμμων, τα υποσύνολα δεν είναι όλα ξένα μεταξύ τους. Για παράδειγμα, ένα τετράγωνο είναι ορθογώνιο και ρόμβος. Όλα τα παραλληλόγραμμα είναι τραπεζία, όμως δεν είναι όλα τα τραπεζία παραλληλόγραμμα.* Τα παιδιά στο επίπεδο 1 δυσκολεύονται να δουν αυτόν τον τύπο υπο-σχέσης. Είναι δυνατόν να καταγράψουν σε λίστα, σχεδόν χωρίς κανένα λάθος, όλες τις ιδιότητες του τετραγώνου, του ρόμβου και του ορθογώνιου, οι όμως, να αντιλαμβάνονται το τετράγωνο ως «μη ρόμβος» ή «μη ορθογώνιο». Είναι λάθος να αναφέρονται τα παιδιά στις υπο-ομάδες ως ξένα σύνολα; Στην τετάρτη ή πέμπτη τάξη είναι λάθος να ενθαρρύνεται τέτοιου είδους σκέψη. Ο Burger (1985) σημειώνει ότι τα παιδιά στις μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού χρησιμοποιούν σωστά αυτές τις με-

θόδους κατηγοριοποίησης σε άλλα πλαίσια. Για παράδειγμα, το κάθε παιδί μέσα σε μία τάξη μπορεί να ανήκει σε περισσότερες από μία ομάδες. Το τετράγωνο είναι ένα παράδειγμα ενός τετραπλεύρου που ανήκει σε δύο άλλες ομάδες.

Ειδικές Κατηγορίες Τριδιάστατων Σχημάτων

Σημαντικά και ενδιαφέροντα σχήματα και σχέσεις υπάρχουν και στις τρεις διαστάσεις. Ο Πίνακας 21.2 περιγράφει τις ταξινομήσεις των στερεών. Το Σχήμα 21.15 δίνει παραδείγματα κυλίνδρων και πρισμάτων. Σημειώστε ότι τα πρίσματα εδώ ορίζονται ως ειδική κατηγορία κυλίνδρου –έναν κυλινδρο με πολύγωνο για βάση. Το Σχήμα 21.16 παρουσιάζει μία παρόμοια ομαδοποίηση των κώνων και των πυραμίδων.

II Σημειώ και στοάζομαι

*Μερικοί ορισμοί των τραπεζίων συγκεκριμενοποιούν μόνο ένα ζεύγος παράλληλων πλευρών και σε αυτήν την περίπτωση τα παραλληλόγραμμα δεν θα ήταν τραπεζία. Το University of Chicago School Mathematics Project (UCSMP) χρησιμοποιεί τον ορισμό «τουλάχιστον ένα ζεύγος», εννοώντας ότι τα παραλληλόγραμμα και τα ορθογώνια είναι τραπεζία.

Εξηγήστε το εξής: Τα πρίσματα είναι για τους κυλίνδρους, ό,τι οι πυραμίδες για τους κώνους. Πώς μπορεί αυτή η σχέση να βοηθήσει στην εκμάθηση των τύπων για τον όγκο;

ΠΙΝΑΚΑΣ 21.2

Κατηγορίες των τρισδιάστατων σχημάτων			
Σχήμα	Περιγραφή	Σχήμα	Περιγραφή
Ταξινομημένα βάσεις Ακμών και Κορυφών Σφαίρες και "ωοειδή" σχήματα	Σχήματα χωρίς ακμές και χωρίς κορυφές (γωνίες). Σχήματα με ακμές αλλά όχι κορυφές (ιπτάμενος δίσκος). Σχήματα με κορυφές αλλά όχι ακμές (μπάλα ποδοσφαίρου).	Κύλινδροι Κύλινδρος	Δύο ίσες, παράλληλες έδρες που καλούνται βάσεις. Οι γραμμές που ενώνουν δύο αντίστοιχα σημεία στις δύο βάσεις είναι πάντα παράλληλες. Αυτές οι παράλληλες γραμμές καλούνται γενέτειρες (elements) του κύλινδρου.
Ταξινομημένα βάσεις Εδρών και Επιφανειών Πολύεδρο	Σχήματα φτιαγμένα από όλες τις έδρες (η έδρα είναι μία επίπεδη επιφάνεια στερεού). Αν όλες οι επιφάνειες είναι έδρες, όλες οι ακμές θα είναι ευθείες γραμμές. Κάποιος συνδυασμός εδρών και στρογγυλοποιημένων επιφανειών (ένα παράδειγμα είναι οι κύλινδροι, όμως αυτό δεν είναι ο ορισμός του κύλινδρου). Σχήματα με όλες τις επιφάνειες καμπύλες. Σχήματα με και χωρίς ακμές και, με και χωρίς κορυφές. Οι έδρες μπορούν να είναι παράλληλες. Οι παράλληλες έδρες κείτονται σε επίπεδα που δεν τέμνονται ποτέ μεταξύ τους.	Ορθός κύλινδρος	Ένας κύλινδρος με γενέτειρες κάθετες στις βάσεις.
		Πρίσμα	Ένας κύλινδρος που δεν είναι ορθός καλείται μη ορθός.
		Ορθογώνιο πρίσμα	Ένας κύλινδρος με πολύγωνα για βάσεις. Όλα τα πρίσματα είναι ειδικές περιπτώσεις κύλινδρων. Ένας κύλινδρος με ορθογώνια για βάσεις.
		Κύβος	Ένα τετράγωνο πρίσμα με τετράγωνες πλευρές.
		Κώνοι Κώνος	Ένα στερεό με ακριβώς μία έδρα και μία κορυφή που δεν βρίσκεται στην έδρα. Ευθείες γραμμές μπορούν να σχεδιαστούν από οποιοδήποτε σημείο στην ακμή της βάσης προς την κορυφή. Η βάση μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε σχήμα. Η κορυφή δεν είναι απαραίτητο να βρίσκεται ακριβώς πάνω από τη βάση.
		Κυκλικός κώνος	Κώνος με κυκλική βάση.
		Πυραμίδα	Κώνος με πολύγωνο για βάση. Όλες οι έδρες που ενώνονται με την κορυφή είναι τρίγωνα. Οι πυραμίδες παίρνουν το όνομά τους από το σχήμα της βάσης: τριγωνικές πυραμίδες, τετράγωνες πυραμίδες, οκταγωνικές πυραμίδες κ.ο.κ. Όλες οι πυραμίδες είναι ειδικές περιπτώσεις κώνων.

Πολλά εγχειρίδια ορίζουν τους κύλινδρους αυστηρά ως κυκλικούς κύλινδρους. Με αυτόν τον ορισμό, το πρίσμα δεν είναι μία ειδική περίπτωση κύλινδρου. Αυτό αποδεικνύει το γεγονός πως όλοι οι ορισμοί είναι συμβάσεις και όλες οι συμβάσεις δε συμφωνούν μεταξύ τους διεθνώς. Εάν επιστρέψετε στο Κεφάλαιο 20 στους τύπους για τον όγκο, θα δείτε ότι ο πιο συνεκτικός ορισμός των κύλινδρων και των κώνων που δίνεται εδώ, δίνει έναν τύπο για οποιοδήποτε είδος κύλινδρου –άρα και πρίσματος– με μία πρόταση που αληθεύει για τους κώνους και τις πυραμίδες.

Ταξινομώντας και Κατηγοριοποιώντας τις Δραστηριότητες

Η επόμενη δραστηριότητα προσφέρει μία καλή μέθοδο για την εισαγωγή μίας κατηγορίας σχημάτων.

Δραστηριότητα 21.7

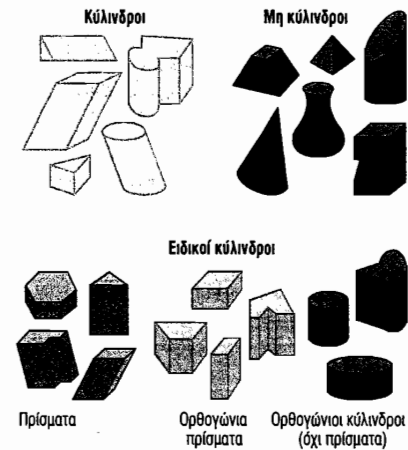
Ο Μυστηριώδης Ορισμός

Χρησιμοποιήστε τον πίνακα προβολής ή το σχολικό πί-

νακα για να καθοδηγήτε τις δραστηριότητες, όπως στο παράδειγμα του Σχήματος 21.17. Για την πρώτη σας συλλογή σιγουρευτείτε ότι επιτρέπει όλες τις δυνατές μεταβλητές. Στο Σχήμα 21.17 για παράδειγμα, ένα τετράγωνο περιλαμβάνεται στην ομάδα των ρόμβων. Παρομοίως, διαλέξτε αντιπροσώπευμα που να βρίσκονται τόσο κοντά στα θετικά παραδείγματα όσο χρειάζεται για να βοηθήσουν με έναν ακριβή ορισμό. Η τρίτη ή μικτή ομάδα θα πρέπει, επίσης, να περιέχει αυτά τα αντιπροσώπευμα, τα οποία πιθανότατα θα προκαλέσουν σύγχυση στα παιδιά.

Αντί να επιβεβαιώσουν την επιλογή σχημάτων στην τρίτη ομάδα, τα παιδιά θα πρέπει να γράψουν μία εξήγηση για την επιλογή τους.

Η αξία της προσέγγισης «Μυστηριώδης Ορισμός» βρίσκεται στο ότι τα παιδιά αναπτύσσουν ιδέες και ορισμούς βασισμένα στη δική τους ανάπτυξη εννοιών. Αφού συζητηθούν και συγκριθούν οι ορισμοί τους, μπορείτε να προσφέρετε, χάριν σαφήνειας, το συνήθη ορισμό του «βιβλίου».



Οι κύλινδροι έχουν δύο παράλληλες έδρες και οι παράλληλες γραμμές ενώνουν αντίστοιχα σημεία σε αυτές τις έδρες. Εάν οι παράλληλες έδρες είναι πολύγωνα, ο κύλινδρος μπορεί να καλείται και πρίσμα.

ΣΧΗΜΑ 21.15 Κύλινδροι και Πρίσματα

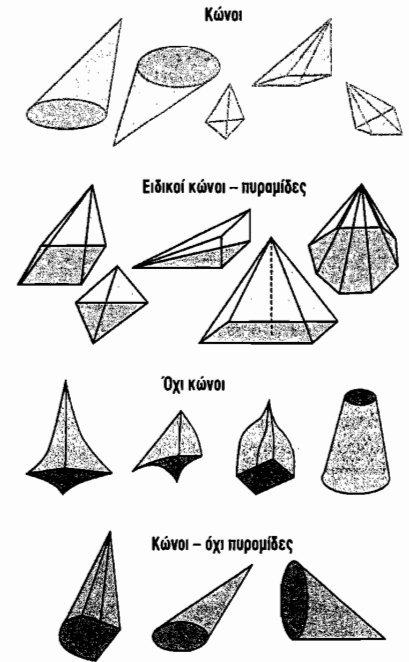
Για τον ορισμό τύπων ή κατηγοριών των τριγώνων, η επόμενη δραστηριότητα είναι ιδιαίτερα καλή και χρησιμοποιεί μία διαφορετική προσέγγιση.

Δραστηριότητα 21.8

Ταξινόμηση Τριγώνων

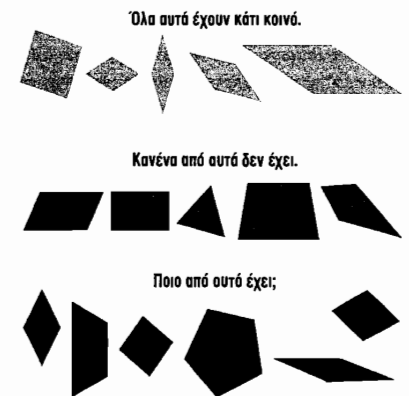
Φτιάξτε αντίγραφο του φύλλου Ταξινομημένα Τρίγωνα που βρίσκεται στα Blackline Masters. Σημειώστε παραδείγματα ορθογώνιων, οξυγώνιων και αμβλυγώνιων τριγώνων. Παραδείγματα από ισόπλευρα, ισοσκελή και σκαληνά τρίγωνα καθώς και τρίγωνα που αντιπροσωπεύουν κάθε δυνατό συνδυασμό αυτών των κατηγοριών. Βάλτε τα παιδιά να τα κόψουν. Αντικείμενο της δραστηριότητας είναι η ταξινόμηση της συλλογής σε τρεις ομάδες, ώστε κανένα τρίγωνο να μην ανήκει σε δύο ομάδες. Όταν γίνει αυτό και οι περιγραφές των ομάδων έχουν γραφεί, τα παιδιά θα πρέπει τότε να βρουν ένα δεύτερο κριτήριο για τη δημιουργία τριών διαφορετικών ομάδων. Τα παιδιά μπορεί να χρειαστούν ένα στοιχείο για να εξετάσουν μόνο το μέγεθος των γωνιών ή μόνο το ζήτημα των ομόλογων πλευρών, αλλά, αν μπορείτε, κρατήστε κρυφά αυτά τα στοιχεία.

Η «Ταξινόμηση Τριγώνων» καταλήγει σε ορισμούς των έξι διαφορετικών τύπων τριγώνων χωρίς να πρέπει να καταγράψετε σε λίστες αυτούς τους ορισμούς που υπάρχουν στον πίνακα και να βάλετε τα παιδιά να τους αποστηθίσουν. Σαν



Οι κώνοι και οι κώνοι με πολυγωνική βάση (πυραμίδες) έχουν όλοι στοιχεία ευθείας γραμμής που ενώνουν κάθε σημείο της βάσης με την κορυφή (νοι, η πυραμίδα είναι μόνο ένας τύπος κώνου).

ΣΧΗΜΑ 21.16 Κώνοι και Πυραμίδες



Δεν είναι απαραίτητο να γίνει κατανοητή η ονομασία της ιδιότητας. Απαιτείται προσεκτικότερη παρατήρηση των ιδιοτήτων, για να ανακαλύψετε ποια σχήματα έχουν κοινά στοιχεία.

ΣΧΗΜΑ 21.17 Όλα αυτά, κανένα από αυτά: ένας μυστηριώδης ορισμός.

ακόλουθη δραστηριότητα, φτιάξτε ένα διάγραμμα σαν αυτό εδώ. Προκαλέστε τους μαθητές να σχεδιάσουν ένα τρίγωνο σε καθένα από τα εννέα κελιά.

	Ισοπλευρά	Ισοσκελή	Σκευή
Ορθογώνια			
Οξυγώνια			
Αμβλυγώνια			

II Στοιβά και στοιβάκια

Δύο από τα εννέα κελιά του διαγράμματος είναι αδύνατον να γεμίσουν. Μπορείτε να πείτε ποια και γιατί;

Τα τετράπλευρα (πολύγωνα με τέσσερις πλευρές) είναι μία ιδιαίτερα πλούσια πηγή διερεύνησης. Μόλις τα παιδιά εξοικειωθούν με τις έννοιες της ορθής, αμβλείας και οξείας γωνίας, την ισότητα των ευθύγραμμων τμημάτων και τη συμμετρία (γραμμική και περιστροφική), η Δραστηριότητα 21.2 «Λίστες Ιδιοτήτων για τα Τετράπλευρα», είναι ένας καλός τρόπος να συνδυάσετε αυτές τις ιδέες και να αρχίσετε να βλέπετε πώς οι διαφορετικές συλλογές ιδιοτήτων εφαρμόζονται στις διαφορετικές ταξινομήσεις σχημάτων (η Δραστηριότητα 21.2 στη σελίδα 519, αναλύθηκε σύντομα στο ξεκίνημα του κεφαλαίου). Η ανάπτυξη των εννοιών συμμετρίας θα διερευνηθεί στο τμήμα των μετασχηματισμών αργότερα στο κεφάλαιο).

Θυμηθείτε ότι στις «Λίστες Ιδιοτήτων για τα Τετράπλευρα», τα παιδιά δούλεψαν για να δημιουργήσουν λίστες όλων των ιδιοτήτων που μπορούσαν να βρουν σε μία συγκεκριμένη κατηγορία σχημάτων. Αυτό μπορεί να χρειάζεται δύο ή τρεις περιόδους. Τα παιδιά θα πρέπει να μοιράζονται τις λίστες τους αρχίζοντας με τα παραλληλόγραμμα, μετά με τους ρόμβους, έπειτα με τα ορθογώνια και τέλος με τα τετράγωνα. Αφήστε μία ομάδα να παρουσιάσει τη λίστα της. Έπειτα άλλες που εργάστηκαν για το ίδιο σχήμα θα πρέπει να προσθέσουν ή να αφαιρέσουν σε αυτήν. Η τάξη θα πρέπει να συμφωνεί για όλα όσα μπαίνουν στη λίστα. Καθώς προκύπτουν νέες σχέσεις σε αυτή την περίοδο παρουσίασης και συζήτησης, μπορείτε να εισάγετε την κατάλληλη ορολογία. Για παράδειγμα, αν δύο διαγώνιοι τέμνονται σε μία ορθή γωνία, τότε είναι κάθετες. Άλλοι όροι όπως παράλληλος, ίσος, διχοτόμος, μέσον κτλ. μπορούν να αποσαφηνισθούν, καθώς βοηθάτε τα παιδιά να γράψουν τις περιγραφές τους. Αυτή είναι μία καλή στιγμή για να εισαγάγετε και σύμβολα, όπως $=$ για τα «ίσα» ή $\parallel$ για τα «παράλληλα».

Ως προέκταση, επαναλάβετε τη Δραστηριότητα 21.2 χρη-

σιμοποιώντας χαρταετούς και τραπεζία. Η «Λίστα Ιδιοτήτων για τα Τετράπλευρα» έχει κάποια σημαντικά επεκταθούν, τα οποία περιγράφονται στην ενότητα των δραστηριοτήτων για το επίπεδο 2 (βλέπε σελ. 538). Επιπλέον, παρεμφερείς δραστηριότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εισαγωγή ορισμών για τα τρισδιάστατα σχήματα.

Δραστηριότητες για Κατασκευές

Εξακολουθεί να είναι σημαντικό στο επίπεδο 1, τα παιδιά να κατασκευάζουν ή να σχεδιάζουν σχήματα. Τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας (*The Geometer's Sketchpad* και *Cabri*) ανεβάζουν δραματικά την αξία της διερεύνησης των σχημάτων σε αυτό το επίπεδο.

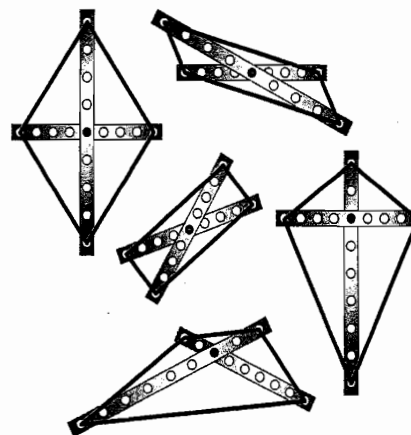
Στη δραστηριότητα «Λίστες Ιδιοτήτων», τα παιδιά εξετάζουν τις διαγώνιους των διαφόρων ομάδων τετραπλεύρων. Αν αυτή η δραστηριότητα δεν έχει γίνει ήδη, η ακόλουθη διερεύνηση είναι πολύ ενδιαφέρουσα. Αντί να ξεκινήσει με τα σχήματα, ξεκινά με τις διαγώνιους.

Δραστηριότητα 21.9

Διαγώνιες Ταινίες

Για τη δραστηριότητα αυτή τα παιδιά θα χρειαστούν τρεις ταινίες από χαρτόνι πλάτους περίπου 2cm. Οι δύο πρέπει να είναι του ίδιου μήκους (περίπου 30cm) και η τρίτη λίγο κοντύτερη (περίπου 20cm). Κάντε στην ταινία εννέα τρύπες με ίσες αποστάσεις μεταξύ τους (κάντε μία τρύπα κοντά σε κάθε τέλος. Διαίρεστε την απόσταση που βρίσκεται ανάμεσα στις πρώτες 8 τρύπες. Αυτή θα είναι η απόσταση ανάμεσα στα κενά που έμειναν). Χρησιμοποιήστε ένα χάλκινο στερεωτικό για να ενώσετε τις δύο ταινίες. Σχηματίζεται ένα τετράπλευρο, αν ενώσετε τις τέσσερις ακριανές τρύπες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 21.18. Δώστε στα παιδιά τη λίστα των πιθανών σχέσεων για τις γωνίες, τα μήκη και τους λόγους των μερών. Η εργασία τους είναι να χρησιμοποιήσουν τις ταινίες για να καθορίσουν τις ιδιότητες των διαγώνιων που θα παραγάγουν διαφορετικά τετράπλευρα. Οι ταινίες υπάρχουν για να βοηθήσουν στη διερεύνηση. Τα παιδιά μπορεί να θέλουν να φτιάξουν σχέδια σε χαρτί με κομμάδες για να ελέγξουν τις διάφορες υποθέσεις τους.

Κάθε τύπος τετραπλεύρου μπορεί να περιγραφεί μοναδικά όσον αφορά στις διαγώνιους του, χρησιμοποιώντας μόνο τους όρους του μήκους, το λόγο των μερών και το εάν είναι ή δεν είναι κάθετες. Κάποια παιδιά θα εργαστούν με τις σχέσεις των διαγώνιων, για να δουν ποια σχήματα μπορούν να δημιουργηθούν. Κάποια άλλα θα αρχίσουν με παραδείγματα των σχημάτων και θα παρατηρήσουν τις σχέσεις των διαγώνιων. Ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας, όπως το *The Geometer's Sketchpad*, είναι ένα άριστο μέσο για αυτήν τη διερεύνηση.



Τα τετράπλευρα μπορούν να καθοριστούν από τις διαγώνιους τους. Υπολογίστε το μήκος κάθε μίας, πού τέμνονται και τις μεταξύ τους γωνίες. Ποιες συνθήκες θα παράγουν τα παραλληλόγραμμα; Τα ορθογώνια; Τους ρόμβους; Πρόκληση: Τι ιδιότητες θα παράγει ένα μη ισοσκελές τραπέζιο;

ΣΧΗΜΑ 21.18 Οι Διαγώνιοι των τετραπλεύρων

Κύκλοι

Πολλές ενδιαφέρουσες σχέσεις μπορούν να παρατηρηθούν ανάμεσα στις μετρήσεις διαφορετικών μερών του κύκλου. Ανάμεσα στις πιο εντυπωσιακές είναι ο λόγος ανάμεσα στις μετρήσεις της περιφέρειας και της διαμέτρου.

Δραστηριότητα 21.10

Ανακαλύπτοντας το π

Βάλτε ομάδες παιδιών να μετρήσουν προσεκτικά την περιφέρεια και τη διάμετρο πολλών διαφορετικών κύκλων. Κάθε ομάδα μετρά διαφορετικούς κύκλους.

Μετρήστε την περιφέρεια και τη διάμετρο από κυκλικά αντικείμενα, όπως καπάκια από βάζα, σωλήνες, τενεκεδάκια και καλάθια αγρότινων. Για να μετρήσετε την περιφέρεια, τυλίξτε ένα σπάγκο γύρω από το αντικείμενο και έπειτα μετρήστε το μήκος του σπάγκου.

Επίσης, μετρήστε μεγάλους κύκλους που είναι σημειωμένοι σε δάπεδα γυμναστηρίων και σε παιδικές χαρές. Χρησιμοποιήστε ένα τροχό ή ένα σχοινί για να μετρήσετε την περιφέρεια.

Συγκεντρώστε τις μετρήσεις της περιφέρειας και της διαμέτρου από όλες τις ομάδες και βάλτε τα σε έναν πίνακα. Οι λόγοι της περιφέρειας προς τη διάμετρο θα πρέπει επίσης να υπολογισθούν για κάθε κύκλο. Θα πρέπει να γίνει ένα διάγραμμα με τα δεδομένα, όπου στον οριζόντιο άξονα θα αναπαριστώνται οι διαμέτροι και στον κάθετο οι περιφέρειες.

Οι περισσότεροι λόγοι θα πρέπει να βρίσκονται στην περιοχή του 3.1 ή 3.2. Το διάγραμμα θα πρέπει να μοιάζει με ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η κλίση της ευθείας θα πρέπει να είναι κοντά στο 3.1 (θυμηθείτε από το Κεφάλαιο 19 ότι τα γραφήματα ισοδύναμων λόγων είναι πάντοτε ευθείες γραμμές που διέρχονται από την αρχή των αξόνων). Ο ακριβής λόγος είναι ένας άρρητος αριθμός, γύρω στο 3,14159, και αναπαριστάται από το ελληνικό γράμμα π .

Το πιο σημαντικό στη Δραστηριότητα 21.10 είναι ότι τα παιδιά αναπτύσσουν μία πλήρη κατανόηση του π ως τον λόγο της περιφέρειας προς τη διάμετρο σε όλους τους κύκλους. Η ποσότητα π δεν είναι κάποιος περιεργός αριθμός που εμφανίζεται σε μαθηματικούς τύπους. Είναι ένας παγκόσμιος λόγος που συμβαίνει φυσιολογικά.



Καθώς τα παιδιά αρχίζουν να κάνουν περισσότερα από το να κατασκευάζουν με γεωμετρικά τετράγωνα (τάγκραμ, σχέδια με κύβους, σχέδια σε καμβά κτλ.), ο H/Y αρχίζει να προσφέρει ισχυρά εργαλεία για διερεύνηση.

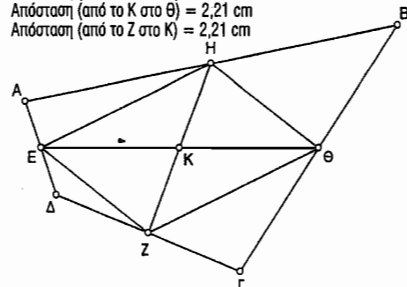
Λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας

Σε ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας, σημεία, γραμμές και γεωμετρικά σχήματα κατασκευάζονται εύκολα σε H/Y χρησιμοποιώντας μόνο το ποντίκι. Μόλις σχεδιαστούν τα γεωμετρικά αντικείμενα μπορούν να μετακινηθούν και να χρησιμοποιηθούν με άπειρους τρόπους. Αποστάσεις, μήκη, εμβαδά, γωνίες, κλίσεις και περιμέτροι μπορούν να μετρηθούν. Όσο αλλάζουν τα σχήματα, οι μετρήσεις αναπροσαρμόζονται αυτόματα.

Οι ευθείες σχεδιάζονται κάθετα ή παράλληλα σε άλλες ευθείες ή τμήματα. Οι γωνίες και τα ευθύγραμμα τμήματα μπορούν να σχεδιαστούν ίσα με άλλες ευθείες και ευθύγραμμα τμήματα. Ένα σημείο μπορεί να τοποθετηθεί στο μέσον ενός ευθύγραμμου τμήματος. Μπορεί να δημιουργηθεί σχήμα το οποίο να είναι ανάσχεση, περιστροφή ή μεγέθυνση ενός άλλου σχήματος. Το πιο σημαντικό πράγμα είναι πως όταν δημιουργείται ένα γεωμετρικό αντικείμενο με κάποια συγκεκριμένη σχέση προς ένα άλλο, αυτή η σχέση διατηρείται ανεξάρτητα από την μετακίνηση ή αλλαγή οποιουδήποτε αντικειμένου.

Τα πιο γνωστά προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας είναι τα *The Geometer's Sketchpad* (Key Curriculum Press), *Geometry Inventor* (Riverdeep), και *Cabri Geometry II* (Texas Instruments). Παρόλο που το καθένα λειτουργεί κάπως διαφορετικά, είναι αρκετά όμοια ώστε να μην χρειάζεται να τα περιγράψουμε ξεχωριστά. Αρχικά ήταν σχεδιασμένα για τα παιδιά του λυκείου, όμως όλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν

Απόσταση (από το K στο E) = 3,81 cm
 Απόσταση (από το H στο K) = 3,81 cm
 Απόσταση (από το K στο Θ) = 2,21 cm
 Απόσταση (από το Z στο K) = 2,21 cm



ΣΧΗΜΑ 21.19 Μία Sketchpad κατασκευή απεικονίζει μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα των τετραπλευρών.

με ωφέλιμο τρόπο και θα πρέπει να αρχίσουν να χρησιμοποιούνται στην τετάρτη τάξη.

Παραδείγματα Δυναμικής Γεωμετρίας

Για να εκτιμήσετε τις δυνατότητες (και τη διασκέδαση) του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, χρειάζεται πραγματικά να πειραματισθείτε με αυτό στον υπολογιστή. Εν τω μεταξύ, εδώ προσφέρεται ένα παράδειγμα, σε μία προσπάθεια να παρουσιασθεί ο τρόπος με τον οποίο λειτουργούν αυτά τα προγράμματα.

Στο Σχήμα 21.19, τα μέσα ενός ακανόνιστου τετραπλεύρου ABΓΔ έχουν ενωθεί. Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου που προκύπτει (ΕΖΗΘ) έχουν, επίσης, σχεδιαστεί και μετρηθεί. Άσχετα τον πώς σφύρονται στην οθόνη τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ακόμη και αν αναστρέφεται το τετράπλευρο, οι άλλες ευθείες θα διατηρήσουν τις ίδιες σχέσεις (ενώνοντας τα μέσα και τις διαγώνιους) και οι μετρήσεις θα αναπροσαρμοστούν αμέσως στην οθόνη.

