Ενα κεντρικό θέμα του παρόντος βιβλίου είναι η ικανότητα των παιδιών να παράγουν και να ερμηνεύουν γραπτές αναπαραστάσεις των αριθμών [...]. Όταν παιδιά επτά έως οκτώ χρόνων αντιμετωπίζουν συγκεκριμένες περιπτώσεις πολύ εύκολων προσθέσεων και αφαιρέσεων (πρόσθεση δύο τούβλων σε άλλα δύο, αφαίρεση ενός τούβλου από τρία κλπ.), αποδεικνύεται ότι έχουν πολύ μεγάλη δυσκολία να κάνουν στο χαρτί σύμβολα που ν' αναπαριστούν αυτό που μόλις είδαν [...]. Και το πιο περίπλοκο, για να μην πούμε και το πιο ανησυχητικό, είναι να μην έχει βρεθεί ούτε ένα παιδί σε μία ομάδα από ενενηνταέξι που να χρησιμοποίησε, ή έστω να προσπάθησε να χρησιμοποιήσει, τα σύμβολα «+» και «−». Ωστόσο, τα τρία τέταρτα από τα παιδιά χρησιμοποιούσαν συχνά αυτά τα σύμβολα όταν έκαναν προσθέσεις και αφαιρέσεις στο σχολείο [...]. Ο Hughes καταφέρνει πράγματι ν' αποσαφηνίσει τις υπάρχουσες υποθέσεις και ν' ανανεώσει από την αρχή το πώς τα παιδιά μαθαίνουν «απλή αριθμητική» —ή αποτυγχάνουν να το κάνουν—, συνεχίζοντας με συγκεκριμένες προτάσεις για το πώς μπορεί να αποκτήσει ασφαλή θεμέλια το εγχείρημα της διδασκαλίας και της εκμάθησης της αριθμητικής.

[ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΡΟΛΟΓΟ ΤΗΣ MARGARET DONALDSON]

ΚΩΔ. ΑΡΙΘΜΟΣ 571 012

ISBN 960-01-0598-7

GUTENBERG ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ

11

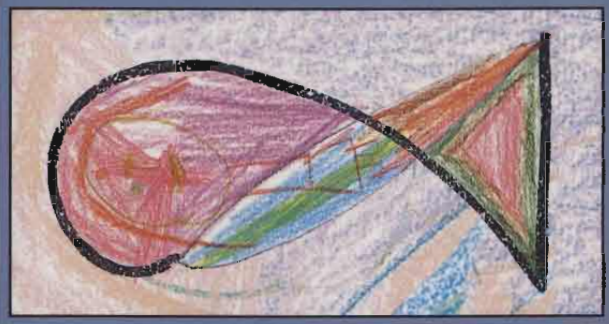
M. HUGHES ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ ΚΑΙ Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

MARTIN HUGHES

ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ ΚΑΙ Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Δυσκολίες στην Εκμάθηση των Μαθηματικών

ΠΡΟΛΟΓΟΣ
MARGARET DONALDSON
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
ΣΤΕΛΛΑ ΒΟΣΝΙΑΔΟΥ
GUTENBERG ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ



Δεν είναι εύκολο ν' αποκτήσουν τα μικρά παιδιά την ικανότητα να κάνουν τέτοιες μεταφράσεις. Ένας τρόπος που μπορεί να τα βοηθήσει είναι η οικεία και βασική επινόηση της χρησιμοποίησης των δαχτύλων. Τα δάχτυλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για ν' αναπαρασταθούν απόντα αντικείμενα (όπως σταφιδόψωμα ή παιδιά), και συγχρόνως να είναι από μόνα τους συγκεκριμένες αναφορές σε προτάσεις στη γλώσσα της αριθμητικής. Με αυτό τον τρόπο παρέχουν μια σημαντική σύνδεση ανάμεσα στο αφηρημένο και το συγκεκριμένο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΟΥΝ ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Στο τελευταίο Κεφαλαιο ειδαμε ποσο δυσκολο ειναι για τα παιδιά να συνδέουν την κατανόηση που έχουν για τους αριθμούς στο επίπεδο του συγκεκριμένου με προτάσεις εκφρασμένες στην αφηρημένη γλώσσα της αριθμητικής, όπως: «Ένα και δύο κάνουν τρία» ή «Αν πάρεις από τα τρία τα δύο μένει ένα». Οι ίδιες όμως προτάσεις μπορούν να εκφραστούν γραπτά ως «1 + 2 = 3» ή «3 – 2 = 1». Είναι πιθανό τα παιδιά να βρουν ακόμη πιο δύσκολο να συνδέσουν την κατανόησή τους μ' αυτό τον γραπτό τυπικό συμβολισμό. Προτάσεις όπως «1 + 2 = 3» είναι περισσότερο αφηρημένες παρά συγκεκριμένες – αλλά επίσης είναι γραπτές και όχι προφορικές και χρησιμοποιούν τα σχετικά ανοίκεια σύμβολα της αριθμητικής.

Αν και βλέπουν συνέχεια γύρω τους γραπτά ψηφία, τα παιδιά στις δυτικές συνήθως κοινωνίες δεν εισάγονται στη γραπτή αριθμητική έως ότου αρχίσουν το σχολείο. Η ακριβής ηλικία που συμβαίνει αυτό διαφέρει από χώρα σε χώρα, αλλά, όποτε κι αν γίνεται, το βασικό πρόβλημα είναι το ίδιο: τα παιδιά πρέπει να μάθουν να συνδέουν τη νέα γραπτή μορφή αναπαράστασης με την κατανόηση των αριθμών στο επίπεδο του συγκεκριμένου που έχουν ήδη όταν αρχίζουν το σχολείο. Για παράδειγμα, πρέπει να μάθουν ότι η πρόσθεση ενός τούβλου σε δυο τούβλα μπορεί να αναπαρασταθεί με το «2 + 1 = 3», και αντίστροφα: ότι η έκφραση «3 – 2 = 1» μπορεί να αναπαρα-

σταθεί συγεκριμένα με την αφαίρεση δύο τούβλων από τρία τούβλα. Για να χρησιμοποιήσω την ορολογία που εισήγαγα στο προηγούμενο Κεφάλαιο, τα παιδιά πρέπει να μάθουν να μεταφράζουν ανάμεσα στην κατανόηση που έχουν για τον αριθμό στο επίπεδο του συγκεκριμένου και στον γραπτό συμβολισμό της αριθμητικής.

Ένας τρόπος να δούμε τις ιδέες των παιδιών για τον γραπτό συμβολισμό είναι να τους ζητήσουμε να παράγουν *δικές τους* αναπαραστάσεις απλών αριθμητικών εννοιών. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να δώσουμε σ' ένα παιδί μολύβι και χαρτί, να του δείξουμε έναν αριθμό αντικειμένων, και να του ζητήσουμε να γράψει κάτι στο χαρτί ώστε να μας δείξει πόσα αντικείμενα είναι μπροστά του. Διαφορετικά, μπορούμε να εκτελούμε προσθέσεις και αφαιρέσεις με αντικείμενα και να ζητάμε από το παιδί να μας πει τι έχει γίνει. Εάν χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο με παιδιά προσχολικής ηλικίας, θα έχουμε πληροφορίες για το τι ιδέες έχουν όσον αφορά τον γραπτό συμβολισμό πριν εισαχθούν στο καθιερωμένο σύστημα του σχολείου. Η ίδια μέθοδος μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί με παιδιά σχολικής ηλικίας που έχουν ήδη εισαχθεί στο σύστημα: αντιλαμβάνονται πλήρως τη σχέση ανάμεσα σ' αυτά τα σύμβολα και στις προσθέσεις και αφαιρέσεις με *πραγματικά* αντικείμενα;

Το παρόν Κεφάλαιο εκθέτει τις ενδιαφέρουσες και αναπάντεχες απαντήσεις των μικρών παιδιών σε ερωτήματα που τέθηκαν σε έρευνες που έγιναν στο Εδιμβούργο. Θα δούμε πρώτα τις απόπειρες των παιδιών ν' αναπαραστήσουν τον αριθμό μιας ομάδας αντικειμένων, και στη συνέχεια τις απόπειρές τους ν' αναπαραστήσουν απλές προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Αναπαραστάσεις Ποσοτήτων από τα Παιδιά

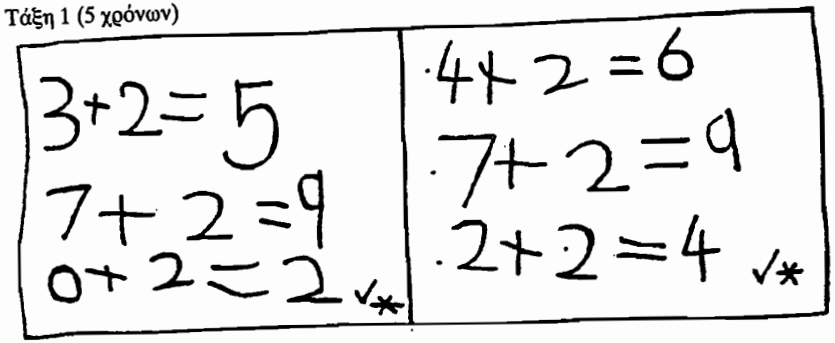
Όταν ξεκίνησα αυτή τη γραμμή διερεύνησης, μπόρεσα να βρω μια μόνο προηγούμενη έρευνα που είχε κάνει κάτι παρόμοιο. Στην έρευνα εκείνη, η Barbara Allardice (1977) ζήτησε από παιδιά τριών έως επτά χρόνων στην Αμερική να γράψουν μηνύματα που θα τα διάβαζε αργότερα ο Σνούπι (ένας σκύλος-παιχνίδι που είχε τα μάτια του

κλειστά). Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο κατάφερε να αναδύσει τις αυθόρμητές τους αναπαραστάσεις για ποσότητες, για προσθέσεις και αφαιρέσεις. Η Allardice ανέφερε ότι τα μικρά παιδιά αναπαριστούσαν τις ποσότητες πιο εύκολα απ' ό,τι τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις. Ανέφερε επίσης ότι πολλά παιδιά επινοούσαν δικές τους μεθόδους, αλλά έδωσε λίγα συγκεκριμένα παραδείγματα.

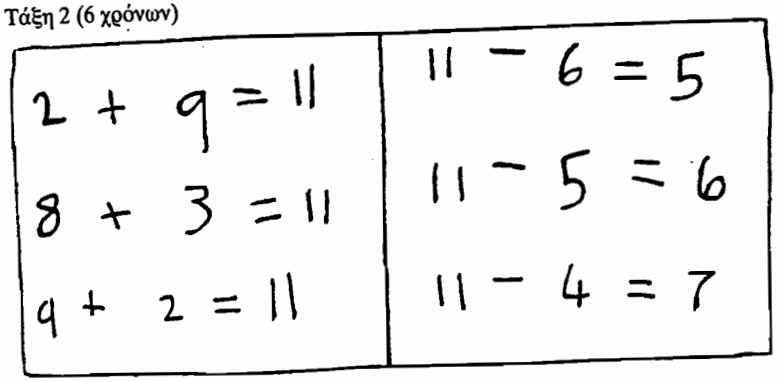
Τα ευρήματα της Allardice μου προκάλεσαν το ενδιαφέρον, κι αποφάσισα να δω μόνος μου πώς τα μικρά παιδιά στη Βρετανία ανταποκρίνονταν στην ίδια κατάσταση. Στην αρχή η μέθοδός μου έμοιαζε πολύ μ' αυτήν της Allardice: χρησιμοποίησα μικρά τούβλα, κι ένα παιχνίδι-πάντα, που το ονόμασα Τσο-Τσο, ήταν ο αποδέκτης των μηνυμάτων των παιδιών. Παρόλες τις αντιδράσεις που απέσπασε από τα παιδιά αυτή η διαδικασία, μου φάνηκε άσκοπα τεχνητή και πολυσύνθετη. Άφησα καταμέρος τον Τσο-Τσο, και απλά ζήτησα από τα παιδιά «να βάλουν κάτι στο χαρτί» για να δείξουν πόσα τούβλα ήταν μπροστά τους, ή τι είχε συμβεί στα τούβλα. Τα περισσότερα παιδιά ανταποκρίθηκαν πρόθυμα· λίγα ήταν διστακτικά στην αρχή, αλλά μετά από κάποια μικρή ενθάρρυνση, κι αφού επαναλάμβανα την ερώτηση, παρήγαγαν κι εκείνα επίσης σημάδια στο χαρτί.

