4η ΕΡΓΑΣΙΑ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 1ο

Έχουμε: $f(x) = e^{-x^2}$, $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$, $f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2} = (4x^2-2)\cdot e^{-x^2}$.

Άρα $\quad M = \max\limits_{\xi\in[0,1]} |f''(\xi)| = \max\limits_{\xi\in[0,1]} \left|\dfrac{4\xi^2-2}{e^{\xi^2}}\right| = \max\limits_{\xi\in[0,1]} \left|\dfrac{2(2\xi^2-1)}{e^{\xi^2}}\right| = 2$.

(Μπορεί να βρεθεί εύκολα. Εύρεση ακροτάτων της συνάρτησης $g(x) \equiv f''(x) = (4x^2-2)\, e^{-x^2}$, $x\in[0, 1]$).

Από τον τύπο του σφάλματος του σύνθετου κανόνα τραπεζίου έχουμε ότι:

$$\left|E_n^T\right| = \left|-\frac{(1-0)}{12}\,\frac{(1-0)^2}{n^2}\,f''(\xi)\right| \le \frac{1}{12n^2}\cdot M = \frac{1}{12n^2}\cdot 2 = \frac{1}{6n^2}\quad,\quad \xi\in(0, 1).$$

Θα πρέπει $\quad \left|E_n^T\right| = \dfrac{1}{6n^2} \le \dfrac{1}{2}\times 10^{-5} \;\to\; n^2 \ge \dfrac{2}{6\times 10^{-5}} = \dfrac{10^5}{3} \;\to\; n^2 \ge \sqrt{\dfrac{10^5}{3}}$

Άρα ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου με περισσότερους από $\left(\sqrt{\dfrac{10^5}{3}}+1\right)$ ομοιόμορφα κατανεμημένους κόμβους (ή με τουλάχιστον $\sqrt{\dfrac{10^5}{3}}$ ισομήκη διαστήματα) δίνει αποτέλεσμα με ακρίβεια τουλάχιστον 5 δ.ψ.

Θέμα 2ο

Η συνάρτηση προς ολοκλήρωση είναι $f(x) = \log\sin x$, $x\in[\pi/6, \pi/2]$. Επειδή $n = 6$ ($\to$ δηλ. θα απαιτηθεί άρτιο πλήθος διαστημάτων) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο σύνθετος κανόνας 1/3 του Simpson. Πρόκειται για υποδιαστήματα του διαστήματος ολοκλήρωσης $[\pi/6, \pi/2]$ με κοινό πλάτος $h = \dfrac{b-\alpha}{n} = \dfrac{\pi/2-\pi/6}{6} = \dfrac{\pi}{18}$.

Επιπλέον θα χρειαστούμε $(n + 1) = 7$ σημεία παρεμβολής. Κατασκευάζουμε αρχικά τον πίνακα τιμών της συνάρτησης προς ολοκλήρωση $f(x) = \log\sin x$, για κάθε $x\in[\pi/6, \pi/2]$ (σε ακτίνια).

x_i	$x_0 = \pi/6$	$x_1 = 2\pi/9$	$x_2 = 5\pi/18$	$x_3 = \pi/3$
$f(x_i)$	–0.301	– 0.192	– 0.116	– 0.0625

x_i	$x_4 = 7\pi/18$	$x_5 = 4\pi/9$	$x_6 = \pi/2$
$f(x_i)$	–0.027	– 0.00663	0

Επομένως εφαρμόζοντας τον σύνθετο κανόνα 1/3 του Simpson έχουμε ότι:

$$I(f) = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \log\sin x\, dx \approx \frac{\pi/2-\pi/6}{3\times 6}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4} f(x_i) + f(x_6)\right] =$$

$$= \frac{\pi/3}{3\times 6}\left[f(x_0) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)\right) + 2\left(f(x_2) + f(x_4)\right) + f(x_6)\right]$$

$$= \frac{\pi}{54}\ \left[(-0.301) + 4\left(-0.192 - 0.0625 - 0.00665\right) + 2(-0.116 - 0.027) + 0\right] = -0.0949227\,.$$

