

Απαγορεύεται η χρήση οποιουδήποτε βοηθήματος, έντυπου ή ηλεκτρονικού και οι πάσης φύσεως συνεργασίες και συνομιλίες. **Προσοχή:** Δικαιολογήστε όλες τις απαντήσεις σας στο διαθέσιμο χώρο.

1. Εάν τα διανύσματα $\underline{v}, \underline{u}, \underline{w}$ ενός διανυσματικού χώρου, είναι γραμμικά εξαρτημένα εξετάστε το αν τα διανύσματα $\underline{x} = \underline{v} - \underline{u}, \underline{y} = \underline{u} + \underline{w}, \underline{z} = \underline{w} - \underline{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα ή όχι.

Αν το $\{\underline{v}, \underline{u}, \underline{w}\}$ είναι ένα εξαρτημένο σύνολο, τότε το span του έχει διάσταση το πολύ 2.

Εκφράστε τα $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ ως προς τα $\underline{v}, \underline{u}, \underline{w}$ και παρατηρήστε ότι το κάθε ένα από τα $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\underline{v}, \underline{u}, \underline{w}$.

Άρα το span τους έχει διάσταση το πολύ 2, και συνεπώς δεν είναι δυνατόν να έχει 3 γραμμικά μεταξύ τους ανεξάρτητα διανύσματα.

2. Περιγράψτε με λεπτομέρεια τους τέσσερις θεμελιώδεις υποχώρους του πίνακα $A = CD$ όπου

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Χώρος στηλών $C(A)$: Υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 3. Επειδή $\text{rank}(A) = 3$ (ίσος με τον αριθμό των γραμμών), ισχύει

$$C(A) = \mathbb{R}^3.$$

Μία βάση αποτελείται από τις τρεις πρώτες στήλες του A (που είναι γραμμικά ανεξάρτητες):

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(Εναλλακτικά, οποιαδήποτε βάση του $\mathbb{R}^3$.) Επειδή C είναι αντιστρέψιμος, ισχύει επίσης $C(A) = C(CD) = \mathbb{R}^3$.

Χώρος γραμμών $C(A^T)$: Υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ διάστασης 3. Επειδή C είναι αντιστρέψιμος, ο χώρος γραμμών του A συμπίπτει με τον χώρο γραμμών του D . Μία βάση προκύπτει από τις μη μηδενικές γραμμές της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής του A (που είναι ίδια με αυτή του D):

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 7/4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3/4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3/2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ισοδύναμα, οι τρεις γραμμές του D (ή οι τρεις γραμμές του A) αποτελούν επίσης βάση, αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Μηδενοχώρος $N(A)$: Υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ διάστασης $n - r = 4 - 3 = 1$. Επειδή C είναι αντιστρέψιμος, ισχύει $N(A) = N(D)$. Ο χώρος παράγεται από το διάνυσμα

$$N(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -7/4 \\ -3/4 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

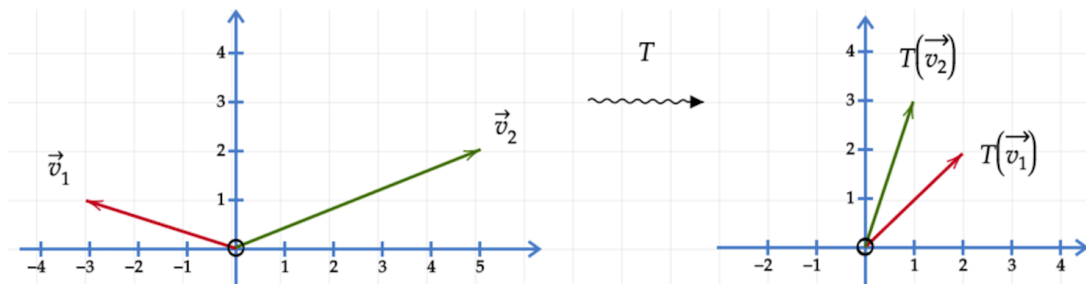
). Δηλαδή οι λύσεις της $Ax = 0$ είναι ακριβώς τα πολλαπλάσια του παραπάνω διανύσματος.

Αριστερός μηδενοχώρος $N(A^T)$: Υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ διάστασης $m - r = 3 - 3 = 0$. Άρα

$$N(A^T) = \{\mathbf{0}\}.$$

(Πράγματι, αφού $\text{rank}(A) = 3$, ο αριστερός μηδενοχώρος είναι τετριμμένος. Ισοδύναμα, επειδή $N(D^T) = \{\mathbf{0}\}$ και C αντιστρέψιμος, προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα.) Σύνοψη διαστάσεων (θεμελιώδες θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας): $\dim C(A) = 3$, $\dim C(A^T) = 3$, $\dim N(A) = 1$, $\dim N(A^T) = 0$, με $C(A) \oplus N(A^T) = \mathbb{R}^3$ και $C(A^T) \oplus N(A) = \mathbb{R}^4$.

3. Δίδεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ο οποίος απεικονίζει τα διανύσματα v_1, v_2 σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα. Βρείτε τον πίνακα A που αντιστοιχεί στον γραμμικό μετασχηματισμό T .



Απο το σχήμα έχουμε $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Απο την θεωρία γνωρίζουμε ότι $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= [T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2)] \\ &= [A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2] \\ &= A[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] \\ &= A \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

όπου A ο ζητούμενος πίνακας. Τότε $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. Αν $A, P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\det P \neq 0$ και $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ τότε βρείτε όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα A^2 .

Έστω $B = P^{-1}AP$. Επειδή ο B ένας άνω τριγωνικός πίνακας, οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του 1, 4, 6.

Επειδή οι A και $B = P^{-1}AP$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, οι ιδιοτιμές του A είναι 1, 4, 6. Σημειώστε ότι αυτές είναι όλες οι ιδιοτιμές του A επειδή ο A είναι ένας 3×3 πίνακας.

Επομένως, όλες οι ιδιοτιμές του A^2 είναι $1, 4^2, 6^2$, δηλαδή, 1, 16, 36.

5. Έστω $\mathbf{v}$ ένα μη-μηδενικό διάνυσμα σε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου V του $\mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του V . Ας είναι θ_i η γωνία μεταξύ του $\mathbf{v}$ και του $\mathbf{u}_i$ για $i = 1, \dots, n$.

Αποδείξτε ότι $\cos^2 \theta_1 + \dots + \cos^2 \theta_n = 1$.

Γνωρίζουμε ότι $\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$ και ότι $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$.

Έστω ότι $\mathbf{v} = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_n \mathbf{u}_n$. Τότε

$$\cos^2 \theta_1 + \dots + \cos^2 \theta_n = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle^2}{\|\mathbf{v}\|^2} + \dots + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_n \rangle^2}{\|\mathbf{v}\|^2} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2} (a_1^2 + \dots + a_n^2) = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \|\mathbf{v}\|^2 = 1.$$