Σ' αυτό το σημείο συνάντησα την Miranda Jones, μια φοιτήτρια του τελευταίου έτους στο Τμήμα Ψυχολογίας του Πανεπιστημίου του Εδιμβούργου. Βασιζόμενοι στην έρευνα-πιλότο που έκανα, αποφασίσαμε να εκτελέσουμε μια μεγάλης κλίμακας έρευνα. Χρησιμοποιήσαμε ενενηνταέξι παιδιά (ηλικίας τριών χρόνων και τεσσάρων μηνών έως επτά χρόνων και εννέα μηνών), που τα χωρίσαμε σε τέσσερις ομάδες των εικοσιτεσσάρων παιδιών για το κάθε επίπεδο εκπαίδευσης, από τον παιδικό σταθμό έως και την τρίτη τάξη. Το σχολείο τους ήταν ένα σταυροδρόμι της κοινότητας και τα παιδιά προέρχονταν από ποικίλα κοινωνικο-οικονομικά στρώματα. Τα παιδιά της προσχολικής ομάδας δεν είχαν πάρει τυπική εκπαίδευση στην αριθμητική. Τα παιδιά της πρώτης τάξης είχαν αρχίσει με απλά αθροίσματα, προσθέτοντας το 1 και το 2, και τα παιδιά της δεύτερης και της τρίτης τάξης έλυναν προβλήματα αριθμητικής στο τετράδιό τους σχεδόν καθημερινά (βλ. Σχήμα 5.1.).

Τάξη 1 (5 χρόνων)



Τάξη 2 (6 χρόνων)



ΣΧΗΜΑ 5.1. *Σελίδες από τα τετράδια εργασίας των παιδιών.*

Η Miranda Jones έβλεπε κάθε παιδί ατομικά και του ζητούσε ν' αναπαραστήσει τις ποσότητες ένα, δύο, τρία, πέντε και έξι. Τους έδινε χαρτί και μολύβι και τοποθετούσε μπροστά τους πάνω στο τραπέζι μια ποσότητα τούβλων. Έπειτα τα ρωτούσε: «Μπορείς να βάλεις κάτι στο χαρτί για να δείξεις πόσα τούβλα είναι πάνω στο τραπέζι;» Διάλεξε τον συγκεκριμένο τρόπο έκφρασης γιατί δεν αναφέρονται οι λέξεις «γράψιμο» ή «σχεδίασμα», κι έτσι αφήνει περιθώριο στα παιδιά για όσο το δυνατό περισσότερες δυνατότητες επιλογής. Όταν είχαν «βάλει κάτι στο χαρτί», τα τούβλα απομακρύνονταν και τοποθετούσε μπροστά τους ένα νέο σύνολο από τούβλα κι ένα καθαρό κομμάτι χαρτί. (Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Jones, 1981).

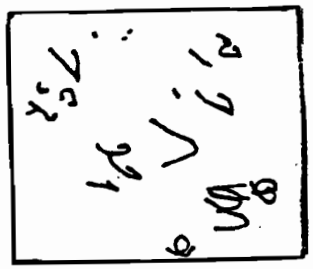
Τα παιδιά χρησιμοποίησαν ποικίλες μεθόδους για ν' αναπαραστήσουν τα τούβλα. Σε μια προσεκτικότερη εξέταση, ανακαλύψαμε ότι μπορούμε αρκετά εύκολα να διακρίνουμε τις απαντήσεις τους σε τέσσερις βασικές κατηγορίες.

Ιδιοσυγκρασικές Απαντήσεις

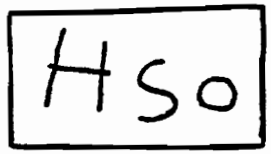
Οι απαντήσεις ταξινομήθηκαν ως ιδιοσυγκρασικές όταν δεν μπορέσαμε ν' ανακαλύψουμε στις αναπαραστάσεις των παιδιών κάποιες τακτικότητες που θα μπορούσαμε να τις συσχετίσουμε με τον αριθμό των αντικειμένων που είχαν μπροστά τους. Αυτό δεν απέκλειε την πιθανότητα οι απαντήσεις να είχαν νόημα για τα ίδια τα παιδιά: σήμαινε απλώς ότι δεν είχαν νόημα για μας (βλ. Σχήμα 5.2.).

(α') Άλισον (4 χρόνων και 2 μηνών): 2 τούβλα

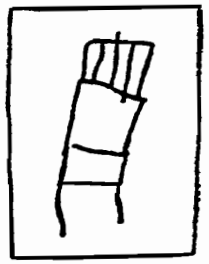
(β') Λιν (4 χρόνων και 3 μηνών): 5 τούβλα



(γ') Χάλα (3 χρόνων και 6 μηνών): 1 τούβλο



(δ') Νίκολα (4 χρόνων και 4 μηνών): 5 τούβλα



ΣΧΗΜΑ 5.2. *Παραδείγματα ιδιοσυγκρασικών απαντήσεων.*

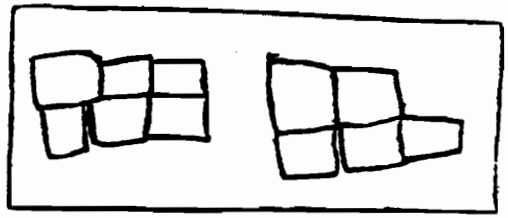
Η πιο συνήθης ιδιοσυγκρασική απάντηση ήταν να καλύπτουν το χαρτί με σκαριφήματα, όπως στην αναπαράσταση των δύο τούβλων της Άλισον. Παρόλ' αυτά, ορισμένα παιδιά δεν έκαναν ένα συνεχές σκαρίφημα στο χαρτί, αλλά ξεχωριστά που έμοιαζαν με γράμματα. Για παράδειγμα, η Λιν είπε: «Γράφω», καθώς έκανε πολύ προσεχτικά τα σημάδια της στο χαρτί. Ένα τρίτο είδος ιδιοσυγκρασικής απάντησης ήταν να παράγουν αναγνωρίσιμα γράμματα της αλφαβήτου, όπως στο παράδειγμα της Χάλα. Τέλος, μερικά παιδιά σχεδίασαν εικόνες με άσχετα αντικείμενα, όπως η ζωγραφιά του Νίκολα, που ισχυρίζεται ότι είναι μια καρέκλα.

Εικονογραφικές Απαντήσεις

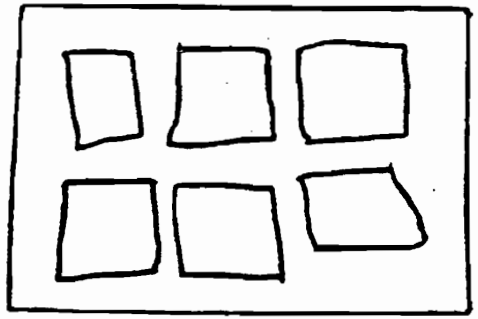
Ο όρος «εικονογραφία» χρησιμοποιείται συχνά για να περιγράψει συγκεκριμένα γραπτά συστήματα που χρησιμοποιούνται σε άλλες κουλτούρες. Το κριτήριο εδώ είναι ότι τα παιδιά προσπάθησαν να αναπαραστήσουν κάτι από την εμφάνιση των αντικειμένων που είχαν μπροστά τους, καθώς και τον πληθικό αριθμό τους. Μια απάντηση θα κατηγοριοποιούνταν ως εικονογραφική εάν το παιδί ενωποιούσε σ' αυτήν μια ένδειξη του σχήματος, της θέσης, του χρώματος ή του προσανατολισμού των τούβλων (βλ. Σχήμα 5.3.).

Η πιο συνήθης εικονογραφική απάντηση ήταν να σχεδιάσουν τα τούβλα με το χέρι, όπως προσπάθησε να κάνει ο Ντάνιελ. Όμως λίγα παιδιά τοποθέτησαν ένα-ένα τα τούβλα με τη σειρά πάνω στο χαρτί και σχεδίασαν γύρω τους, όπως έκανε η Ρέιτζελ. Αυτή μπορεί να ήταν μια εικονογραφική απάντηση στην οδηγία: «Βάλε κάτι πάνω στο χαρτί», με το παιδί να βάζει όντως το τούβλο πάνω στο χαρτί – αντί για ένα σημάδι, όπως επιθυμούσαμε να κάνει! Διαφορετικά, θα μπορούσε αυτή η πράξη να βοηθήσει το παιδί να είναι πιο ακριβές: ένα παιδί σχεδίασε τα τούβλα με το χέρι όταν ο αριθμός τους ήταν μικρός, αλλά τα τοποθέτησε πάνω στο χαρτί και τα σχεδίασε γύρω τους για μεγαλύτερους αριθμούς.

Ντάνιελ (5 χρόνων και 11 μηνών): ελεύθερο σχέδιο (αναπαράσταση 6 τούβλων και 5 τούβλων)



Ρέιτζελ (4 χρόνων και 10 μηνών): σχεδίασμα περιγράμματος 6 τούβλων

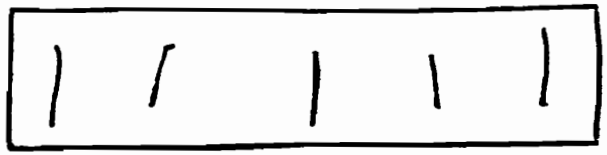


ΣΧΗΜΑ 5.3. *Παραδείγματα εικονογραφικών απαντήσεων.*

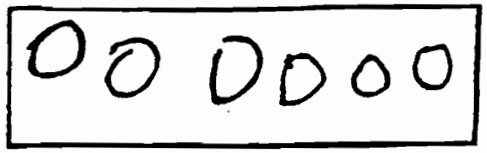
Εικονικές Απαντήσεις

Όπως και οι εικονογραφικές απαντήσεις, έτσι κι αυτές βασίζονται σε μία αντιστοιχία ένα-προς-ένα, όμως εδώ το παιδί χρησιμοποιεί ένα σύστημα όπου αναπαριστά το κάθε τούβλο με ένα ασυνεχές σημάδι που το έχει εφεύρει από μόνο του. Οι εικονικές απαντήσεις είχαν συχνά τη μορφή απλών γραμμών, όπως π.χ. του Μιούτελ (βλ. Σχήμα 5.4.). Κάπου-κάπου όμως τα παιδιά σχεδίαζαν άλλα σχήματα για ν' αναπαραστήσουν το κάθε τούβλο, όπως η Έμα που σχεδίασε κύκλους κι η Πάμελα που σχεδίασε σπίτια.

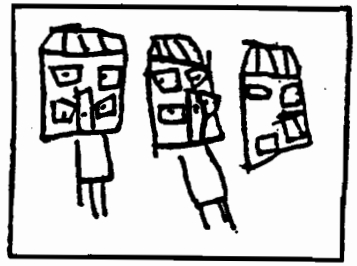
Μιούτελ (4 χρόνων και 3 μηνών): 5 τούβλα



Έμα (5 χρόνων και 2 μηνών): 6 τούβλα



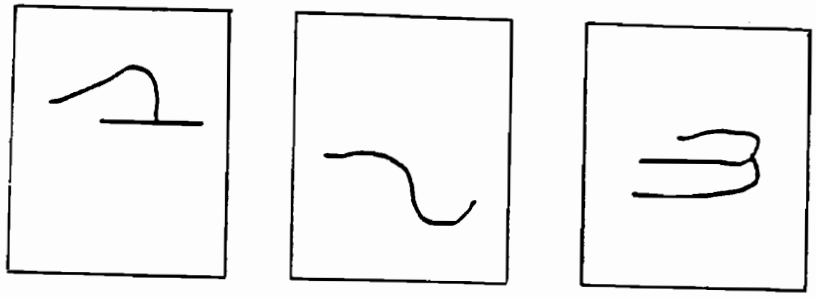
Πάμελα (5 χρόνων και 1 μηνός): 3 τούβλα



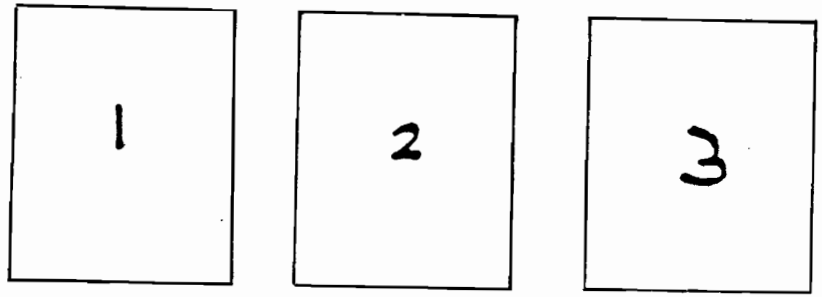
ΣΧΗΜΑ 5.4. *Παραδείγματα εικονικών απαντήσεων.*

Ο όρος «εικονικός», όπως χρησιμοποιείται εδώ, ικανοποιεί την ιδέα του Charles Peirce για μια εικόνα ως ενός μη αυθαίρετου σημαδιού (βλ. Lyons, 1977, σ. 102). Ενώ τα ιδιαίτερα στοιχεία αυτών των απαντήσεων είναι ίσως πραγματικά αυθαίρετα, η απάντηση συνολικά δεν είναι, αν τη δούμε μέσα στο πλαίσιο του έργου. Ικανοποιεί την ουσιαστική απαίτηση – που είναι να εκφραστεί ο πληθικός αριθμός της ομάδας. (Ας σημειωθεί ότι ο Jerome Bruner, 1964, χρησιμοποιεί τον όρο «εικονικός» –iconic– κάπως διαφορετικά).