Θυμηθείτε ότι στο επίπεδο 1, τα ανακείμενα της σκέψης είναι κλάσεις σχημάτων. Σε ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας, όταν σχεδιάζεται ένα τετράπλευρο παρατηρείται μόνο ένα σχήμα, όπως θα συνέβαινε στο χαρτί ή σε γεωμετρικό πλάνο. Αλλά τώρα το τετράπλευρο μπορεί να τενωθεί και να αλλάξει μορφή με άπειρους τρόπους. Στην πραγματικότητα τα παιδιά διερευνούν όχι μόνο το σχήμα αλλά έναν τεράστιο αριθμό παραδειγμάτων αυτής της κλάσης σχημάτων. Αν μία ιδιότητα δεν αλλάζει όταν αλλάζει το σχήμα, η ιδιότητα μπορεί να αποδοθεί στην ομάδα των σχημάτων παρά σε ένα οποιοδήποτε σχήμα.

Ένα άλλο παράδειγμα στο Σχήμα 21.20 δείχνει πώς το Sketchpad μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διερευνηθούν τα τετράπλευρα ξεκινώντας από τις διαγώνιους. Περιλαμβάνονται οι κατευθύνσεις για τη δημιουργία του σχεδίου και μπο-

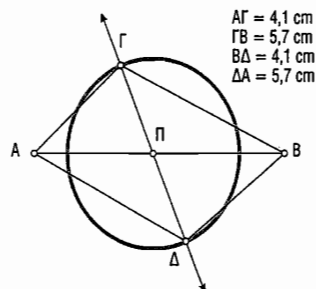
ρεί να γίνει πολύ απλά ακόμα και με ελάχιστη εμπειρία στο λογισμικό. Δημιουργώντας το σχέδιο με αυτόν τον τρόπο οι διαγώνιοι του ABΓΔ θα τέμνουν πάντα τη μία την άλλη όσο και να αλλάξει το σχέδιο. Σύροντας το σημείο Γ, το ABΓΔ μπορεί να γίνει παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος και τετράγωνο. Για κάθε ένα από αυτά τα σχήματα, μπορεί να καθοριστούν επιρόσθετες πληροφορίες για τις διαγώνιους κοιτώντας απλά τα σχήματα.

Τα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας μπορεί επίσης να είναι χρήσιμα για τη διερεύνηση των εννοιών της συμμετρίας και των σχηματισμών (γλίστρισμα, δύλωση και περιστροφή). Οι εκδόσεις αυτών των προγραμμάτων παρέχουν εξαιρετικές δραστηριότητες οι οποίες είναι κατάλληλες για τις διερευνήσεις στο επίπεδο 1. Πολλές δραστηριότητες περιλαμβάνονται στο λογισμικό και άλλες βρίσκονται σε συμπληρωματικές εκδόσεις.

Σχήματα και Ιδιότητες για τα Παιδιά στο Επίπεδο 2

Στο επίπεδο 2 η προσοχή μεταφέρεται από την απλή εξέταση των ιδιοτήτων σε διερευνήσεις που περιλαμβάνουν λογι-

Τετράπλευρο με διαγώνιους που τέμνουν η μία την άλλη.



Σχεδιάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB με μέσον το Π. Κατασκευάστε ένα κύκλο με κέντρο το Π που να περνά από το Γ. Κατασκευάστε μία γραμμή που να διέρχεται από το Γ και το Π και έπειτα κατασκευάστε το σημείο τομής Δ. Κατασκευάστε το ΑΓΒΔ και μετρήστε την κάθε πλευρά. Σύρετε το Γ. Τι διαφορετικά τετράπλευρα μπορείτε να κάνετε; Τι ισχύει για τις διαγώνιους του κάθε σχήματος που έχετε κάνει; Τι μπορείτε να ανακαλύψετε για τις διαγώνιους των σχημάτων που κάνετε;

ΣΧΗΜΑ 21.20 Με το The Geometer's Sketchpad τα παιδιά μπορούν να κατασκευάσουν δύο ευθύγραμμα τμήματα που θα τέμνουν πάντα το ένα το άλλο στο μέσο τους. Όταν οι άκρες τους ενώνονται το τετράπλευρο που προκύπτει θα ανήκει πάντα στην ίδια κλάση, άσχετα με το πώς κινούνται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ.

κή αιτιολόγηση. Καθώς τα παιδιά αναπτύσσουν την κατανόηση των γεωμετρικών ιδιοτήτων και τις προσαρτούν σε σημαντικές κατηγορίες σχημάτων, είναι σημαντικό να αρχίσουμε να ενθαρρύνουμε τις εικασίες και τη διερεύνηση άτυπων παραγωγικών επιχειρημάτων. Τα παιδιά θα πρέπει να αρχίσουν να προσπαθούν -ή τουλάχιστον να ακολουθούν- απλές αποδείξεις και να διερευνούν ιδέες που είναι άμεσα συνδεδεμένες με την άλγεβρα.

Ορισμοί και αποδείξεις

Για να κατανοήσετε πραγματικά τη διαφορά ανάμεσα σε αυτά τα δύο επίπεδα εξετάστε ξανά τη δραστηριότητα «Λίστα Ιδιοτήτων για τα Τετράπλευρα» (Δραστηριότητα 21.2), η οποία είναι μια δραστηριότητα του επιπέδου 1 και τις «Λίστες Ελάχιστων Ορισμών» (Δραστηριότητα 21.3), η οποία είναι δραστηριότητα επιπέδου 2 (ίσως να θέλετε να ξαναδείτε αυτές τις δραστηριότητες προτού συνεχίσετε το διάβασμα. Γυρίστε στις σελίδες 519-520).

Η εύρεση των ΛΕΟ (Λίστες Ελάχιστων Ορισμών) είναι η κύρια πρόκληση στη Δραστηριότητα 21.3. Το παραλληλόγραμμο, ο ρόμβος, το ορθογώνιο και το τετράγωνο, έχουν το καθένα τουλάχιστον τέσσερις ΛΕΟ. Μία από τις πιο ενδιαφέρουσες ΛΕΟ για κάθε σχήμα αποτελείται μονάχα από τις ιδιότητες των διαγωνίων τους. Για παράδειγμα, ένα τετράπλευρο με διαγώνιους που διχοτομούνται και είναι κάθετες (τέμνονται σε ορθή γωνία) είναι ρόμβος. Διάφορες ΛΕΟ έχουν μόνο μία ιδιότητα. Για παράδειγμα, ένα παραλληλόγραμμο είναι ένα τετράπλευρο με περιστροφική συμμετρία τουλάχιστον της τάξεως 2.

Σημειώστε ότι η δραστηριότητα ΛΕΟ αφορά περισσότερο τη λογική παρά την εξέταση των σχημάτων. Τα παιδιά ασχολούνται με τη γενική διαδικασία να αποφασίσουν «Αν καθορίσουμε μόνο αυτή τη λίστα ιδιοτήτων, αυτό θα μας εγγυηθεί το συγκεκριμένο σχήμα;». Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό είναι η ευκαιρία να συζητήσουμε τι συνιστά τον ορισμό. Στην πραγματικότητα οποιαδήποτε ΛΕΟ θα μπορούσε να είναι ο ορισμός του σχήματος. Οι ορισμοί που χρησιμοποιούμε συνήθως είναι ΛΕΟ που έχουν επιλεγεί πιθανότατα χάρη στην ευκολία με την οποία μπορούμε να τις κατανοήσουμε. Ένα τετράπλευρο με διαγώνιους που διχοτομούνται δεν φέρνει αμέσως στο μυαλό μας την εικόνα ενός παραλληλογράμμου, αν και είναι μία λίστα ορισμού των ιδιοτήτων. Θυμηθείτε, ότι, όταν τα παιδιά δημιουργήσαν τις δικές τους λίστες ιδιοτήτων, κανένας ορισμός δεν είχε δοθεί, μόνο μία συλλογή σχημάτων και μία λεξάντα. Θεωρητικά, τα παιδιά θα μπορούσαν να έχουν δημιουργήσει τις λίστες χωρίς να έχουν ακούσει ποτέ για αυτά τα σχήματα.

Η επόμενη δραστηριότητα είναι και αυτή μία καλή συνέχεια της δραστηριότητας «Λίστες Ιδιοτήτων», παρόλο

που δεν περιορίζεται στα τετράπλευρα και μπορεί να συμπεριλάβει και τρισδιάστατα σχήματα. Σημειώστε ξανά ότι εμπλέκεται η λογική.

Δραστηριότητα 21.11

Σωστό ή Λάθος;

Ετοιμάστε προτάσεις στην ακόλουθη μορφή: «Αν είναι _____, τότε είναι και _____», «Όλα τα _____ είναι _____». «Κάποια _____ είναι _____».

Εδώ προτείνονται ορισμένα μόνο παραδείγματα, αλλά υπάρχουν πολυάριθμες δυνατότητες.

- Αν είναι τετράγωνο, τότε είναι ρόμβος.
- Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια.
- Κάποια παραλληλόγραμμα είναι ορθογώνια.
- Όλα τα παραλληλόγραμμα έχουν ίσες πλευρές.
- Αν έχει ακριβώς δύο άξονες συμμετρίας, πρέπει να είναι τετράπλευρο.
- Αν είναι κύλινδρος, τότε είναι πρίσμα.
- Όλα τα πρίσματα έχουν ένα επίπεδο συμμετρίας.
- Όλες οι πυραμίδες έχουν τετράγωνα βάσεις.
- Αν ένα πρίσμα έχει επίπεδο συμμετρίας, τότε είναι ορθογώνιο πρίσμα.

Το αντικείμενο της δραστηριότητας είναι να αποφασίσετε αν αυτές οι προτάσεις είναι σωστές ή λάθος και να παρουσιάσετε ένα επιχείρημα για να υποστηρίξετε την επιλογή. Τέσσερις ή πέντε προτάσεις σωστό ή λάθος μπορούν να δημιουργήσουν ένα καλό μάθημα. Αφού γίνει κατανοητός αυτός ο τύπος ερωτήσεων, αφήστε τα παιδιά να προκαλέσουν τα άλλα παιδιά στην τάξη κάνοντας τις δικές τους λίστες με τις πέντε προτάσεις. Κάθε λίστα θα πρέπει να έχει τουλάχιστον μία σωστή πρόταση και μία λάθος πρόταση. Χρησιμοποιήστε τις λίστες των μαθητών σε διαδοχικά μαθήματα.

II Στρατηγικό και στοχεύοι

Χρησιμοποιήστε τη λίστα ιδιοτήτων για τα τετράγωνα και τα ορθογώνια για να αποδείξετε ότι «Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια». Σημειώστε ότι πρέπει να χρησιμοποιήσετε λογική συλλογιστική σκέψη για να κατανοήσετε αυτή την πρόταση. Η επιβολή της απλώς σε παιδιά που δεν είναι έτοιμα να αναπτύξουν αυτή τη σχέση δεν προσφέρει πολλά.

Μολονότι η λογική έχει αναμειχθεί και στις προηγούμενες δραστηριότητες, μπορεί να δυσκολεύετε να κατανοήσετε πώς παιδιά γυμνασίου μπορούν πράγματι να κάνουν αποδείξεις. Η ακόλουθη δραστηριότητα σχεδιάστηκε από τον Schoenfeld (1995) για να δείξει ότι τα παιδιά μπορούν καλύτερα να δημιουργήσουν αποδείξεις στη γεωμετρία πριν το Λύκειο.

Δραστηριότητα 21.12

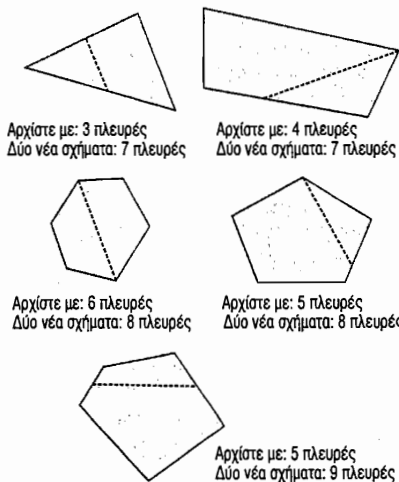
Δύο Πολύγωνα από Ένα

Θέστε το ακόλουθο πρόβλημα:

Ξεκινήστε με ένα κυρτό πολύγωνο με ένα δεδομένο αριθμό πλευρών. Ενώστε δύο σημεία στο πολύγωνο με ένα ευθύγραμμο τμήμα σχηματίζοντας δύο νέα πολύγωνα. Πόσες πλευρές έχουν μαζί τα δύο νέα πολύγωνα;

Δώστε λίγα παραδείγματα (βλέπε Σχήμα 21.21). Βάλτε τα παιδιά να εξερευνήσουν σχεδιάζοντας πολύγωνα και κόβοντάς τα. Ενθαρρύνετε τα να φτιάξουν έναν πίνακα που θα δείχνει τις πλευρές στο αρχικό και τις πλευρές του αποτελέσματος. Τα παιδιά θα πρέπει πρώτα να κάνουν εικασίες για το γενικό κανόνα. Όταν οι ομάδες θα νοιώθουν σίγουρες για την εικασία τους, θα πρέπει να προσπαθήσουν να εξηγήσουν γιατί η πρότασή τους είναι σωστή – αυτό σημαίνει, να αποδείξουν την εικασία τους.

Προφανώς, ο αριθμός των πλευρών που προκύπτουν εξαρτάται από το πού έγινε το κόψιμο. Εξαιρώντας τα τρίγωνα, υπάρχουν τρεις πιθανότητες. Για κάθε περίπτωση μπορεί να διατυπωθεί ένα σαφές επιχείρημα. Η κατάλληλη εικασία και απόδειξη αφήνονται σε εσάς, αλλά να είστε σίγουροι και σίγουρες ότι όταν τα παιδιά συνεργάζονται, μπορούν όντως να κάνουν αυτήν τη δραστηριότητα.



ΣΧΗΜΑ 21.21 Ξεκινήστε με ένα πολύγωνο και σχεδιάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα που να το διαιρεί σε δύο πολύγωνα. Πόσες πλευρές θα έχουν τα δύο νέα πολύγωνα;

Σημειώστε ότι σε αυτήν τη δραστηριότητα, όπως και σε άλλες που έχουμε διερευνήσει, οι προτάσεις που πρέπει να αποδειχθούν προέρχονται από τα παιδιά. Αν γράψετε ένα θεώρημα στον πίνακα και ζητήσετε από τα παιδιά να το αποδείξουν, τους έχετε ήδη πει ότι είναι σωστό. Αντίθετα, αν ένα παιδί κάνει μία πρόταση για μία γεωμετρική κατάσταση που διερευνά τη τάξη, μπορεί αυτή να γραφεί στον πίνακα με ένα ερωτηματικό ως μία «εικασία», μία πρόταση της οποίας η αλήθεια δεν έχει ακόμη καθοριστεί. Μπορείτε να ρωτήσετε, «Είναι σωστό; Πάντα; Μπορούμε να το αποδείξουμε; Μπορούμε να βρούμε ένα αντισυμβαλλόμενο;». Από τις συζητήσεις μπορούν να προκύψουν λογικά παραγωγικά επιχειρήματα.

Η Πυθαγόρεια Σχέση

Η Πυθαγόρεια σχέση είναι τόσο σημαντική, που αξίζει ιδιαίτερη προσοχή. Σε γεωμετρικούς όρους, αυτή η σχέση δείχνει ότι αν ένα τετράγωνο κατασκευαστεί σε κάθε πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου, τα εμβαδά των δύο μικρότερων τετραγώνων θα είναι μαζί ίσα με το εμβαδόν του τετραγώνου με τη μεγαλύτερη πλευρά, την υποτείνουσα. Για να ανακαλύψετε αυτήν τη σχέση, σκεφτείτε την ακόλουθη δραστηριότητα.

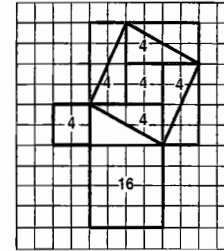
Δραστηριότητα 21.13

Η Πυθαγόρεια Σχέση (Το Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Βάλτε τα παιδιά να σχεδιάσουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο σε χαρτί με τετραγωνάκια πλευράς πέντε χιλιοστών. Αναθέστε στο κάθε παιδί ένα διαφορετικό τρίγωνο, με συγκεκριμένα τα μήκη των δύο καθέτων. Τα παιδιά πρέπει να σχεδιάσουν ένα τετράγωνο σε κάθε πλευρά και στην υποτείνουσα και να βρουν το εμβαδόν και των τριών τετραγώνων (για το τετράγωνο στην υποτείνουσα, το ακριβές εμβαδόν μπορεί να βρεθεί κάνοντας κάθε μία από τις πλευρές διαγώνιο ενός ορθογωνίου. Βλέπε Σχήμα 21.22). Φτιάξτε έναν πίνακα με τα δεδομένα των εμβαδών (Τετ. στην κάθετο 1, Τετ. στην κάθετο 2, Τετ. στην υποτ.) και ζητήστε από τα παιδιά να ψάξουν για μία σχέση ανάμεσα στα τετράγωνα.

Ως επέκταση της τελευταίας δραστηριότητας, τα παιδιά μπορούν να διερευνήσουν σχεδιάζοντας άλλα σχήματα στις καθέτους ορθογωνίων τριγώνων και υπολογίζοντας τα εμβαδά. Για παράδειγμα, να ζωγραφίσουν ημικύκλια ή ισοπλευρά τρίγωνα αντί για τετράγωνα. Τα εμβαδά οποιωνδήποτε κανονικών πολυγώνων, ζωγραφισμένων στις τρεις πλευρές ορθογωνίων τριγώνων, θα έχουν την ίδια σχέση.

Η δραστηριότητα 21.13 παρουσιάζει την Πυθαγόρεια σχέση. Τι λέτε για μία απόδειξη! Το Σχήμα 21.23 δείχνει δύο αποδείξεις που μπορούν να ακολουθήσουν τα παιδιά. Η πρώτη αποτελείται από δύο μόνο σχέδια. Είναι από το βιβλίο *Proofs without Words*, (Nelson, 1993). Μία αλγεβρική απόδει-



ΣΧΗΜΑ 21.22. Η Πυθαγόρεια Σχέση. Σημειώστε ότι αν σχεδιαστεί σε χαρτί με τετραγωνάκια, το εμβαδόν όλων των τετραγώνων καθορίζεται εύκολα. Εδώ $4 + 16 =$ εμβαδόν του τετραγώνου στην υποτείνουσα.

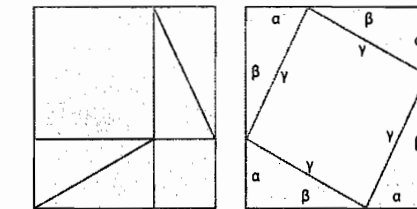
ξη παρατίθεται κάτω από τα σχέδια, βασισμένη στο δεύτερο τετράγωνο.

II Στρατιώ και στοκάζομα

Χρησιμοποιήστε τα σχέδια στο Σχήμα 21.23 για να δημιουργήσετε μία απόδειξη της Πυθαγόρειας σχέσης.



Το e-Standards περιέχει μία δυναμική απόδειξη χωρίς λέξεις που αξίζει να τη μοιραστείτε με τα παιδιά σας (Βοηθητικό Πρόγραμμα 6.5). Ακόμη, είναι μία καλή επανάληψη διότι απαιτεί γνώση του ότι τα παραλληλόγραμμα και τα ορθογώνια με την ίδια βάση και ύψος έχουν το ίδιο εμβαδόν (βλέπε Κεφάλαιο 20). ■



Το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου είναι $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Το ίδιο εμβαδόν είναι επίσης y^2 συν 4 φορές το εμβαδόν ενός

$$y^2 + 4 \left(\frac{1}{2} ab \right) = y^2 + 2ab$$

$$\text{Άρα, } y^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 \\ y^2 = a^2 + b^2$$

ΣΧΗΜΑ 21.23. Δύο αποδείξεις της Πυθαγόρειας σχέσης. Τα δύο τετράγωνα μαζί είναι μία «απόδειξη χωρίς λέξεις». Μπορείτε να προσθέσετε τις λέξεις; Η δεύτερη απόδειξη είναι μία αλγεβρική απόδειξη βασισμένη στο τετράγωνο που βρίσκεται στο δεξί σχήμα.

Ανακάλυψη Έναντι της Εξήγησης των Σχέσεων

Ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας όπως το *The Geometer's Sketchpad* επιτρέπει στα παιδιά να διερευνήσουν μία ολόκληρη ομάδα σχημάτων και να παρατηρήσουν ιδιότητες ή σχέσεις που μπορούν να αποδοθούν σε εκείνη την ομάδα. Στο επίπεδο 2, ωστόσο, αντικείμενο εστίασης είναι η συλλογιστική ή η παραγωγική σκέψη. Μπορούν αυτά τα προγράμματα υπολογιστών να βοηθήσουν τα παιδιά να αναπτύξουν παραγωγικά επιχειρήματα για να υποστηρίξουν τις σχέσεις που καταλήγουν να πιστεύουν μέσω επαγωγικής συλλογιστικής σκέψης; Σκεφτείτε την ακόλουθη κατάσταση.

Υποθέστε ότι έχετε βάλει τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας για να σχεδιάσουν ένα τρίγωνο, να μετρήσουν όλες τις γωνίες του και να τις προσθέσουν. Καθώς οι κορυφές του τριγώνου σύρονται, το άθροισμα των γωνιών παραμένει σταθερό στις 180 μοίρες. Τα παιδιά μπορούν να εικάσουν ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου θα είναι πάντοτε 180 μοίρες, και θα ήταν απόλυτα πεπεισμένα ότι η αλήθεια αυτής της εικασίας βασίζεται σε αυτήν την επαγωγική εμπειρία (διάφορες δραστηριότητες που δεν γίνονται σε Η/Υ μπορούν να οδηγήσουν στο ίδιο συμπέρασμα).

Όπως σημειώνει ο Michael de Villiers στο εξαιρετικό βιβλίο του *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad* (1999), «Η παρατήρηση ότι ο ήλιος ανατέλλει κάθε μέρα δεν εξηγεί γιατί αυτό είναι σωστό» (σ.24). Ο de Villiers τονίζει ότι η εμπειρία που οδηγεί σε μία εικασία ή αλήθεια, θα πρέπει επίσης να βοηθήσει τα παιδιά να αναπτύξουν μία βασική αιτία για το αποτέλεσμα. Στην περίπτωση των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου, η εμπειρία που περιγράφηκε αποτυγχάνει να εξηγήσει «γιατί είναι έτσι». Σκεφτείτε την ακόλουθη δραστηριότητα, που μπορεί να γίνει εύκολα με χαρτί και ψαλίδι ή αρκετά εντυπωσιακά με ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας.

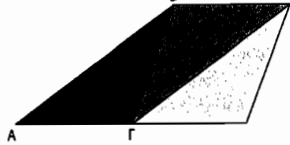
Δραστηριότητα 20.14

Άθροισμα Γωνιών σε ένα Τρίγωνο

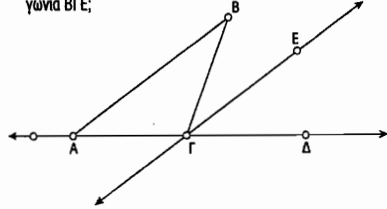
Βάλτε όλα τα παιδιά να κόψουν τρία ίσα τρίγωνα (να στοιβάξουν τρία φύλλα χαρτί και να κόψουν τρία σχήματα με μίας). Να τοποθετήσουν το ένα τρίγωνο σε μία ευθεία και το δεύτερο αμέσως μετά από αυτό προς την ίδια κατεύθυνση. Να τοποθετήσουν το τρίτο τρίγωνο στο χώρο ανάμεσα στα δύο τρίγωνα, όπως στο Σχήμα 21.24 (α). Βασισμένα σε αυτήν την εμπειρία, ποια εικασία μπορείτε να κάνετε για το άθροισμα των γωνιών σε ένα τρίγωνο;

Σε ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας, τα τρία τρίγωνα στο Σχέδιο 21.24(α) μπορούν να σχεδιαστούν, ξεκινώντας με ένα τρίγωνο, μεταφέροντάς το στα δεξιά του μήκους ΑΓ και εν συνεχεία περιστρέφοντάς το γύρω από το μέσον

- (α) Τρία ίσα τρίγωνα μπορούν να συνταχιστούν για να δείξουν ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών θα είναι πάντοτε μία ευθεία γωνία ή μια γωνία 180° .

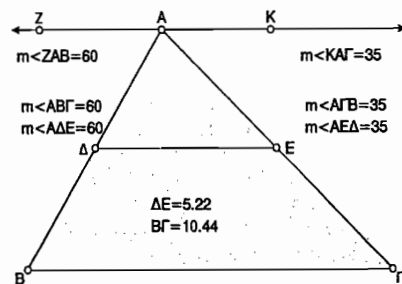


- (β) Σχεδιάστε την ΓΕ παράλληλη προς την ΑΒ. Γιατί η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με τη γωνία ΕΓΔ; Γιατί η γωνία ΑΒΓ είναι ίση με τη γωνία ΒΓΕ;



ΣΧΗΜΑ 21.24. Η παραγωγική, συλλογιστική σκέψη είναι απαραίτητη για να αποδείξετε σχέσεις που ορίζονται αληθινές από τις παρατηρήσεις.

της πλευράς ΒΓ. Όταν συρθούν οι κορυφές του αρχικού τριγώνου, τα άλλα τρίγωνα θα αλλάξουν αντίστοιχα αλλά θα παραμείνουν ίσα. Ακόμη δεν γνωρίζουμε γιατί το άθροισμα των γωνιών είναι πάντα μία ευθεία γωνία, αλλά αυτή η διερεύνηση επιτρέπει στα παιδιά να δουν, γιατί μπορεί να είναι έτσι. Στο σχήμα, υπάρχουν ευθείες παράλληλες σε κάθε πλευρά του αρχικού τριγώνου. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των γωνιών που σχηματίστηκαν από την τομή των παράλληλων



ΣΧΗΜΑ 21.25 Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου είναι πάντα παράλληλο προς τη βάση και έχει το μισό μήκος αυτής.

ευθειών με μία τέμνουσα ευθεία, είναι εύκολο να διαφωτιστεί με το ότι το άθροισμα των γωνιών θα είναι πάντοτε μία ευθεία [βλέπε Σχήμα 21.24 (β)], η απόδειξη αφήνεται σε εσάς].

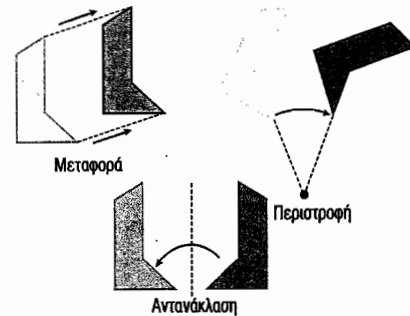
Το λογισμικό της δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να είναι πολύ ισχυρό έτσι ώστε να βοηθήσει τα παιδιά να παρατηρήσουν γεωμετρικές σχέσεις και να κάνουν εικασίες. Η αλήθεια των εικασιών συνήθως θα είναι προφανής. Στο επίπεδο 2, όμως, πρέπει να αρχίζουμε να ρωτάμε γιατί. Η παρακάτω δραστηριότητα απεικονίζει περαιτέρω αυτή την άποψη.

Δραστηριότητα 21.15

Το Ευθύγραμμο Τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου

Χρησιμοποιώντας ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας, σχεδιάστε ένα τρίγωνο και ονομάστε τις κορυφές Α, Β και Γ. Σχεδιάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα ενώνοντας τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ και ονομάστε το τμήμα ΔΕ, όπως στο Σχήμα 21.25. Μετρήστε το μήκος των τμημάτων ΔΕ και ΒΓ. Επίσης, μετρήστε τις γωνίες ΑΔΕ και ΑΒΓ. Σύρετε τα σημεία Α, Β και Γ. Τι εικασίες κάνετε για τις σχέσεις ανάμεσα στο τμήμα ΔΕ, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, και την πλευρά ΒΓ, τη βάση του τριγώνου;

Είναι σαφές ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου έχει το μισό μήκος της βάσης και είναι παράλληλο προς αυτήν, αλλά γιατί συμβαίνει αυτό; Τα παιδιά θα χρειαστούν λίγο περισσότερη καθοδήγηση, αλλά δεν πρέπει απαραίτητα να τους παρέχετε το επιχείρημα. Προτείνεται να σχεδιάσουν μία ευθεία από το Α, παράλληλη προς την ΒΓ. Καταγράφεται σε λίστα όλα τα ζεύγη γωνιών που γνωρίζουν ότι είναι ίσα. Γιατί είναι ίσα; Ση-



ΣΧΗΜΑ 21.26 Μεταφορά (γλίστρημα), αντανάκλαση (πίναγμα), (δίπλωση) περιστροφή (στροφή).

μειώστε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΔΕ. Γιατί είναι όμοια; Με στοιχεία σαν αυτά, πολλά παιδιά γυμνασίου μπορούν να αρχίσουν να διατυπώνουν λογικά επιχειρήματα σχετικά με το γιατί τα πράγματα που παρατηρούν ως αληθινά είναι πράγματα σωστά.

ΔΙΕΥΡΥΝΩΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΙΔΑ

Ένα διευρυμένο σχέδιο μαθήματος που βασίζεται στην Δραστηριότητα 21.15 είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα www.ablongman.com/vandewalle6e.

Μαθαίνοντας για τους Μετασχηματισμούς

Οι μετασχηματισμοί είναι οι αλλαγές στη θέση ή το μέγεθος ενός σχήματος. Οι κινήσεις που δεν αλλάζουν το μέγεθος ή το σχήμα του αντικείμενου ονομάζονται «άκαμπτες κινήσεις». Συνήθως τρεις τέτοιου είδους μετασχηματισμοί αποτελούν αντικείμενο συζήτησης: μεταφορές ή γλίστρημα, αντανακλάσεις ή διπλώσεις και περιστροφές ή στροφές. Προκαλεί ενδιαφέρον ότι η μελέτη της συμμετρίας περιλαμβάνεται, επίσης, στη μελέτη των μετασχηματισμών. Γνωρίζετε το γιατί;

Μετασχηματισμοί για τα Παιδιά στο Επίπεδο 0

Οι μετασχηματισμοί σε αυτό το επίπεδο περιλαμβάνουν μια εισαγωγή στις βασικές έννοιες των γλιστρημάτων, των διπλώσεων, και των περιστροφών καθώς και την ανάπτυξη της αξονικής συμμετρίας και συμμετρίας εκ περιστροφής.

Γλίστρημα, Διπλώσεις και Στροφές

Στο πρώτο στάδιο, οι όροι γλίστρημα, διπλώμα και στροφή είναι επαρκείς. Ο στόχος είναι να βοηθήσουν τα παιδιά στην αναγνώριση και χρήση αυτών των μετασχηματισμών. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα μη συμμετρικό σχήμα στο διαφανοσκόπιο προκειμένου να εισάγετε αυτούς τους όρους (βλέπε Σχήμα 21.26). Κατά πάσα πιθανότητα το σχολικό σας εγχειρίδιο θα χρησιμοποιεί το κέντρο μόνο ενός σχήματος ως σημείο περιστροφής και θα περιορίζει τους αντικατοπτρισμούς στις κάθετες και οριζόντιες ευθείες γραμμές που περνούν από το κέντρο. Αυτοί οι περιορισμοί δεν είναι απαραίτητοι και μπορεί μερικές φορές να είναι και παραπλανητικοί.

Ο Άνθρωπος σε Κίνηση που περιγράφεται στην ακόλουθη δραστηριότητα μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να εισάγει τα παιδιά στους όρους γλίστρημα, διπλώσεις και στροφές. Στη δραστηριότητα οι περιστροφές περιορίζονται σε στροφές της τάξης του $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ και των $\frac{3}{4}$ προς τη φορά του ρολογιού. Ο άξονας της περιστροφής θα είναι το κέντρο του σχήματος. Οι ανακλάσεις θα είναι διπλώσεις κατά μήκος

κάθετων ή οριζόντιων γραμμών. Αυτοί οι περιορισμοί υφίστανται για την απλούστευση της δραστηριότητας. Γενικώς, ο άξονας της περιστροφής μπορεί να είναι οπουδήποτε, μέσα και έξω από το σχήμα. Ακόμα και οι γραμμές του αντικατοπτρισμού μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε.

Δραστηριότητα 21.16

Άνθρωπος σε Κίνηση

Χρησιμοποιώντας τον Άνθρωπο σε Κίνηση από τα Blackline Masters κάντε αντίγραφα του πρώτου Ανθρώπου σε Κίνηση και μετά αντιγράψτε το είδωλό του στην πίσω πλευρά αυτών των αντιγράφων (βλέπε Σχήμα 21.27). Πειραματιστείτε πρώτα. Θέλετε η πίσω εικόνα να ταιριάζει με την μπροστινή, όταν την κρατάτε στο φως. Κόψτε το περισσευούμενο χαρτί προκειμένου να αφήσετε ένα τετράγωνο. Δώστε σε κάθε παιδί έναν Άνθρωπο σε Κίνηση.

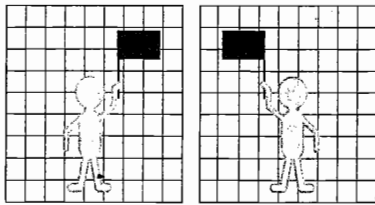
Δείξτε κάθε μία από τις πιθανές κινήσεις. Ένα γλίστρημα είναι απλώς αυτό. Το σχήμα ούτε περιστρέφεται ούτε αναποδογυρίζει. Δείξτε στροφές $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$. Δώστε έμφαση στο ότι μόνο στροφές προς τη φορά του ρολογιού θα χρησιμοποιηθούν σε αυτήν τη δραστηριότητα. Παρόμοια, δείξτε μία οριζόντια διπλώση (το πάνω μέρος πηγαίνει κάτω) και μία κάθετη (το αριστερό μέρος πηγαίνει δεξιά). Κάντε εξάσκηση βάζοντας το κάθε παιδί να αρχίσει με το δικό του Άνθρωπο σε Κίνηση με τον ίδιο προσανατολισμό. Καθώς ανακινώμετε μία από τις κινήσεις, τα παιδιά κάνουν τον Άνθρωπο σε Κίνηση να γλιστράει, να πινάζεται ψηλά ή να στρίβει αντίστοιχα.

Έπειτα δείξτε δύο Ανθρώπους σε κίνηση δίπλα-δίπλα με οποιονδήποτε προσανατολισμό. Το αντικείμενο της δραστηριότητας είναι να αποφασίσουν τα παιδιά ποια κίνηση ή ποιος συνδυασμός κινήσεων θα οδηγήσει τον Άνθρωπο στα προς τα αριστερά, ώστε να ταιριάζει με τον Άνθρωπο στα δεξιά. Τα παιδιά χρησιμοποιούν το δικό τους Άνθρωπο για να βρουν τη λύση. Ελέγξτε τις λύσεις που σας δίνουν. Εάν οι δύο Άνθρωποι βρίσκονται στην ίδια θέση, τότε έχετε ένα γλίστρημα.

Σταμάτω και σκουάροι

Αρχίστε με τον Άνθρωπο σε Κίνηση στην αριστερή θέση όπως φαίνεται στο Σχήμα 21.27. Τώρα τοποθετήστε ένα δεύτερο Άνθρωπο σε Κίνηση δίπλα στον πρώτο. Θα χρειαστεί μία κίνηση ή περισσότερες από μία κινήσεις (μετασχηματισμούς) για να πάτε από τον πρώτο στο δεύτερο Άνθρωπο; Μπορείτε να περιγράψετε όλες τις θέσεις που απαιτούν περισσότερες από μία κινήσεις; Υπάρχουν θέσεις που απαιτούν περισσότερες από μία κινήσεις;

Δραστηριότητα 21.17



ΣΧΗΜΑ 21.27 Ο Άνθρωπος σε Κίνηση εκτυπώνεται, ο ένας πίσω από τον άλλον. Χρησιμοποιείται για να δείξει γλιστρήματα, διπλώσεις και στροφές (βλέπε Blackline Masters).

Στην αρχή τα παιδιά θα μπερδευτούν όταν δεν μπορούν να φέρουν τον Άνθρωπο εν Κίνηση τους στη νέα θέση με μία κίνηση. Αυτό είναι κάτι που δημιουργεί ένα σημαντικό πρόβλημα. Μη βιαστείτε να προτείνετε ότι μπορεί να χρειαστούν δύο κινήσεις. Αν τα κάθετα τινάγματα σε κάθε μια από τις δι-αγώνιες προστεθούν στις κινήσεις κατά μήκος των κάθετων και οριζόντιων αναγμάτων, ο Άνθρωπος σε Κίνηση μπορεί να πάρει οποιαδήποτε νέα θέση με μία μόνο κίνηση. Αυτό δίνει μια πρόκληση στα παιδιά. Δύο παιδιά ξεκινούν με τον Άνθρωπο σε Κίνηση τους στην ίδια θέση. Το ένα παιδί τότε αλλάζει το δικό του Άνθρωπο και προκαλεί το άλλο παιδί να πει ποι-α κίνηση απαιτείται για να ταιριάξουν οι δύο Άνθρωποι. Έ-πειτα εξετάζεται η λύση τους και αντιστρέφονται οι ρόλοι.

Αξονική Συμμετρία και Συμμετρία εκ Περιστροφής

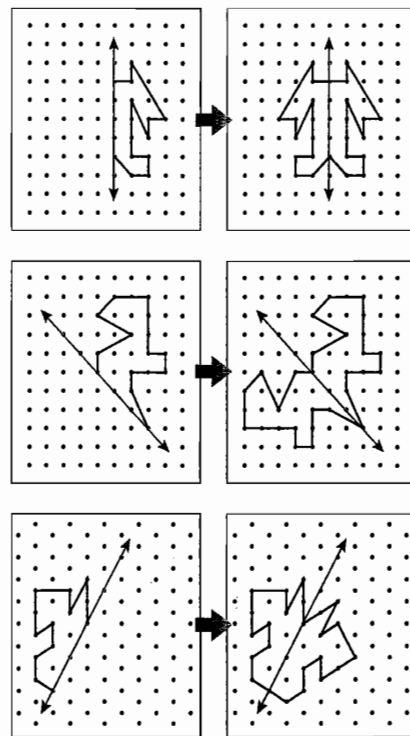
Αν ένα σχήμα μπορεί να διπλωθεί σε μία γραμμή έτσι, ώστε τα δύο μισά να ταιριάξουν, τότε λέγεται ότι έχουν γραμμική συμμετρία (ή συμμετρία του καθρέφτη). Σημειώστε ότι η δι-πλωμένη γραμμή είναι στην πραγματικότητα μία γραμμή αντανάκλασης – το μέρος του σχήματος που βρίσκεται στη μία πλευρά αντανάκλαται στην άλλη. Αυτή είναι η σύνδεση με-ταξύ αξονικής συμμετρίας και μετασχηματισμών.

Ένας τρόπος για να εξηγήσετε την αξονική συμμετρία στα παιδιά, είναι να τους δείξετε παραδείγματα και αντιπα-ραδείγματα, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση όλα/κανένα ό-πως στο Σχήμα 21.17 στη σελίδα 535. Μία άλλη πιθανότητα είναι να βάλετε τα παιδιά να διπλώσουν ένα φύλλο χαρτί στη μέση και να κόψουν ένα σχήμα δικής τους επιλογής. Ό-ταν ανοίξουν το χαρτί, η διπλωμένη γραμμή θα είναι ένας άξονας συμμετρίας. Ένας τρίτος τρόπος είναι να χρησιμοποιή-σετε καθρέφτες. Όταν τοποθετείτε έναν καθρέφτη σε μία ει-κόνα ή σε ένα σχέδιο έτσι ώστε ο καθρέφτης να είναι κάθετος στο τραπέζι, βλέπετε το συμμετρικό του σχήματος, όταν κοι-τάξετε στον καθρέφτη.

Σας παρουσιάζουμε μία δραστηριότητα με αξονική συμ-μετρία.

Συμμετρία στον Καθρέφτη Σχεδίων Κύβων

Τα παιδιά χρειάζονται μία λευκή σελίδα χαρτί με μία ευθεία γραμμή στο μέσον. Χρησιμοποιώντας έξι με ο-κτώ σχέδια κύβων, κάνουν ένα σχέδιο, έτσι ώστε να είναι ολόκληρο στη μία πλευρά της γραμμής, και κατά κάποιον τρόπο να την αγγίζει. Η δραστηριότητα έχει ως αντικείμενο τη δημιουργία του ειδώλου του σχεδί-ου τους στον καθρέφτη στην άλλη πλευρά της γραμ-μής. Όταν τελειώσουν, χρησιμοποιούν έναν καθρέφτη για να ελέγξουν την εργασία τους. Τοποθετούν τον κα-θρέφτη στη γραμμή και τον κοιτάζουν από την πλευ-ρά του αρχικού σχεδίου. Με τον καθρέφτη σε αυτήν τη θέση, θα πρέπει να δουν ακριβώς την ίδια εικόνα που βλέπουν όταν σκώσουν τον καθρέφτη. Μπορεί-τε, ακόμη, να τους προκαλέσετε να κάνουν σχέδια με περισσότερους άξονες συμμετρίας.



ΣΧΗΜΑ 21.28 Εξερευνώντας συμμετρίες σε καμβάδες με κουκκίδες.

Η κατασκευή συμμετρικών σχεδίων κύβων τείνει να εί-ναι ευκολότερη, όταν η γραμμή «δεχτεί» προς το παιδί, πράγμα που συμβαίνει, όταν υπάρχουν μία αριστερή και μία δεξιά πλευρά. Με τη γραμμή τοποθετημένη οριζόντια ή δια-γώνια, η δραστηριότητα είναι δυσκολότερη.

Η ίδια δραστηριότητα μπορεί να γίνει με ένα γεωμετρικό πίνακο. Πρώτα, τεντώστε μία δέσμη κάτω από το κέντρο ή α-πό γωνία σε γωνία. Κάντε ένα σχέδιο στη μία πλευρά της γραμμής και το ειδώλο του στην άλλη. Ελέγξτε με έναν καθρέ-φτη. Αυτό μπορεί, επίσης, να γίνει είτε σε ισομετρικούς είτε σε ορθογώνιους διάστικτους καμβάδες, όπως φαίνεται στο Σχή-μα 21.28.

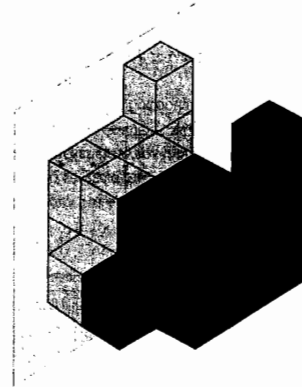
Μία επίπεδη συμμετρία σε τρεις διαστάσεις είναι ανά-λογη με τη γραμμική συμμετρία σε δύο διαστάσεις. Το Σχή-μα 21.29 παρουσιάζει ένα σχήμα που δημιουργήθηκε με κύβους και έχει επίπεδη συμμετρία.

Δραστηριότητα 21.18

Κτίσματα με Επίπεδη Συμμετρία

Χρησιμοποιώντας κύβους, κατασκευάστε ένα κτίσμα που να έχει επίπεδη συμμετρία. Αν το επίπεδο αυτής της συμμετρίας είναι ανάμεσα στους κύβους, κόψτε το σχήμα διαχωρίζοντας το κτίσμα σε δύο συμμετρικά μέρη. Προσπαθήστε να κατασκευάσετε κτίσματα με δύο ή τρία επίπεδα συμμετρίας. Κατασκευάστε διάφορα πρίσματα. Μη ξεχνάτε ότι ένα επίπεδο μπορεί να εί-ναι διαγώνιο στους κύβους.

Ένα σχήμα έχει συμμετρία εκ περιστροφής, αν μπορεί να περιστραφεί γύρω από ένα σημείο και να καταλήξει σε μία θέση που να ταιριάζει επακριβώς με εκείνη από την οποία



ΣΧΗΜΑ 21.29 Ένα κτίσμα με κύβους με επίπεδη συμμετρία.



ΣΧΗΜΑ 21.30 Αυτό το παραλληλόγραμμο ταιριάζει στο κουτί με δύο τρόπους χωρίς να αναποδογυριστεί. Για αυτόν το λόγο, έχει συμμε-τρία εκ περιστροφής της τάξεως 2.

ξεκίνησε. Ένα τετράγωνο έχει συμμετρία εκ περιστροφής ό-πως έχει και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Ένας καλός τρόπος για να κατανοήσετε τη συμμετρία εκ περιστροφής είναι να πάρετε ένα σχήμα με συμμετρία εκ περιστροφής, λόγω χάρη ένα τετράγωνο, και να το αναγρά-ψετε σε ένα κομμάτι χαρτί. Ονομάστε αυτήν την αναγραφή το «κουτί» του σχήματος. Η τάξη της συμμετρίας εκ περιστροφής θα είναι ο αριθμός των τρόπων, με τους οποίους ένα σχήμα μπο-ρεί να ταιριάζει στο κουτί του χωρίς να το αναστρέψει. Ένα τετράγωνο έχει συμμετρία εκ περιστροφής της τάξεως 4, ενώ ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει συμμετρία της τάξεως 3. Το πα-ραλληλόγραμμο στο Σχήμα 21.30 έχει περιστροφική συμμετρία της τάξεως 2. Κάποια βιβλία θα αποκαλούσαν τη συμμετρία της τάξεως 2 «συμμετρία 180 μοιρών». Οι μοίρες αναφέρονται στη μικρότερη γωνία περιστροφής που απαιτείται προτού το σχήμα αναστραφεί ή ταιριάζει μέσα στο κουτί. Ένα τετράγω-νο έχει συμμετρία εκ περιστροφής 90 μοιρών.

Δραστηριότητα 21.19

Συμμετρία εκ Περιστροφής σε Καμβάδες με Τετραγωνάκια

Βάλτε τα παιδιά να κατασκευάσουν σχέδια κύβων, με διαφορετικές συμμετρίες εκ περιστροφής. Θα πρέπει να μπορούν να σχεδιάσουν σχήματα με περιστροφική συμ-μετρία τάξεως 2, 3, 4, 6 ή 12. Ποιο από τα σχέδια έχει συμμετρία εκ περιστροφής και στον καθρέφτη;

Η συμμετρία εκ περιστροφής στο επίπεδο (αναφέρεται επίσης ως συμμετρία ως προς σημείο) έχει ένα ανάλογο αντί-γραφο στις τρεις διαστάσεις. Ενώ το σχήμα σε ένα επίπεδο περιστρέφεται γύρω από ένα σημείο, ένα τρισδιάστατο σχή-μα περιστρέφεται γύρω από μία ευθεία. Αυτή η γραμμή ονο-μάζεται άξονας συμμετρίας. Καθώς ένα στερεό στρέφεται γύρω από έναν άξονα συμμετρίας, θα κρατήσει την ίδια θέ-ση στο χώρο (το «κουτί» του), αλλά σε διαφορετικές κατευ-θύνσεις. Ένα στερεό μπορεί να έχει περισσότερους από έναν άξονες συμμετρίας. Για κάθε άξονα συμμετρίας υπάρχει μία αντίστοιχη σειρά συμμετρίας εκ περιστροφής. Μία κανονική τετράγωνη πυραμίδα έχει μόνο έναν άξονα συμμετρίας, που διαπερνά την κορυφή της και το κέντρο του τετραγώνου της βάσης. Ένας κύβος, αναθέτως, έχει συνολικά 13 άξονες συμ-

μετριάς: τρεις (των απέναντι εδρών) της τάξης 4, τέσσερις (των διαγωνίων των αντίθετων κορυφών) της τάξης 3 και έξι (των μέσων των διαγωνίων των αντίθετων ακμών) της τάξης 2.

Δραστηριότητα 21.20

Βρείτε τους Άξονες Περιστροφής

Δώστε στα παιδιά ένα στερεό σχήμα που έχει έναν ή περισσότερους άξονες συμμετρίας εκ περιστροφής. Χρωμάτιστε ή ορίστε κάθε έδρα του στερεού για να τους βοηθήσετε να διατηρήσουν τα σημείδια. Αντικείμενο της δραστηριότητας είναι να βρουν όλους τους άξονες της συμμετρίας εκ περιστροφής (άξονες περιστροφής) και καθορίστε την τάξη της συμμετρίας εκ περιστροφής για το καθένα. Προτείνεται τους να χρησιμοποιήσουν ένα δάχτυλο από κάθε χέρι για να κρατήσουν το στερεό σχήμα στα δύο σημεία από τα οποία περνά ο άξονας περιστροφής. Ένα παιδί από την ίδια ομάδα μπορεί τότε να περιστρέψει αργά το στερεό και τα δύο μαζί μπορούν να αποφασίσουν, πότε το στερεό βρίσκεται ξανά «μέσα στο κουτί του» -αυτό συμβαίνει, όταν επανέρχεται στο χώρο που ήταν αρχικά (βλέπε Σχήμα 21.31).

Μετασχηματισμοί για τα Παιδιά του Επιπέδου 1

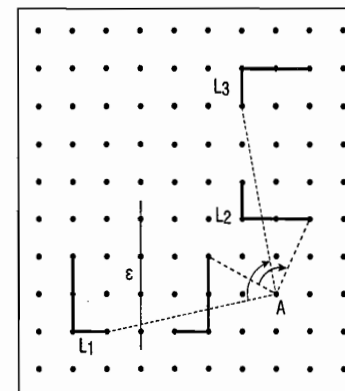
Μέσα στο πλαίσιο των μετασχηματισμών τα παιδιά που νικούν προς τη συλλογιστική σκέψη του επιπέδου 1, μπορούν να αρχίσουν να αναλύουν τους μετασχηματισμούς με περισσότερες λεπτομέρειες και να τους εφαρμόζουν σε πράγματα που μπορούν να δουν. Σε αυτό το επίπεδο δύο τύποι δραστηριοτήτων φαίνονται κατάλληλοι: οι συνθέσεις των με-

τασχηματισμών και η χρήση των μετασχηματισμών για τη δημιουργία ψηφιδωτών.

Συνθέσεις Μετασχηματισμών

Ενός μετασχηματισμού μπορεί να έπεται ένας άλλος. Για παράδειγμα, ένα σχήμα μπορεί να αντικατοπτριστεί πάνω από μία γραμμή και έπειτα αυτό το σχήμα μπορεί να περιστραφεί γύρω από ένα σημείο. Ο συνδυασμός δύο ή περισσότερων μετασχηματισμών καλείται σύνθεση.

Βάλτε τα παιδιά να πειραματισθούν με τις συνθέσεις δύο ή ακόμη και τριών μετασχηματισμών, χρησιμοποιώντας ένα απλό σχήμα πάνω σε έναν ορθογώνιο καμβά με κουκκίδες. Για παράδειγμα, βάλτε τα να σχεδιάσουν το σχήμα L πάνω σε ένα καμβά με κουκκίδες και ονομάστε το L₁ (σφραγείτε στο Σχήμα 21.32). Σχεδιάστε τον αντικατοπτρισμό του μέσω μίας ευθείας και ύστερα περιστρέψτε το είδωλο με στροφή 1/4 προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού γύρω από ένα σημείο, έξω από το σχήμα. Ονομάστε αυτήν την εικόνα L₂, την εικόνα μίας σύνθεσης ενός αντικατοπτρισμού που ακολουθείται από μία περιστροφή. Σημειώστε ότι αν το L₁ έχει κάνει στροφή 1/4 (45 μοιρών) προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού γύρω από το ίδιο σημείο που χρησιμοποιήθηκε προηγούμενα στο L₃, υπάρχει τότε μία σχέση ανάμεσα στο L₁ και το L₂. Συνεχίστε την εξερεύνηση διαφορετικών συνδυασμών μετασχηματισμών. Μην ξεχνάτε να συμπεριλάβετε μεταφορές (γλιστρήματα) στις συνθέσεις. Οι συνθέσεις δεν είναι απαραίτητο να περιλαμβάνουν διαφορετικούς τύπους μετασχηματισμών. Για παράδειγμα, ένας αντικατοπτρισμός μπορεί να ακολουθηθεί από έναν άλλο αντικατοπτρισμό. Όταν τα παιδιά σας κατανοήσουν τις συνθέσεις των μετασχηματισμών πάνω σε έναν καμβά, προκαλέστε τους με την επόμενη δραστηριότητα.



ΣΧΗΜΑ 21.32 Το L₁ αντανakάται κατά μήκος της ευθείας ε και κάνει στροφή 1/4 γύρω από το σημείο A καταλήγοντας στο L₂. Το L₁ έκανε στροφή 1/4 και γύρω από το σημείο A. Πώς σχετίζεται το L₂ με το L₃; Αυτό θα συμβαίνει πάντοτε;

Δραστηριότητα 21.21

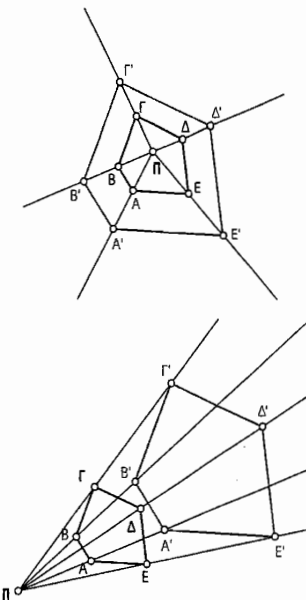
Μυστηριώδεις Μετασχηματισμοί

Ζωγραφίστε ένα μικρό σχέδιο σχήματος L κοντά σε μία γωνία του ορθογώνιου ισομετρικού καμβά. Σε αυτήν τη σελίδα, τα παιδιά ζωγραφίζουν ένα ίσο σχέδιο σχήματος L κάπου στο κέντρο της σελίδας. Το δεύτερο L μπορεί να διπλωθεί ή να στρίψει προς οποιοδήποτε κατεύθυνση επιθυμούν. Έπειτα, τα παιδιά ανταλλάσσουν τα χαρτά τους με κάποιο άλλο παιδί στην τάξη. Σκοπός της δραστηριότητας είναι να βρουν κάποιον συνδυασμό γλιστρημάτων, διπλώσεων και στροφών 1/4 ή 1/2, που θα πάει το σχήμα που βρίσκεται στη γωνία πάνω στο σχήμα που σχεδίασαν τα παιδιά.

Αυτή είναι μία απαιτητική δραστηριότητα. Για να βοηθήσετε τα παιδιά, ρωτήστε αν το L έχει διπλωθεί ή όχι. Εάν έχει διπλωθεί, τότε θα πρέπει να υπάρχουν ένας ή τρεις αντανakάσεις. Άσχετα με το προς τα πού είναι προσανατολισμένα τα σχήματα, μπορεί πάντοτε να γίνει με τρεις ή λιγότερους μετασχηματισμούς.



Στα e-Standards του NCTM, το Understanding Congruence, Similarity, and Symmetry (Βοηθητικό Πρόγραμμα 6.4) είναι ένα από τα καλύτερα παραδείγματα ενός απλού, πολύτιμου ωστόσο, βοηθητικού προγράμματος αλληλεπίδρασης. Στο πρώτο μέρος, τα παιδιά αναπτύσσουν μια κατανόηση και των τριών «άκαμπτων κινήσεων». Στο δεύτερο μέρος, ολοκληρώνεται ένας



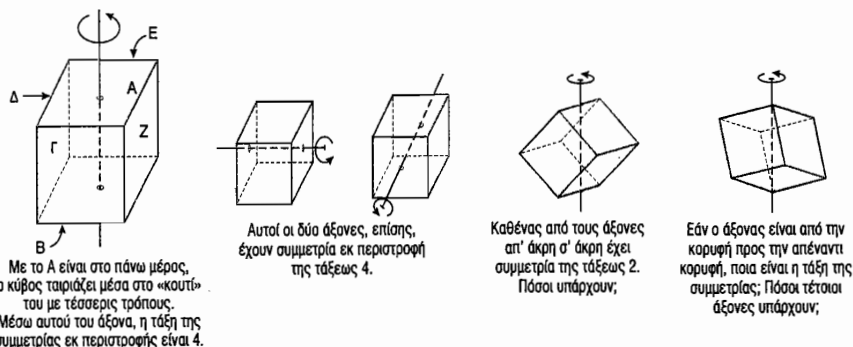
ΣΧΗΜΑ 21.33 Εκινήστε με το σχήμα ABΓΔΕ και τοποθετήστε το σημείο Π οπουδήποτε. Τραβήξτε ευθείες από το Π προς κάθε κορυφή. Τοποθετήστε το σημείο Α' δύο φορές πιο μακριά από το Π από ό, τι το Α απέχει από το Π (παράγοντας της κλίμακας 2). Κάντε το ίδιο και στα δύο σχήματα και οι εικόνες θα είναι ίσες.

μετασχηματισμός και το παιδί χρησιμοποιεί μια διαδικασία «μαντεύω και ελέγχω» για να καθορίσει ακριβώς ποιος μετασχηματισμός έγινε. Στα δύο τελευταία μέρη, τα παιδιά μπορούν να διερευνήσουν συνθέσεις αντανakάσεων και μετά άλλες συνθέσεις μέχρι τριών μετασχηματισμών. Σας συνιστούμε ανεπιφύλακτα αυτό το βοηθητικό πρόγραμμα.

