

Ασκήσεις επανάληψης

Διανυσματικές εξισώσεις και Η εξίσωση πινάκων

Ερωτήσεις Σωστού / Λάθους

1. (Σ/Λ) Τα βάρη $c_1, \dots, c_p$ σε ένα γραμμικό συνδυασμό $c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_p\mathbf{v}_p$ δεν μπορούν να είναι όλα μηδέν.
2. (Σ/Λ) Το σύνολο λύσεων του γραμμικού συστήματος του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{b}]$ είναι το ίδιο με το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$.
3. (Σ/Λ) Όταν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα, το $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ περιέχει την ευθεία που διέρχεται από το $\mathbf{u}$ και την αρχή των αξόνων.
4. (Σ/Λ) Το σύνολο $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ απεικονίζεται πάντα ως ένα επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων.
5. (Σ/Λ) Ρωτώντας αν το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στον επαυξημένο πίνακα $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{b}]$ έχει μια λύση, το ερώτημα αυτό ισοδυναμεί με το αν το $\mathbf{b}$ ανήκει στο $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.
6. (Σ/Λ) Κάθε εξίσωση πινάκων αντιστοιχεί σε διανυσματική εξίσωση με το ίδιο σύνολο λύσεων.
7. (Σ/Λ) Αν η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι αδύνατη, τότε το $\mathbf{b}$ δε βρίσκεται στο σύνολο που παράγεται από τις στήλες του A .
8. (Σ/Λ) Ένα διάνυσμα $\mathbf{b}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στηλών ενός πίνακα A αν το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει τουλάχιστον μια λύση.
9. (Σ/Λ) Αν ο επαυξημένος πίνακας $[A \ \mathbf{b}]$ έχει μια θέση οδηγό σε κάθε γραμμή, τότε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι συνεπές.

Ασκήσεις

1. Προσδιορίστε το h ώστε το διάνυσμα $\mathbf{y}$ να ανήκει στο $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Δίνονται

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}$$

2. Έστω $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Αν τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ανήκουν στο $\text{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ τότε να δείξετε ότι και το $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ανήκει στο $\text{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.

3. Προσδιορίστε αν το $\mathbf{b}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που σχηματίζονται από τις στήλες του πίνακα A . Δίνονται

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

4. Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Έστω W το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του A .

a. Ανήκει το $\mathbf{b}$ στο W ;

b. Ανήκει η τρίτη στήλη του πίνακα A στο W ;

5. Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & -8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a. Δείξτε ότι το $\mathbf{p}$ είναι μια λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b. Γράψτε το $\mathbf{b}$ ως ένα συγκεκριμένο γραμμικό συνδυασμό των στηλών του A .

6. Κατασκευάστε έναν πίνακα A μεγέθους 3×3 και διανύσματα $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ του $\mathbb{R}^3$, έτσι ώστε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ να έχει μια λύση, αλλά το $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ να μην έχει λύση.

7. Έστω A ένας πίνακας 3×2 . Εξηγήστε γιατί η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ δεν μπορεί να είναι συνεπής για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

8. Θα μπορούσε ένα σύνολο δυο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ να παράγει όλο το $\mathbb{R}^3$;

9. Έστω A ένας πίνακας $m \times n$ πίνακας και $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ διανύσματα τέτοια ώστε να ισχύει η εξίσωση $A\mathbf{y} = \mathbf{z}$. Να δείξετε ότι το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ με $\mathbf{b} = 4\mathbf{z}$ είναι συνεπές.