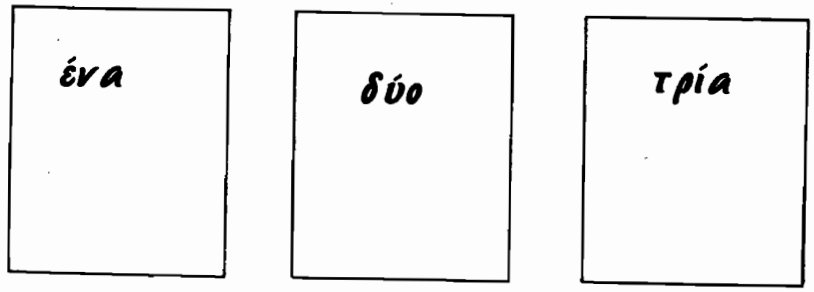
Νιλ (3 χρόνων και 5 μηνών)



Λι (6 χρόνων και 11 μηνών)



Κασίφ (7 χρόνων και 4 μηνών)

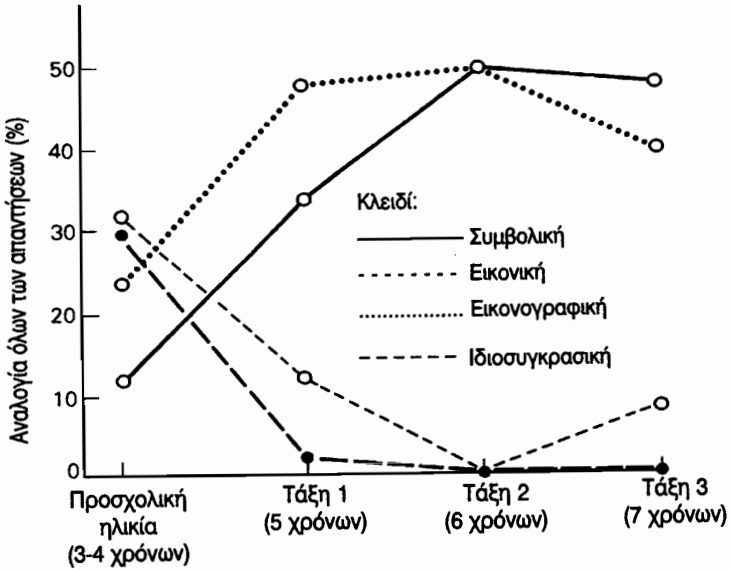


ΣΧΗΜΑ 5.5. *Παραδείγματα συμβολικών απαντήσεων (όλες αναπαριστούν 1, 2 και 3 τούβλα).*

Συμβολικές Απαντήσεις

Τα παιδιά εδώ χρησιμοποιούσαν συμβατικά σύμβολα για ν' αναπαραστήσουν την κάθε ποσότητα. Ο πιο συνηθισμένος τύπος συμβολικής απάντησης ήταν να γράψουν αριθμούς, όπως το παράδειγμα των Νιλ και Λι στο Σχήμα 5.5. Παρόλ' αυτά, λίγα παιδιά από την ομάδα των μεγαλύτερων, όπως ο Κασίφ, έγραψαν στην πραγματικότητα τις λέξεις των αριθμών «ένα», «δύο», «τρία» κ.ο.κ.

Τα παιδιά ήταν αρκετά συνεπή στη μέθοδο που χρησιμοποιούσαν: εάν η πρώτη τους απάντηση ήταν εικονογραφική, θα συνέχιζαν συνήθως μ' αυτό τον τρόπο και για τις άλλες ποσότητες. Ωστόσο οι μέθοδοι που χρησιμοποιούσαν διαφοροποιούνταν αρκετά ανάλογα με την ηλικία τους, με την πιο ξεκάθαρη διαφορά να βρίσκεται ανάμεσα στα παιδιά της προσχολικής ηλικίας και στα παιδιά της πρώτης έως και της τρίτης τάξης. Όπως δείχνει το Σχήμα 5.6., τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας προτιμούσαν τις εικονικές και τις ιδιοσυγκρασικές μεθόδους, ενώ τα μεγαλύτερα παιδιά ήταν πιο πιθανό να παράγουν εικονογραφικές και συμβολικές απαντήσεις. Δεν συνέβαινε πάντως παρά στην τρίτη τάξη οι συμβατικές συμβολικές μέθοδοι που διδάσκονται στο σχολείο να γίνονται η συνηθέστερη απάντηση των παιδιών.



ΣΧΗΜΑ 5.6. *Τύπος απαντήσεων: μεταβολές κατά ηλικία.*

Ήταν αναμενόμενο ότι πολλά από τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας θα παρήγαγαν ιδιοσυγκρασικές απαντήσεις αν δεν κατανοούσαν τη φύση του έργου, ή αν δεν μπορούσαν να σκεφτούν κάποιον τρόπο ν' απαντήσουν. Δεν είχαμε προβλέψει όμως ότι θα είχαμε τόσες πολλές εικονικές απαντήσεις από τα μικρότερα παιδιά. Όπως οι συμβολικές απαντήσεις, έτσι και οι εικονικές αναπαραστάσεις φαίνονται με την πρώτη ματιά σχετικά αφηρημένες: δεν περιέχουν πληροφορίες για το είδος του αντικειμένου που αναπαρίσταται, κι εστιάζονται πλήρως στον αριθμό. Φαίνονται βασικά ν' αναπαριστούν μια πολύ βασική ιδιότητα – το κατά πόσο δηλαδή ένα αντικείμενο είναι παρόν ή όχι. Πράγματι, η χρησιμοποίηση των σημαδιών εδώ μοιάζει με τη διαδεδομένη χρήση των δαχτύλων για την αναπαράσταση αντικειμένων (ή ανθρώπων κλπ.) που είδαμε στο Τρίτο και στο Τέταρτο Κεφάλαιο. Λόγω αυτής της ομοιότητας ανάμεσα στα σημάδια και τα δάχτυλα, η συχνότητα των εικονικών απαντήσεων στις ομάδες της προσχολικής ηλικίας μάς προκαλεί λιγότερη έκπληξη.

Το γεγονός ότι τα παιδιά παρήγαγαν μιαν αναπαράσταση των αριθμών των τούβλων δεν σημαίνει αναγκαία ότι αυτή η αναπαράσταση ήταν ακριβής. Τα παιδιά μέτρησαν λανθασμένα μερικές φορές τα τούβλα, κι έτσι αναπαράστησαν λανθασμένα την ποσότητα των τούβλων, ή απέτυχαν στην ένα-προς-ένα αντιστοιχία. Τα παιδιά ήταν πιο πιθανό να είναι ακριβή με μικρούς αριθμούς (1, 2 και 3) παρά με μεγάλους (5 και 6), και, χωρίς αυτό να μας εκπλήσσει, τα μεγαλύτερα παιδιά ήταν πιο ακριβή απ' ό,τι τα μικρότερα.

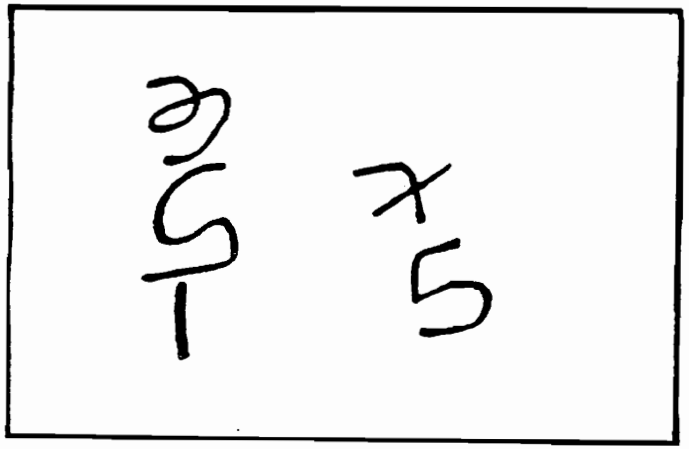
Κάθε τρόπος αναπαράστασης, εάν χρησιμοποιείται συστηματικά, μπορεί να θεωρείται μια αποδεκτή γραπτή αναπαράσταση των αριθμών· είναι ακόμη πιθανό ότι ένα παιδί θα μπορούσε να κατασκευάσει ένα ιδιοσυγκρασικό σύστημα που να έχει νόημα μόνο για το ίδιο – αν και κανένα από τα παιδιά στην έρευνα δεν φάνηκε να δουλεύει μ' αυτό τον τρόπο. Εκεί που οι διαφορετικές μέθοδοι δια-

φέρουν είναι στον *τρόπο* που μεταφέρουν πληροφορίες για τον αριθμό, καθώς και στο πλήθος των επιπλέον πληροφοριών που δίνουν. Οι εικονογραφικές, για παράδειγμα, είναι χρήσιμες στο ότι παρέχουν πληροφορίες όχι μόνο για τον αριθμό, αλλά επίσης και για άλλες ιδιότητες των αντικειμένων που αναπαριστούν (το μέγεθος, το σχήμα, και πιθανόν το χρώμα τους). Ένα εικονικό σύστημα με σημάδια, από την άλλη μεριά, δεν μας λέει τίποτε για τα αντικείμενα, αλλά συχνά είναι το πιο κατάλληλο σύστημα για την αλληλουχία των γεγονότων (αυτό θα συζητηθεί εκτενέστερα στο επόμενο Κεφάλαιο).

Η ιδιότητα των εικονικών συστημάτων παρουσιάστηκε καλά από ένα κορίτσι που ονομαζόταν Λίντσι (4 χρόνων και 7 μηνών), στην έρευνα-πιλότο που έκανα. Αντίθετα με τα παιδιά στη βασική μας έρευνα, η Λίντσι χρησιμοποίησε το ίδιο κομμάτι χαρτί σε όλη τη συνεδρία. Τοποθέτησα τα τούβλα μπροστά της πάνω στο τραπέζι, ένα-ένα, έως ότου έγιναν επτά. Καθώς έβαζα κάθε τούβλο, η Λίντσι ανταποκρινόταν με μια κάθετη γραμμή. Ήθελα να δω πώς θ' αντιδράσει όταν τα τούβλα θ' απομακρύνονταν, κι έτσι άρχισα να τ' απομακρύνω ένα-ένα κάθε φορά. Η αντίδρασή της ήταν να βάζει μια μικρή τελεία κάτω από τη γραμμή για κάθε τούβλο που απομακρυνόταν. Τελειώσαμε με την απομάκρυνση όλων των τούβλων από το τραπέζι, και το σχήμα των γραμμών και των τελειών παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.7.

ΣΧΗΜΑ 5.7. *Δημιουργικές εικονικές απαντήσεις της Λίντσι.*

Ένα συμβολικό σύστημα είναι συνήθως ο πιο αποτελεσματικός τρόπος αναπαράστασης των αριθμών, αλλά συνήθως δεν αποδίδει άλλες πληροφορίες για τα αντικείμενα που αναπαρίστανται. Παρόλ' αυτά, η Τζούλιετ (3 χρόνων και 10 μηνών), ένα άλλο παιδί που συμμετείχε στην έρευνα-πιλότο, βρήκε έναν ιδιοφυή τρόπο να χειριστεί το πρόβλημα. Παρά την ηλικία της, η Τζούλιετ χρησιμοποίησε ένα συμβολικό σύστημα μ' έναν συστηματικό και τακτικό τρόπο – χρησιμοποίησε ένα «1» για το ένα τούβλο, ένα ανάποδο «2» για τα δύο τούβλα, ένα «3» για τα τρία τούβλα κ.ο.κ. Ένα από τα μειονεκτήματα ενός συμβολικού συστήματος είναι ότι δεν αναπαριστά τη θέση των αντικειμένων, κι έτσι δεν ήξερα τι θα έκανε η Τζούλιετ εάν έβαζα τα τούβλα να σχηματίζουν έναν πύργο. Ανταποκρίθηκε γράφοντας τα νούμερα «1», «2», «3» κάθετα. Πρόσθεσα έπειτα δύο ακόμη τούβλα στον πύργο. Η Τζούλιετ έδειξε ότι δεν υπήρχε χώρος στο χαρτί της για να προσθέσει άλλους αριθμούς πάνω από το προηγούμενό της σχήμα, κι έτσι έγραψε το «4» και το «5» κάθετα δίπλα στο παλιό της σχήμα, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.8. Η Τζούλιετ παρουσίασε μεγάλη ευστροφία στην προσαρμογή του συμβολικού της συστήματος, ώστε να περιλαμβάνει και εικονικά και εικονογραφικά στοιχεία.