Μία εκτίμηση του σφάλματος προκύπτει από το ολικό σφάλμα αποκοπής του σύνθετου κανόνα 1/3 του Simpson.

$$E_n^s(f) = -\frac{b-\alpha}{180} \cdot h^4 \cdot f^{(4)}(\xi)\ \ ,\ \ \xi \in (\alpha, b),\ \ f \in C^4\,[(\alpha, b]).$$

Ειδικότερα υπολογίζοντας το $M = \max\limits_{\xi \in [\pi/6, \pi/2]} \left| f^{(4)}(\xi) \right|$ για $\alpha = \pi/6$, $b = \pi/2$, $h = \pi/18$, βρίσκουμε μία εκτίμηση του άνω φράγματος του σφάλματος ολοκλήρωσης του σύνθετου κανόνα 1/3 του Simpson για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Θέμα 3ο

Η συνάρτηση προς ολοκλήρωση είναι $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$, $x \in [0, 6]$. Επειδή $n = 12$ ($\rightarrow$ δηλ. αριθμός πολ/σιο του 3) μπορεί να εφαρμοστεί ο σύνθετος κανόνας 3/8 του Simpson δεδομένου ότι απαιτεί αριθμό υποδιαστημάτων του διαστήματος ολοκλήρωσης [0, 6] πολ/σιο του 3 κοινού πλάτους $h = \frac{b-\alpha}{n} = \frac{6-0}{12} = \frac{1}{2}$. Επιπλέον θα χρειαστούμε $(n + 1) = 13$ σημεία παρεμβολής. Κατασκευάζουμε αρχικά τον πίνακα τιμών της συνάρτησης προς ολοκλήρωση $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$, για κάθε $x \in [0, 6]$.

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1.0$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2.0$	$x_5 = 2.0$
$f(x_i)$	1	1.09915	1.35914	1.79268	2.46302	3.48071

x_i	$x_6 = 3.0$	$x_7 = 3.5$	$x_8 = 4.0$	$x_9 = 4.5$	$x_{10} = 5.0$
$f(x_i)$	5.02138	7.35899	10.91963	16.36675	24.73553

x_i	$x_{11} = 5.5$	$x_{12} = 6.0$
$f(x_i)$	37.64491	57.632685

Επομένως εφαρμόζοντας τον σύνθετο κανόνα 3/8 του Simpson έχουμε ότι:

$$A_{n+1}^s(f) = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3 \cdot \sum_{i=0}^{n/3-1} f(x_{3i+1}) + 3 \cdot \sum_{i=0}^{n/3-1} f(x_{3i+2}) + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n/3-2} f(x_{3i+3}) + f(x_{12})\right] =$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3 \cdot \sum_{i=0}^{12/3-1} f(x_{3i+1}) + 3 \sum_{i=0}^{12/3-1} f(x_{3i+2}) + 2 \sum_{i=0}^{12/3-2} f(x_{3i+3}) + f(x_{12})\right] =$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3 \cdot \left(f(x_1) + f(x_4) + f(x_7) + f(x_{10})\right) +\right.$$

$$\left. + 3\left(f(x_2) + f(x_5) + f(x_8) + f(x_{11})\right) + f(x_{12})\right.$$

$$+ 2\left(f(x_3) + f(x_6) + f(x_9)\right)\Big]$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει μετά την αντικατάσταση των τιμών της συνάρτησης.

Θέμα 4ο

Από τον πίνακα τιμών της συνάρτησης f(x), που περιγράφει τη δύναμη μεταβλητού μέτρου η οποία εφαρμόζεται σε ένα σώμα το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και εξαρτάται από τη θέση του κινητού παρατηρούμε ότι εμφανίζονται (n + 1) = 11 σημεία παρεμβολής. Ισοδύναμα έχουμε n = 10 υποδιαστήματα του διαστήματος ολοκλήρωσης [0, 20]. Συγκεκριμένα ο πίνακας μπορεί να γραφεί ως εξής:

x_i (m)	$x_0 = 0$	$x_1 = 2$	$x_2 = 4$	$x_3 = 6$	$x_4 = 8$	$x_5 = 10$	$x_6 = 12$	$x_7 = 14$	$x_8 = 16$
$f(x_i)$ (N)	0.0	1.2	3.4	4.2	2.3	3.5	0.5	1.5	2.0

x_i (m)	$x_9 = 18$	$x_{10} = 20$
$f(x_i)$ (N)	3.1	2.5

Επιπλέον το έργο δύναμης f(x) μεταβλητού μέτρου δίνεται από τη σχέση:

$$E = \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$$

όπου dE = f(x) dx το στοιχειώδη έργο που αντιστοιχεί στη στοιχειώδη μετατόπιση dx.
Επομένως εφαρμόζοντας τον σύνθετο κανόνα του