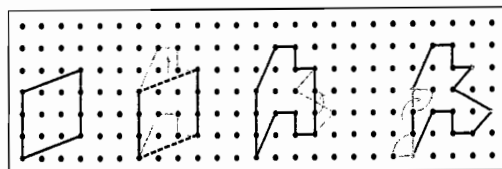
Μια άλλη έντονη απεικόνιση των μετασχηματισμών μπορεί να βρεθεί στα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας. Και αυτά τα προγράμματα σας επιτρέπουν επίσης να δημιουργήσετε συνθέσεις μετασχηματισμών. Τα παιδιά κατά πάσα πιθανότητα θα χρειαστούν σημαντική καθοδήγηση για να δημιουργήσουν συνθέσεις. ■

Όμοια Σχήματα και Αναλογική Συλλογιστική Σκέψη

Στο Κεφάλαιο 19 για την αναλογική συλλογιστική σκέψη, είδαμε έναν πρώτο, καλό ορισμό των όμοιων σχημάτων ως σχήματα που «μοιάζουν αλλά είναι διαφορετικού μεγέθους» (βλέπε Δραστηριότητα 19.3, σελ. 456). Ακριβέστερα, δύο σχήματα είναι όμοια, αν όλες οι αντίστοιχες γωνίες τους είναι ί-

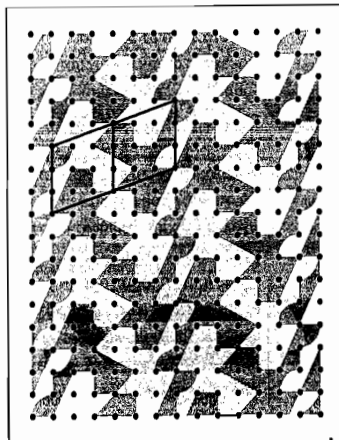


ΣΧΗΜΑ 21.31 Περιστροφές ενός κύβου.



- 1 Ξεκινάτε με ένα απλό σχήμα
- 2 Σχεδιάστε την ίδια καμπύλη σε δύο απέναντι πλευρές. Αυτή η ψηφίδα θα συσσωρευτεί σε στήλες.
- 3 Περιοτρίψτε μία καμπύλη στο μέσον της μιας πλευράς. Χρησιμοποιήστε αυτήν την ψηφίδα για ψηφιδωτά (κάτω). Μία στήλη αυτής της
- 4 Περιοτρίψτε μια καμπύλη στο μέσον της άλλης πλευράς. Χρησιμοποιήστε αυτήν την ψηφίδα για ψηφιδωτά (κάτω). Μία στήλη αυτής της

ψηφίδας θα ταίριαζε με μία όμοια στήλη που θα έχει περιστραφεί κατά μία ολόκληρη στροφή. Βρείτε αυτές τις περιστροφείς στήλες στο παρακάτω ψηφιδωτό.



(α)

ΣΧΗΜΑ 21.34 (α) Ένας από τους πολλούς τρόπους για να δημιουργήσετε ένα ψηφιδωτό τύπου Escher. (β) Παραδείγματα ημι-κανονικών ψηφιδωτών.

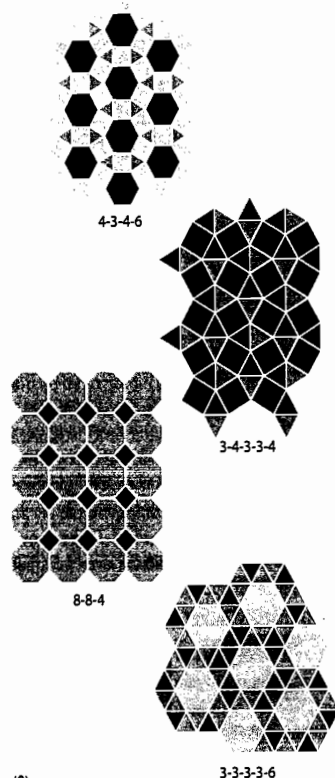
σες και οι αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες. Άλλες δραστηριότητες αναλογικής συλλογιστικής σκέψης είναι, επίσης, καλές συνδέσεις με τη γεωμετρία. Οι Δραστηριότητες 19.9, 19.10, και 19.11 περιέχουν σχέδια με κλίμακα και αναλογικές σχέσεις σε τρισδιάστατα σχήματα που είναι όμοια.

Η *μεγέθυνση* είναι ένας μη άκαμπτος μετασχηματισμός που παράγει όμοια σχήματα. Το Σχήμα 21.33 παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο ένα δεδομένο σχήμα μπορεί να μεγενθυθεί προκειμένου να δημιουργήσει μεγαλύτερα ή μικρότερα σχήματα. Εάν διαφορετικές ομάδες μεγενθύνσεων το ίδιο σχήμα χρησιμοποιώντας την ίδια κλίμακα, θα διαπισώσουν ότι τα σχήματα που προκύπτουν είναι όλα ίσα, ακόμη και αν κάθε ομάδα χρησιμοποιεί διαφορετικά σημεία μεγέθυνσης. Το λογισμικό

δυναμικής γεωμετρίας καθιστά τα αποτελέσματα της άσκησης αρκετά εντυπωσιακά. Το λογισμικό επιτρέπει στους παράγοντες της κλίμακας να έχουν οποιαδήποτε τιμή. Μόλις γίνει η μεγέθυνση, το σημείο μεγέθυνσης μπορεί να συρθεί γύρω στην οθόνη και το μέγεθος και το σχήμα της εικόνας να μείνουν ξεκάθαρα αμετάβλητα. Παράγοντες της κλίμακας μικρότεροι του 1 παράγουν μικρότερα σχήματα.

Επανεξέταση των Ψηφιδωτών

Είτε χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς είτε συνδυάζοντας συμβατά πολύγωνα, τα παιδιά στο επίπεδο 1 μπορούν να δημιουργήσουν ψηφιδωτά τα οποία να είναι καλλιτεχνικά και αρκετά πολύπλοκα.



(β)

Ο Ολλανδός καλλιτέχνης M. C. Escher είναι πολύ γνωστός για τη δουλειά του με τα ψηφιδωτά, όπου τα πλακίδια που χρησιμοποιούνται είναι ιδιαίτερα πολύπλοκα και συχνά παίρνουν το σχήμα πραγμάτων όπως πουλιά, αλόγα, αγγέλους ή ασύρρες. Ο Escher πήρε ένα απλό σχήμα όπως ένα τρίγωνο, ένα παραλληλόγραμμο, ένα εξάγωνο και πραγματοποίησε μετασχηματισμούς στις πλευρές. Για παράδειγμα, μία καμπύλη σχεδιασμένη κατά μήκος μιας πλευράς, μπορεί να μεταφερθεί (να γλιστρήσει) στην αντίθετη πλευρά. Μια άλλη ιδέα ήταν να σχεδιάσει μία καμπύλη από το μέσο μιας πλευράς στο σημείο που ενώνεται με την κορυφή. Αυτή η καμπύλη περιστρεφόταν μετά μέχρι το μέσο για να σχηματίσει μία εντελώς νέα πλευρά στο πλακίδιο. Αυτές οι δύο ιδέες παρουσιάζονται στο (α) μέρος του Σχήματος 21.34. Χρησιμοποιείται χαρτί με κουκκίδες για να σας βοηθήσει να σχεδιάσετε τις γραμμές. Τα ψηφιδωτά τύπου Escher, όπως ονομάζονται πλέον αυτά, είναι πολύ δημοφιλείς εργασίες για τα παιδιά από την πέμπτη τάξη και πάνω. Μόλις έχει σχεδιαστεί ένα πλακίδιο, μπορεί να κοπεί από δύο διαφορετικά χρώματα χαρτονιού αντί να ζωγραφιστεί το ψηφιδωτό σε χαρτί με κουκκίδες.

Ένα κανονικό ψηφιδωτό γίνεται από ένα και μόνο πλακίδιο που είναι κανονικό πολύγωνο (όλες οι πλευρές και οι γωνίες του είναι ίσες). Κάθε κορυφή ενός κανονικού ψηφιδωτού έχει τον ίδιο αριθμό πλακιδίων που ενώνονται σε εκείνο το σημείο. Ένα ταμπίλο για σκάκι είναι ένα απλό παράδειγμα ενός κανονικού ψηφιδωτού. Ένα ημι-κανονικό ψηφιδωτό γίνεται από δύο ή περισσότερα πλακίδια, κάθε ένα από τα οποία είναι ένα κανονικό πολύγωνο. Σε κάθε κορυφή ενός ημι-κανονικού ψηφιδωτού, ενώνεται η ίδια συλλογή κανονικών πολυγώνων με την ίδια σειρά. Μια κορυφή (και επομένως, ολόκληρο το ημι-κανονικό ψηφιδωτό) μπορεί να περιγραφεί από τη σειρά των σχημάτων που ενώνονται σε αυτήν. Κάτω από κάθε παράδειγμα σε αυτά τα ψηφιδωτά στο μέρος (β) του Σχήματος 21.34, δίνεται ο αριθμός των κορυφών. Τα παιδιά μπορούν να βρουν τι πολύγωνα είναι δυνατόν να σχηματιστούν σε μία κορυφή και να σχεδιάσουν τα δικά τους ημι-κανονικά ψηφιδωτά.

Ψηφιδωτά σαν και αυτά είναι πολύ προσφιλή στους δασκάλους από την τρίτη τάξη και πάνω. Πλήθος εξαιρετικών βιβλιογραφικών πηγών μπορεί να βρεθεί σε καταλόγους όπως ο *ETA Cuisine*.

Μετασχηματισμοί για τα Παιδιά στο Επίπεδο 2

Η ακόλουθη δραστηριότητα αποτελεί μία πρόκληση για τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν την κατανόησή τους για τις συμμετρίες και τους μετασχηματισμούς έτσι ώστε να μπορέσουν να εδραιώσουν μια ενδιαφέρουσα σχέση ανάμεσα σε αυτές τις δύο ιδέες. Τα σχήματα που χρησιμοποιούνται σε αυτή τη δραστηριότητα ονομάζονται *πεντόμινο*—σχήματα που δημιουργούνται από 5 τετράγωνα, κάθε ένα από τα οποία αγγί-

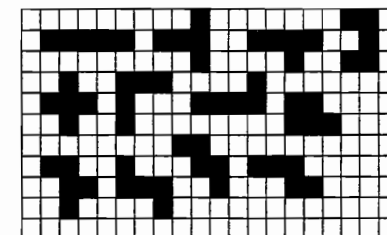
ζει τουλάχιστον ένα άλλο τετράγωνο με τα τετράγωνα να έχουν πάντα μια πλευρά κοινή. Τα παιδιά μπορεί να θυμούνται τα πεντόμινο από κάποια προηγούμενη τάξη. Η αναζήτηση του πόσα διαφορετικά πεντόμινο υπάρχουν αποτελεί μία πασίγνωστη δραστηριότητα της γεωμετρίας (δείτε τη σελίδα 558 για μια εισαγωγική δραστηριότητα). Για τους στόχους μας στην ανάλυση των μετασχηματισμών και των συμμετριών, η συλλογή των 12 πεντόμινο λειτουργεί αλλά ως μία βολική συλλογή σχημάτων. Αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 21.35.

Δραστηριότητα 21.22

Θέσεις Πεντόμινο

Βάλτε τα παιδιά να κόψουν μια ομάδα από 12 πεντόμινο από χαρτί με τετράγωνα 2 εκατοστών (βλέπε Σχήμα 21.35). Σημειώστε μία πλευρά του κάθε κομματιού για να σας βοηθήσει να θυμάστε αν το έχετε αναποδογυρίσει. Στο πρώτο μέρος της δραστηριότητας πρέπει να καθορίσετε πόσες διαφορετικές θέσεις έχει το κάθε κομμάτι στο χαρτί με τα τετράγωνα. Ονομάστε τις θέσεις «διαφορετικές» αν χρειάζεται μία αντανάκλαση ή περιστροφή για να μπορέσουν να ταίριαξουν. Επομένως, το κομμάτι που έχει σχήμα σταυρού έχει δύο θέσεις. Ορισμένα κομμάτια μπορεί να έχουν μέχρι και οχτώ θέσεις. Στο δεύτερο μέρος της δραστηριότητας πρέπει να βρείτε μία σχέση ανάμεσα στις αξονικές στις συμμετρίες και συμμετρίες εκ περιστροφής για το κάθε σχήμα και τον αριθμό των θέσεων που μπορεί να έχει πάνω στο χαρτί.

Το πρώτο μέρος της δραστηριότητας προσαρμόστηκε από το κλασικό βιβλίο *Boxes, Squares, and Other Things* (Walter,



Υπάρχουν 12 πεντόμινο.

Μία καλή άσκηση για τη λύση του προβλήματος του χώρου είναι να βρείτε όλα τα πιθανά σχήματα που δημιουργούνται με πέντε τετράγωνα ή έξι τετράγωνα (καλούνται «εξόμινο») ή έξι ισόπλευρα τρίγωνα κ. ο. κ.

ΣΧΗΜΑ 21.35 Υπάρχουν 2 διαφορετικού σχήματος πεντόμινο. Η εξερεύνηση για την εύρεση αυτών των σχημάτων αποτελεί μια νοερή απεικόνιση που βρίσκεται στη σελ. 548.

1970), το οποίο έχει πολύ πάρα πολλές εξαιρετικές διερευνήσεις. Το δεύτερο μέρος του προβλήματος δεν είναι δύσκολο αν τα παιδιά κάνουν ένα πίνακα με αυτά που ήδη γνωρίζουν. Οι λύσεις σε αυτή την εργασία μένουν σε εσάς και στα παιδιά σας. Ως ακολούθη στη δραστηριότητα 21.22, εξετάστε το απόσπασμα αυτό του αναλυτικού προγράμματος *Connected Mathematics* για τη δεύτερα γυμνασίου που βρίσκεται στη σελίδα 553. Όπως ταχώς, μια παρόμοια διερεύνηση μπορεί να βρεθεί στο *Boxes, Squares, and Other Things*.

Η επόμενη δραστηριότητα προκαλεί τα παιδιά να αναπτύξουν γενικεύσεις για συγκεκριμένες συνθέσεις μετασχηματισμών.

Δραστηριότητα 21.23

Διπλές αντανakλάσεις

Υπάρχουν δύο παρόμοιες εργασίες σε αυτή τη δραστηριότητα:

1. Επαληθεύστε ότι η σύνθεση δύο αντανakλάσεων κατά μήκος παράλληλων ευθειών (πρώτα κατά μήκος της μίας και μετά της άλλης) είναι το ίδιο με μία μεταφορά. Φτιάξτε ένα σχέδιο σε ένα χαρτί με κουκκίδες για να το απεικονίσετε. Πρόκληση: Εάν γνωρίζετε την απόσταση μεταξύ των δύο παράλληλων ευθειών, τι μπορείτε να πείτε για τη μεταφορά – τόσο για την κατεύθυνσή της όσο και για την απόστασή της; Έχει σημασία από πού ξεκινά το σχήμα (ανάμεσα στις ευθείες ή έξω από αυτές) ή ποια ευθεία χρησιμοποιείται ως η πρώτη αντανakλάση; Εξηγήστε τα συμπεράσματά σας.
2. Επαληθεύστε ότι η σύνθεση δύο αντανakλάσεων κατά μήκος διασταυρούμενων ευθειών είναι το ίδιο με μία περιστροφή γύρω από το σημείο τομής των ευθειών. Φτιάξτε ένα σχέδιο σε χαρτί με κουκκίδες για να το απεικονίσετε. Πρόκληση: Πώς σχετίζεται η γωνία περιστροφής με τη γωνία των ευθειών; Εξηγήστε τα συμπεράσματά σας.

Στο πρώτο πρόβλημα, η απόσταση της μεταφοράς είναι πάντα δυο φορές η απόσταση μεταξύ των ευθειών και είναι κάθετη σε αυτές. Η κατεύθυνση καθορίζεται από το ποια ευθεία χρησιμοποιείται για την πρώτη αντανakλάση σε σχέση με το προσχέδιο. Στο δεύτερο πρόβλημα, η γωνία περιστροφής είναι διπλάσια από τη γωνία μεταξύ δυο ευθειών. Μπορείτε να δομήσετε λογικά επιχειρήματα για αυτά τα συμπεράσματα, εξετάζοντας σχέδια.

Μαθαίνοντας για τη Θέση στο Χώρο

Το στάνταρ της θέσης στο χώρο στο έγγραφο Αρχές και Στάδια αναφέρει ότι τα παιδιά θα πρέπει να «προσδιορίζουν θέ-

σεις στο χώρο και να περιγράφουν χωρικές σχέσεις χρησιμοποιώντας την αναλυτική γεωμετρία και άλλα συστήματα αντιπροσωπεύσης» (NCTM, 2000, σελ. 42). Αφού έχουν αναπτυχθεί ορισμένοι καθημερινοί όροι για το πώς εντοπίζονται τα αντικείμενα σε σχέση με άλλα αντικείμενα (π.χ. η μπάλα είναι κάτω από το τραπέζι), οι δραστηριότητες θέσης περιλαμβάνουν την ανάλυση των διαδρομών από σημείο σε σημείο όπως και σε ένα χώρο και τη χρήση του συστήματος συντεταγμένων. Τα συστήματα συντεταγμένων είναι μια εξαιρετικά σημαντική μορφή αναπαράστασης. Μας επιτρέπουν να αναλύσουμε γεωμετρικές ιδέες όπως οι μετασχηματισμοί. Οι συντεταγμένες παίζουν επίσης σημαντικό ρόλο στην άλγεβρα.

Θέση στο Χώρο για τα Παιδιά του Επιπέδου 0

Στο νηπιαγωγείο τα παιδιά μαθαίνουν για τις καθημερινές περιγραφές θέσεων-πάνω, κάτω, κοντά, μακριά, αριστερά και δεξιά. Αυτά αποτελούν την αρχή του στόχου του Στάνταρ για τον καθορισμό των θέσεων. Αυτοί οι ανεπίσημοι δείκτες της θέσης είναι χρήσιμοι για τις καθημερινές μας σχέσεις. Ωστόσο, το να βοηθήσουμε τα παιδιά να βελτιώσουν τον τρόπο που απαντούν σε ερωτήματα κατεύθυνσης, απόστασης και θέσης διευρύνει την κατανόηση του χώρου. Η γεωμετρία, η μέτρηση και η άλγεβρα υποστηρίζονται από ένα σύστημα συντεταγμένων με προσαρμοσμένους αριθμούς ή συντεταγμένες που μπορούν να καθορίσουν τη θέση πάνω στο πλέγμα των συντεταγμένων. Καθώς τα παιδιά αναπτύσσουν όλο και περισσότερο περιεχόμενη σκέψη, η χρήση των συντεταγμένων αναπτύσσεται μαζί τους. Ωστόσο, δεν υπάρχει κανένας λόγος που τα παιδιά στο επίπεδο του αρχαρίου δεν μπορούν να αρχίσουν να σκέφτονται σε σχέση με ένα σύστημα συντεταγμένων για να αναγνωρίσουν τη θέση. Αυτή η προετοιμασία για πιο περίπλοκη μορφή αναλυτικής γεωμετρίας γίνεται εύκολα και στα πρώτα ακόμη χρόνια του σχολείου.

Η επόμενη δραστηριότητα μπορεί να λειτουργήσει ως εργασία προετοιμασίας για τις συντεταγμένες και να βοηθήσει τα παιδιά να δουν την αξία του να έχουν ένα τρόπο για να καθορίζουν τη θέση χωρίς να δείχνουν.

Δραστηριότητα 21.24

Κρυμμένες Θέσεις

Για τους πίνακες του παιχνιδιού, σχεδιάστε ένα τετράγωνο 8 ιντσών πάνω σε ένα χαρτόνι. Υποδιαιρέστε τα τετράγωνα πάνω σε έναν πλέγμα συντεταγμένων διαστάσεων 3x3. Δύο παιδιά κάθονται με ένα επίπεδο που να χωρίζει το θρανίο τους έτσι ώστε κανένα παιδί να μην μπορεί να δει το πλέγμα του άλλου (βλέπε Σχήμα 21.36). Κάθε παιδί έχει τέσσερα σχέδια κύβων. Ο πρώτος παίκτης τοποθετεί έναν κύβο σε τέσσερις διαφορετικούς τομείς του πλέγματος. Έπειτα λέει στον άλλον παίκτη πού να βάλει τους κύβους στο πλέγμα του

προκειμένου να ταιριάζει με το δικό του. Όταν τοποθετηθούν και τα τέσσερα κομμάτια, ελέγχουν τα δύο πλέγματα για να δουν αν είναι όμοια. Ύστερα οι παίκτες αλλάζουν ρόλους. Δείτε το παιχνίδι μία φορά παριστάνοντας το πρώτο παιδί. Χρησιμοποιήστε λέξεις όπως πάνω, σειρά, μέση, αριστερά και δεξιά. Τα παιδιά μπορούν να παίξουν σε ζευγάρια ως μια δραστηριότητα στο διάλειμμα.

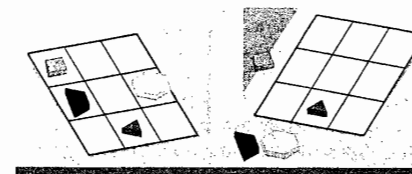
Το παιχνίδι των Κρυμμένων Θέσεων μπορεί εύκολα να επεκταθεί και σε πλέγμα 6 x 6. Καθώς αυξάνεται το μέγεθος του πλέγματος, αυξάνεται και η ανάγκη για ένα σύστημα ονομασίας των θέσεων. Τα παιδιά το νωρίτερο που μπορούν να αρχίσουν να χρησιμοποιούν ένα απλό σύστημα συντεταγμένων είναι στην πρώτη τάξη. Σχεδιάστε ένα πλέγμα συντεταγμένων στον πίνακα ή στο διαφανοσκόπιο σαν αυτό που υπάρχει στο Σχήμα 21.37. Εξηγήστε στα παιδιά πως να χρησιμοποιούν δύο αριθμούς, για να προσδιορίσουν ένα σημείο τομής πάνω στο πλέγμα. Ο πρώτος αριθμός μάς λέει πόσο μακριά να κινηθούμε προς τα δεξιά. Ο δεύτερος αριθμός πόσο μακριά να κινηθούμε προς τα πάνω. Για τα μικρότερα παιδιά χρησιμοποιήστε τις λέξεις μαζί με τους αριθμούς: 3 δεξιά και 0 πάνω. Σιγουρευτείτε ότι συμπεριλάβατε τον αριθμό 0 στην εισαγωγή σας. Διαλέξτε ένα σημείο στο πλέγμα και βάλτε τα παιδιά να αποφασίσουν ποιοι δύο αριθμοί κατονομάζουν το σημείο. Εάν το σημείο σας βρίσκεται στο (2,4) και τα παιδιά από λάθος πουν «τέσσερα, δύο», τότε δείξτε απλά το σημείο που ονομάτισαν. Τονίστε ότι, όταν λένε ή γράφουν τους αριθμούς, ο πρώτος αριθμός είναι ο αριθμός βημάτων προς τα δεξιά και ο δεύτερος ο αριθμός βημάτων προς τα πάνω.

Η επόμενη δραστηριότητα ερευνά την ιδέα των διαφορετικών διαδρομών σε ένα πλέγμα.

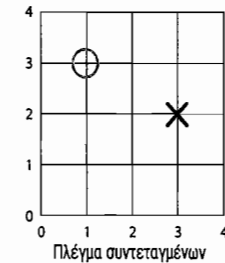
Δραστηριότητα 21.25

Διαδρομές

Σε ένα φύλλο 2 cm χαρτί για πλέγμα, σηματοδότηστε δύο διαφορετικά σημεία Α και Β, όπως δείχνει το Σχήμα



ΣΧΗΜΑ 21.36 Το παιχνίδι Κρυμμένων Θέσεων. Οι παίκτες πρέπει να επικοινωνούν προφορικά για τις θέσεις των τετραγώνων τους στο πλέγμα.



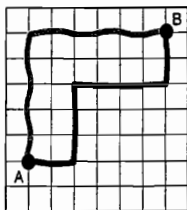
ΣΧΗΜΑ 21.37 Ένα απλό πλέγμα με συντεταγμένες. Το X είναι στο (3,2) και το O είναι στο (1,3). Χρησιμοποιήστε το πλέγμα για να παίξετε Τρεις στη Σειρά (όπως Tic-Tac-Toe, τρίφιζα). Βάλτε σημάδια στις διασταυρώσεις, όχι στα κενά τετράγωνα.

21.38. Χρησιμοποιώντας το διαφανοσκόπιο ή το σχολικό πίνακα, δείξτε στα παιδιά πως να περιγράψουν μια διαδρομή από το Α στο Β. Για τα σημεία στο σχήμα, μια διαδρομή είναι «πάνω 5 και δεξιά 6». Μια άλλη διαδρομή θα μπορούσε να είναι «δεξιά 2 και πάνω 2, δεξιά 2, πάνω 3, δεξιά 2». Μετρήστε το μήκος κάθε διαδρομής. Εφόσον κινείσθε πάντοτε προς το σημείο που στοχεύετε (σε αυτήν την περίπτωση είτε δεξιά είτε πάνω), τα μήκη των μονοπατιών θα είναι ίδια. Εδώ είναι έντεκα μονάδες μακριά. Τα παιδιά σχεδιάζουν τρεις διαδρομές στα χαρτιά τους από το Α στο Β, χρησιμοποιώντας διαφορετικούς χρωματιστούς μαρκαδόρους. Για κάθε διαδρομή γράφουν τις κατευθύνσεις που την περιγράφουν. Θα πρέπει να ελέγχουν τα μήκη της κάθε διαδρομής. Ρωτήστε «Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός στροφών που μπορείτε να κάνετε στη διαδρομή σας;», «Ποιος ο μικρότερος;», «Πού θα έπρεπε να είναι τα Α και Β, ώστε να πάτε εκεί χωρίς στροφές?».

Εάν προσθέσετε ένα σύστημα συντεταγμένων στον χαρτί στις Διαδρομές, τα παιδιά θα μπορούν να περιγράψουν τις διαδρομές τους με συντεταγμένες. Για παράδειγμα: (1, 2) → (3, 2) → (3, 5) → (7, 5) → (7, 7).



Το NCTM e-Standards περιέχει ένα καλό βοηθητικό πρόγραμμα (Βοηθητικό Πρόγραμμα 4.3) που είναι όμοιο με την προηγούμενη δραστηριότητα, αλλά προσφέρει κάποιες επιπλέον προκλήσεις. Τα παιδιά μετακινούν μία πασχάλτσα δίνοντας κατευθύνσεις. Αυτό που πρέπει να κάνουν είναι να δημιουργήσουν μία λίστα με κατευθύνσεις με σκοπό να κρύψουν την πασχάλτσα πίσω από ένα φύλλο. Όταν οι κατευθύνσεις είναι έτοιμες, η πασχάλτσα τίθεται σε κίνηση για να τις ακολουθήσει. Η πασχάλτσα χρησιμοποιείται και για το σχεδιασμό σχημάτων όπως το ορθογώνιο σε μία δεδομένη θέση ή για να



ΣΧΗΜΑ 21.38 Χρωματίζοντας τις διαφορετικές διαδρομές πάνω σε ένα πλέγμα. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός στροφών που χρειάζεται για να πάτε από το Α στο Β; Ποιος ο μέγιστος;

ταξιδεύει μέσω ενός λαβυρίνθου. Αυτό το βοηθητικό πρόγραμμα είναι μία πολύ απλή εκδοχή της δυναμικής γλώσσας προγραμματισμού H/Y Logo.

H Logo τεχνικά είναι μία γλώσσα προγραμματισμού H/Y. Εκδόχες της που αναπτύχθηκαν τα τελευταία χρόνια όπως το *Turtle Math* (Clements & Meredith, 1994) καθιστούν τον προγραμματισμό αρκετά εύκολο για τα παιδιά της τρίτης τάξης. Σύντομα, στον τρόπο γραφικών της Logo, μία «χελώνα» (ένα μικρό τρίγωνο ή η εικόνα μίας χελώνας) μπορεί να κινηθεί, όταν δοθεί η εντολή, προς τα μπροστά ή προς τα πίσω σε οποιαδήποτε απόσταση και να στρίψει αριστερά ή δεξιά σε οποιοδήποτε αριθμό μοιρών. Η χελώνα σχεδιάζει μία γραμμή στη διαδρομή της. Η σειρά εντολών `fd 50 rt 90 fd 30 rt 90` θα κάνει τη χελώνα να σχεδιάσει ένα μεγάλο και ένα μικρό ευθύγραμμο τμήμα με ορθές γωνίες του ενός στο άλλο. Η εντολή `rt 30 repeat [ fd 60 rt 90 fr 30 rt 90 ]` θα δημιουργήσει ένα ορθογώνιο διαστάσεων 60x30, γεμάτο από 30 μοίρες.

H Logo φέρνει μία τελειώς διαφοροτική προοπτική στα γεωμετρικά σχήματα και, κατά συνέπεια στις γεωμετρικές διερευνήσεις και στην ανάπτυξη της αίσθησης του χώρου. Λόγω του ότι αυτό τα παιδιά απαιτείται να σχεδιάσουν σχήματα εισάγοντας ακριβείς διαταγές, η Logo προϋποθέτει να έχει συλληφθεί η εικόνα του σχήματος όσον αφορά στα συστατικά του μέρη-διαστάσεις των πλευρών, άνοιγμα των γωνιών, κατευθύνσεις στροφών και προσανατολισμός στο επίπεδο. Το *Turtle Math* χρησιμοποιείται στο πρόγραμμα σπουδών του *Investigations in Number, Data and Space* (για μία λεπτομερή ανάλυση γύρω από τη Logo, δείτε το Clements & Battista, 2001.) ■

Θέση στο Χώρο για τα παιδιά του Επιπέδου 1

Στο επίπεδο 1, μία χρήση του πλέγματος συντεταγμένων είναι να εξετάσουμε πιο αναλυτικά τους μετασχηματισμούς. Δεν υπάρχουν πολύ νέες πληροφορίες για τις συντεταγμένες εκτός από την επέκταση στα τέσσερα τεταρτημύρια με τη χρήση των

αρνητικών αριθμών. Ακόμα και τα παιδιά της τετάρτης και της πέμπτης τάξης μπορούν να χρησιμοποιήσουν αρνητικούς ακέραιους αριθμούς ώστε και τα τέσσερα τεταρτημύρια του επιπέδου να μπορούν να αναπαρασταθούν. Οι δραστηριότητες εδώ προτείνουν τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι συντεταγμένες για την εξέταση των μετασχηματισμών.