ΣΧΗΜΑ 5.8. *Δημιουργικές συμβολικές απαντήσεις της Τζούλιετ.*

Αναπαραστάσεις του Μηδενός από τα Παιδιά

Ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζει κάθε σύστημα αναπαράστασης είναι πώς να αναπαριστά την *απουσία* μιας ποσότητας ή το «τίποτε». Για ν' ανακαλύψουμε πώς τα παιδιά θα χειρίζονταν αυτό το πρόβλημα, αδειάσαμε το τραπέζι από τα τούβλα και ρωτήσαμε το κάθε παιδί: «Μπορείς τώρα να δείξεις ότι δεν υπάρχουν τούβλα πάνω στο τραπέζι;»

Όπως ήταν αναμενόμενο, σχεδόν όλα τα παιδιά που χρησιμοποίησαν συμβολικές μεθόδους για ν' αναπαραστήσουν τις ποσότητες χρησιμοποίησαν και το συμβατικό σύμβολο «0» για ν' αναπαραστήσουν την απουσία των τούβλων. Υπήρχαν πάντως κάποιες ιδιοσυγκρασικές εκδοχές αυτού του είδους απάντησης – όπως όταν ο Νίκολα (5 χρόνων και 6 μηνών) έγραψε το «10», και είπε με ικανοποίηση: «Αυτό είναι που βάζεις όταν δεν υπάρχει τίποτε, ε;» Τα παιδιά που σε άλλες περιπτώσεις είχαν χρησιμοποιήσει εικονικές ή εικονογραφικές μεθόδους, ανταποκρίθηκαν με διαφορετικούς τρόπους. Ορισμένα χρησιμοποίησαν το συμβατικό σύμβολο «0», ή επινόησαν δικά τους σύμβολα, όπως μια τελεία ή μια μουτζούρα. Άλλα σχεδίασαν ένα άδειο κουτί ή τραπέζι. Μερικά σχεδίασαν ένα τούβλο ή μια γραμμή. Τέλος, κάποια παιδιά άφησαν το χαρτί κενό, κι ήταν συχνά δύσκολο ν' αποφασίσουμε εάν το έκαναν εσκεμμένα, για ν' αναπαραστήσουν το «τίποτε», ή εάν δεν μπορούσαν απλά ν' απαντήσουν.

Αντίθετα από τις προηγούμενες ερωτήσεις, βρήκαμε ότι πολλά παιδιά ανταποκρίθηκαν στο πρόβλημα της αναπαράστασης του «τίποτε» με αμήχανα βλέμματα, κι ήταν φανερό ότι τους ήταν δύσκολο να καταλάβουν τι τους ζητούσαμε. Γενικά, γνωρίζαμε καλά ότι δεν τους δόθηκε καμία αιτιολόγηση για να κάνουν αυτά τα σημάδια στο χαρτί: οι αναπαραστάσεις τους δεν εξυπηρετούσαν κανέναν φανερό σκοπό για οποιονδήποτε είχε σχέση. Συνολικά δεν φάνηκε αυτό να τα εμποδίζει να γράψουν στο χαρτί – στην πραγματικότητα είχαμε αποσπάσει ένα ευρύ φάσμα από ενδιαφέρουσες απαντήσεις των παιδιών. Παρόλ' αυτά, γι' ακόμη μια φορά θίχτηκε το ερώτημα του ποιο νόημα έχουν στην πραγματικότητα οι απαντήσεις –αν έχουν κάποιο– για τα ίδια τα παιδιά.

Η Παραγωγή Συμβόλων για Κάποιο Σκοπό: Το Παιχνίδι με τα Μεταλλικά Κουτιά

Αποφάσισα να επινοήσω ένα παιχνίδι όπου οι γραπτές αναπαραστάσεις των παιδιών θα εξυπηρετούσαν έναν καθαρά επικοινωνιακό σκοπό. Η ιδέα για το παιχνίδι προέκυψε εντελώς φυσικά από την προηγούμενη δουλειά μου με τα κουτιά και τα τούβλα. Τα μικρά παιδιά φαίνονταν να ελκύονται από ένα κλειστό κουτί που περιείχε έναν αριθμό τούβλων, και σκέφτηκα ότι μπορούσε να τους κινήσει το ενδιαφέρον η ιδέα τού να βάζουν γραπτά μηνύματα πάνω στο καπάκι ενός κουτιού για να δείξουν πόσα τούβλα έχει μέσα.

Το παιχνίδι εστιάστηκε σε τέσσερα ίδια μεταλλικά κουτιά καπνού, που περιείχαν διαφορετικό αριθμό τούβλων: συνήθως το κάθε κουτί περιείχε τρία, δύο, ένα ή κανένα τούβλο. Αφού άφηνα το παιδί να δει μέσα στα κουτιά, τα ανακάτευα κυκλικά, και του ζητούσα να βρεί «το κουτί με τα δύο τούβλα», «το κουτί που δεν είχε κανένα τούβλο» κ.ο.κ. Σ' αυτό το στάδιο το παιδί δεν είχε άλλη εκλογή από το να μαντέψει ποιο ήταν το σωστό κουτί. Αφού το παιδί μάντεψε μερικές φορές, διέκοψα το παιχνίδι με «μια ιδέα που θα μπορούσε να βοηθήσει». Κόλλησα ένα κομμάτι χαρτί στο καπάκι τού κάθε κουτιού, έδωσα στο παιδί ένα μολύβι, και του πρότεινα «να βάλει κάτι στο χαρτί» ώστε να ξέρει πόσα τούβλα ήταν μέσα. Τα παιδιά ασχολήθηκαν με κάθε μεταλλικό κουτί με τη σειρά, αφού αφαιρούσαν το καπάκι του έτσι ώστε να μπορούν να δουν μέσα. Όταν τελείωσαν τα κουτιά, τ' ανακατέψαμε ξανά κυκλικά και ζήτησα από τα παιδιά για ακόμη μια φορά να ξεχωρίσουν τα συγκεκριμένα κουτιά και να δουν εάν οι αναπαραστάσεις τους «τα είχαν βοηθήσει να παίξουν το παιχνίδι». Έτσι το παιχνίδι με τα Μεταλλικά Κουτιά δεν παρείχε απλά μια ξεκάθαρη αιτιολόγηση για να κάνουν τα παιδιά τις γραπτές αναπαραστάσεις, αλλά και μια ευκαιρία για ν' ανακαλύψουμε τι κατάλαβαν γι' αυτό που είχαν κάνει.

Πραγματοποίησα μια έρευνα όπου έπαιξα το παιχνίδι με τα Μεταλλικά Κουτιά με εικοσιπέντε παιδιά ηλικίας από 3 χρόνων και 1 μηνός έως 5 χρόνων και 10 μηνών. Δεκαπέντε από τα παιδιά ήταν

στην τάξη του παιδικού σταθμού και δέκα στην πρώτη τάξη ενός σχολείου που τα περισσότερα παιδιά ανήκαν στη μέση αστική τάξη. Είδαμε κάθε παιδί ατομικά σε ένα μικρό δωμάτιο μακριά από την τάξη του. (Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Hughes & Jones, 1986).

Δεν υπήρχε αμφιβολία για τη δημοτικότητα του παιχνιδιού. Τα παιδιά βρήκαν το αρχικό παιχνίδι των υποθέσεων ενδιαφέρον, κι ήταν ενθουσιασμένα με την ιδέα τού να φτιάξουν αναπαραστάσεις με χαρτί και μολύβι. Μερικά από τα σχόλιά τους έδειχναν ότι ήξεραν πολύ καλά το πόσο αυτό μπορούσε να τα βοηθήσει, όπως: «Είναι εύκολο τώρα, γιατί έγραψα κάτι».

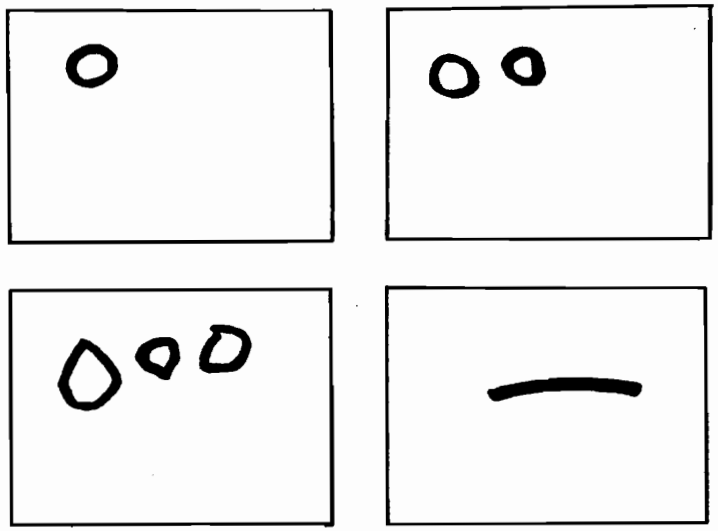
Δεν υπάρχει επίσης αμφιβολία ότι οι αναπαραστάσεις τους τα βοηθούσαν στην πραγματικότητα να παίξουν το παιχνίδι. Προτού να κάνουν τις αναπαραστάσεις τους, η ικανότητά τους να ξεχωρίσουν το κάθε κουτί ήταν στο επίπεδο της τύχης, αλλά στη συνέχεια η επίδοσή τους ήταν σημαντικά υψηλότερη: πάνω από τα δύο τρίτα της ομάδας των παιδιών της προσχολικής ηλικίας, όπως και όλα τα παιδιά της πρώτης τάξης, μπορούσαν να ξεχωρίσουν τα μεταλλικά κουτιά από τις αναπαραστάσεις που είχαν πάνω τους.

Τι μεθόδους χρησιμοποιούσαν τα παιδιά για να αναπαραστήσουν τα τούβλα; Όπως και πριν, οι αναπαραστάσεις τους για τις ποσότητες εκτός του μηδενός κατηγοριοποιήθηκαν ως ιδιοσυγκρασικές, εικονογραφικές, εικονικές ή συμβολικές. Συγκρίσεις με την προηγούμενή μας έρευνα έδειξαν ότι με πολλούς τρόπους τα παιδιά ανταποκρίνονταν σε μια παρόμοια μέθοδο. Και στις δύο έρευνες τα παιδιά παρήγαγαν ένα ευρύ φάσμα αναπαραστάσεων· και στις δύο έρευνες η ομάδα των παιδιών της προσχολικής ηλικίας παρήγαγε υψηλού επιπέδου ιδιοσυγκρασικές και εικονικές απαντήσεις· και στις δύο έρευνες η ομάδα της πρώτης τάξης παρήγαγε συμβολικές και όχι ιδιοσυγκρασικές απαντήσεις. Κι όμως, υπήρχαν δύο σαφείς διαφοροποιήσεις ανάμεσα στις δυο έρευνες.

Η πρώτη διαφοροποίηση αφορούσε τις αναπαραστάσεις των παιδιών για το μηδέν. Στην αρχική μας έρευνα, η απαίτηση να δείξουν ότι δεν υπάρχει τίποτε πάνω στο τραπέζι τα είχε οδηγήσει σε διάφορα αμήχανα βλέμματα. Στο παιχνίδι με τα Μεταλλικά Κουτιά, η

αναπαράσταση του γεγονότος ότι δεν υπήρχε τίποτε μέσα στο κουτί αντιμετωπίστηκε τόσο άμεσα όσο και οι άλλες αναπαραστάσεις. Η πιο συνήθης απάντηση στην ομάδα της προσχολικής ηλικίας ήταν ν' αφήσουν εσκεμμένα το χαρτί κενό (συνοδευόμενη συχνά από σχόλια όπως: «Δεν θα βάλω τίποτα στο χαρτί, γιατί δεν έχει τίποτε μέσα στο κουτί»), ενώ στην ομάδα της πρώτης τάξης η πλειοψηφία χρησιμοποίησε το συμβατικό μηδέν. Άλλα παιδιά έκαναν μια παύλα, όπως έκανε η Άννα (Σχήμα 5.9.), ή σχεδίασαν ένα άδειο μεταλλικό κουτί.

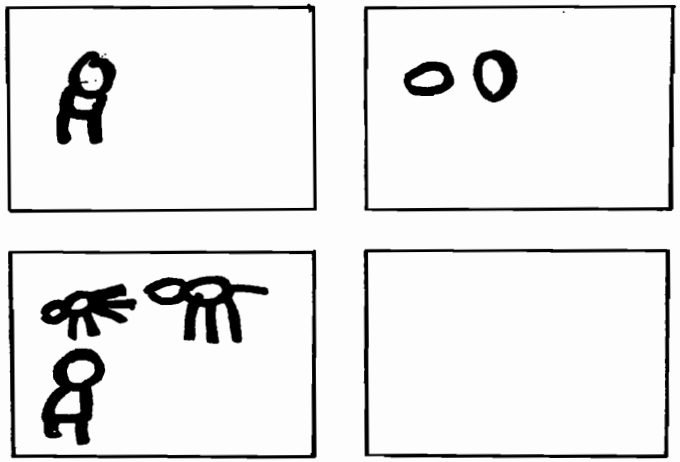
Η απάντηση της Άννας θίγει το ερώτημα εάν τα παιδιά αντιμετωπίζουν τις αναπαραστάσεις τους για το μηδέν με τον ίδιο τρόπο όπως και τις άλλες. Θα μπορούσαν να έχουν κατανοήσει καλά ότι ήταν δυνατό να ξεχωρίσουν το άδειο κουτί επαγωγικά: δηλαδή, έχοντας ξεχωρίσει τα άλλα που περιείχαν ορισμένο αριθμό τούβλων, θα ήξεραν ότι το κουτί που απέμενε δεν περιείχε τίποτε. Αυτή η πιθανότητα δεν μπορεί να αποκλειστεί, αν και δεν υπήρχε κανένα σημάδι ότι τα παιδιά θεωρούσαν την αναπαράσταση του «κανένα τούβλο» σαν κάτι που διέφερε από τις άλλες αναπαραστάσεις.