(i) Τραπεζίου

Προκύπτει ότι μία προσεγγιστική τιμή του έργου της δύναμης κατά τη μετακίνηση του σώματος από τη θέση x = 0 m στη θέση x = 20 m είναι η

$$I(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\cdot\sum_{i=1}^{4} f(x_i) + f(x_{10})\right] =$$

$$= \frac{2}{2}\left[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_9)) + f(x_{10})\right]$$

$$= \frac{2}{2}\left[0 + 2(1.2 + 3.4 + 4.2 + 2.3 + 3.5 + 0.5 + 1.5 + 2.0 + 3.1) + 2.5\right] = 45.9 \text{ Joule.}$$

(ii) Simpson

Ο κατάλληλος σύνθετος κανόνας Simpson που μπορεί να εφαρμοστεί είναι ο σύνθετος κανόνας (1/3) του Simpson γιατί έχουμε n = 10 ($\rightarrow$ δηλ. άρτιο πλήθος υποδιαστημάτων του διαστήματος ολοκλήρωσης [0, 20]). Επομένως μία προσεγγιστική τιμή του έργου της δύναμης κατά τη μετακίνηση του σώματος από τη θέση x = 0 m στη θέση x = 20 m είναι η

$$I_2(f) = \frac{(b-\alpha)}{3n}\left[f(x_0) + 4\cdot\sum_{i=1,3,\ldots}^{n-1} f(x_i) + 2\cdot\sum_{i=2,4,\ldots}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{(b-\alpha)}{3n}\left[f(x_0) + 4 \cdot \left(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)\right) + \right.$$

$$\left. + 2\left(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)\right) + f(x_{10})\right]$$

$$= \frac{(2-0)}{3 \times 10}\left[0 + 4\,(1.2 + 4.2 + 3.5 + 3.1 + 1.5) + 2(3.4 + 2.3 + 0.5 + 2.0) + 2.5\right]$$

$= 48.6$ Joule.

Παρατηρούμε ότι I_1 (f) = 45.9 Joule $\neq$ I_2 (f) = 48.6 Joule. Δεδομένου ο σύνθετος κανόνας 1/3 του Simpson εμφανίζει ακρίβεια 3ης τάξης έναντι του σύνθετου κανόνα του τραπεζίου καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δίνει πιο ακριβή προσεγγιστικά αποτελέσματα έναντι του σύνθετου κανόνα του τραπεζίου. Άρα μία πιο ακριβής προσεγγιστική τιμή του έργου της δύναμης στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι η I_2 (f) $\simeq$ 48.6 Joule.

ΘΕΜΑ 6ο

Α) Απλή μέθοδος Euler

Έχουμε αρχικές συνθήκες: $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Η προσεγγιστική λύση εφαρμόζοντας την απλή μέθοδο Euler δίνεται από τη σχέση:

$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$. Για $h = 1$, διάστημα [0, 4], έχουμε ότι:

Βήμα 1ο: $(n = 0) \rightarrow x_1 = 1,\quad y_1 = y_0 + h \cdot (x_0, y_0) = 1 + 1.1 = 2$

Βήμα 2ο: $(n = 1) \rightarrow x_2 = 2,\quad y_2 = y_1 + h \cdot (x_1, y_1) = 2 + 1.2 = 4$

Βήμα 3ο: $(n = 2) \rightarrow x_3 = 3,\quad y_3 = y_2 + h \cdot (x_2, y_2) = 4 + 1.4 = 8$

Βήμα 4ο: $(n = 3) \rightarrow x_4 = 4,\quad y_4 = y_3 + h \cdot (x_3, y_3) = 8 + 1.8 = 16$