Δραστηριότητα 21.26

Γλίστρημα Συντεταγμένων

Τα παιδιά θα χρειαστούν ένα χαρτί πλέγματος του ε-κατοστάτου πάνω στο οποίο θα σχεδιάσουν δύο άξονες συντεταγμένων κοντά στις κάτω και αριστερά άκρες. Βάλτε τους να σχεδιάσουν και να συνδέσουν πέντε ή έξι σημεία πάνω στο χαρτί για να σχηματίσουν ένα μικρό σχήμα (βλ. Σχήμα 21.39). Αν τους κατευθύνετε να χρησιμοποιούν συντεταγμένες μόνο ανάμεσα στο 5 και το 12, το σχήμα θα είναι σχετικά μικρό και περίπου στο κέντρο του χαρτιού. Έπειτα, τα παιδιά δημιουργούν ένα νέο σχήμα προσθέτοντας το 6 στις πρώτες συντεταγμένες (τυπικά ονομάζονται οι συντεταγμένες x) του σχήματός τους, αφήνοντας τις δεύτερες συντεταγμένες ίδιες. Αυτό σημαίνει ότι για το σημείο (5, 10) σχεδιάζεται ένα νέο σημείο (11, 10). Όταν τα νέα σημεία για το κάθε σημείο έχουν σχεδιαστεί τα συνδέονται όπως και πριν. Αυτά τα νέα σχήματα θα πρέπει να είναι ίσα με τα αρχικά και να μεταφέρονται προς τα δεξιά. Τα παιδιά τότε δημιουργούν ένα τρίτο σχήμα προσθέτοντας το 9 σε κάθε δεύτερη συντεταγμένη του αρχικού.

Με αυτά τα δύο γλίστρημα ως αρχική κατεύθυνση, σταματήστε και συζητήστε τι θα πρέπει να γίνει στις συντεταγμένες για να κινηθεί το σχήμα κατά μήκος μιας κεκλιμένης γραμμής μέχρι πάνω δεξιά. Βάλτε τα παιδιά να εξετάσουν τις εικασίες τους. Στο Σχήμα 21.39 απεικονίζεται ένα γλίστρημα που δημιουργήθηκε προσθέτοντας το 6 σε όλες τις πρώτες συντεταγμένες και το 9 σε όλες τις δεύτερες. Εφόσον όλες οι πρώτες συντεταγμένες έχουν αλλάξει με το ίδιο ποσό και όλες οι δεύτερες πάλι με το ίδιο, το σχήμα θα μεταφερθεί χωρίς παραμόρφωση. Προκαλέστε τα παιδιά να βρουν πώς να αλλάξουν τις συντεταγμένες για να κάνουν το σχήμα να γλιστρήσει προς τα κάτω και μετά προς τα αριστερά αντί προς τα πάνω και δεξιά (αφαιρέστε από τις συντεταγμένες αντί να προσθέσετε). Τα χαρτιά των παιδιών θα πρέπει να δείχνουν τα αρχικά τους σχήματα και τα τέσσερα αντίγραφα, κάθε ένα σε διαφορετικό σημείο του πλέγματος.

Βοηθήστε τα παιδιά να συνοψίσουν αυτά που έχουν μάθει. Τι συνέπεια έχει η πρόσθεση (ή η αφαίρεση) ενός αριθμού στις τετημημένες; Τι θα συμβεί αν ένας αριθμός προστεθεί ή αφαιρεθεί από τις τετημημένες. Και από τις δύο συντεταγμένες; Βάλτε τα παιδιά να σχεδιάσουν γραμμές που να συνδέουν τα αντίστοιχα σημεία του αρχικού σχήματος με ένα από εκείνα που άλ-

Συνδεδεμένα

ΜΕΣΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Ογδοη Τάξη, «καλειδοσκοπία, καπάκια από ρόδες αυτοκινήτου και καθρέφτες».

Έρευνα 4. Συμμετρία και Άλγεβρα

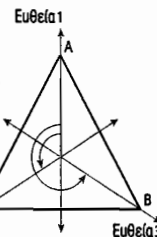
Συγκείμενο

Ο τίτλος αυτής της ενότητας προέρχεται από την πρώτη έρευνα, στην οποία τα παιδιά εξετάζουν τη συμμετρία σε σχέδια από καπάκια ρόδας αυτοκινήτου, σχέδια που έγιναν από καλειδοσκόπια (εξαγωνικά) και εκείνα που έγιναν από καθρέφτες. Στην πραγματικότητα, η συμμετρία «ορίζεται» υπό την έννοια των μετασχηματισμών. «Ενα γεωμετρικό σχήμα είναι συμμετρικό» αν μια αντανάκλαση ή μία περιστροφή του σχήματος παράγει μία εικόνα που ταυρίζεται επακριβώς με το αρχικό σχήμα. Το μεγαλύτερο μέρος της εργασίας σ' αυτή την ενότητα γίνεται σε πλέγμα με συντεταγμένες.

Περιγραφή της Δραστηριότητας

Αυτό το μάθημα διερευνά τους συνδυασμούς δύο μετασχηματισμών συμμετρίας ενός ισόπλευρου τριγώνου και ενός τετραγώνου. Τα παιδιά φτιάχνουν έναν πίνακα που μοιάζει με πίνακα πολλαπλασιασμού, όμως αναπαριστά το αποτέλεσμα ενός μετασχηματισμού που ακολουθείται από έναν άλλο. Τα σύμβολα των αντανάκλασεων σχετίζονται με το ποια γραμμή συμμετρίας χρησιμοποιείται. Για παράδειγμα, το $L1$ είναι αντανάκλαση για την ευθεία 1. Οι περιστροφές είναι αντίθετες από τη φορά του ρολογιού. Το $R240$ αναφέρεται σε μία περιστροφή 240°. Δίνοντας όνομα στις γωνίες, τα παιδιά μπορούν να κρατήσουν τα ίχνη της κάθε θέσης του τριγώνου. Η εξήγηση πάνω από τον πίνακα υποδεικνύει πώς πρέπει να συμπληρωθεί.

Αφού συμπληρώσουν τον πίνακα, ζητείστε τους να ψάξουν για μοτίβα ή άλλα ενδιαφέροντα αποτελέσματα που μπορεί να εμφανιστούν. Έπειτα συμπληρώνουν έναν κανονικό πίνακα πολλαπλασιασμού για τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 6 και συγκρίνουν τα σχήματα που βρίσκονται εκεί με τα σχήματα στον πίνακα μετασχηματισμών συμμετρίας. Σημειώστε, για παράδειγμα, ότι το $R360$ τοποθετείται στην ίδια θέση με τον αριθμό 1 στον πίνακα πολλαπλασιασμού και συμπεριφέρεται ως ταυτόσημο στοι-



Μετασχηματίζοντας Τρίγωνα

Οι πράξεις της αριθμητικής – πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση – ορίζουν τρόπους συσχέτισης δύο αριθμών για να δώσουν ένα μόνο αριθμό. Με παρόμοιο τρόπο, μπορείτε να σχετίσετε το συνδυασμό μετασχηματισμών συμμετρίας ως μία λειτουργία που βάζει δύο μετασχηματισμούς μαζί για να παράγουν έναν ισοδύναμο μετασχηματισμό.

Σε αυτό το πρόβλημα, θα διερευνήσετε συνδυασμούς μετασχηματισμών συμμετρίας για ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Ο συμβολισμός $L1$ σημαίνει μία αντανάκλαση με άξονα την ευθεία 1, και ο συμβολισμός $R60$ σημαίνει μία περιστροφή 60 μοιρών, αντίθετη της φοράς του ρολογιού. Το σύμβολο * αναπαριστά τη συνδυαστική πράξη. Μπορείτε να δείξετε αυτό το σύμβολο ως «καπάκι». Για παράδειγμα, $L1 * L2 = R360$ σημαίνει ότι αντανάκλαση του τριγώνου πάνω από την ευθεία 1 «καπάκι» αντανάκλαση του τριγώνου πάνω από την ευθεία 2 είναι ισοδύναμο με μία περιστροφή του τριγώνου κατά 240°.

Πρόβλημα 4.1

Ο παρακάτω πίνακας πρέπει να αναπληρωθεί σε φύλλο εργασίας 4.18. Συμπληρώστε τον πίνακα, για να δείξετε τα αποτελέσματα ενός συνδυασμού μετασχηματισμών συμμετρίας ενός ισόπλευρου τριγώνου. Κάθε καταχώρηση θα πρέπει να είναι αποτέλεσμα της πραγματοποίησης ενός μετασχηματισμού στην ορατή στήλη ακολουθούμενου από τον μετασχηματισμό στην πάνω στήλη. Ήδη οι δύο τεταρτημύρια στον πίνακα αναπαριστούν τους συνδυασμούς που διερευνήσατε στην εισήγηση.

	$L_1 * L_1 = R360$	$L_1 * L_2 = R120$	$L_1 * L_3 = R240$	$L_1 * L_1 = L_1$	$L_1 * L_2 = L_2$	$L_1 * L_3 = L_3$
$R360$						
$R120$						
$R240$						
L_1						
L_2						
L_3						

(Πίνακας πολλαπλασιασμού)

Σημειώστε ότι ο μετασχηματισμός $R360$, μια περιστροφή 360°, επιστρέφει το κάθε σημείο στο μέρος από όπου ξεκίνησε. Κάθε συνδυασμός μετασχηματισμών θα αναπαριστάται ο-τιδήποτε συνδυασμός είναι ισοδύναμο με $R360$.

■ Συνέχεια του Προβλήματος 4.1

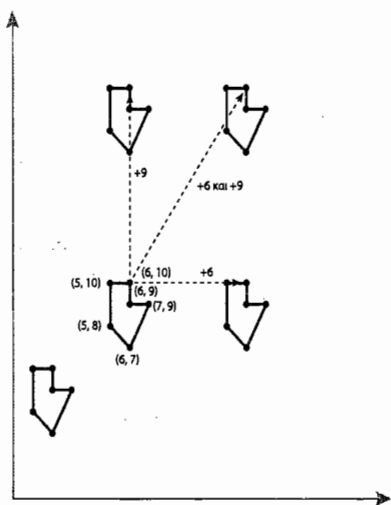
1. Καλέστε προσεκτικά τις καταχωρήσεις στον πίνακα σας. Περιγράψτε οποιοδήποτε ενδιαφέροντα σχήματα στις σειρές, στις στήλες ή στα τετράγωνα των καταχωρήσεων. Τι σας λένε αυτά τα σχήματα για τα αποτελέσματα του συνδυασμού περιστροφών με τις αξόνους συμμετρίας των ευθειών;

Από «Connected Mathematics: Kaleidoscopes, Hubcaps, and Mirrors: Symmetry and Transformations». © 2002 by Michigan State University, Glenda Lappan, James T. Fey, William M. Fitzgerald, Susan N. Friel, and Elizabeth Diferenti Phillips. Εκδόθηκε από την Prentice Hall. Χρησιμοποιήθηκε κατόπιν άδειας της Pearson Education Inc.

χείο. Η αντιμεταθετική ιδιότητα ισχύει για κάποιους συνδυασμούς, αλλά όχι για άλλους. Κανένας από όλους τους αριθμούς στον πίνακα πολλαπλασιασμού δεν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο. Ωστόσο, θυμηθείτε ότι κάθε μηδενικός αριθμός έχει. Για παράδειγμα, το 3 και το 1/3 είναι αντίστροφοι, διότι το γινόμενο τους είναι ο αριθμός 1. Για τις συμμετρίες του τριγώνου, κάθε μετασχηματισμός έχει έναν αντίστροφο.

Επιπλέον στη συνέχεια της μελέτης τους για τις συμμετρίες, το μάθημα αυτό αποτελεί πραγματικά μία σύνδεση με την άλγεβρα. Επαναλαμβάνει τις ιδιότητες των πράξεων και καθιστά σαφές ότι όντως εξαρτώνται από το σύστημα που χρησιμοποιείται.

λαξαν και οι δύο συντεταγμένες. Τι παρατηρούν; (οι γραμμές είναι παράλληλες και έχουν το ίδιο μήκος). Διαλέξτε οποιαδήποτε από τα πέντε σχήματα στο τελικό σχέδιο. Πώς μπορείτε να ξεκινήσετε με ένα από τα σχήματα και να αλλάξετε τις συντεταγμένες έτσι ώστε να πάρετε το άλλο;



ΣΧΗΜΑ 21.39 Ξεκινήστε με ένα απλό σχήμα και καταγράψτε τις συντεταγμένες. Προσθέτοντας ή αφαιρώντας από τις συντεταγμένες, βρίσκετε νέα σχήματα τα οποία είναι μεταφορές (γλιστρήματα) του αρχικού.

Στο «Γλίστρημα Συντεταγμένων» το σχήμα δεν έστριψε, δεν περιστράφηκε, δεν αναποδογύρισε, ούτε άλλαξε μέγεθος ή σχήμα. Το σχήμα «γλίστρησε» κατά μήκος μιας διαδρομής που ένωσε τις γραμμές ανάμεσα στα αντίστοιχα σημεία. Οι αντανάκλασεις μπορούν να διερευνηθούν σε ένα πλέγμα συντεταγμένων το ίδιο εύκολα με τις μεταφορές. Σε αυτό το αρχικό επίπεδο, θα ήταν φρόνιμο να περιορίσετε τους άξονες αντανάκλασης των x ή των y όπως και στην παρακάτω δραστηριότητα.

Δραστηριότητα 21.27

Αντανάκλασεις Συντεταγμένων

Βάλτε τα παιδιά να σχεδιάσουν ένα πεντάπλευρο σχήμα στο πρώτο τεταρτημόριο ενός πλέγματος με συντεταγμένες χρησιμοποιώντας τα σημεία του πλέγματος

για τις κορυφές. Ορίστε το σχήμα ΑΒΓΔΕ και ονομάστε το Σχήμα 1. Χρησιμοποιήστε τον άξονα των y ως άξονα ευθείας συμμετρίας και σχεδιάστε την αντανάκλαση του σχήματος στο δεύτερο τεταρτημόριο. Ονομάστε το Σχήμα 2 (για το δεύτερο τεταρτημόριο) και ορίστε τα ανακλόμενα σημεία Α'Β'Γ'Δ'Ε'. Τώρα χρησιμοποιήστε τον άξονα των x ως άξονα συμμετρίας. Σχεδιάστε την αντανάκλαση του Σχήματος 2 και του Σχήματος 1 στο τρίτο και το τέταρτο τεταρτημόριο αντίστοιχα, και ονομάστε αυτά τα σχήματα Σχήμα 3 και Σχήμα 4. Ορίστε τις κορυφές αυτών των σχημάτων με δύο και τρεις τόνους (Α' και Α'', κτλ). Γράψτε τις συντεταγμένες κάθε κορυφής όλων των σχημάτων.

■ Πώς σχετίζεται το Σχήμα 3 με το Σχήμα 4; Πώς αλλιώς θα μπορούσατε να πάρετε το Σχήμα 3; Πώς αλλιώς θα μπορούσατε να βρείτε το Σχήμα 4; Πώς σχετίζονται οι συντεταγμένες του Σχήματος 1 με το συμμετρικό τους ως προς τον άξονα των y , το Σχήμα 2; Τι μπορείτε να πείτε για τις συντεταγμένες του Σχήματος 4;

■ Βγάλτε ένα συμπέρασμα για τις συντεταγμένες ενός σχήματος αντανakλόμενου ως προς τον άξονα y και ένα διαφορετικό συμπέρασμα για τις συντεταγμένες του σχήματος αντανakλόμενου ως προς τον άξονα των x .

■ Τραβήξτε ευθείες από τις κορυφές του Σχήματος 1 στις αντίστοιχες κορυφές του Σχήματος 2. Τι μπορείτε να πείτε για αυτές τις ευθείες; Πώς σχετίζεται ο άξονας y με κάθε μία από τις ευθείες αυτές;

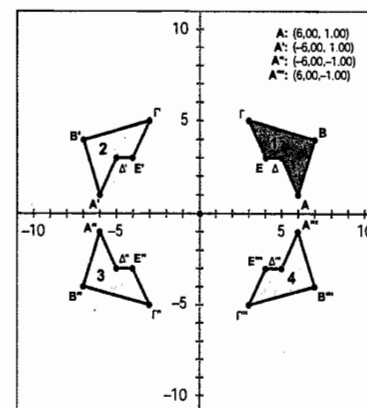
■ Στραφείτε στο Σχήμα 21.40 για να απαντήσετε σε αυτά τα ερωτήματα.

Οι περιστροφές μπορούν επίσης να διερευνηθούν με τη χρήση των συντεταγμένων.

Δραστηριότητα 21.28

Περιστροφές Συντεταγμένων

Βάλτε τα παιδιά να σχεδιάσουν ένα μικρό σχήμα στο πρώτο τεταρτημόριο. Ένα σχήμα με τη μορφή ενός L θα βοηθήσει να απεικονίσουν νοερά πιο εύκολα τις περιστροφές. Χρησιμοποιείτε την αρχή των αξόνων ως το κέντρο της περιστροφής. Προκαλέστε τα παιδιά να περιστρέψουν τα σχήματά τους κατά ένα τέταρτο στη φορά των δεικτών του ρολογιού προς το δεύτερο τεταρτημόριο. Προτείνετε να περιστρέψουν ένα σημείο τη φορά σχεδιάζοντας μια γραμμή από την αρχή των αξόνων και μετά να περιστρέψουν αυτή τη γραμμή κατά ένα τέταρτο για να βρουν το σημείο περιστροφής. Ας επαναλάβουν και για άλλα σημεία μέχρι να μπορέσουν να σχεδιάσουν το περιστρεφόμενο σχήμα (η περιστροφή μπορεί να επαληθευθεί με χαρτί παπούρας). Μετά βάλτε τα παιδιά να περιστρέψουν το αρχικό σχήμα κατά ένα τέταρτο προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού προς το τέταρτο τεταρτημόριο και μισή περιστροφή προς το τρίτο τεταρτημόριο.



ΣΧΗΜΑ 21.40 Το Σχήμα 1 (ΑΒΓΔΕ) αντανakλάναι με άξονα συμμετρίας τον άξονα των y . Τότε και τα δύο Σχήματα (1 και 2) αντιστοιχίζονται ως προς άξονα συμμετρίας τον άξονα των x .

Τα παιδιά θα πρέπει να διερευνήσουν τα σχέδια τους για σχέσεις ανάμεσα στις συντεταγμένες των αρχικών και των τελικών σχεδίων. Μπορούν να ελέγξουν τις ιδέες τους σε ένα σχήμα κάνοντας πρώτα αλλαγές στις συντεταγμένες και μετά να σχεδιάσουν τα νέα σημεία για να δουν αν δημιουργήθηκε η επιθυμητή περιστροφή.

Τα παιδιά που έχουν διερευνήσει τόσο τις στρεφές όσο και τις αντανakλάσεις όπως στις δύο τελευταίες δραστηριότητες, μπορούν να ψάξουν για μία σχέση ανάμεσα σε μία περιστροφή των 180 μοιρών και τις αντανakλάσεις ως προς τις δύο κάθετες ευθείες (μπορείτε να καταλάβετε τι είναι αυτή η σχέση;).

Τα παιδιά που έχουν κάνει τις δύο προηγούμενες δραστηριότητες θα πρέπει να έχουν ένα γενικό τρόπο να περιγράφουν μεταφορές, αντανakλάσεις ως προς έναν άξονα και περιστροφές 90 μοιρών γύρω από την αρχή των αξόνων, όλα υπό την έννοια των συντεταγμένων. Στην ακόλουθη δραστηριότητα, ο πολλαπλασιασμός των συντεταγμένων με ένα σταθερό αριθμό είναι ένας μετασχηματισμός που δεν αποτελεί άκαμπτη κίνηση.

Δραστηριότητα 21.29

Μεγέθυνση με Συντεταγμένες

Τα παιδιά αρχίζουν με ένα τετράπλευρο σχήμα στο πρώτο τεταρτημόριο. Κάνουν ύστερα μία λίστα με τις συντεταγμένες και δημιουργούν μία καινούρια ομάδα συντεταγμένων, πολλαπλασιάζοντας κάθε μία από τις αρχικές συντεταγμένες με το 2. Σχεδιάζουν το σχήμα

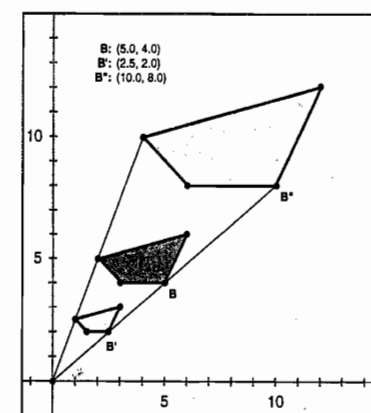
που προκύπτει. Ποιο είναι το αποτέλεσμα; Τώρα βάλτε τα παιδιά να πολλαπλασιάσουν τις συντεταγμένες με το 1/2 και να σχεδιάσουν το σχήμα. Ποιο είναι το αποτέλεσμα; Στη συνέχεια τα παιδιά σχεδιάζουν μία ευθεία από την αρχή των αξόνων μέχρι μια κορυφή του μεγαλύτερου σχήματος στο χαρτί τους. Επαναλάβετε για μία ή δύο ακόμη κορυφές και ρωτήστε για τις παρατηρήσεις (ένα παράδειγμα δίνεται στο Σχήμα 21.41).

II Σπαματί και στοκάομαι

Πώς συγκρίνονται τα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά των σχημάτων όταν οι συντεταγμένες πολλαπλασιάζονται με το 2; Τι θα γίνει αν πολλαπλασιασθούν με το 3 ή το 0,5;

Όταν οι συντεταγμένες ενός σχήματος πολλαπλασιάζονται όπως στην τελευταία δραστηριότητα, κάθε μία με τον ίδιο πολλαπλασιαστή, το σχήμα είτε γίνεται μεγαλύτερο είτε μικρότερο. Το μέγεθος αλλάζει όχι όμως και το σχήμα. Το νέο σχήμα είναι όμοιο με το παλιό. Αυτό ονομάζεται *μεγέθυνση*, ένας μετασχηματισμός που δεν είναι άκαμπτος επειδή το σχήμα αλλάζει.

Στα παιδιά σας μπορεί να αρέσει να διερευνήσουν αυτό το φαινόμενο ακόμη περισσότερο. Αν ξεκινήσουν με μια γραμμή και ζωγραφίσουν ένα απλό πρόσωπο, μία βάρκα, ή κάποιο άλλο σχήμα ζωγραφισμένο με ευθείες γραμμές που συνδέουν κάθετες, θα δημιουργήσουν ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα πολλαπλασιάζοντας μόνο τις πρώτες συντεταγμένες, μόνο τις δεύτερες, ή χρησιμοποιώντας διαφορετικό πολ-



ΣΧΗΜΑ 21.41 Μεγέθυνση με συντεταγμένες. Οι συντεταγμένες του κεντρικού σχήματος πολλαπλασιάζονται με το 2 και με το 0,5 για να δημιουργήσουν τα άλλα δύο σχήματα.

λαπλασιαστή για την κάθε μία. Όταν πολλαπλασιάζεται μόνο η δεύτερη συντεταγμένη, μεταβάλλονται μόνο οι κάθετες διαστάσεις, έτσι το σχήμα μεγαλώνει ανάλογα (ή μικραίνει) με ένα κάθετο τρόπο. Τα παιδιά μπορούν να διερευνήσουν αυτή τη διεργασία για να παραμορφώσουν σχήματα με διάφορους τρόπους.

Είναι εντυπωσιακό να βλέπει κανείς πώς μία αριθμητική λειτουργία μπορεί να ελέγξει ένα σχήμα. Φανταστείτε να μπορείτε να ελέγξετε τα γλιστρήματα, τις διπλώσεις, τις περιστροφές και τις μεγεθύνσεις, όχι μόνο σε επίπεδα αλλά και σε σχήματα τριών διαστάσεων στο χώρο. Η διαδικασία είναι πανομοιότυπη με τη λογική των τεχνικών σχεδιασμού στους Η/Υ.

Η Θέση στο χώρο για τα Παιδιά του Επιπέδου 2

Επιφανειακά, μπορεί να μην υπάρχει ξεκάθαρη διάκριση ανάμεσα στις δραστηριότητες των συντεταγμένων στο επίπεδο 1 μ' εκείνες στο επίπεδο 2. Ωστόσο, όπως έχει ήδη αναφερθεί πολλές φορές, η πορεία προς το συλλογισμό του επιπέδου 2 επισημαίνεται από ενστάλαξη της λογικής αιτιολόγησης στις δραστηριότητες.

Επανεξέταση του Μετασχηματισμού των Συντεταγμένων

Είναι πολύ λογικό μια τάξη να έχει παιδιά των οποίων ο συλλογισμός να είναι είτε του επιπέδου 1 είτε του επιπέδου 2 ή τουλάχιστον παιδιά που είναι έτοιμα να προχωρήσουν στη λογική αιτιολόγηση. Ενώ διερευνούν τις δραστηριότητες μετασχηματισμού στην προηγούμενη ενότητα, μπορείτε να προκαλέσετε τα παιδιά που είναι έτοιμα με ερωτήματα όπως τα ακόλουθα που είναι κάτι περισσότερο από απλές διερευνήσεις:

- Πώς θα πρέπει να αλλάξουν οι συντεταγμένες για να προκαλέσουν μια αντανάκλαση αν ο άξονας συμμετρίας δεν είναι ο άξονας των x αλλά είναι μια ευθεία παράλληλη προς αυτόν;
- Μπορείτε να ανακαλύψετε ένα μόνο κανόνα για τις συντεταγμένες που θα προκαλούσε μια αντανάκλαση ως προς έναν από τους άξονες ακολουθούμενος από μια περιστροφή του ενός τετάρτου; Ο κανόνας είναι ίδιος για την αντίθετη σειρά –μια στροφή του ενός τετάρτου ακολουθούμενη από μια αντανάκλαση;
- Αν γίνουν δύο διαδοχικά γλιστρήματα με τις συντεταγμένες και γνωρίζετε ότι προστέθηκαν ή αφαιρέθηκαν αριθμοί, τι αριθμούς θα πρέπει να προστεθεί ή να αφαιρεθεί για να φτάσει το σχήμα εκεί με μόνο μία κίνηση;
- Τι νομίζετε ότι θα συμβεί αν, σε μία μεγένθυση, χρησιμοποιηθούν διαφορετικοί παράγοντες για τις διαφορετικές συντεταγμένες;



Μόλις τα παιδιά αρχίσουν να διερευνούν ερωτήματα αυτού του τύπου, μπορεί να σκεφτούν τα δικά τους ερωτήματα και τις δικές τους διερευνήσεις. Ωστόσο, η πλήξη του να σχεδιάζουν σημεία πάνω στο πλέγμα των συντεταγμένων μπορεί να αποτελέσει σημαντικό πλεονέκτημα. Το *Geometer's Sketchpad* περιλαμβάνει ένα προαιρετικό πλέγμα συντεταγμένων. Αν τα σχέδια γίνουν με τα σημεία «σπασμένα» στο πλέγμα, οι μετασχηματισμοί των συντεταγμένων μπορούν να διερευνηθούν με μεγαλύτερη ευκολία. ■

Εφαρμόζοντας την Πυθαγόρεια Σχέση

Η γεωμετρική εκδοχή της Πυθαγόρειας σχέσης σχετίζεται με τα εμβαδά. Η ακόλουθη δραστηριότητα θέλει τα παιδιά να χρησιμοποιούν πλέγματα συντεταγμένων και την Πυθαγόρεια σχέση, για να αναπτύξουν έναν τύπο για την απόσταση μεταξύ δύο σημείων.

Δραστηριότητα 21.30

Ο τύπος της Απόστασης

Βάλτε τα παιδιά να σχεδιάσουν μία ευθεία μεταξύ δύο σημείων στο πρώτο τεταρτημόριο, τα οποία να μην βρίσκονται στην ίδια οριζόντια ή κάθετη ευθεία. Το αντικείμενο της δραστηριότητας είναι να χρησιμοποιήσουν τις συντεταγμένες μόνο των τελικών σημείων για να βρουν τη μεταξύ τους απόσταση όσον αφορά στις μονάδες του πλέγματος. Με αυτό το σκοπό, προτείνετε να σχεδιάσουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο χρησιμοποιώντας την ευθεία για την υποτείνουσα. Η κορυφή του ορθογωνίου τριγώνου θα μοιραστεί μία συντεταγμένη από καθένα από τα δύο τελικά σημεία. Τα παιδιά υπολογίζουν τα εμβαδά των τετραγώνων των καθετών και προσθέτουν για να βρουν το εμβαδόν του τετραγώνου της υποτείνουσας. Τώρα το μήκος του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος (η απόσταση μεταξύ των σημείων) είναι ο αριθμός, το τετράγωνο του οποίου είναι το εμβαδόν του τετραγώνου της υποτείνουσας. (Αυτή η τελευταία πρόταση είναι μία γεωμετρική ερμηνεία της τετραγωνικής ρίζας). Βάλτε τα παιδιά να ακολουθήσουν αυτές τις οδηγίες για να υπολογίσουν το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος.