ΣΧΗΜΑ 5.9. *Αναπαραστάσεις των 1, 2, 3 και 0 τούβλων της Άννας (4 χρόνων και 0 μηνών).*

Η δεύτερη διαφοροποίηση ανάμεσα σ' αυτή την έρευνα και στην προηγούμενή μας βρισκόταν στον αριθμό των εικονογραφικών απαντήσεων. Αυτό το είδος απάντησης –ο σχεδιασμός του περιγράμματος των τούβλων ή, συνηθέστερα, ο ελεύθερος σχεδιασμός– ήταν συνολικά η πιο συχνή απάντηση στην αρχική μας έρευνα. Στο παιχνίδι με τα Μεταλλικά Κουτιά, όμως, πολύ λίγες από τις απαντήσεις των παιδιών της προσχολικής ηλικίας ήταν εικονογραφικές, και καμία από παιδί της πρώτης τάξης. Αυτό γίνεται ενδεχομένως γιατί στο παιχνίδι με τα Μεταλλικά Κουτιά τα παιδιά ήξεραν ότι το μόνο που είχαν να κάνουν ήταν να διακρίνουν ανάμεσα σε διαφορετικούς *αριθμούς* τούβλων, κι εστιάζονταν περισσότερο να επιτύχουν σ' αυτό: υπήρχε μικρότερη πιθανότητα να τείνουν ν' αναπαριστούν άλλα στοιχεία των τούβλων ή των κουτιών.

Είναι βέβαια πιθανό ν' αναπαριστούν τον αριθμό των τούβλων μέσα στα μεταλλικά κουτιά σχεδιάζοντας τον κατάλληλο αριθμό οποιωνδήποτε αντικειμένων. Ορισμένα από τα παιδιά φάνηκαν να έχουν επίγνωση αυτού του γεγονότος. Έτσι η Σόνα (Σχήμα 5.10.) ξόδεψε κάποιο χρόνο για ν' αποφασίσει τι αντικείμενα θα σχεδίαζε ώστε ν' αναπαραστήσει τα τούβλα: τελικά κατέληξε σ' «ένα κορίτσι»

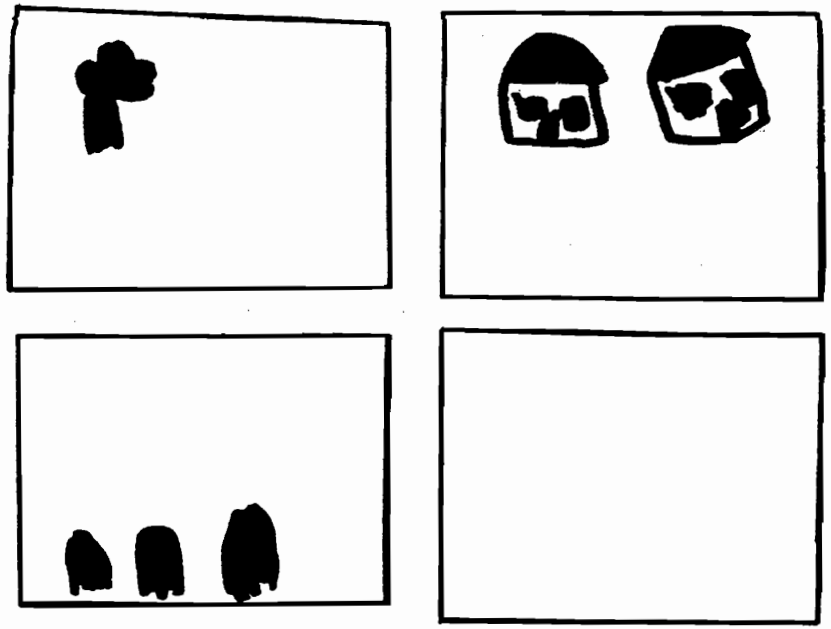


ΣΧΗΜΑ 5.10. *Αναπαραστάσεις των 1, 2, 3 και 0 τούβλων της Σόνα (4 χρόνων και 4 μηνών).*

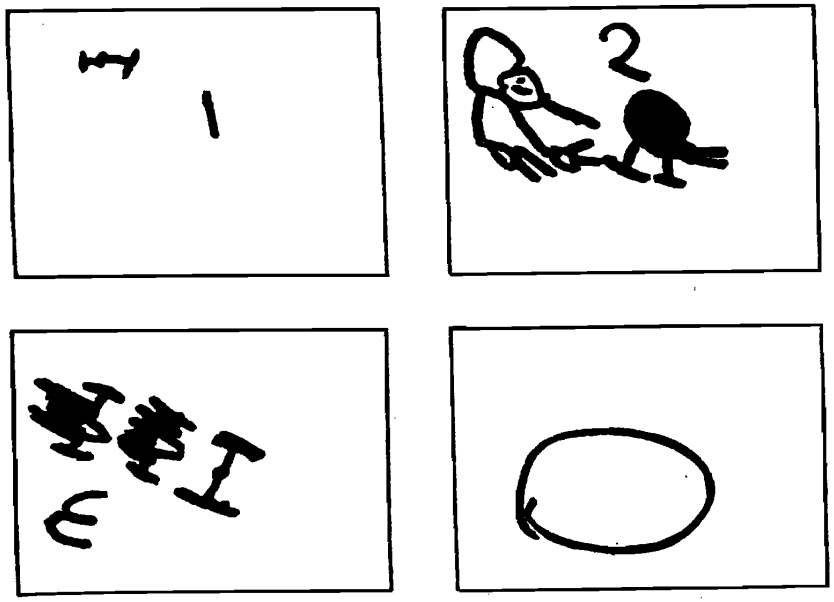
για το ένα τούβλο, «δυο μπάλες» για τα δύο τούβλα, κι «ένα κορίτσι και δύο σκυλάκια» για τα τρία τούβλα. Για το άδειο κουτί άφησε εσκεμμένα το χαρτί κενό.

Αυτό το είδος απάντησης ήταν περισσότερο εμφανές στην ομάδα της πρώτης τάξης, όπου το παρήγαγαν τέσσερα από τα δέκα παιδιά. Ένα από αυτά, η Φιόνα (5 χρόνων και 0 μηνών), ατένιζε για πολλή ώρα έξω από το παράθυρο σαν να έψαχνε για έμπνευση: στο τέλος σχεδίασε ένα δέντρο, δύο σπίτια και τρεις πόρτες – όλα αυτά μπορούσε να τα δει από το παράθυρο (βλ. Σχήμα 5.11.).

Μία διαφορετική λύση υιοθετήθηκε από τον Ααρών (Σχήμα 5.12.). Του άρεσε ο «Πόλεμος των Άστρων», και οι αναπαραστάσεις του αποτελούνταν από «ένα διαστημόπλοιο - έναν άξιο μαχητή» για το ένα τούβλο κι «έναν ελέφαντα κι έναν Περιπατητή» για τα δύο



ΣΧΗΜΑ 5.11. *Αναπαραστάσεις των 1, 2, 3 και 0 τούβλων της Φιόνα.*

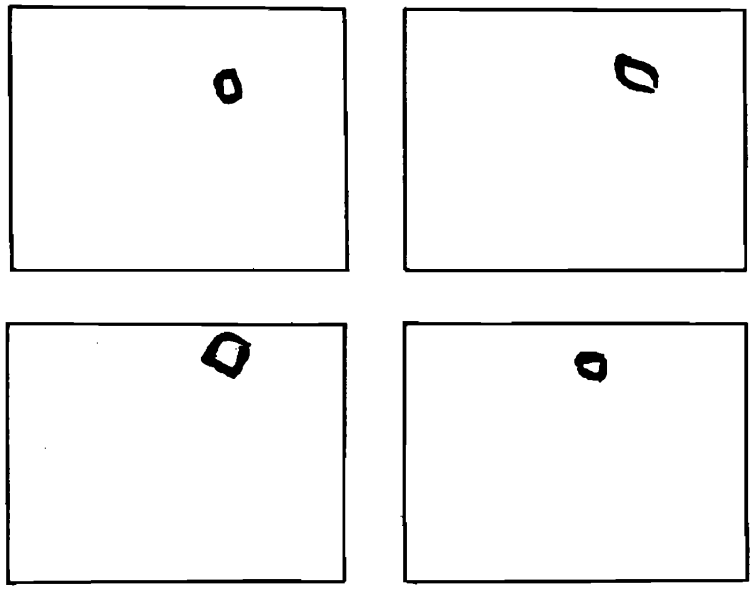


ΣΧΗΜΑ 5.12. *Αναπαραστάσεις των 1, 2, 3 και 0 τούβλων του Ααρών (5 χρόνων και 6 μηνών).*

τούβλα. Για τα τρία τούβλα σχεδίασε «τρία διαστημόπλοια - αυτά τα δύο στην οπισθοφυλακή έρχονται πίσω από εκείνο μπροστά - η φωτιά βγαίνει από πίσω». Έχοντας κάνει τα σχέδιά του, προσθέτει μετά τα νούμερα «1», «2» και «3» για να τον βοηθήσουν να θυμάται!

Εκείνα τα παιδιά που οι αναπαραστάσεις τους αναγνωρίζονταν εύκολα από έναν ενήλικο –όπως ο Ααρών, η Φιόνα, η Σόνα ή η Άννα–, μπορούσαν γενικά να ξεχωρίσουν τα μεταλλικά κουτιά. Αντίθετα, τα παιδιά των οποίων οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν ως ιδιοσυγκρασικές σχεδόν πάντα αποτύχαιναν να τ' αναγνωρίσουν. Ένα παράδειγμα είναι η Σάρα (Σχήμα 5.13.): σχεδίασε το ίδιο σχήμα –που έμοιαζε με τούβλο– για το κάθε κουτί, το οποίο δεν τη βοήθησε να ξεχωρίσει το περιεχόμενό τους.

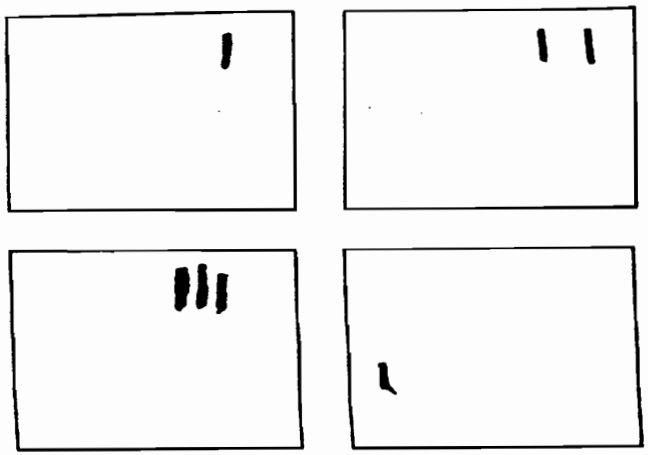
Υπήρχαν πάντως κάποιες ενδιαφέρουσες εξαιρέσεις. Μία ήταν ο Ρίτσαρντ, που για το ένα τούβλο έκανε μία γραμμή, για τα δύο τού-



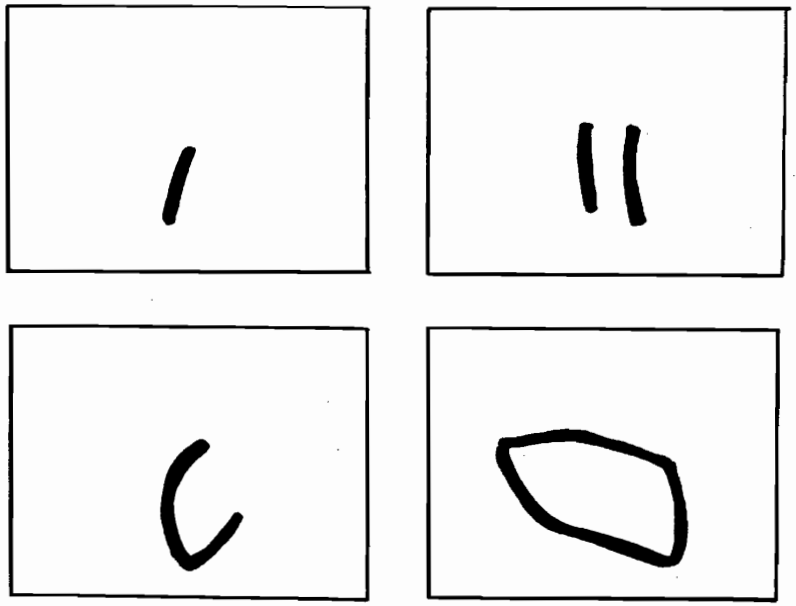
ΣΧΗΜΑ 5.13. *Αναπαραστάσεις των 1, 2, 3 και 0 τούβλων της Σάρα (4 χρόνων και 0 μηνών): πρώτη συνέντευξη.*

βλα δύο γραμμές και για τα τρία τούβλα τρεις γραμμές. Για το άδειο κουτί έκανε επίσης μία γραμμή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.14. Όταν του ζητήθηκε να αναγνωρίσει αργότερα αυτές τις αναπαραστάσεις, δεν έδειξε να μπερδεύεται καθόλου ανάμεσα στο άδειο κουτί και σε κείνο που περιείχε το ένα τούβλο. «Αυτό δεν έχει κανένα μέσα», είπε δείχνοντας το άδειο μεταλλικό κουτί. «Πώς το ξέρεις;», τον ρώτησα. Ο Ρίτσαρντ έδειξε τη μικρή ουρίτσα στη βάση της άλλης γραμμής: «Γιατί αυτή έχει την ουρίτσα· έτσι δεν έχει τίποτα μέσα».

