

Ασκήσεις επανάληψης
Σύνολα λύσεων γραμμικών συστημάτων
Γραμμική ανεξαρτησία

Ερωτήσεις Σωστού / Λάθους

1. (Σ/Λ) Αν $\mathbf{x}$ είναι μια μη τετριμμένη λύση του $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, τότε κάθε στοιχείο το $\mathbf{x}$ είναι μη μηδενικό.
2. (Σ/Λ) Μια ομογενής εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι πάντα συνεπής.
3. (Σ/Λ) Το σύνολο λύσεων του $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ λαμβάνεται μετατοπίζοντας το σύνολο λύσεων του $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
4. (Σ/Λ) Οι στήλες ενός πίνακα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, εάν η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει τετριμμένη λύση.
5. (Σ/Λ) Οι στήλες οποιουδήποτε πίνακα 4×5 είναι γραμμικώς εξαρτημένες.
6. (Σ/Λ) Εάν το σύνολο $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και το σύνολο $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ γραμμικώς εξαρτημένο τότε το $\mathbf{z}$ ανήκει στο $\text{Span}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.
7. (Σ/Λ) Εάν ένα σύνολο διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, τότε το σύνολο περιέχει περισσότερα διανύσματα από όσα τα στοιχεία κάθε διανύσματος.
8. (Σ/Λ) Αν το σύνολο $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο τότε τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ δεν ανήκουν στον $\mathbb{R}^2$.
9. (Σ/Λ) Αν κανένα από τα διανύσματα του συνόλου $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ δεν είναι πολλαπλάσιο των υπολοίπων, τότε το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
10. (Σ/Λ) Αν το σύνολο $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, τότε το σύνολο $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Ασκήσεις

1. Προσδιορίστε εάν οι στήλες του πίνακα σχηματίζουν ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητο.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & -7 & 5 & 1 \\ -4 & -5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Έστω $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$.

α. Είναι καθένα από τα σύνολα $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{z}\}$, $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{v}, \mathbf{z}\}$ και $\{\mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ γραμμικώς ανεξάρτητα; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας;

β. Μπορείτε να συμπεράνετε αν το σύνολο $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο εξετάζοντας μόνο τα σύνολα του ερωτήματος (α);

γ. Για να προσδιορίσετε αν το σύνολο $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, αρκεί να εξετάσετε αν το $\mathbf{w}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων;

δ. Είναι το σύνολο $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο;

3. Κάθε μια από τις παρακάτω εξισώσεις καθορίζει ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$. Κάθε μια από τις εξισώσεις αυτές αποτελεί μια έμμεση (implicit) περιγραφή ενός επίπεδου.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

(α) Να βρείτε την άμεση (explicit) περιγραφή του επιπέδου που περιγράφεται από κάθε μια εξίσωση.

(β) Τέμνονται τα δυο επίπεδα; Αν ναι,

(i) περιγράψτε τη λύση με μια παραμετρική διανυσματική μορφή,

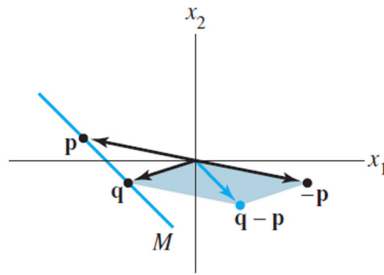
(ii) περιγράψτε τη λύση γεωμετρικά.

4. Βρείτε μια παραμετρική διανυσματική μορφή της ευθείας M που διέρχεται από τα $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$.

Υπόδειξη: Η ευθεία M είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\mathbf{q} - \mathbf{p}$.

(a) $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$



5. Ας υποθέσουμε ότι $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$ και το $\mathbf{v}_4$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Μπορείτε να συμπεράνετε από τα δεδομένα της εκφώνησης αν το $\mathbf{v}_4$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$;

6. Πόσες στήλες οδηγούς πρέπει να έχει ένας πίνακας 5×7 εάν οι στήλες του παράγουν το $\mathbb{R}^5$. Γιατί;

7. Έστω ότι ένας $m \times n$ πίνακας A έχει n στήλες οδηγούς.

α. Εξηγήστε γιατί θα πρέπει $m \geq n$.

β. Εξηγήστε γιατί για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει το πολύ μια λύση. [Υπόδειξη εξηγήστε γιατί το $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ δεν έχει άπειρες λύσεις].

γ. Τι συμπεραίνετε για τη γραμμική εξάρτηση του συνόλου των στηλών του πίνακα A ;