Στη συνέχεια, βάλτε τα να κοπιάσουν όλους τους υπολογισμούς τους και να δουν πώς χρησιμοποιήθηκαν οι συντεταγμένες αυτών των σημείων. Προκαλέστε τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν τον ίδιο τύπο υπολογισμών για να μετρήσουν την απόσταση μεταξύ δύο νέων σημείων χωρίς να σχεδιάσουν καμία εικόνα.

Τα παιδιά του επιπέδου 2 δεν κατασκευάζουν απαραίτητα αποδείξεις, αλλά θα πρέπει να ακολουθούν τη λογική βάση που υπάρχει στις αποδείξεις. Καθοδηγώντας τα

παιδιά μέσα από τη διαδικασία εύρεσης του μήκους ενός ευθύγραμμου τμήματος (ή της απόστασης μεταξύ δύο σημείων), τους δίνετε επαρκείς πληροφορίες για να υπολογίσουν τα μήκη των άλλων ευθύγραμμων τμημάτων. Τα παιδιά θα διαπιστώσουν ότι το μόνο που χρειάζονται είναι οι συντεταγμένες των δύο σημείων, για να υπολογίσουν τα εμβαδά και των τριών τετραγώνων, άρα, και την υποτείνουσα. Εάν, έπειτα, τα βοηθήσετε να αντικαταστήσουν συγκεκριμένες συντεταγμένες με γράμματα, προκύπτει ένας γενικός τύπος για την απόσταση.

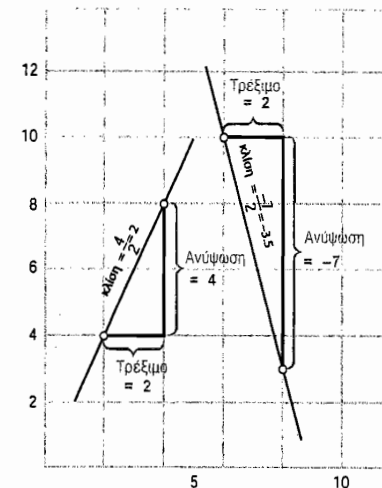
Κλίση

Το θέμα της κλίσης είναι μία ακόμη σύνδεση μεταξύ της γεωμετρίας και της άλγεβρας. Για να αρχίσετε μία συζήτηση γύρω από την κλίση, σχεδιάστε στον πίνακα πολλές διαφορετικές επικλινείς ευθείες. Συζητήστε με ποιον τρόπο είναι διαφορετικές. Κάποιες είναι πιο απότομες από τις άλλες. Κάποιες πάνε προς τα πάνω και άλλες προς τα κάτω. Εάν συμφωνείτε ότι «πάνω» σημαίνει ανοδική κλίση από τα αριστερά στα δεξιά, τότε μπορείτε να συμφωνήσετε ποια πηγαίνει προς τα πάνω και ποια προς τα κάτω. Αυτό το «απότομο» μιας ευθείας είναι μία ιδιότητα που μπορεί να μετρηθεί όπως άλλες μετρήσιμες ιδιότητες. Για να δώσετε στην κλίση έναν αριθμό απαιτείται μία ευθεία αναφοράς. Το πλέγμα με συντεταγμένες προσφέρει ένα σημείο αναφοράς (τον άξονα « x ») και τους αριθμούς για να χρησιμοποιηθούν στη μέτρηση. Αφιερώστε κάποιο χρόνο στο να βάλετε τα παιδιά να ενοικήσουν τις δικές τους μεθόδους για τη σύνδεση ενός αριθμού με την έννοια του απότομου.

Η σύμβαση για τη μέτρηση του απότομου μίας ευθείας ή της «κλίσης» βασίζεται στις ιδέες της ανήλωσης και του τρεξίματος δύο οποιονδήποτε σημείων πάνω στην ευθεία. Η «ανήλωση» είναι η κάθετη αλλαγή από το αριστερό σημείο προς το δεξιά – θετική αν είναι προς τα πάνω, αρνητική αν είναι προς τα κάτω. Το «τρέξιμο» είναι η οριζόντια απόσταση από το αριστερό σημείο προς το δεξιά. Η κλίση ορίζεται τότε ως «άνοδος + τρέξιμο» ή ο λόγος της κάθετης αλλαγής προς την οριζόντια (βλέπε Σχήμα 21.42). Αποτελεί γενική σύμβαση ότι οι κάθετες ευθείες δεν έχουν όλες κλίση ή η κλίση λέγεται πως είναι «αόριστη». Οι οριζόντιες ευθείες έχουν μηδενική κλίση, ως αποτέλεσμα του ορισμού.

Αφού δοθεί στα παιδιά ο ορισμός, θα πρέπει να είναι σε θέση να υπολογίζουν τις κλίσεις οποιασδήποτε μη κάθετης ευθείας που είναι σχεδιασμένη σε ένα πλέγμα συντεταγμένων χωρίς περαιτέρω βοήθεια και χωρίς τύπους. Αφού καταστεί κατανοητός ο ορισμός της κλίσης, δε χρειάζεται τίποτε άλλο.

Μία καλή βασισμένη σε πρόβλημα δραστηριότητα είναι να συλλογισθείτε τι μπορεί να ειπωθεί για τις κλίσεις παραλλήλων και κάθετων ευθειών (αυτό είναι γεωμετρία ή άλγεβρα; Έχει σημασία;)



ΣΧΗΜΑ 21.42 Η κλίση μίας ευθείας είναι ίση με την ανύψωση ÷ τρέξιμο.

Μαθαίνοντας για τη Νοερή Απεικόνιση

Η νοερή απεικόνιση μπορεί να ονομαστεί «γεωμετρία που γίνεται με τα μάτια του μυαλού». Πρέπει να είστε σε θέση να δημιουργείτε νοερές εικόνες σχημάτων και να μπορείτε να τις περιστρέψετε επίσης νοερά, σκεπτόμενοι πώς θα ήταν από διαφορετικές οπτικές –προβλέποντας τα αποτελέσματα διαφόρων μετασχηματισμών. Περιλαμβάνει τη νοητική συντεταγμένη δύο και τριών διαστάσεων –προβλέποντας το ξετύλιγμα ενός κουτιού ή τη κατανόηση ενός διδιάστατου σχεδίου ενός τρισδιάστατου σχήματος. Οποιαδήποτε δραστηριότητα που απαιτεί από τα παιδιά να σκεφτούν μόνο νοερά ένα σχήμα, να το χειριστούν ή να το μετασχηματίσουν νοερά, να το αναπαραστήσουν όπως το βλέπουν νοερά, θα συνεπιδράσει στην ανάπτυξη των δεξιοτήτων της νοερής απεικόνισης στα παιδιά.

Η Νοερή Απεικόνιση για τα Παιδιά του Επιπέδου 0

Στο επίπεδο 0 τα παιδιά είναι σίγουρο ότι θα σκεφτούν τα σχήματα σύμφωνα με το πώς φαίνονται. Οι δραστηριότητες νοερής απεικόνισης σε αυτό το επίπεδο θα κάνουν τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν μια ποικιλία φυσικών σχημάτων και σχεδίων και θα τα προκαλέσει να σκεφτούν αυτά τα σχήματα σε διαφορετικούς προσανατολισμούς.

Η εύρεση του πόσα διαφορετικά σχήματα μπορούν να γίνουν με ένα δεδομένο αριθμό απλών πλακιδίων προϋποθέτει τα παιδιά να τινάζουν και να στριφογυρίζουν τα σχήματα στο μυαλό τους και να βρίσκουν τρόπους να αποφασίζουν αν τα έχουν βρει όλα. Αυτός είναι και ο στόχος της επόμενης δραστηριότητας.

Δραστηριότητα 21.31

Πεντόμινο

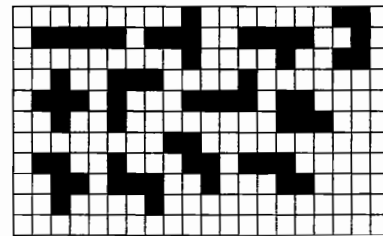
Το πεντόμινο είναι ένα σχήμα που δημιουργείται από την ένωση πέντε τετραγώνων, που είναι σαν να κόπηκαν από πλέγμα με τετράγωνα. Κάθε τετράγωνο πρέπει να έχει τουλάχιστον μία πλευρά κοινή με το άλλο. Δώστε στα παιδιά πέντε τετράγωνα πλακίδια και ένα φύλλο χαρτί με τετράγωνα για την αναπαραγωγή. Προκαλέστε τους να δουν πόσα διαφορετικά πεντόμινο μπορούν να βρουν. Σχήματα που είναι διπλώσεις ή στροφές από άλλα δεν θεωρούνται διαφορετικά. Μην πείτε στα παιδιά πόσα πεντόμινο υπάρχουν. Από την απόφαση για το αν κάποια σχήματα είναι πράγματι διαφορετικά και αν όλα τα σχήματα έχουν βρεθεί θα προκύψουν καλές συζητήσεις.

Μόλις τα παιδιά αποφασίσουν ότι υπάρχουν μόνο 12 πεντόμινο (βλέπε Σχήμα 21.43), τα 12 κομμάτια μπορούν τότε να χρησιμοποιηθούν σε μία ποικιλία δραστηριοτήτων. Κολλήστε τα πλέγματα με τα πεντόμινο των παιδιών πάνω στον πίνακα και αφήστε τα να κόψουν τα 12 σχήματα.

Επίσης διασκεδαστικό είναι να ερευνήσετε τον αριθμό των σχημάτων που μπορούν να γίνουν από έξι ισόπλευρα τρίγωνα ή από τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα 45 μοιρών (μισά τετραγώνων). Με τα ορθογώνια τρίγωνα, οι πλευρές που εφάπτονται πρέπει να είναι του ίδιου μήκους. Πόσα από καθένα από αυτά τα «ντόμινο» νομίζετε ότι υπάρχουν;

Πολλές δραστηριότητες μπορούν να γίνουν με τα πεντόμινο. Για παράδειγμα, δοκιμάστε να ταιριάζετε όλα τα 12 κομμάτια μέσα σε ένα ορθογώνιο διαστάσεων 6x10 ή 5x12. Επίσης, καθένα από τα 12 κομμάτια μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ψηφίδα. Μία άλλη δραστηριότητα είναι να εξετάσετε καθένα από τα 12 πεντόμινο και να αποφασίσετε ποιο θα διπλωθεί για να φτιάξει ένα ανοιχτό κουτί. Για εκείνους που είναι «κατασκευαστές κουτιών», ποιο τετράγωνο είναι το κάτω μέρος;

Μία άλλη άποψη νοερής απεικόνισης για τα μικρά παιδιά είναι να μπορούν να σκεφτούν στερεά σχήματα όσον αφορά στις έδρες τους ή τις πλευρές τους. Για αυτές τις δραστηριότητες θα χρειαστεί να φτιάξετε «κάρτες εδρών» αναγράφοντας όλες τις διαφορετικές έδρες ενός σχήματος, είτε κάνοντας όλες τις έδρες σε μία κάρτα είτε σε μία συλλογή από ξεχωριστές κάρτες με μία έδρα ανά κάρτα (βλέπε Σχήμα 21.44).



Υπάρχουν 12 πεντόμινο.

Μία καλή άσκηση για τη λύση του προβλήματος του χώρου είναι να βρείτε όλα τα πιθανά σχήματα που δημιουργούνται με πέντε τετράγωνα ή έξι τετράγωνα (καλούνται «εξόμινο» ή έξι ισόπλευρα τρίγωνα κ.ο.κ.



Τέσσερα από τα διαφορετικά σχήματα που θα δημιουργήσουν έξι ισόπλευρα τρίγωνα.



Τέσσερα από τα διαφορετικά σχήματα που θα δημιουργήσουν τέσσερα «ημι-τετράγωνα».

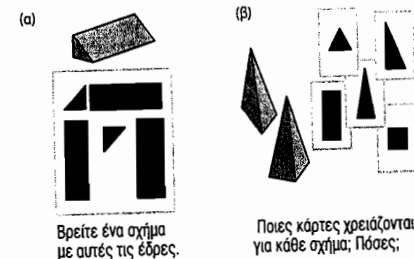
ΣΧΗΜΑ 21.43 Πεντόμινο και σχετικές προκλήσεις σχημάτων

Δραστηριότητα 21.32

Αντιστοίχιση Εδρών

Υπάρχουν δύο εκδοχές της δραστηριότητας: Δοθείσης της κάρτας έδρας βρείτε το αντίστοιχο στερεό, ή δοθέντος του στερεού, βρείτε την κάρτα έδρας. Με μία συλλογή από μεμονωμένες κάρτες εδρών, τα παιδιά μπορούν να επιλέξουν τις κάρτες που ταιριάζουν με ένα συγκεκριμένο τετράγωνο. Για μία άλλη εκδοχή, βάλτε σε σωρό να κοιτάζουν προς τα κάτω, όλες τις μεμονωμένες κάρτες εδρών ενός τετραγώνου. Γυρίστε τις ανάποδα, μία κάθε φορά, ως βοήθεια στο να βρείτε το τετράγωνο.

Η ακόλουθη δραστηριότητα βρίσκεται έχει προσαρμοστεί από το βιβλίο του *NCTM Principles and Standards* και βρίσκεται στο τμήμα για την προσχολική αγωγή μέχρι τη δεύτερη τάξη για τη γεωμετρία (*NCTM*, 2000, σελ. 101). Μια παρόμοια δραστηριότητα βρίσκεται επίσης και στο αναλυτικό πρόγραμμα *Investigations for Number, Data and Space*.



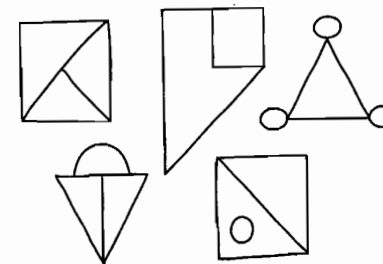
ΣΧΗΜΑ 21.44 Αντιστοιχίζοντας κάρτες εδρών με στερεά σχήματα.

Δραστηριότητα 21.33

Γρήγορες Εικόνες

Κάντε μερικά απλά σχέδια σε διαφάνειες έτσι ώστε να μπορείτε να τα δείχνετε στα παιδιά ένα τη φορά. Θα πρέπει να είναι σχέδια που τα παιδιά να μπορούν εύκολα να τα αναπαράγουν. Ορισμένα παραδείγματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 21.45. Στο διαφανοσκόπιο δείχνετε ένα από τα σχέδια για περίπου 5 δευτερόλεπτα. Μετά βάλτε τα παιδιά να προσπαθήσουν να τα αναπαράγουν στο δικό τους χαρτί. Δείξτε το ίδιο σχέδιο ξανά για μερικά δευτερόλεπτα και αφήστε τα παιδιά να αλλάξουν τα σχέδια τους. Επαναλάβετε με περισσότερα σχέδια.

Στις συζητήσεις σας με τα παιδιά, ρωτήστε τους να σας πουν πώς σκέφτηκαν το σχέδιο, ή να το περιγράψουν με λόγια που τους βοήθησαν να θυμηθούν αυτό που είδαν. Καθώς τα παιδιά μαθαίνουν να περιγράφουν λεκτικά αυτό που βλέπουν, θα βελτιωθεί η οπτική τους μνήμη.



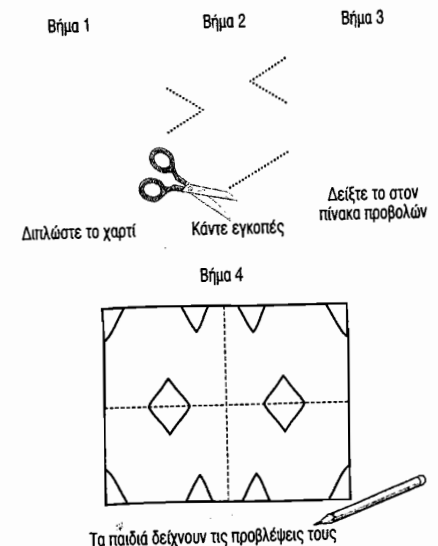
ΣΧΗΜΑ 21.45 Παραδείγματα σχεδίων που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στις «Γρήγορες Εικόνες». Σχεδιάστε το καθένα σε μια διαφάνεια έτσι ώστε όλο το σχέδιο να έχει μήκος 4 ή 5 ίντσες. Δείξτε το σχέδιο στα παιδιά σύντομα και βάλτε τους να το ζωγραφίσουν σε χαρτί από μνήμη.

Στην τελευταία δραστηριότητα, η οπτική μνήμη καθώς και η ικανότητα να δημιουργούν ένα σχέδιο έπαιξε πολύ σημαντικό ρόλο. Επίσης σημαντική είναι η σκέψη για την θέση των γραμμών και τα χαρακτηριστικά του σχεδίου. Στην επόμενη δραστηριότητα τα παιδιά πρέπει να κινήσουν σχήματα νοερά και να προβλέψουν τα αποτελέσματα. Η δραστηριότητα συνδυάζει ιδέες σχετικά με τη συμμετρία (αντανακλάσεις) καθώς και τη νοερή απεικόνιση και την χωρική συλλογιστική σκέψη.

Δραστηριότητα 21.34

Εγκοπές και Τρύπες

Χρησιμοποιήστε μισό φύλλο χαρτί που θα ταιριάζει εύκολα στον πίνακα προβολών. Διπλώστε το στη μέση και μετά ξανά στη μέση, διπλώνοντας το τη δεύτερη φορά προς την αντίθετη κατεύθυνση από την πρώτη. Τα παιδιά κάνουν ένα σχέδιο του χαρτί όταν το ανοίγετε, δείχνοντας μια γραμμή για το κάθε διπλώμα. Με το χαρτί διπλωμένο, κάντε εγκοπές σε μία ή δύο πλευρές και / ή κόψτε μία ή δύο από τις γωνίες. Μπορείτε επίσης να χρησιμοποιήσετε ένα διακορευτή για να κάνετε μία ή δύο τρύπες. Ενώ είναι ακόμα διπλωμένο, τοποθετήστε το χαρτί στον πίνακα προβολών δείχνοντας τις εγκοπές και τις τρύπες (βλέπε Σχήμα



ΣΧΗΜΑ 21.46 Ένα παράδειγμα που δείχνει πώς γίνεται η δραστηριότητα «Εγκοπές και Τρύπες». Διπλώστε δύο φορές και κάντε εγκοπές και / ή κόψτε τρύπες στο διπλωμένο χαρτί. Πρωτό το ξεδιπλώσατε, τα παιδιά κάνουν ένα σχέδιο προβλέποντας το αποτέλεσμα που θα φαίνεται όταν ξεδιπλωθεί το χαρτί.

21.46). Η εργασία των παιδιών είναι να σχεδιάσουν τις εγκοπές και τις τρύπες που νομίζουν ότι θα εμφανιστούν όταν θα ξεδιπλώσετε το χαρτί.

Για να εισάγετε αυτή τη δραστηριότητα, αρχίστε με ένα μόνο δίπλωμα και μόνο δύο εγκοπές. Παραμείνετε με το μόνο δίπλωμα μέχρι τα παιδιά να είναι έτοιμα για μια πιο δύσκολη πρόκληση.

Στη δραστηριότητα «Εγκοπές και Τρύπες» τα παιδιά θα μάθουν τελικά ποια κομμάτια δημιουργούν τρύπες και πόσες καθώς και ποια κομμάτια δημιουργούν εγκοπές στις άκρες ή στις γωνίες. Παρατηρήστε πώς η αξονική συμμετρία ή η αντανάκλαση παίζουν σημαντικό ρόλο σε αυτή τη δραστηριότητα. Η συμμετρία καθορίζει τη θέση, το σχήμα και τον αριθμό των τρυπών που δημιουργήθηκαν από το κάθε κομμάτι.

Η Νοερή Απεικόνιση για τα Παιδιά του Επιπέδου 1

Αναγνωρίζοντας μια δραστηριότητα νοερής απεικόνισης είτε ως επίπεδο 0 ή 1, μία σκέψη είναι ο βαθμός προσοχής που πρέπει να δοθεί στις συγκεκριμένες ιδιότητες των σχημάτων. Οι δραστηριότητες σε αυτό το τμήμα είναι σχεδόν σίγουρο ότι είναι πολύ δύσκολες για τα παιδιά του επιπέδου 0.



Η γεωμετρία είναι ένας τομέας του προγράμματος σπουδών για την οποία υπάρχει μία ποικιλία από καταληκτικά προγράμματα στους Η/Υ. Πολλά προγράμματα επιτρέπουν στα παιδιά να «σημαδεύουν» γεωμετρικά σχήματα όπως τάνγκραμ ή σχέδια κύβων με τετραγωνάκια στην οθόνη και έπειτα να τα χειριστούν. Έχουμε ήδη συζητήσει για τους ηλεκτρονικούς γεωμετρικούς πίνακες, τα ηλεκτρονικά τάνγκραμ και το πρόγραμμα Logo για τους Η/Υ. Εδώ υπάρχουν μερικά ακόμα παραδείγματα.

Τα *Shape Up* (Sunburst, 1995) και *Shapes* (Clements & Sarama, 1995), είναι δύο καλά παραδείγματα εκδοχών των ψηφιδωτών στους Η/Υ. Και τα δύο προγράμματα περιλαμβάνουν ένα σχέδιο κύβων και μία μορφή τάνγκραμ, τα οποία τα παιδιά μπορούν να σημαδεύουν σε μία μαύρη οθόνη. Τα κομμάτια μετακινούνται εύκολα, περιστρέφονται ή διπλώνονται μέσω μιας κάθετης ή οριζόντιας γραμμής. Στο *Shapes* δύο ή περισσότερα σχήματα μπορούν να «κολληθούν μαζί» για να δημιουργήσουν νέα σχήματα. Τα σχέδια κύβων περιέχουν ένα τέταρτο του κύκλου, που προσθέτει στη μεταβλητότητα. Και τα δύο προγράμματα επιτρέπουν στα σχήματα να μεγεθύνονται ή να σμικρύνονται. Κάποια παζλ περιλαμβάνονται στα πακέτα και δημιουργούνται εύκολα νέα παζλ. Το *Shape Up* έχει έναν τρίτο τρόπο με τον οποίο μπορεί κανείς να χειριστεί έξι κανονικά κομμάτια και με τον οποίο το καθένα μπορεί να κοπεί σε πολλά μικρότερα κομμάτια και να επανασυναρμολογηθεί με άπειρους τρόπους. ■

Ένας από τους κύριους στόχους του προγράμματος του *Geometry Standard* για την νοερή απεικόνιση είναι να μπορείτε να ταυτίσετε και να ζωγραφίσετε διδιάστατα είδωλα τρισδιάστατων σχημάτων, καθώς και να κατασκευάζετε τρισδιάστατα σχήματα από διδιάστατα είδωλα. Οι δραστηριότητες που αποσκοπούν σε αυτόν τον στόχο συχνά περιλαμβάνουν σχέδια από μικρά «κτίσματα» που έγιναν από κύβους μίας έντασης.

Δραστηριότητα 21.35

Όψεις

α. Στην πρώτη εκδοχή, τα παιδιά αρχίζουν με μία κατασκευή και ζωγραφίζουν ότι βλέπουν στο αριστερό, δεξιά, μπροστινό και πίσω μέρος. Στο σχήμα 21.47, το πλάνο της κατασκευής δείχνει αυτό που φαίνεται από ψηλά και τον αριθμό των τετραγώνων σε κάθε θέση. Αφού τα παιδιά κτίσουν μία κατασκευή από ένα πλάνο σαν αυτό, η αποστολή τους είναι να ζωγραφίσουν αυτό που βλέπουν στο μπροστινό, δεξιά, αριστερό και πίσω μέρος, όπως φαίνεται στο σχήμα.

β. Στην αντίθετη εκδοχή της δραστηριότητας δίνεται στα παιδιά η όψη από δεξιά και μπροστά. Αντικείμενο της δραστηριότητας είναι να χτίσουν την κατασκευή που έχει αυτές τις όψεις. Για να καταγράψουν τη λύση τους, σχεδιάζουν ένα σχέδιο της κατασκευής (η πάνω όψη με αριθμούς).

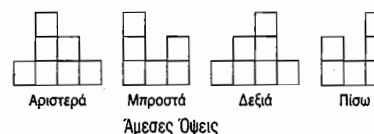
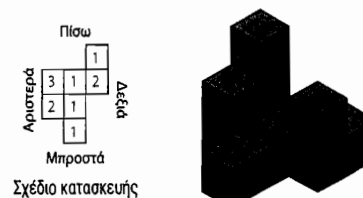
Σημειώστε ότι οι όψεις από μπροστά και πίσω είναι συμμετρικές όπως είναι και οι όψεις από αριστερά και δεξιά. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο μόνο μία από αυτές δίνεται στο μέρος β της δραστηριότητας.

Στη δραστηριότητα «Όψεις» τα παιδιά κατασκεύαζαν κτίσματα από κύβους 1 έντασης, και τα συναρμολόγησαν με τις άμεσες όψεις των πλευρών και της κορυφής. Μια άλλη πιο απαιτητική δραστηριότητα είναι να σχεδιάσουν μια συνολική οπτική αυτών των κτισμάτων με τους κύβους ή να συνταξιοποιούν τα προοπτικά σχέδια με ένα κτίσμα. Για αυτά τα σχέδια μπορούν να χρησιμοποιήσουν ισομετρικό πλέγμα με κορυφίδες. Η επόμενη δραστηριότητα δίνει μια ιδέα για αυτή τη μορφή των δραστηριοτήτων νοερής απεικόνισης.

Δραστηριότητα 21.36

Σχέδια με Προοπτική

α. Στην πρώτη εκδοχή, τα παιδιά αρχίζουν με ένα προοπτικό σχέδιο ενός κτίσματος. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν κρυμμένοι κύβοι. Από το σχέδιο τα παιδιά κατασκευάζουν το ίδιο το κτίσμα με τους κύβους τους. Για να καταγράψουν το αποτέλεσμα, κάνουν ένα σχέδιο του κτίσματος παρουσιάζοντας τον αριθμό των κύβων σε κάθε θέση.



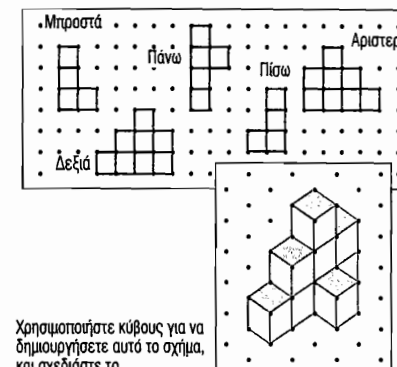
ΣΧΗΜΑ 21.47 Οι δραστηριότητες μπορούν να ξεκινήσουν με ένα Σχέδιο της Κατασκευής ή με την Άμεση Όψη ή ακόμη και με την κατασκευή. Τα παιδιά δίνουν τις άλλες αντιπροσωπεύσεις.

β. Στη δεύτερη εκδοχή, δίνονται στα παιδιά είτε ένα σχέδιο των κύβων είτε οι πέντε άμεσες όψεις. Κατασκευάζουν το κτίσμα σύμφωνα με αυτές και σχεδιάζουν δύο ή περισσότερα προοπτικά σχέδια. Υπάρχουν τέσσερις πιθανές προοπτικές πάνω από το τραπέζι: η μπροστά αριστερά και δεξιά, και η πίσω αριστερά και δεξιά. Είναι χρήσιμο να κατασκευάσουν το κτίσμα σε ένα φύλλο χαρτιού με τις λέξεις «μπροστά», «πίσω», «αριστερά» και «δεξιά» γραμμένες στις άκρες για να μην μπερδεύουν τις διαφορετικές όψεις.

Το Σχήμα 21.48 παρουσιάζει ένα παράδειγμα αυτής της τελευταίας δραστηριότητας. Υπάρχουν μερικές εξαιρετικές βιβλιογραφικές αναφορές για αυτή τη δραστηριότητα. Δεν είναι απαραίτητο να προετοιμάσετε μόνοι σας αυτή τη δραστηριότητα. Ίσως το πιο γνωστό βιβλίο είναι το *Middle Grades Mathematics Project: Spatial Visualization* (Winter, Lappan, Phillips, & Fitzgerald, 1986). Η σειρά βιβλίων *Navigating through Geometry* του NCTM έχουν παρόμοιες δραστηριότητες στα βιβλία που αναφέρονται στις τάξεις από την τρίτη μέχρι και την πέμπτη τάξη όσο και στις τάξεις από την έκτη δημοτικού μέχρι τη δεύτερα γυμνασίου (βλέπε Προτεινόμενη Βιβλιογραφία).



Ένα εξαιρετικό εργαλείο υπολογιστή για το σχεδιασμό προοπτικών σχεδίων για κτίσματα με κύβους όπως στη Δραστηριότητα 21.36 είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα του *Illuminations* (<http://illuminations.nctm.org/tools/isometric/isometric.asp>). Αυτό το πρόγραμμα απαιτεί μόνο το πάτημα του ποντικιού για να σχεδιάσετε είτε ολόκληρους κύβους, είτε μία μεμονω-



Χρησιμοποιήστε κύβους για να δημιουργήσετε αυτό το σχήμα, και σχεδιάστε το.