Μια παρόμοια ικανότητα ν' αναγνωρίζει μία ιδιοσυγκρασική απάντηση έδειξε και ο Πολ (Σχήμα 5.15.). Είχε σχεδιάσει κι αυτός μια γραμμή για το ένα τούβλο και δυο γραμμές για τα δύο τούβλα, αλλά είχε κάνει μετά ένα σχήμα –κάτι ανάμεσα σε «C» και σε «U»– για ν' αναπαραστήσει τα τρία τούβλα. Δεν είχε όμως πρόβλημα αργότερα ν' αναγνωρίσει ότι αυτό αναπαριστούσε τα τρία τούβλα.



ΣΧΗΜΑ 5.14. *Αναπαραστάσεις των 1, 2, 3 και 0 τούβλων του Ρίτσαρντ (4 χρόνων και 2 μηνών).*



ΣΧΗΜΑ 5.15. *Αναπαραστάσεις των 1, 2, 3 και 0 τούβλων του Πολ (3 χρόνων και 8 μηνών).*

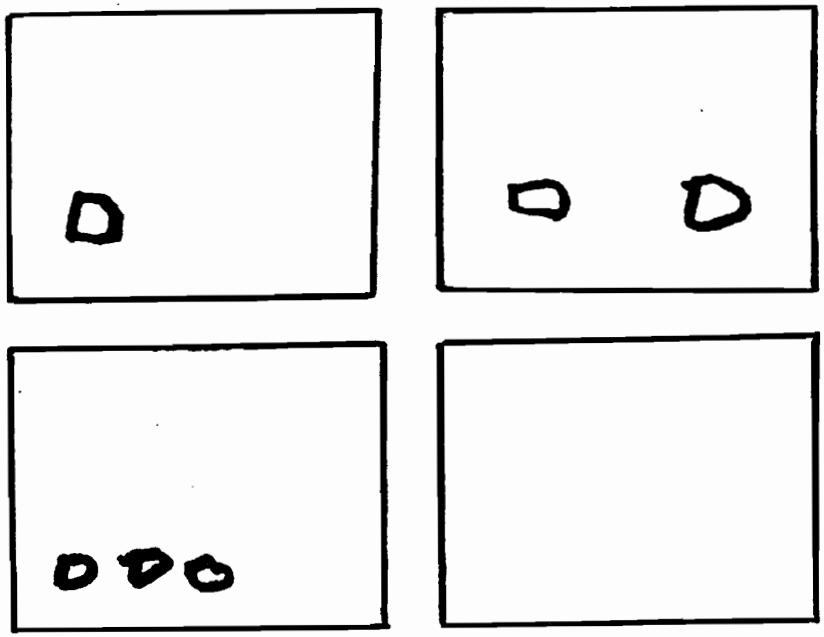
Το Παιχνίδι με τα Μεταλλικά Κουτιά: Μία Εβδομάδα αργότερα

Η ικανότητα των μικρών παιδιών να αναγνωρίζουν τις αναπαραστάσεις τους με εντυπωσίασε, και ήμουν περίεργος εάν θα μπορούσαν να τις αναγνωρίσουν μετά από κάποιο χρονικό διάστημα. Έτσι επέστρεψα στο σχολείο έπειτα από μία εβδομάδα και έδειξα σε κάθε παιδί τα κουτιά με τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις που είχαν κάνει την προηγούμενη εβδομάδα. Όπως πριν, ανακάτεψα τα κουτιά, και τα παιδιά είχαν να μαντέψουν ποιο κουτί περιείχε τον συγκεκριμένο αριθμό τούβλων.

Τα αποτελέσματα ήταν εντυπωσιακά: τα παιδιά ήταν τόσο καλά στο ν' αναγνωρίζουν τις αναπαραστάσεις τους μία εβδομάδα αργότερα όσο και την προηγούμενη εβδομάδα. Τα παιδιά όπως η Σάρα, που είχαν κάνει ιδιοσυγκρασικές αναπαραστάσεις και δεν μπόρεσαν να τις αναγνωρίσουν κατά τη διάρκεια της πρώτης συνέντευξης, δεν μπόρεσαν επίσης να τις αναγνωρίσουν και μια εβδομάδα αργότερα. Από την άλλη, και ο Ρίτσαρντ και ο Πολ μπόρεσαν ν' αναγνωρίσουν τις ιδιοσυγκρασικές τους αναπαραστάσεις μια εβδομάδα αργότερα, με τον Ρίτσαρντ να αναφέρεται ξανά αυθόρμητα στην «ουρίτσα» στην αναπαράστασή του του μηδενός.

Επίσης χρησιμοποίησα αυτή τη δεύτερη επίσκεψη στο σχολείο για ν' ανακαλύψω εάν τα παιδιά που είχαν παράγει αρχικά κάποιες μη αναγνωρίσιμες ιδιοσυγκρασικές αναπαραστάσεις θα επωφελούνταν από μια δεύτερη ευκαιρία. Ρωτήσαμε πρώτα τα παιδιά – που ήταν επτά και ήταν όλα στην ομάδα της προσχολικής ηλικίας: «Θα ήθελες να προσπαθήσεις ξανά;» Τα περισσότερα ανταποκρίθηκαν λέγοντας απλώς ότι δεν μπορούσαν ή δεν ήθελαν να σκεφτούν έναν άλλο τρόπο να το κάνουν αυτό, ενώ εκείνα που ξαναπροσπάθησαν δεν είχαν μεγαλύτερη επιτυχία από την πρώτη τους προσπάθεια. Στη συνέχεια πρότεινα την ιδέα τής ένα-προς-ένα αντιστοιχίας, λέγοντας για παράδειγμα: «Γιατί δεν κάνεις δυο σημάδια πάνω στο κουτί που έχει δύο τούβλα;» Τα παιδιά ανταποκρίθηκαν αμέσως. Πέντε από τα επτά παιδιά υιοθέτησαν την εικονική στρατηγική αμέσως μετά από

ένα και μοναδικό παράδειγμα, γενικεύοντας χωρίς επιπλέον προτροπές στα υπόλοιπα κουτιά. Ένα από αυτά τα πέντε παιδιά ήταν η Σάρα, που είχε παράγει τα τέσσερα σχήματα –που έμοιαζαν με τούβλα– του Σχήματος 5.13. και της οποίας η δεύτερη προσπάθεια παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.16. Τα άλλα δύο παιδιά χρειάστηκαν παραπάνω παραδείγματα, αλλά κι αυτά ακόμη στο τέλος υιοθέτησαν τον κανόνα. Όλα τα παιδιά ήταν στη συνέχεια ικανά να ξεχωρίσουν σωστά τις απαντήσεις τους. Έτσι, στο τέλος της έρευνας όλα τα παιδιά είχαν παράγει αναγνωρίσιμες απαντήσεις με ή χωρίς προτροπή.



ΣΧΗΜΑ 5.16. *Αναπαραστάσεις των 1, 2, 3 και 0 τούβλων της Σάρα (4 χρόνων και 3 μηνών): δεύτερη συνέντευξη.*

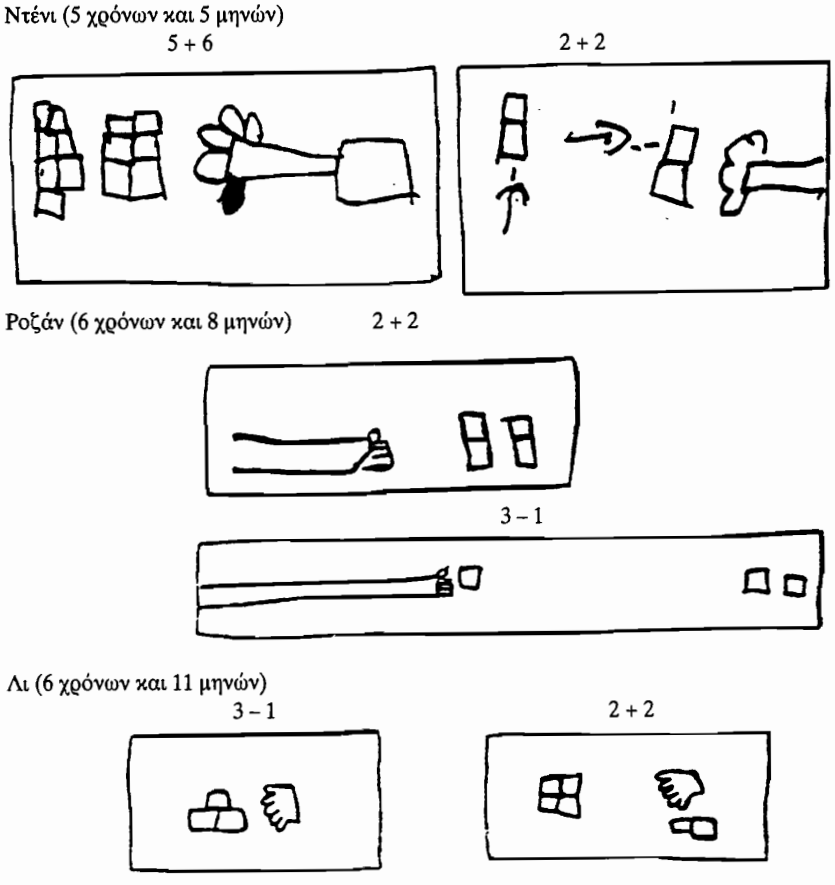
Αναπαραστάσεις της Πρόσθεσης και της Αφαίρεσης από τα Παιδιά

Στα παιδιά που μελετήσαμε η Miranda Jones κι εγώ, και στα οποία αναφέρθηκα προηγουμένως σ' αυτό το Κεφάλαιο, δεν ζητήσαμε μόνο να αναπαραστήσουν ποσότητες τούβλων, αλλά επίσης τους ζητήσαμε να αναπαραστήσουν απλές προσθέσεις και αφαιρέσεις με τα τούβλα. Είχαμε προβλέψει ότι αυτό θα ήταν δυσκολότερο από την αναπαράσταση ποσοτήτων, αλλά σκεφτήκαμε ότι τα παιδιά θα μπορούσαν να επινοήσουν κάποιες ενδιαφέρουσες απαντήσεις, όπως είχαν κάνει όταν τους ζητήσαμε ν' αναπαραστήσουν τις ποσότητες. Περιμέναμε επίσης ότι τα μεγαλύτερα παιδιά θα χρησιμοποιούσαν τα συμβατικά σύμβολα «+», «–» και «=», που χρησιμοποιούσαν τακτικά στο σχολείο.

Χρησιμοποιήσαμε δύο έργα για ν' αποσπάσουμε από τα παιδιά αναπαραστάσεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Στο πρώτο, γνωστό ως το έργο των «Ολοκληρωμένων Λειτουργιών», έπρεπε ν' αναπαραστήσουν την αρχική ποσότητα, καθώς κι ό,τι είχαμε κάνει μ' αυτήν. Σε μια τυπική έκδοση του έργου, η Miranda Jones θα τοποθετούσε δυο τούβλα πάνω στο τραπέζι μπροστά στο παιδί και θα πρόσθετε δύο ακόμη, λέγοντας: «Μπορείς να δείξεις ότι πρώτα είχαμε δύο τούβλα κι ότι μετά προσθέσαμε άλλα δύο;» Οι άλλες εκδοχές που χρησιμοποιήσαμε ήταν οι εξής: πρόσθεση τριών τούβλων σε ένα τούβλο, πρόσθεση πέντε τούβλων σε έξι, αφαίρεση πέντε τούβλων από έξι και αφαίρεση ενός από τρία.

Με έκπληξη διαπιστώσαμε ότι κανένα παιδί δεν ήταν σε θέση να παράγει μια επαρκή αναπαράσταση αυτών των προσθέσεων και αφαιρέσεων. Η πιο κοινή αντίδραση που είχαν τα δύο τρίτα περίπου των παιδιών ήταν η αναπαράσταση απλώς της τελικής ποσότητας των τούβλων που βρίσκονταν πάνω στο τραπέζι. Παρόλ' αυτά, τα παιδιά αντέδρασαν με ποικίλους τρόπους: μερικά αναπαράστησαν το αρχικό ποσό, κάποια έδειξαν το ποσό που προστέθηκε ή αφαιρέθηκε, ενώ άλλα παρήγαγαν διάφορους συνδιασμούς του αρχικού ποσού, του ποσού που προστέθηκε ή αφαιρέθηκε και του τελικού ποσού.

Ένας μικρός αριθμός παιδιών, ιδιαίτερα εκείνων των οποίων η κύρια αντίδραση ήταν εικονογραφική, προσπάθησε να δείξει τι είχε συμβεί σχεδιάζοντας χέρια ή τόξα (βλ. Σχήμα 5.17.). Οι προσπάθειες αυτές ήταν αρκετά ιδιοφυείς, κι από τη στιγμή που μας έλεγαν ποιον μετασχηματισμό προσπαθούσαν να κάνουν, το νόημά τους ήταν συνήθως ξεκάθαρο. Παρόλ' αυτά, καμία από τις αναπαραστάσεις των παιδιών δεν έδινε αρκετές πληροφορίες ώστε να είναι εντελώς σα-



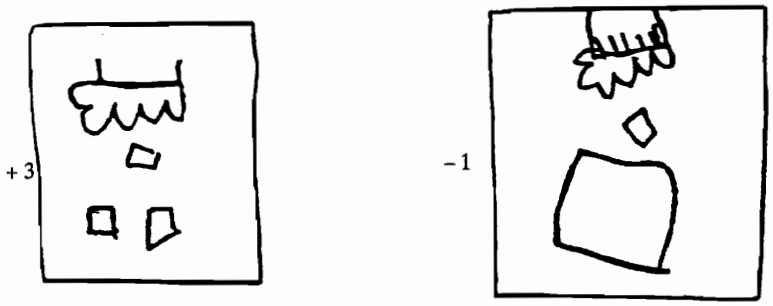
ΣΧΗΜΑ 5.17. *Προσπάθειες αναπαράστασης προσθέσεων και αφαιρέσεων στο έργο των Ολοκληρωμένων Λειτουργιών.*

φής: για παράδειγμα, η αναπαράσταση της Ροζάν της «αφαίρεσης ενός από τρία» θα μπορούσε εύκολα να είναι της «πρόσθεσης ενός σε δύο», ενώ η αναπαράσταση του Λι της «πρόσθεσης δύο σε δύο» θα μπορούσε εύκολα να είναι της «πρόσθεσης δύο σε τέσσερα» ή της «αφαίρεσης δύο από έξι».

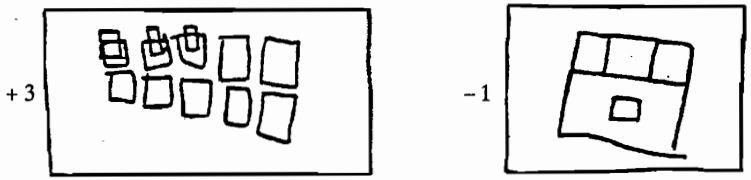
Πρόθεσή μας για το δεύτερο έργο που χρησιμοποιήσαμε, γνωστό ως το έργο του «Σωρού», ήταν να είναι πολύ πιο απλό. Σε μια τυπική έκδοση αυτού του έργου, ένας μεγάλος σωρός από εικοσιπέντε περίπου τούβλα τοποθετήθηκε πάνω στο τραπέζι μπροστά στο παιδί. Τούτη τη φορά η Miranda Jones είπε: «Εδώ είναι ένας μεγάλος σωρός από τούβλα. Θέλω να δείξεις τι κάνω στο σωρό. Το πρώτο πράγμα που θα κάνω είναι αυτό» – για παράδειγμα, θα αφαιρούσε ένα τούβλο από το σωρό, και θα συνέχιζε: «Μπορείς να δείξεις ότι πήρα ένα τούβλο;» Εάν το παιδί άρχιζε να μετρά το σωρό, η Miranda θα έλεγε: «Όχι, μην μετράς τα τούβλα. Δεν με νοιάζει πόσα είναι. Το μόνο που θέλω είναι να δείξεις τι έκανα στο σωρό». Ελπίζαμε ότι, αρνούμενοι στα παιδιά την ευκαιρία ν' αναπαραστήσουν είτε το αρχικό είτε το τελικό ποσό, θα τα υποχρεώναμε να εστιαστούν στην ίδια την πρόσθεση ή, αντίστοιχα, στην αφαίρεση. Οι άλλες εκδοχές που χρησιμοποιήσαμε ήταν η πρόσθεση τριών τούβλων, η πρόσθεση έξι τούβλων και η αφαίρεση πέντε τούβλων.

Με ακόμη μεγαλύτερη έκπληξη διαπιστώσαμε ότι τα παιδιά απέτυχαν τόσο να παράγουν αναπαραστάσεις της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης όσο και στο έργο των Ολοκληρωμένων Λειτουργιών. Ο βασικός τρόπος αντίδρασης των περισσοτέρων από τα μισά παιδιά ήταν απλώς να αναπαραστήσουν το *ποσό* που προστέθηκε ή αφαιρέθηκε από το σωρό, χωρίς να δοθεί καμία πληροφορία για το αν έγινε πρόσθεση ή αφαίρεση. Έντεκα μόνο από τα ενενηνταέξι παιδιά προσπάθησαν να διαφοροποιήσουν την πρόσθεση από την αφαίρεση στις απαντήσεις τους, και μόνο τέσσερα το έκαναν μ' έναν τρόπο που θα μπορούσε να είναι κατανοητός από έναν απληροφόρητο παρατηρητή. Αυτοί οι τέσσερις ήταν ο Κρίστοφερ (7 χρόνων και 2 μηνών), που έγραψε με λέξεις και ψηφία «Πήρε 1» και «Πρόσθεσε 3», ο Χαμπίμπ (6 χρόνων και 5 μηνών), που σχεδίασε τα τού-

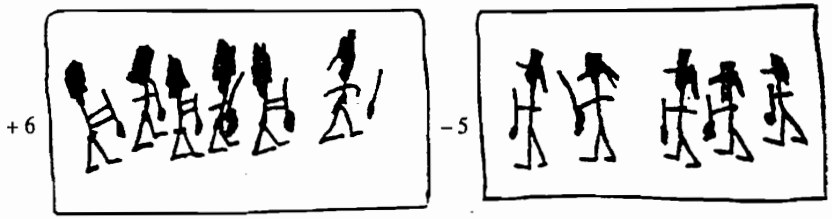
Ντένι (5 χρόνων και 5 μηνών)



Χαμπίμπ (6 χρόνων και 5 μηνών)



Σκοτ (7 χρόνων και 7 μηνών)



ΣΧΗΜΑ 5.18. *Απόπειρες να αναπαραστήσουν προσθέσεις και αφαιρέσεις στο έργο του Σωρού.*

βλα που πρόσθεσα στο σωρό τοποθετημένα πάνω του, ενώ αυτά που αφαίρεσα φαίνονται να είναι μέσα στο κουτί (Σχήμα 5.18.), ο Ντένι (5 χρόνων και 5 μηνών), που σχεδίασε ένα χέρι να προσθέτει τούβλα στο σωρό και σχεδίασε τα τούβλα που αφαιρέθηκαν να τοποθετούνται πίσω στο κουτί (Σχήμα 5.18.), και ο Άλεκ (5 χρόνων και 2 μηνών), που σχεδίασε τούβλα για ν' αναπαραστήσει εκείνα που είχαν προστεθεί και παύλες για ν' αναπαραστήσει εκείνα που αφαιρέθηκαν. Άλλα παιδιά έφτασαν στα όρια της ευρηματικότητάς τους για ν' απαραστήσουν αυτό που είχε γίνει. Για παράδειγμα, ο Σκοτ (7 χρόνων και 7 μηνών) αναπαράστησε τα τούβλα που είχαν προστεθεί με τον αντίστοιχο αριθμό Βρετανών στρατιωτών που προχωρούσαν από τ' αριστερά προς τα δεξιά, ενώ τα τούβλα που αφαιρέθηκαν με Γιαπωνέζους στρατιώτες που προχωρούσαν από τα δεξιά προς τ' αριστερά (Σχήμα 5.18.).

Οι απαντήσεις των παιδιών που περιλάμβαναν κυρίως ψηφία ή λέξεις αριθμών είχαν μικρότερη ποικιλία: τα παιδιά αναπαριστούσαν τυπικά τα τρία τούβλα που προστέθηκαν, το ένα που αφαιρέθηκε, τα έξι που προστέθηκαν και τα πέντε που αφαιρέθηκαν, ως «3», «1», «6» και «5» αντίστοιχα. Παρόλ' αυτά, υπήρχαν δύο ενδιαφέρουσες παραλλαγές της απάντησης: Ορισμένα παιδιά αγνόησαν τα τούβλα στο σωρό και αντιμετώπισαν τις τέσσερις πράξεις σαν έναν αθροιστικό υπολογισμό· έτσι η παραπάνω ακολουθία αναπαραστάθηκε ως «3», «2», «8» και «3». Άλλα διάλεξαν έναν αυθαίρετο αριθμό για το περιεχόμενο του σωρού, κι εκτέλεσαν μετά μία αθροιστική πρόσθεση ή αφαίρεση με βάση αυτό τον αριθμό· παρήγαγαν έτσι μία ακολουθία όπως «53»,»52», «58» και «53».

Σε αντίθεση προς όλη αυτή την ευρηματικότητα, *ούτε ένα παιδί* δεν χρησιμοποίησε τα συμβατικά σημεία των πράξεων «+» και «–» για ν' αναπαραστήσει την πρόσθεση και την αφαίρεση τόσο στο έργο των Ολοκληρωμένων Λειτουργιών όσο και στο έργο με το Σωρό. Αυτό είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακό αν γνωρίζουμε ότι, εκτός από τα παιδιά της προσχολικής ομάδας, όλα τα παιδιά της έρευνάς μας χρησιμοποιούσαν τον τυπικό συμβολισμό της αριθμητικής καθημερινά στα τετράδιά τους (βλ. Σχήμα 5.1.). Είναι φανερό ότι τα παιδιά δεν θεωρούσαν ότι αυτά τα σύμβολα είχαν σχέση με τα προβλήματα που αντιμετώπιζαν. Είχαμε προβλέψει ότι τα παιδιά δεν θα έβρισκαν εύκολο να αναπαραστήσουν τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις, αλλά δεν περιμέναμε σίγουρα αυτή την καθολική απροθυμία να χρησιμοποιήσουν τα σύμβολα της σχολικής αριθμητικής.

Βρίσκοντας ένα Σκοπό για τις Αναπαραστάσεις της Πρόσθεσης και της Αφαίρεσης

Μια πιθανότητα που έπρεπε να σκεφτούμε σοβαρά ήταν ότι τα παιδιά μπορούσαν να παράγουν πιο επιτυχείς αναπαραστάσεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης όταν υπήρχε ένας πιο ξεκάθαρος λόγος ή σκοπός για να το κάνουν. Κατά συνέπεια, προσπάθησα να επινοήσω ένα παιχνίδι παρόμοιο με το παιχνίδι με τα Μεταλλικά Κουτιά, στο οποίο τα παιδιά είχαν να αναπαραστήσουν στο πάνω μέρος του κουτιού οποιαδήποτε πρόσθεση ή αφαίρεση είχε γίνει στο περιεχόμενό τους. Αυτό αποδείχθηκε απρόβλεπτα δύσκολο: όπως και πριν, τα παιδιά καθηλώθηκαν στο *αποτέλεσμα* του μετασχηματισμού, και προσπαθούσαν πάντα ν' αναπαραστήσουν το *τελικό ποσό* των τούβλων που υπήρχαν μέσα στο κουτί.

Μια διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος υιοθετήθηκε από τη Miranda Jones. Σε μία άλλη έρευνα (Jones, 1982) επινόησε ένα έργο επικοινωνίας, στο οποίο δυο παιδιά κάθονταν στις αντίθετες πλευρές μιας οθόνης με μια συλλογή τούβλων το καθένα. Στα παιδιά δίνονταν δύο διαφορετικά προβλήματα, κι έπρεπε να στείλουν γραπτά μηνύματα το ένα στο άλλο. Και τα δύο προβλήματα θ' απαιτούσαν από τα παιδιά να αναπαραστήσουν προσθέσεις και αφαιρέσεις πάνω στο χαρτί. Τα παιδιά σ' αυτή την έρευνα ήταν από πέντε έως εννέα χρόνων.

Το πρώτο πρόβλημα ξεκίνησε με το να κατασκευαστεί ένας πύργος με τέσσερα τούβλα μπροστά στο ένα παιδί. Ζητήθηκε απ' το παιδί να δώσει στο άλλο αρκετές πληροφορίες, ώστε να μπορέσει κι εκείνο με τη σειρά του να χτίσει έναν πύργο του ίδιου ακριβώς ύψους. Έπειτα η Miranda Jones αφαίρεσε τούβλα (ή πρόσθεσε) από τον πύργο, και ζήτησε από το παιδί να μεταβιβάσει στο άλλο πληροφορίες γι' αυτό που έκανε: «Τώρα θα κάνω κάτι στον πύργο σου. Θα βάλω μερικά ακόμη τούβλα πάνω του ή θα βγάλω μερικά, κι εσύ πρέπει να στείλεις ένα μήνυμα [στο άλλο παιδί] έτσι ώστε να μπορεί να κάνει το ίδιο στον πύργο του».