ΣΧΗΜΑ 21.48 Ανάπτυξη προοπτικής και οπτικής αντίληψης με κύβους και απλές όψεις. Σχεδιάστε «κτίσματα» από κύβους σε ισομετρικά πλέγματα.

μένη έδρα ενός κύβου ή απλώς ευθείες. Τα σχέδια, ωστόσο, στην πραγματικότητα είναι «κτίσματα» και μπορούν να ιδωθούν ως τρισδιάστατα αντικείμενα. Μπορούν να περιστραφούν στο χώρο έτσι ώστε να μπορούν να θεωρηθούν από οποιαδήποτε οπτική. Οι έτοιμες έρευνες είναι ενημερωτικές και καθοδηγούν επίσης τα παιδιά στα χαρακτηριστικά του εργαλείου. Το βοηθητικό πρόγραμμα του NLVM, *Space Blocks*, είναι πιο εύκολο για να το χρησιμοποιήσουν τα παιδιά αλλά επιτρέπει μόνο την επανατοποθέτηση των κύβων (<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>). ■

Μία άλλη ενδιαφέρουσα σύνδεση μεταξύ δύο και τριών διαστάσεων βρίσκεται στο κόσμιο των στερεών με διαφορετικούς τρόπους. Όταν ένα στερεό κόβεται σε δύο μέρη, ένα διδιάστατο σχήμα δημιουργείται στις κομμένες έδρες. Το Σχήμα 21.49 δείχνει έναν κύβο που κόβεται στη γωνία, αφήνοντας μία τριγωνική έδρα. Οι φέτες μπορούν να διερευνηθούν με πηλό κομμένο με καλντρίο όπως φαίνεται στο σχήμα. Μία εξυπνότερη μέθοδος είναι να γεμίσετε μερικώς ένα πλαστικό στερεό με νερό. Η επιφάνεια του νερού είναι η ίδια με την έδρα μιας φέτας συμπίπτοντας με την επιφάνεια του νερού. Κόβοντας το σχήμα με διαφορετικούς τρόπους μπορείτε να παρατηρήσετε κάθε πιθανή «φέτα». Μικρά πλαστικά στερεά όπως το *Power Solids* είναι ό, τι πρέπει για αυτό.

Δραστηριότητα 21.37

Φέτες με Νερό

Στα παιδιά δίνεται ένα στερεό και προκαλούνται να σκεφτούν πώς θα το κόψουν για να φτιάξουν μία καθορισμένη κομμένη έδρα. Η λίστα με τις απαιτήσεις θα πρέπει να περιλαμβάνει κάποια πράγματα που δεν

μπορούν να γίνουν. Προτού χυθεί το νερό στα στερεά, τα παιδιά πρέπει να δεσμευτούν γραπτά ως προς το αν η φέτα είναι δυνατή ή όχι. Αν πιστεύουν ότι είναι δυνατή, γράφουν και / ή σχεδιάζουν μία περιγραφή του πού πρέπει να το κόψουν. Ύστερα βάζουν νερό στο σχήμα για να ελέγξουν τις προβλέψεις τους. Εάν δεν υπάρχουν πλαστικά σχήματα διαθέσιμα, τα μοντέλα από πηλό είναι η αμέσως καλύτερη επιλογή. Αυτή είναι μία λίστα των δυνατών κομμένων εδρών για έναν κύβο:

Τετράγωνο, μη τετράγωνο ορθογώνιο, μη ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ισοσκελές τραπέζιο, μη ισοσκελές τραπέζιο, ισόπλευρο τρίγωνο, ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο, άλλο ισοσκελές τρίγωνο, σκαληνό ορθογώνιο τρίγωνο, άλλο σκαληνό τρίγωνο.

Το τετράεδρο, η τετράγωνη πυραμίδα και τα πρίσματα προσφέρουν παρόμοιες προκλήσεις. Για άλλα στερεά, μπορεί να είναι πιο ενδιαφέρον να βρείτε πόσους διαφορετικούς τύπους κομμένων εδρών μπορείτε να βρείτε και να περιγράψετε τον καθένα.

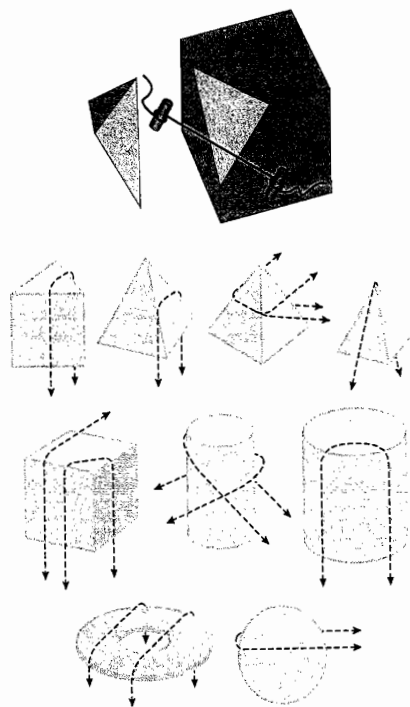
Η Νοερή Απεικόνιση για τα Παιδιά του Επιπέδου 2

Για μία ακόμα φορά, βλέπουμε ότι η λογική αιτιολόγηση είναι αυτό που διακρίνει τις δραστηριότητες για το επίπεδο 2 από αυτές στο επίπεδο 1. Ωστόσο, είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι αυτός είναι ένας τομέας γεωμετρίας όπου η διάκριση δεν είναι ιδιαίτερα έντονη. Στις μεγαλύτερες τάξεις, τα παιδιά σε μία αίθουσα είναι σχεδόν σίγουρο ότι θα είναι διαφορετικών επιπέδων. Οι δραστηριότητες που περιγράφονται για το επίπεδο 1 μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν έτσι ώστε να αποτελούν πρόκληση και για το επίπεδο 2. Όμοια, οι δραστηριότητες σε αυτό το μέρος θα σας βοηθήσουν να ωθήσετε τα παιδιά του επιπέδου 1 να αναπτύξουν τη σκέψη τους.

Συνδέοντας τις προηγούμενες δραστηριότητες με τη Νοερή Απεικόνιση του Επιπέδου 2

Ένα καλό παράδειγμα της σύμπτωσης στα επίπεδα βρίσκεται στη δραστηριότητα «Φέτες Νερού» (Δραστηριότητα 21.37). Τα παιδιά που είναι έτοιμα μπορούν να προκληθούν να κάνουν προβλέψεις σχετικά με τον τύπο της φέτας που μπορούν να κόψουν. Για παράδειγμα, δεδομένου ενός συγκεκριμένου στερεού, ίσως να ελέγξουν μία λίστα τύπων τριγώνων και τετραπλευρών και να αποφασίσουν ποια μπορούν να γίνουν και ποια είναι ανέφικτα. Για αυτά που πιστεύουν ότι είναι ανέφικτα, θα πρέπει να αιτιολογήσουν αυτή τους την υπόθεση. Όλα αυτά θα πρέπει να γίνουν χωρίς τη βοήθεια που τους παρέχεται με το να βάλουν νερό μέσα στα στερεά.

Η διάκριση ανάμεσα σε ένα τομέα της γεωμετρίας και έναν άλλο δεν είναι πάντα ξεκάθαρη. Έχουμε ήδη δει πώς διερευνήθηκαν πολλές από τις δραστηριότητες μετασχημα-



ΣΧΗΜΑ 21.49 Προβλέπτε την κομμένη έδρα προτού κόψετε ένα μοντέλο από πηλό με μία χορδή πιάνου.

τισμού με τη χρήση συντεταγμένων και επομένως, οι μετασχηματισμοί αναλύθηκαν στο τμήμα που αναφερθήκαμε στη θέση στο χώρο. Τα πεντόμμο, τα 12 σχήματα που έγιναν από 5 τετράγωνα, χρησιμοποιήθηκαν χωρίτερα σε μία δραστηριότητα μετασχηματισμού, στην οποία ζητήθηκε από τα παιδιά να βρουν πόσες διαφορετικές θέσεις μπορούν να πάρουν τα σχήματα στο επίπεδο («Θέσεις Πεντόμμο», Δραστηριότητα 21.22). Αυτό το μέρος της δραστηριότητας αποτελεί επίσης μια ξεκάθαρη δραστηριότητα νοερής απεικόνισης. Η ανάλυση που εξηγεί τον αριθμό των θέσεων έχει να κάνει με τους μετασχηματισμούς, ιδιαίτερα τις περιστροφές και τις αντανakλάσεις.

Τα ακόλουθα αποτελούν επεκτάσεις των δραστηριοτήτων με τα πεντόμμο και είναι κατάλληλες δραστηριότητες νοερής απεικόνισης για το επίπεδο 2.

- Πόσα εξόμμο υπάρχουν; Ένα εξόμμο γίνεται από έξι τετράγωνα ακολουθώντας τον ίδιο κανόνα όπως και με τα πεντόμμο. Εφόσον υπάρχουν αρκετά εξόμμο (35), είναι από τους καλούς τρόπους που υπάρχουν για να ξε-

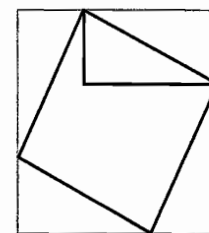
ρούμε ότι τα έχουμε βρει όλα είναι να σκαρφιστούμε ένα καλό λογικό σχέδιο για να κατηγοριοποιήσουμε αυτά τα σχήματα.

- Αντί να βάλουν και τα πέντε τετράγωνα μαζί, τα παιδιά μπορούν να βρουν όλες τις θέσεις των πέντε κύβων. Αυτά τα σχήματα ονομάζονται πεντομνοειδή. Γενικά, τα σχήματα που γίνονται από κύβους στους οποίους οι γειτονικοί κύβοι μοιράζονται μια ολόκληρη έδρα ονομάζονται πολυμνοειδή.

Οι αποδείξεις της Πυθαγόρειας σχέσης αποτελούν δραστηριότητες νοερής απεικόνισης όσο και οι δραστηριότητες για τα σχήματα και τις ιδιότητες. Θυμηθείτε ότι η Πυθαγόρεια σχέση λέει ότι ένα τετράγωνο που δημιουργείται από την υποτείνουσα ενός ορθογώνιου τριγώνου έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων που δημιουργούνται από τις δύο πλευρές. Το Σχήμα 21.50 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να σκαρφιστεί μία απόδειξη για αυτή τη σχέση. Μια δραστηριότητα νοερής απεικόνισης για τα παιδιά θα ήταν να τους δώσετε ή όχι κάποια στοιχεία για να τους βοηθήσετε να ανακαλύψουν αυτή την απόδειξη. Μόλις την ανακαλύψουν, μπορούν επίσης να εξηγήσουν πώς θα λειτουργήσει αυτή η απόδειξη για οποιαδήποτε ορθογώνιο τρίγωνο, όχι μόνο για αυτό στο οποίο στηρίζεται αυτό το σχήμα.

Τα Πλατωνικά Στερεά

Το «πολύεδρο» είναι ένα τρισδιάστατο σχήμα με πολύγωνα σε όλες τις έδρες. Ανάμεσα στα διάφορα πολύεδρα, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα Πλατωνικά στερεά. «Πλατωνικά Στερεά» είναι η ονομασία που δίνεται στην ομάδα των απολύτως κανονικών πολύεδρων. «Απολύτως κανονικά» σημαίνει πως κάθε έδρα είναι ένα κανονικό πολύγωνο και πως κάθε κορυφή έχει ακριβώς το ίδιο αριθμό εδρών που ενώνονται σε αυτό το σημείο. Μία ενδιαφέρουσα δραστηριότητα



ΣΧΗΜΑ 21.50 Αυτό το σχήμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξετε την Πυθαγόρεια σχέση. Στοιχείο: Το δεξί ορθογώνιο τρίγωνο με το οποίο θα δουλέψετε είναι αυτό στην πάνω δεξιά γωνία. Πώς λειτουργεί αυτό και για τα άλλα ορθογώνια τρίγωνα;

για τη νοερή απεικόνιση, για αυτό το επίπεδο είναι να βρει κανείς και να περιγράψει όλα τα Πλατωνικά στερεά.

Δραστηριότητα 21.38

Έρευνα για τα Πλατωνικά Στερεά

Δώστε στα παιδιά ένα σύνολο από ισόπλευρα τρίγωνα, τετράγωνα, κανονικά πεντάγωνα και κανονικά εξαγωνα από μία από τις ομάδες με πλαστικά για κατασκευή στερεών (π.χ. Polydron ή Geofix). Εξηγήστε τι είναι ένα απολύτως κανονικό στερεό. Το αντικείμενο της δραστηριότητας είναι να βρείτε όσο το δυνατόν περισσότερα διαφορετικά, απολύτως κανονικά στερεά.

Μία προσέγγιση στη διεξαγωγή αυτής της δραστηριότητας είναι να την αφήσετε όπως άρχισε και να επιτρέψετε στα παιδιά να εργαστούν χωρίς καμία επιπλέον καθοδήγηση. Η επιτυχία θα εξαρτηθεί από την δεξιότητά τους στην επίλυση προβλημάτων. Εναλλακτικά, θα μπορούσατε να προτείνετε μία συστηματική προσέγγιση σαν την ακόλουθη. Αφού ο μικρότερος αριθμός πλευρών που μπορεί να έχει μία έδρα είναι το τρία, ξεκινήστε με τρίγωνα, συνεχίστε με τετράγωνα, έπειτα πεντάγωνα κ. ο. κ. Επιπλέον, αφού κάθε κορυφή πρέπει να έχει τον ίδιο αριθμό γωνιών, δοκιμάστε τρεις έδρες σε ένα σημείο, ύστερα τέσσερις, έπειτα πέντε κ. ο. κ. (είναι σαφώς αδύνατον να έχετε μόνο δύο έδρες σε ένα σημείο).

Με αυτό το σχέδιο, τα παιδιά θα διαπιστώσουν ότι για τα τρίγωνα μπορούν να έχουν τρία, τέσσερα ή πέντε τρίγωνα να συγκλίνουν σε ένα σημείο. Για καθένα από αυτά, μπορούν να αρχίσουν με το είδωλο από τρίγωνα και μετά να προσθέσουν κι άλλα τρίγωνα ούτως ώστε κάθε κορυφή να έχει τον ίδιο αριθμό. Με τρία σε ένα σημείο θα έχετε ένα στερεό τετραπλευρο, που ονομάζεται «τετράεδρο». Με τέσσερα σε κάθε σημείο έχετε ένα στερεό οκτάπλευρο, που καλείται «οκτάεδρο». Προκαλεί πράγματα ενθουσιασμό η κατασκευή ενός σχήματος με πέντε τρίγωνα σε κάθε σημείο. Θα έχει 20 πλευρές και θα ονομάζεται «εικοσαέδρο».

Με παρόμοιο τρόπο, τα παιδιά θα ανακαλύψουν ότι υπάρχουν μόνο ένα στερεό που γίνεται από τετράγωνα –τρία σε κάθε σημείο και έξι στο σύνολο– ένα «εξάεδρο», το οποίο επίσης ονομάζεται κύβος. Υπάρχει και ένα μόνο στερεό με πεντάγωνα, τρία σε κάθε σημείο, 12 σε σύνολο. Αυτό ονομάζεται «δωδεκάεδρο».

II Στρατιώ και στονάζοι

Γιατί δεν υπάρχουν κανονικά πολύεδρα με έξι ή περισσότερα τρίγωνα ή τέσσερα ή περισσότερα τετράγωνα; Γιατί δεν υπάρχουν κανονικά πολύγωνα που να γίνονται με εξαγωνα ή με πολύγωνα με περισσότερες από έξι πλευρές; Ο καλύτερος τρόπος για να απαντήσετε στις ερωτήσεις αυτές είναι να

πειραματιστείτε με τα πολύγωνα και εξηγήστε τις απαντήσεις με δικά σας λόγια. Τα παιδιά θα πρέπει να κάνουν το ίδιο.

Ένα φανταστικός σκελετός εικοσάεδρου μπορεί να κατασκευαστεί από ράβδους εφημερίδας, που περιγράψαμε νωρίτερα (βλέπε Σχήμα 21.11, σελ. 529). Από τη στιγμή που πέντε τρίγωνα συγκλίνουν σε κάθε σημείο, υπάρχουν και πέντε ακμές σε κάθε σημείο. Απλώς φέρετε πέντε ράβδους σε κάθε κορυφή και θυμηθείτε ότι κάθε έδρα είναι ένα τρίγωνο. Αυτό το εικοσάεδρο θα έχει μήκος περιόδου 4 πόδια και θα είναι εκπληκτικά γερό.

Αξιολόγηση των Γεωμετρικών Στόχων

Στην αρχή του κεφαλαίου αυτού μιλήσαμε για δύο είδη στόχων για τα παιδιά σας: στόχους της αίσθησης του χώρου και της γεωμετρικής συλλογιστικής σκέψης, και στόχους του γεωμετρικού περιεχομένου. Αυτό το κεφάλαιο έχει οργανωθεί για να σας βοηθήσει να αποκτήσετε κάποια άποψη για αυτούς τους δύο στόχους στο πρόγραμμά σας. Σχεδιάζοντας την αξιολόγησή σας για την γεωμετρική σκέψη, όπως επίσης και πέρα από το περιεχόμενο, μπορείτε να αποφύγετε την παγίδα της διδασκαλίας των αντικειμενικών στόχων του περιεχομένου με έναν επιφανειακό τρόπο. Δραστηριότητες που δεν φαίνονται να ταιριάζουν άμεσα με τους αντικειμενικούς σκοπούς του περιεχομένου θα πρέπει τουλάχιστον να έχουν αντικειμενικό στόχο τη βελτίωση.

Αποσαφηνίζοντας τους Αντικειμενικούς Στόχους της Γεωμετρίας

Αίσθηση του Χώρου και Αντικειμενικοί Στόχοι van Hiele.

Στις μικρές τάξεις, όταν περιμένετε ότι τα παιδιά σας ανήκουν στο επίπεδο 0, θέλετε να είστε σίγουροι ότι η σκέψη τους αναπτύσσεται σε σχέση με την πολυπλοκότητά της και κινείται ανοδικά προς το επίπεδο 1. Εδώ παρατίθενται κάποιες προτάσεις για πράγματα που μπορεί να ψάξει κανείς:

- Το παιδί παρακολουθεί μία κυκλική χαρακτηριστικών σχημάτων σε δραστηριότητες με ταξινομήσεις και κατασκευές.
- Το παιδί χρησιμοποιεί γλώσσα που είναι περιγραφική των γεωμετρικών σχημάτων.
- Το παιδί παρουσιάζει ενδείξεις της ύπαρξης γεωμετρικής συλλογιστικής σκέψης κατά την επίλυση παλ, διερευνώντας σχήματα, δημιουργώντας σχέδια και αναλύοντας σχήματα.
- Το παιδί αναγνωρίζει σχήματα στο περιβάλλον.

- Το παιδί επιλύει προβλήματα του χώρου.

Κάθε μία από αυτές τις προτάσεις μπορεί να εκτιμηθεί ως ενδεικτική είτε του επιπέδου 0 είτε του επιπέδου 1. Για παράδειγμα, στο επίπεδο 0, οι τύποι των χαρακτηριστικών που τα παιδιά είναι πιθανόν να προσέξουν δεν είναι οι ιδιότητες των γενικών ομάδων των σχημάτων («μικρότερο», «χοντρό», «έχει πέντε πλευρές», «πηγαίνει προς τα πάνω», κ.τ.λ.). Οι ιδιότητες, όπως «παράλληλο» ή «συμμετρικό» μπορεί να χρησιμοποιηθούν τόσο στο επίπεδο 0 όσο και στο επίπεδο 1. Η διάκριση βρίσκεται στο πού αποδίδονται οι ιδιότητες. Στο επίπεδο 0, τα παιδιά περιορίζουν τη σκέψη τους στα σχήματα που επεξεργάζονται εκείνη τη στιγμή, ενώ στο επίπεδο 1, αποδίδουν ιδιότητες σε κλάσεις σχημάτων («όλα τα ορθογώνια ή «όλοι οι κύλινδροι»). Η γλώσσα, η συλλογιστική σκέψη, η αναγνώριση των σχημάτων και η επίλυση προβλημάτων του χώρου μπορούν να εκτιμηθούν ως κατάλληλα για το επίπεδο 0 ή για το επίπεδο 1. Αν σκέπτονται με αυτόν τον τρόπο, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αρχίσουν να αποκτούν μία αίσθηση της γεωμετρικής ανάπτυξης των παιδιών τους πέρα από τη συγκεκριμένη γνώση του περιεχομένου που μπορεί να έχει αναπτυχθεί.

Στις μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού και στο γυμνάσιο, οι εκπαιδευτικοί αρχίζουν να σκέφτονται ότι τα παιδιά τους βρίσκονται στο επίπεδο 1 ή στο επίπεδο 2 στη γεωμετρική τους σκέψη. Πριν την έκτη δημοτικού ή την πρώτη γυμνασίου, πολύ λίγα παιδιά θα έχουν φτάσει στη συλλογιστική σκέψη του επιπέδου 2, αλλά οι εκπαιδευτικοί πρέπει να έχουν επίγνωση για την πρόοδο προς αυτήν την κατεύθυνση. Οι ακόλουθοι δείκτες είναι περισσότερο ενδεικτικοί του επιπέδου 2 παρά του επιπέδου 1:

- Το παιδί δείχνει βελτίωση στις ικανότητες νοερής απεικόνισης του χώρου.
- Το παιδί έχει μία κλίση στο να κάνει και να ελέγχει υποθέσεις σε γεωμετρικές καταστάσεις.
- Το παιδί κάνει χρήση λογικών εξηγήσεων κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.
- Το παιδί δικαιολογεί τα συμπεράσματά του σε γεωμετρικά συγκεκριμένα.
- Το παιδί εκτιμά την εγκυρότητα των λογικών επιχειρημάτων σε γεωμετρικές καταστάσεις.

Οι περισσότεροι από αυτούς τους δείκτες ή αντικειμενικούς στόχους περιλαμβάνουν στοιχεία συλλογιστικής και λογικής σκέψης που γενικά δεν εμφανίζονται στο επίπεδο 1. Όπως επισημάνθηκε στις συζητήσεις για τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, τα άτομα που λειτουργούν στο επίπεδο 1 χρησιμοποιούν επαγωγική συλλογιστική σκέψη για να ανακαλύψουν σχέσεις στα σχήματα, ενώ τα άτομα που λειτουργούν στο επίπεδο 2 αρχίζουν, με καθοδήγηση, να αναπτύσσουν επιχειρήματα που εξηγούν γιατί υπάρχει μία συγκεκριμένη σχέση.

Αντικειμενικοί Στόχοι Γεωμετρικών Εννοιών

Το «Αρχές και Στάναρ» προσφέρει μεγάλη βοήθεια για τη διαπίστωση της ανάπτυξης από τη μία τάξη στην άλλη. Για καθένα από τους 4 στόχους που διαπιστώθηκαν από τα Στάναρ (σχήμα και ιδιότητες, θέση στο χώρο, μετασχηματισμοί και νοερή απεικόνιση) εξετάστε τις προσδοκίες για κάθε τάξη όχι μόνο για τη δική σας τάξη, αλλά και για τις μεγαλύτερες και τις μικρότερες. Αυτό το κεφάλαιο έχει οργανωθεί για να σας βοηθήσει να αποκτήσετε μια ιδέα για την ανάπτυξη από το νηπιαγωγείο μέχρι τη δευτέρα γυμνασίου.

Φυσικά, πρέπει να παρακολουθείτε το περιεχόμενο που σας επιβάλλει το σχολικό σας σύστημα. Αυτό το περιεχόμενο μπορεί να ευθυγραμμίζεται ή να μην ευθυγραμμίζεται με εκείνο που οικιαγραφήθηκε από τα NCTM «Στάναρ». Παρ' όλα αυτά, σχεδόν όλη η γεωμετρία που διδάχθηκε από το νηπιαγωγείο μέχρι τη δευτέρα γυμνασίου μπορεί να βρεθεί μέσα σε αυτό το Στάναρ. Δοκιμάστε να συμπεριλάβετε μία

αίσθηση ανάπτυξης με το πέρασμα του χρόνου στην εκτίμησή σας για το περιεχόμενο. Εάν περιορίσετε την εκτίμησή σας στην πλήρη γνώση ικανοτήτων ή ορισμών, το πνεύμα για τη διερεύνηση που θέλετε στο πρόγραμμά σας για τη γεωμετρία θα χαθεί. Συχνότατα διδάσκουμε με έναν τρόπο που αντικατοπτρίζει τα σχέδιά μας για την εκτίμησή μας. Μολονότι η πλήρης γνώση κάποιων ιδεών είναι ίσως σημαντική, η ιδεατή ανάπτυξη σπανίως αντικατοπτρίζεται στην αποστήθιση ορισμών.

Για να αποφασίσετε τι θα εκτιμήσετε και πώς, είναι καλύτερα να έχετε μία μακρόχρονη άποψη για την γεωμετρία παρά μία πιο παραδοσιακή προσανατολισμένη στην πλήρη γνώση προσέγγιση. Έχουν προταθεί δύο ευρείες προοπτικές:

- Η ανάπτυξη στην αίσθηση του χώρου και τη γεωμετρική σκέψη.
- Η κατανόηση γεωμετρικών εννοιών.

Σκέψεις πάνω στο Κεφάλαιο 21

Μαθαίνουμε Γράφοντας

1. Περιγράψτε με δικά σας λόγια τα πρώτα τρία επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των van Hiele (επίπεδα 0, 1 και 2). Σημειώστε στην περιγραφή σας το αντικείμενο σκέψης και το προϊόν σκέψης. Πώς δημιουργούν αυτές οι ιδέες μία πρόοδο από ένα επίπεδο στο άλλο;
2. Περιγράψτε τα τέσσερα χαρακτηριστικά των επιπέδων σκέψης των van Hiele. Για το καθένα, σκεφτείτε για ποιο λόγο κάθε χαρακτηριστικό θα μπορούσε να είναι σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς.
3. Πώς θα διέφεραν οι δραστηριότητες που στοχεύουν στα επίπεδα 0, 1 και 2;
4. Εν συντομία περιγράψτε τη φύση του περιεχομένου καθενός από τους τέσσερις τύπους που περιέχονται στο κεφάλαιο αυτό και στα «Στάναρ»: Σχήματα και Ιδιότητες, Θέση στο Χώρο, Μετασχηματισμοί και Νοερή Απεικόνιση. Στην περιγραφή σας σημειώστε την πρόοδο από το ένα επίπεδο van Hiele στο άλλο.
5. Οι δραστηριότητες 21.1, 21.2 και 21.3 στο ξεκίνημα του κεφαλαίου χρησιμοποιήθηκαν για να επισημάνουν τις διαφορές στα τρία επίπεδα van Hiele της γεωμετρικής σκέψης. Επιλέξτε τρία διαφορετικά παραδείγματα από το τμήμα Σχήματα και Ιδιότητες, ένα για το κάθε επίπεδο. Τι κάνει την κάθε δραστηριότητα κατάλληλη για αυτό το επίπεδο; Επαυλάβεστε αυτή την άσκηση τρεις ακόμη φορές επιλέγοντας τρεις δραστηριότητες που να αντιπροσωπεύουν το Μετασχηματισμό, την Θέση στο Χώρο και τη Νοερή Απεικόνιση του γεωμετρικού συγκεκριμένου.

6. Τι μπορείτε να κάνετε, όταν τα παιδιά στην τάξη σας βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα σκέψης των van Hiele;
7. Βρείτε ένα από τα βοηθητικά προγράμματα για την γεωμετρία ή ένα παράδειγμα γεωμετρικού λογισμικού και εξηγήστε πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Ποια είναι τα πλεονεκτήματα της χρήσης των υπολογιστών στη γεωμετρία αντί για τα αντίστοιχα φυσικά υλικά ή τα σχέδια;
8. Πώς μπορεί ένας/μία εκπαιδευτικός να αξιολογήσει τα παιδιά όσον αφορά στη γενική γεωμετρική ανάπτυξη ή την αίσθηση του χώρου; Υποθέτοντας ότι η θεωρία των van Hiele είναι σωστή, γιατί είναι σημαντικό να καταλάβετε πού βρίσκονται τα παιδιά σας σε σχέση με αυτήν τη θεωρία;

Για Διάλογο και Διερεύνηση

1. Πόσο σημαντική θα πρέπει να είναι η γεωμετρία στις πρώτες, τις ενδιάμεσες και τις μεγαλύτερες τάξεις; Σκεφθείτε τις ανταγωνιστικές απαιτήσεις των άλλων τομέων του προγράμματος των μαθηματικών και προτείνετε πόσες από τις 36 περιόδους εβδομάδες της σχολικής χρονιάς θα πρέπει να αφιερωθούν στη γεωμετρία. Πώς μπορείτε να δικαιολογήσετε την άποψή σας; Σύμφωνα με ένα παραδοσιακό σχολικό εγχειρίδιο, πόσες εβδομάδες αφιερώθηκαν τυπικά στη γεωμετρία;
2. Εξετάστε το βιβλίο του/της εκπαιδευτικού σε ένα βασικό σχολικό εγχειρίδιο οποιασδήποτε τάξης. Επιλέξτε ένα μάθημα γεωμετρίας. Θυμηθείτε ότι οι συγγραφείς του βιβλίου του/της μαθητή/τριας περιορίζονται στις έννυπες σελίδες από την ίδια

τη φύση του βιβλίου. Οι εκπαιδευτικοί δεν είναι τόσο περιορισμένοι. Πώς θα διδάσκατε αυτό το μάθημα έτσι ώστε να ήταν ένα καλό μάθημα γεωμετρίας; Το μάθημά σας θα πρέπει να περιλαμβάνει φυσικές δραστηριότητες και να διέπεται από το πνεύμα της εκπαίδευσης προβλημάτων.

3. Στα επίπεδα του δημοτικού και του γυμνασίου, το λογισμικό για τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές θα πρέπει να αποτελεί βασικό συστατικό των διδακτικών σας εργαλείων. Αν δεν είστε εξοικειωμένοι με τα είδη λογισμικού που αναλύθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, βρείτε που έχετε πρόσβαση και παίξτε με αυτά τα προγράμματα για να μάθετε τι μπορεί να κάνει το κάθε ένα (σας συστήνουμε ανεπιφύλακτα να μάθετε ότι μπορείτε για ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας).

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία Συστάσεις για Περαιτέρω Διάβασμα

Σειρά NCTM Navigations

Findell, C., R., Small, M., Cavanagh, M., Dacey, L., Greenes, C., E., & Scheffeld, L., J. (2001). *Navigating through geometry in prekindergarten - grade 2*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gavin, M., K., Sinelli, A., M., & St. Marie, J. (2001). *Navigating through geometry in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pugalee, D., K., Frykholm, J., Johnson, A., Slovin, H., Malloy, C., & Preston, R. (2002). *Navigating through geometry in grades 6-8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Κάθε ένα από αυτά τα τρία εξαιρετικά βιβλία από τη σειρά *Navigations*, προσφέρει μια οπτική για το σάνταρ της γεωμετρίας αλλά και μία εξαιρετική συλλογή δραστηριοτήτων που είναι κατάλληλες για τα επίπεδα στα οποία αναφέρεται το κάθε βιβλίο. Οι δραστηριότητες οργανώνονται υπό το πρίσμα των τεσσάρων τομέων των Στάνταρ της Γεωμετρίας (όπως και σε αυτό το κεφάλαιο). Κάθε βιβλίο περιλαμβάνει και ένα CD-ROM με τα Blackline Masters, μια μικρή συλλογή εξαιρετικών βοηθητικών προγραμμάτων, και το πλήρες κείμενο των επλεγμένων άρθρων. Μία σημαντική βιβλιογραφική πηγή.

Glass, B., (2004) *Transformations and technology: What path to follow?* Mathematics Teaching in the Middle School, 9, 393-397.

O Glass διερεύνησε συνθέσεις μετασχηματισμών με τα παιδιά του στο γυμνάσιο. Μέρος των συζητήσεών τους περιγράφηκε γύρω από αυτό το ερώτημα: μια σύνθεση δύο ή περισσότερων μετασχηματισμών είναι τα ίδια με ένα μόνο μετασχηματισμό με τον οποίο θα πετύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα; Για αυτούς που διερευνούν τους μετασχηματισμούς στις μεγαλύτερες τάξεις, το άρθρο αυτό είναι ιδιαίτερα πολύτιμο.

Koester, B., A., (2003). *Prisms and pyramids: Constructing three-dimensional models to build understanding*. Teaching Children Mathematics, 9, 436-442.

Μπορεί να σκεφθείτε ότι είναι πολύ βαρετό να βάλετε ένα παιδί να κατασκευάσει μοντέλα χρησιμοποιώντας καλαμάνια και καθαριστικά σωλήνων. Οι δραστηριότητες του Koester και οι διερευνήσεις του με παιδιά από την τρίτη μέχρι την πέμπτη τάξη αποδεικνύουν το αντίθετο. Οι δραστηριότητες που περιγράφονται περιλαμβάνουν την ταξινόμηση και τον ορισμό των σχημάτων καθώς επίσης και τον σχετικό με τις έδρες, κορυφές και πλευρές τύπο του Euler.

National Council of Teachers of Mathematics. (1999). *Geometry and geometric thinking [Focus Issue]*. Teaching Children Mathematics, 5(6).

Αυτό το τεύχος του NCTM είναι γεμάτο με πρακτικές ιδέες και χρήσιμες προσεγγίσεις για τη γεωμετρία στις πρώτες τάξεις. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται το υπέροχο άρθρο του Pierre van Hiele, στο οποίο περιγράφεται μια σειρά δραστηριοτήτων με μία μοναδική συλλογή σχημάτων (*The Mosaic Puzzle*). Είναι διαθέσιμο σε χαμηλή τιμή και αποτελεί μία πολύτιμη βιβλιογραφική πηγή για οποιοδήποτε εκπαιδευτικό.

Renne, C., G., (2004). *Is a rectangle square? Developing mathematical vocabulary and conceptual understanding*. Teaching Children Mathematics, 10, 258-263.

Οι φωνές των παιδιών σε αυτό το άρθρο αποτελούν ξεκάθαρα παραδείγματα της δυσκολίας που έχουν τα παιδιά στο συλλογιστικό επίπεδο 1, κατά την προσπάθειά τους να βγάλουν λογικά συμπεράσματα για τις γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις. Οι δραστηριότητες του Renne με τα παιδιά της τετάρτης τάξης είναι πολύ κοντά με τις δραστηριότητες της Λίστας Ιδιοτήτων σε αυτό το βιβλίο (21.2 και 21.3).

Wyat, K., W., Lawrence, A., & Foletta, G., M. (1998). *Geometry activities for Middle School students with the Geometer's Sketchpad*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Όπως επισημάνθηκε σε αυτό το κεφάλαιο, το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας ανήκει στις τάξεις προς το τέλος του δημοτικού και στο γυμνάσιο. Αυτό το βιβλίο διερευνήσεων για το *The Geometer's Sketchpad* μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εισάγει τα παιδιά (και εσάς) σε αυτό το λογισμικό ακόμα και αν δεν το έχετε ξαναχρησιμοποιήσει. Οι δραστηριότητες διερευνούν τα τρίγωνα, τα τετράπλευρα, τη συμμετρία, τους μετασχηματισμούς και τις κατασκευές. Με αυτό το βιβλίο θα πείσεται για την αξία της δυναμικής γεωμετρίας από την τετάρτη μέχρι τη δεύτερη γυμνασίου.

Διαδικτυακές Πηγές

Προτεινόμενα Βοηθητικά Προγράμματα και Δικτυακοί Σύνδεσμοι

Cube Nets

http://illuminations.nctm.org/tools/tool_detail.aspx?id=84

Εξαιρετική πρόκληση νοερής απεικόνισης! Παρουσιάζει διατάξεις τετράγωνων. Η πρόκληση είναι να βρείτε τις 11 διατάξεις που θα μπορούσαν να δημιουργήσουν ένα κύβο.

Cut Out Nets

www.f.uu.nl/toepassingen/00297/toepassings_wisweb.en.html

Πλαίσια των Πλατωνικών Στερεών που μπορούν να διπλωθούν, μία πλευρά τη φορά και το σχήμα να περιστραφεί ελεύθερα σε οποιοδήποτε σημείο του τριδιάστατου χώρου. Συναρπαστικό!

Cutting Corners

<http://illuminations.nctm.org/tools/CutTool/CutTool.asp>

Ένα εργαλείο κοπής επιτρέπει σε οποιοδήποτε από τα τρία απλά σχήματα να κοπεί σε μέρη κατά μήκος οποιασδήποτε ευθείας γραμμής. Τα σχήματα μπορούν να επανασυναρμολογηθούν, να περιστραφούν και να διπλωθούν.

Geoboards

<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>

Η βιβλιοθήκη του NLVM έχει τέσσερις γεωμετρικούς πίνακες. Ο πρώτος μετράει τα εμβαδά και την περίμετρο. Ο κυλινδρικός πίνακας έχει ακίδες σε κυκλική διάταξη. Ο ισομετρικός πίνακας έχει ακίδες σε τριγωνική διάταξη (όπως το ισομετρικό πλέγμα). Ο πίνακας συντεταγμένων παρουσιάζει τις συντεταγμένες για κάθε σταθερά όταν ο κέρσορας είναι πάνω του. Μετράει την κλίση και την απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία που ενώνονται από μία λωρίδα και μετά την περίμετρο και το εμβαδόν των σχημάτων που έχουν ενοσθεί με τη λωρίδα.

Isometric Drawing Tool

<http://illuminations.nctm.org/tools/isometric/isometric.asp>

Κύβοι και οποιαδήποτε έδρα κύβου μπορεί να ζωγραφιστεί σε ισομετρικό πλέγμα. Τα σχέδια μπορούν να περιστραφούν πάνω στο πλέγμα. Το σχέδιο μπορεί επίσης να ειδικωθεί σε ένα δεύτερο παράθυρο το οποίο να το παρουσιάζει ως τρισδιάστατο αντικείμενο που μπορεί να περιστραφεί αργά γύρω από τρεις ξεχωριστούς άξονες. Χρειάζεται λίγη εξάσκηση αλλά αποτελεί ένα εξαιρετικό εργαλείο.

Maze Game

www.shodor.org/Interactivate/activities/coords/index.html

Παρέχει εξάσκηση με τις συντεταγμένες. Ο χρήστης σχεδιάζει σημεία για να καθοδηγήσει ένα ρομπότ μέσα από ένα ναρκωπέδιο.

Mirror Tool

<http://illuminations.nctm.org/tools/mirror/mirror.asp>

Ένα καλό εργαλείο για τις πρώτες διερευνήσεις της αξονικής συμμετρίας ή της αντανάκλασης.

Pythagorean Relationship

<http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap6/6.5/index.htm>

Αντί συναρπαστική, δυναμική απόδειξη της Πυθαγόρειας

σχέσης χρησιμοποιεί την ιδέα ότι τα ορθογώνια και τα παραλληλόγραμμα με το ίδιο ύψος και την ίδια βάση έχουν το ίδιο εμβαδόν.

Shape Sorter Tool

<http://illuminations.nctm.org/tools/shapesorter/shapesorter.asp>

Αφού έχει επιλεγεί ένα διάγραμμα Venn και ονομασίες για κάθε καμπύλη, δημιουργούνται τα σχήματα και ο χρήστης πρέπει να τα τοποθετήσει σωστά στο διάγραμμα. Οι ονομασίες είναι οι ιδιότητες των γωνιών και των πλευρών.

Slicing Platonic Solids

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_126_g_3_t_3.html

Κάθε ένα από τα πέντε Πλατωνικά στερεά μπορεί να παρουσιαστεί σε ένα παράθυρο που είναι το επίπεδο μιας τομής με ένα στερεό. Καθώς το στερεό περιστρέφεται ελεύθερα, το τμήμα πάνω και κάτω από το επίπεδο αλλάζει. Το σχήμα της επίπεδης τομής τους παρουσιάζεται πάντα σε ένα δεύτερο παράθυρο. Αποτελεί μια εικονική εκδοχή της δραστηριότητας «Φέτες Νερού», 21.37.

Space Blocks

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_195_g_3_t_3.html?open=activities

Αυτό το βοηθητικό πρόγραμμα επιτρέπει στο χρήστη να δημιουργήσει «κάτοματα» φτιαγμένα από κύβους αρκετά εύκολα. Κάθε νέος κύβος σπάει σε έναν κύβο κατά τη διάρκεια της κατασκευής.

Tangrams

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_292_g_3_t_1.html

Αυτά τα εικονικά τάνγκραμ μπορείτε να τα χειριστείτε πολύ εύκολα. Επιπλέον, υπάρχουν 14 σχήματα παζλ για να τα συμπληρώσετε με τα 7 τάνγκραμ.

Visualizing Transformations

<http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap6/6.4/index.htm>

Αυτό το βοηθητικό πρόγραμμα με τα τέσσερα μέρη παρέχει μία εξοχή διερεύνηση των τριών μετασχηματισμών άκαμπτης κίνησης περιλαμβάνοντας τη σύνθεση δύο μετασχηματισμών.



Επιπλέον κατάλογο βιβλίων και άρθρων που σχετίζονται με τις ιδέες που αναφέρονται σε αυτό το κεφάλαιο μπορείτε να βρείτε στο www.ablongman.com/vandewalle6e

ΣΤΑΝΤΑΡ

מועצה:

Από την έκρηξη δημιουργήθηκαν μεχέρι την δεύτερη γυμνασίου όλα τα παιδιά θα πρέπει:

Από την ένατη μέχρι την δωδέκατη τάξη όλα τα παιδιά θα πρέπει:

Τάξη 3η γυμνασίου – 3η Διεύθυνση Προσκόπων

מסכת סנהדרין פרק טו הלכה א

- [illegible]

Տնօրոճեաւ ԼՍՈՒՐՔԻՆՈՎԻԴԱՅ ՈՒՄ ՆԻՅՈՅՃՈ ՂԻՍՂՈՆՈՒՄ
ԸՆ ԸՆ ԼՄԻՔԻԸ ԼՄՆ ՏՈՐՈՒՅՔ ՆԱ ՆԻՅՈՐԱԾՈՒ ՆԱ ՂԻՍՈՒՄՈՒՄԻՆԸՈՒՄ ԵՂ

ԼՄԻՔԻՆՈՎԻԴԱՅ ԼՄՆ ՏՈՐՈՒՄԻՆՈՒ ՈՒ ՆԱԼԱՐՈՐԻ ՆԱ ՐԱՄ ՆԱԶԻՐՈՒԸ ՆՈՒՅՔ
ՈՒՄ ՏՈՐՈՒՄԻՆՈՒ ՆՈՒ ՆԱԶԱԼՈՒ ՆՈՒՄ ԻՄ ԵՄԻՐՈՂԱՐՈՐԻ ԸՆ ՂԻՍՈՒՄԸ ԵՂ

ՆԻՅՈՐՈՐ ՆԱԶԱԼՈՒՄԻՆ
ՆՈՒՅՔ ՆԱԶ ՆԱԶՈՒՄ ԻՄ ԼՄԻՔԻՆՈՎԻԴԱՅ ՆԻՅՈՐՈՐ ՆՈՒ ՆՈՐՈՐԻՈՒ
ՆՈՒՅՔԻՆՈՒՄ ՆՈՒՄ ՂԻՍՈՒՄԸ ԸՆ ԻՄ ԼՄԻՔԻՆՈՎԻԴԱՅ ԼՄՆ
ԻՄ ԼՄԻՔԻՆՈՎԻԴԱՅ ԼՄՆ ԼՄԻՔԻՆՈՎԻԴԱՅԻՆՈՒՄ ԼՄԻՔԻՆՈՒՄ ԼՄԻՔԻՆՈՒՄ ԼՄՆ
ԻՄ ԼՄԻՔԻՆՈՒՄ ԼՄՆ ՆԱԼԱՐՈՐԻ ՆԱ ՆՈՒՅՔԻՆՈՒՄԻՆՈՒՄ ԻՄ ԼՄՈՐՈՐՈՒՄԸ ԵՂ

ՆՈՒՄ ԼՄՈՐՈՐՈՒՄԻՆՈՒՄ ԼՄՈՐՈՐՈՐԻ ԻՄ ԵՄՔՈՒ ԼՄԻՔԻՆՈՒՄ ԼՄԻՔԻՆՈՒՄ ՂԻՍՂՈՒՄ
ԼՄՆ ԻՄ ԼՄՈՐՈՐՈՒՄ ԼՄՆ ԼՄՈՐՈՐՈՒՄ ԼՄՈՐՈՐՈՒՄ ԼՄՈՐՈՐՈՒՄ ԼՄՈՐՈՐՈՒՄ ԼՄՆ

ՆՈՒՆ ԴՅՈՒՅՐԻ ՆՈՒՆ ՆԿՅՈՒՅՐԻ ՕՍԿՐԻՆ
ՆՈՒՆ ՆԿՅՈՒՅՐԻ ՆՈՒՆ ԴՅՈՒՅՐԻ ՕՍԿՐԻՆ

- [illegible]

Να κλονηθούν υπολογισμοί και λογιστικά στοιχεία

- [illegible]

Άλγεβρα

ΣΤΑΝΤΑΡ

Τα εκπαιδευτικά προγράμματα από τα νήπια μέχρι την τρίτη λυκείου θα πρέπει να βοηθούν τα παιδιά:

Να κατανοούν τα πρότυπα, τις σχέσεις και τις συναρτήσεις

Να αναπαριστούν και να αναλύουν τις μαθηματικές καταστάσεις και δομές χρησιμοποιώντας αλγεβρικά σύμβολα

Να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά μοντέλα για να αναπαριστούν και να κατανοούν ποσοτικές σχέσεις

Να αναλύουν τις μεταβολές σε διάφορα συγκείμενα

Τάξη 6η δημοτικού—2η γυμνασίου

Προσδοκίες

Από την έκτη δημοτικού μέχρι τη δεύτερα γυμνασίου όλα τα παιδιά θα πρέπει:

- Να αναπαριστούν, να αναλύουν και να γενικεύουν ποικίλα πρότυπα με πίνακες, γραφήματα, λέξεις και όταν είναι δυνατό, συμβολικούς κανόνες
- Να συσχετίζουν και να συγκρίνουν διάφορες μορφές αναπαράστασης για μια σχέση
- Να αναγνωρίζουν τις συναρτήσεις ως γραμμικές ή μη γραμμικές και να αντιπαραβάλλουν τις ιδιότητές τους χρησιμοποιώντας πίνακες, γραφήματα ή εξισώσεις

- Να αποκτήσουν μια πρώτη εννοιολογική γνώση των διαφορετικών χρήσεων των μεταβλητών
- Να διερευνήσουν τις σχέσεις ανάμεσα στις συμβολικές εκφράσεις και τα γραφήματα ευθειών με προσοχή στη σημασία της τέμνουσας και της κλίσης
- Να χρησιμοποιούν τη συμβολική άλγεβρα για να αναπαριστούν καταστάσεις και να λύνουν προβλήματα και ειδικά όσα περιλαμβάνουν γραμμικές σχέσεις
- Να αναγνωρίζουν και να παράγουν ισοδύναμες μορφές για απλές αλγεβρικές παραστάσεις και να επιλύουν γραμμικές εξισώσεις

- Να σχηματοποιούν και να λύνουν ρεαλιστικά προβλήματα χρησιμοποιώντας ποικίλες αναπαραστάσεις όπως γραφήματα, πίνακες και εξισώσεις

- Να χρησιμοποιούν τα γραφήματα για να αναλύουν τη φήμη των αλλαγών στις ποσότητες των γραμμικών σχέσεων

Τάξη 3η γυμνασίου—3η λυκείου

Προσδοκίες

Από την τρίτη γυμνασίου μέχρι την τρίτη λυκείου όλα τα παιδιά θα πρέπει:

- Να γενικεύουν πρότυπα χρησιμοποιώντας συναρτήσεις που ορίζονται με διαφορετικούς τρόπους
- Να κατανοούν τις σχέσεις και τις συναρτήσεις, να επιλέγουν, να μετατρέπουν με ευχέρεια και να χρησιμοποιούν τις διάφορες αναπαραστάσεις γι αυτές
- Να αναλύουν τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής διερευνώντας τους ρυθμούς μεταβολής, τις τέμνουσες, τα μηδέν, τις ασύμπτωτες, την τοπική και σφαιρική συμπεριφορά
- Να κατανοούν και να εκτελούν μετασχηματισμούς όπως ο αριθμητικός συνδυασμός, η σύνθεση και αντιστροφή συνηθισμένων συναρτήσεων, με τη χρήση της τεχνολογίας για να εκτελούν τέτοιες πράξεις σε πιο πολύπλοκες παραστάσεις
- Να κατανοούν και να συγκρίνουν τις ιδιότητες των κλάσεων των συναρτήσεων, συμπεριλαμβανομένων των εκθετικών, των πολυωνυμικών, των ρητών, των λογαριθμικών και περιοδικών συναρτήσεων.
- Να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων

- Να κατανοούν τη σημασία ισοδύναμων μορφών παραστάσεων, εξισώσεων, ανισώσεων και σχέσεων
- Να γράφουν ισοδύναμες μορφές εξισώσεων, ανισώσεων και συστημάτων εξισώσεων και να τις επιλύουν με ευχέρεια- νοερά ή με χαρτί και μολύβι σε απλές περιπτώσεις και με τη χρήση τεχνολογίας σε όλες τις περιπτώσεις.
- Να χρησιμοποιούν τη συμβολική άλγεβρα για να αναπαριστούν και να εξηγούν τις μαθηματικές σχέσεις
- Να χρησιμοποιούν ποικίλες συμβολικές παραστάσεις, συμπεριλαμβανομένων των αναδρομικών και παραμετρικών εξισώσεων για συναρτήσεις και σχέσεις
- Να κρίνουν τη σημασία, τη χρησιμότητα και τη λογική των αποτελεσμάτων των χειρισμών των συμβόλων, συμπεριλαμβανομένων και εκείνων που εκτελούνται με την τεχνολογία

- Να αναγνωρίζουν ουσιαστικές ποιοτικές σχέσεις σε μια κατάσταση και να προσδιορίζουν την κλάση ή τις κλάσεις των συναρτήσεων που μπορούν να σχηματιστούν τις σχέσεις
- Να χρησιμοποιούν συμβολικές παραστάσεις, συμπεριλαμβανομένων των επαναληπτικών και μορφών, για να αναπαριστούν σχέσεις που προκύπτουν από διάφορα συγκείμενα
- Να βγάζουν λογικά επιχειρήματα για μια κατάσταση που έχει αναπαρασταθεί σχηματικά

- Να υπολογίζουν κατά προσέγγιση και να ερμηνεύουν ρυθμούς μεταβολής από γραφικά και αριθμητικά δεδομένα

Να αναλογιστούν τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες
των φυσικών φαινομένων που περιγράφονται
με τη βοήθεια των μαθηματικών.

Να προσδιορίσουν τις ποσότητες που μετρούνται
σε ένα φυσικό φαινόμενο και να τις εκφράσουν
με τη βοήθεια των μαθηματικών.

Να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τα
φυσικά φαινόμενα που περιγράφονται
με τη βοήθεια των μαθηματικών.

Να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τα
φυσικά φαινόμενα που περιγράφονται
με τη βοήθεια των μαθηματικών.

Να περιγράψουν τα φυσικά φαινόμενα που
περιγράφονται με τη βοήθεια των
μαθηματικών.

Να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τα
φυσικά φαινόμενα που περιγράφονται
με τη βοήθεια των μαθηματικών.

Να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τα
φυσικά φαινόμενα που περιγράφονται
με τη βοήθεια των μαθηματικών.

Να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τα
φυσικά φαινόμενα που περιγράφονται
με τη βοήθεια των μαθηματικών.

Να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τα
φυσικά φαινόμενα που περιγράφονται
με τη βοήθεια των μαθηματικών.

Να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τα
φυσικά φαινόμενα που περιγράφονται
με τη βοήθεια των μαθηματικών.

Να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τα
φυσικά φαινόμενα που περιγράφονται
με τη βοήθεια των μαθηματικών.

Να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τα
φυσικά φαινόμενα που περιγράφονται
με τη βοήθεια των μαθηματικών.

Να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τα
φυσικά φαινόμενα που περιγράφονται
με τη βοήθεια των μαθηματικών.

Να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τα
φυσικά φαινόμενα που περιγράφονται
με τη βοήθεια των μαθηματικών.

Μέτρηση

ΣΤΑΝΤΑΡ

Τα εκπαιδευτικά προγράμματα από τα νήπια μέχρι την τρίτη λυκείου θα πρέπει να βοηθούν τα παιδιά:

Να κατανοούν τα μετρήσιμα χαρακτηριστικά των αντικειμένων και τις μονάδες, τα συστήματα και τις διαδικασίες μέτρησης

Να εφαρμόζουν τις κατάλληλες τεχνικές, εργαλεία και τύπους για να προσδιορίζουν τα μεγέθη

Τάξη 6η δημοτικού — 2η γυμνασίου

Προσδοκίες

Από την έκτη δημοτικού μέχρι τη δεύτερα γυμνασίου όλα τα παιδιά θα πρέπει

- Να κατανοήσουν τα μετρικά και μη μετρικά συστήματα μέτρησης
- Να κατανοήσουν τις σχέσεις ανάμεσα στις μονάδες και να κάνουν μετατροπές από τη μια μονάδα στην άλλη μέσα στο ίδιο σύστημα
- Να κατανοήσουν και να επιλέγουν και να χρησιμοποιούν μονάδες κατάλληλου μεγέθους και τύπου για τη μέτρηση γωνιών, περιμέτρων, εμβαδών, εμβαδού παράπλευρων επιφανειών και όγκων

- Να χρησιμοποιούν κοινά σημεία αναφοράς για την επιλογή των κατάλληλων μεθόδων για την εκτίμηση μεγεθών
- Να επιλέγουν και να εφαρμόζουν τεχνικές και εργαλεία για την ακριβή εύρεση του μήκους, εμβαδού, όγκου, και ανοίγματος γωνιών μέχρι το μεγαλύτερο βαθμό ακρίβειας
- Να αναπτύξουν και να χρησιμοποιούν τύπους για τον προσδιορισμό της περιφέρειας κύκλων και του εμβαδού τριγώνων, παραλληλόγραμμων, τραπεζίων και κύκλων καθώς και στρατηγικές για την εύρεση του εμβαδού πιο πολύπλοκων σχημάτων
- Να αναπτύξουν στρατηγικές για τον προσδιορισμό του εμβαδού παράπλευρης επιφάνειας και του όγκου επιλεγμένων πρισμάτων, πυραμίδων και κυλίνδρων
- Να επιλύουν προβλήματα που εμπεριέχουν παράγοντες κλίμακας, χρησιμοποιώντας λόγους και αναλογίες
- Να επιλύουν απλά προβλήματα με ρυθμούς και παραγόμενα μεγέθη για χαρακτηριστικά όπως είναι η ταχύτητα και η πυκνότητα.

Τάξη 9η–12η

Προσδοκίες

Από την τρίτη γυμνασίου μέχρι την τρίτη λυκείου όλα τα παιδιά θα πρέπει

- Να λαμβάνουν αποφάσεις σχετικά με κατάλληλες μονάδες και κλίμακες για προβλήματα που περιλαμβάνουν μετρήσεις

- Να αναλύουν την ακρίβεια, την ορθότητα και το κατά προσέγγιση σφάλμα στις καταστάσεις μετρήσεων
- Να κατανοήσουν και να χρησιμοποιούν τύπους για το εμβαδόν, το εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας και τον όγκο γεωμετρικών σχημάτων συμπεριλαμβανομένων των κώνων, των σφαιρών και των κυλίνδρων
- Να εφαρμόζουν τις μη τυπικές έννοιες της διαδοχικής προσέγγισης, των ανώτερων και κατώτερων ορίων και να τις χρησιμοποιούν σε καταστάσεις μέτρησης
- Να χρησιμοποιούν την ανάλυση των μονάδων για να ελέγχουν τους υπολογισμούς με τις μετρήσεις

Ανάπτυξη Δομικών και Πιεστικών

ΣΤΑΝΤΑΡ

Τα εκπαιδευτικά προγράμματα από τα οποία
πέρχεται την εκπαιδευτική λειτουργία

παιδιά:

Τάξη 6η δημοτικού - 8η γυμνασίου
Προσδοκίες
Από την εκπαιδευτική λειτουργία να αυξηθούν οι

Τάξη 3η γυμνασίου - 3η λυκείου
Προσδοκίες
Από την εκπαιδευτική λειτουργία να αυξηθούν οι

Να διατηρούν την επωνυμία τους σε προπούν να
αυξηθούν οι δομές που θα αυξήσουν τα οφέλη
από την ανάπτυξη των δομών

Να διατηρούν την επωνυμία τους σε προπούν να
αυξηθούν οι δομές που θα αυξήσουν τα οφέλη
από την ανάπτυξη των δομών

Να διατηρούν την επωνυμία τους σε προπούν να
αυξηθούν οι δομές που θα αυξήσουν τα οφέλη
από την ανάπτυξη των δομών

Να επεκταθούν οι δομές που θα αυξήσουν τα οφέλη
από την ανάπτυξη των δομών

Να επεκταθούν οι δομές που θα αυξήσουν τα οφέλη
από την ανάπτυξη των δομών

Να επεκταθούν οι δομές που θα αυξήσουν τα οφέλη
από την ανάπτυξη των δομών

Να βελτιωθούν οι δομές που θα αυξήσουν τα οφέλη
από την ανάπτυξη των δομών

Να βελτιωθούν οι δομές που θα αυξήσουν τα οφέλη
από την ανάπτυξη των δομών

Να βελτιωθούν οι δομές που θα αυξήσουν τα οφέλη
από την ανάπτυξη των δομών

Να κατανοηθούν οι δομές που θα αυξήσουν τα οφέλη
από την ανάπτυξη των δομών

Να κατανοηθούν οι δομές που θα αυξήσουν τα οφέλη
από την ανάπτυξη των δομών