Αυτή η διαφοροποίηση στη διαδικασία της επηρέασε στην

πραγματικότητα πολύ λίγο τις αναπαραστάσεις των παιδιών. Όπως και πριν, τα περισσότερα παιδιά μπορούσαν να αναπαραστήσουν τις ποσότητες, αλλά λίγα κατάφεραν να αναπαραστήσουν τις προσθέσεις ή τις αφαιρέσεις. Πάλι η πιο συνήθης απάντηση ήταν να περιγράψουν απλώς το τελικό αποτέλεσμα της πράξης είτε με ψηφία (π.χ. «7») είτε με λέξεις («Έχω 7 τούβλα τώρα»). Πολύ λίγες από τις απαντήσεις περιέγραφαν πραγματικά τις πράξεις που εκτελέστηκαν στον πύργο, και σ' όλες τα παιδιά χρησιμοποίησαν κοινή γλώσσα (π.χ. «Πρόσθεσε 3 στην κορυφή» ή «Αφαίρεσε 2 από τα 5»), παρά τα συμβατικά σύμβολα της αριθμητικής.

Αυτά τα σύμβολα μπορεί πραγματικά να μην ήταν απαραίτητα για τα παιδιά, γιατί φαινόταν να επικρατεί ανάμεσά τους η άποψη πως τα μηνύματα που περιείχαν έναν μόνο αριθμό έδειχναν τον τελικό αριθμό των τούβλων του πύργου. Ωστόσο, ένα ζευγάρι επτάχρονων αποτύχαινε συστηματικά να επικοινωνήσει. Ο Πολ θα έγραφε, για παράδειγμα, «Βάλε πέντε τούβλα» (εννοώντας πέντε τούβλα στο σύνολο), που η Λεϊλά το έπαιρνε ως οδηγία για να προσθέσει πέντε τούβλα σ' αυτά που ήδη είχε. Οι υπερβολικές πληροφορίες ήταν πηγή παρεξήγησης ανάμεσα σε δύο εννιάχρονους: ο Γκάρεθ, με έναν πύργο τεσσάρων τούβλων μπροστά του, έγραψε: «Τέσσερα τούβλα σε ένα σωρό, το ένα πάνω στο άλλο», αλλά η Κατριόνα ερμήνευσε το μήνυμα ως οδηγία για να τοποθετήσει ένα σύνολο από τέσσερα τούβλα πάνω από ένα άλλο σύνολο τεσσάρων τούβλων.

Το άλλο πρόβλημα που είχαν να επιλύσουν τα παιδιά ήταν ένα έργο «επικοινωνίας» – μια έκδοση του έργου με το Σωρό. Το καθένα ξεκίνησε μ' έναν μεγάλο σωρό από τούβλα μπροστά του. Η Miranda Jones έπειτα αφαιρούσε τούβλα από το σωρό του ενός παιδιού ή πρόσθετε μερικά ακόμη· δουλειά του παιδιού ήταν να στείλει ένα μήνυμα στο άλλο παιδί, έτσι ώστε να μπορέσει να κάνει το ίδιο στο δικό του σωρό. Στην περίπτωση αυτή, όπως και στο έργο με το Σωρό, δεν ήταν εφικτό ν' αναπαραστήσουν την τελική ποσότητα, καθώς ο αριθμός των τούβλων στο σωρό ήταν άγνωστος.

Όπως και πριν, αυτή η διαφοροποίηση στη διαδικασία είχε μικρή επίδραση, με την πιο κοινή αντίδραση να είναι απλώς η αναπα-

ράσταση του *ποσού* που είχε προστεθεί ή αφαιρεθεί. Μόνο ένα παιδί χρησιμοποίησε τα συμβατικά σημεία των πράξεων («+» και «–»), αλλά κι αυτό τα χρησιμοποίησε ιδιοσυγκρασικά: έτσι έγραψε «4 – 4 = » για τα τέσσερα αντικείμενα που προστέθηκαν και «6 + 6 = » για τα έξι αντικείμενα που αφαιρέθηκαν. Το ζευγάρι του δεν μπόρεσε να ερμηνεύσει τα μηνύματά του σωστά. Άλλες απαντήσεις κυμαίνονταν από το λακωνικό «Αφαίρεσε 1» έως το φλύαρο «Βάλε τέσσερις κύβους στο χέρι σου από το κουτί και τοποθέτησέ τους στους κύβους που είναι ήδη έξω, μ' αυτό τον τρόπο» (ακολουθούμενη από ένα διάγραμμα). Έτσι, ενώ αυτό το έργο επικοινωνίας είχε κάποια μεγαλύτερη επιτυχία στο ν' αποσπά επαρκείς αναπαραστάσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης, δεν είχε ωστόσο τόση που να κάνει τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν τα συμβατικά σύμβολα της αριθμητικής.

Ανακεφαλαίωση

Αυτό το Κεφάλαιο περιέγραψε λεπτομερώς αρκετές έρευνες που έγιναν στο Εδιμβούργο, στις οποίες ζητήθηκε από μικρά παιδιά να αναπαραστήσουν ποσότητες ή μεταβολές ποσοτήτων χρησιμοποιώντας μολύβι και χαρτί. Τα ευρήματα που προέκυψαν όχι μόνο επιβεβαιώνουν την προγενέστερη έρευνα που έκανε η Barbara Allardice (1977) με παιδιά στην Αμερική, αλλά έχουν με τη σειρά τους επιβεβαιωθεί από διάφορες άλλες έρευνες που έγιναν σε διαφορετικά μέρη του κόσμου: αυτές περιλαμβάνουν τρεις έρευνες σε παιδιά στην Ελβετία (Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1980· Sinclair, Siegrist & Sinclair, 1983· Sinclair, 1984), μια έρευνα σε παιδιά στην Αυστραλία (Litwin, 1984), και μια ακόμη έρευνα σε παιδιά στη Σκοτία (Potts, 1983). Παρόλο που οι ερευνητές χρησιμοποίησαν διαφορετικά έργα και είχαν διαφορετικά ερωτήματα στο μυαλό τους, η συνολική εικόνα που προκύπτει έχει σημαντική συνοχή:

Πρώτον, είναι πλέον ξεκάθαρο πως ακόμη και παιδιά της προσχολικής ηλικίας είναι ικανά να αναπαριστούν μικρές ποσότητες είτε αυθόρμητα είτε με λίγη ενθάρρυνση. Οι αναπαραστάσεις τους βασίζονται πρωταρχικά σε μία ένα-προς-ένα αντιστοιχία (είναι δηλαδή

εικονογραφικές ή εικονικές). Αυτό γίνεται ιδιαίτερα εμφανές στο παιχνίδι με τα Μεταλλικά Κουτιά, όπου τα παιδιά δεν παράγουν απλώς και μόνο ξεκομμένες απαντήσεις, αλλά παράγουν συμβολικά *συστήματα* με συνοχή.

Δεύτερον, τα περισσότερα παιδιά αυτής της ηλικίας μπορούν ακόμη να αναπαραστήσουν και το μηδέν. Αντίθετα με τους συνήθεις ισχυρισμούς ότι η έννοια του μηδενός είναι εγγενώς δύσκολη, τα παιδιά σ' αυτές τις έρευνες δεν φαίνονται να έχουν ιδιαίτερη δυσκολία με την ενλόγω έννοια. Αυτό γίνεται πολύ εμφανές ξανά στο παιχνίδι με τα Μεταλλικά Κουτιά, όπου τα παιδιά έχουν να ξεχωρίσουν ένα άδειο μεταλλικό κουτί από την αναπαράσταση που έχει στο καπάκι του. Σ' αυτή την έρευνα το μηδέν δεν ήταν πιο δύσκολο ν' αναπαρασταθεί απ' ό,τι οι ποσότητες ένα, δύο ή τρία.

Τρίτον, σε αντίθεση με την ευκολία τους να αναπαραστήσουν τις ποσότητες, ακόμη και παιδιά εννέα χρόνων έχουν δυσκολία ν' αναπαραστήσουν τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Αντίθετα, όπου μπορούν, αναπαριστούν μια ποσότητα – το τελικό συνήθως αποτέλεσμα, παρά την ποσότητα που προστέθηκε ή αφαιρέθηκε. Σε έργα όπως το έργο του Σωρού, όπου δεν μπορούν ν' αναπαραστήσουν την τελική ποσότητα επειδή είναι άγνωστη, θα αναπαραστήσουν την ποσότητα που προστέθηκε ή αφαιρέθηκε, αλλά δεν θα δώσουν καμία πληροφορία για το ποια είναι η πράξη.

Τέλος, πολλές από τις έρευνες δείχνουν μια αξιοσημείωτη απροθυμία από την πλευρά των παιδιών της σχολικής ηλικίας να χρησιμοποιήσουν τα συμβατικά σημεία των πράξεων της αριθμητικής. Αυτό προκαλεί ιδιαίτερη σύγχυση, δεδομένου ότι βρίσκουν δύσκολη την αναπαράσταση των προσθέσεων και των αφαιρέσεων γενικά: θα μπορούσε να περιμένει κανείς να είναι πολύ πιο έτοιμα να χρησιμοποιήσουν τα σημεία που ο συγκεκριμένος τους σκοπός είναι να αναπαριστούν αυτές τις ίδιες τις πράξεις. Η σύγχυση γίνεται μεγαλύτερη όταν γνωρίζουμε ότι τα παιδιά, τουλάχιστον στο Εδιμβούργο, χρησιμοποιούν αυτά τα σημεία καθημερινά στο σχολείο τους.

Τα παραπάνω ευρήματα έχουν μερικές σημαντικές συνέπειες (στις οποίες θα επανέλθουμε αργότερα), που αφορούν τον τρόπο

που εισάγουμε τον γραπτό συμβολισμό. Ειδικότερα, δείχνουν ότι τα παιδιά δυσκολεύονται πάρα πολύ να συσχετίσουν το σύστημα των συμβόλων που πρέπει να μάθουν με τον δικό τους αυθόρμητο τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται τις έννοιες. Σε σχέση με τις αναπαραστάσεις ποσοτήτων φαίνεται ότι, ενώ τα παιδιά από μόνα τους τείνουν να χρησιμοποιούν μεθόδους που βασίζονται σε ένα-προς-ένα αντιστοιχία, τους ζητούν, αντίθετα, να χρησιμοποιούν ένα συμβολικό σύστημα. Σε σχέση με τις αναπαραστάσεις προσθέσεων και αφαιρέσεων, το πρόβλημα τίθεται εντελώς διαφορετικά. Φαίνεται ότι *όλη η γνώση* της αναπαράστασης αυτών των μετασχηματισμών στο χαρτί είναι κάτι που τα παιδιά βρίσκουν πολύ δύσκολο να κατανοήσουν, αν και η ακριβής αιτία της δυσκολίας τους δεν είναι ακόμη εντελώς ξεκάθαρη. Ωστόσο, από νωρίς τα παιδιά εισάγονται στα σύμβολα («+» και «–»), που έχουν σαν στόχο να εξυπηρετήσουν αυτόν το σκοπό. Τούτο μας εξηγεί κάπως γιατί η κατανόηση αυτών των συμβόλων από τα παιδιά δεν προχωρά πέρα από το πλαίσιο μέσα στο οποίο τα διδάσκονται. Φαίνεται να υπάρχει ένα σοβαρό και ανησυχητικό χάσμα ανάμεσα στο πώς χρησιμοποιούν αυτά τα σύμβολα στην τάξη και στην ικανότητά τους να τα εφαρμόζουν σε προβλήματα που συναντούν κάπου αλλού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΤΑ ΓΡΑΠΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΛΛΩΝ ΠΟΛΙΤΙΣΜΩΝ

Πολλες απο τις παιδικες επινοησεις που περιγραφονται στο τελευταίο Κεφάλαιο μας θυμίζουν τα γραπτά αριθμητικά συστήματα που χρησιμοποιούσαν πιο πρώιμοι πολιτισμοί. Οι σειρές των κάθετων γραμμών, η χρήση της τελείας αντί για μηδέν ή η αξιοθαύμαστη χρήση των χεριών για να αναπαραστήσουν την πρόσθεση και την αφαίρεση, μας δίνουν την εντύπωση ότι ανήκουν στις ζωγραφιές των πρωτόγονων κατοίκων των σπηλαίων ή στις πλάκες των αρχαίων αιγυπτιακών γραφών. Αυτό υποδηλώνει τη γοητευτική πιθανότητα ότι, χωρίς να το ξέρουν, τα παιδιά χρησιμοποιούσαν βασικές και παγκόσμιες μεθόδους αναπαράστασης.

Η ιδέα ότι οι απόψεις που αφορούν στην παιδική ανάπτυξη θα έπρεπε να παραλληλιστούν με την εξέλιξη του ανθρώπινου είδους, δεν είναι καθόλου νέα. Διατυπωμένη με τη μορφή «η οντογένεση συγκεφαλαιώνει τη φυλογένεση» –πράγμα που σημαίνει ότι η ανάπτυξη ενός ατόμου (οντογένεση) αντανακλά, και παράλληλα ενσωματώνει, την ανάπτυξη του είδους (φυλογένεση)–, έχει αποτελέσει πεδίο διαμάχης μεταξύ βιολόγων και επιστημόνων της Γενετικής. Αυτή η ιδέα διαμόρφωσε επίσης σε μεγάλο βαθμό το ενδιαφέρον του Piaget στη Γενετική Επιστημολογία, και ο ίδιος κατέδειξε τις ομοιότητες και τις ανομοιότητες που υπάρχουν ανάμεσα στην εξέλιξη της γεωμετρικής σκέψης και στην ανάπτυξη των γεωμετρικών ιδεών στο