Β) Μέθοδος Runge – Kutta 4ης τάξης – (RK4) ($\rightarrow$ επιλέχθηκε η RK4 για να δείτε πως δουλεύει). Έχουμε αρχικές συνθήκες: $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Ο τύπος της μεθόδου είναι ο ακόλουθος:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{6}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3 + \frac{1}{6}\alpha_4\right)$$

$$\alpha_1 = f(x_n, y_n)$$

$$\alpha_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{h}{2}\alpha_1\right)$$

$$\alpha_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + h\left(0\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right)\right)$$

$$\alpha_4 = f\left(x_n + h,\ y_n + h(0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3)\right)$$

<u>Βήμα 1ο (n = 0)</u> $\rightarrow$ $\alpha_1 = f(x_0, y_0) = y(0) = 1$

$x_1 = 1$ $\rightarrow$ $\alpha_2 = y(0) + \frac{1}{2}\alpha_1 = 1.5$

$\rightarrow$ $\alpha_3 = y(0) + \frac{1}{2}\alpha_2 = 1.75$

$\rightarrow$ $\alpha_4 = y_0 + \alpha_3 = 2.75$

$\rightarrow$ $y_1 = 2.708333$

<u>Βήμα 2ο (n = 1)</u> $\rightarrow$ $\alpha_1 = y_1 = 2.708333$

$x_2 = 2$ $\rightarrow$ $\alpha_2 = y_1 + \frac{1}{2}\alpha_1 = 4.0625$

$\rightarrow$ $\alpha_3 = y_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 = 4.739583$

$\rightarrow$ $\alpha_4 = y_1 + \alpha_3 = 7.447917$

$\rightarrow$ $y_2 = 7.335069$

<u>Βήμα 3ο (n = 2)</u> $\rightarrow$ $\alpha_1 = y_2 = 7.335069$

$x_3 = 3$ $\rightarrow$ $\alpha_2 = y_2 + \frac{1}{2}\alpha_1 = 11.002604$

$\rightarrow$ $\alpha_3 = y_2 + \frac{1}{2}\alpha_2 = 12.836371$

$\rightarrow$ $\alpha_4 = y_2 + \alpha_3 = 20.171441$

$\rightarrow$ $y_3 = 19.865813.$

<u>Βήμα 4ο (n = 3)</u> $\rightarrow$ $\alpha_1 = y_3 = 19.865813$

$x_4 = 4$ $\rightarrow$ $\alpha_2 = y_3 + \frac{1}{2}\alpha_1 = 29.7987196$

$\rightarrow$ $\alpha_3 = y_3 + \frac{1}{2}\alpha_2 = 34.765173$

$\rightarrow$ $\alpha_4 = y_3 + \alpha_3 = 54.630986$

$\rightarrow$ $y_4 = 53.803244.$

Θέμα 5ο

Είναι γνωστό ότι για μία ακολουθία $(x_n)_n$ **η σύγκλισή της είναι τουλάχιστον τάξης p,** $p > 1$, αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_n - x^*|^p, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Αν $p = 2 \rightarrow$ τετραγωνική σύγκλιση

Αν $p = 3 \rightarrow$ κυβική σύγκλιση.

Έχουμε ότι: $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx \approx I_n^T = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$ ($\rightarrow$ Σύνθετος κανόνας Τραπεζίου)

Θεωρώντας τον ομοιόμορφο διαμερισμό $D = \left\{ [x_i, x_{i+1}] / x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \,/\, h = \frac{1}{n} \right\}$ με σφάλμα αποκοπής

$$E_n^T(f) = -\frac{(b-\alpha)}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\xi), \quad \xi \in (\alpha, b), \quad f \in C^2([\alpha, b])$$

αρχικά υπολογίζουμε το σφάλμα r_0 του σύνθετου κανόνα του τραπεζίου στο διάστημα $[x_0, x_1]$. Στη συνέχεια αν r_i είναι το σφάλμα του σύνθετου κανόνα του τραπεζίου στο διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, $h = 1/n$ παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{(i+1)^{3/8}} \cdot \frac{h^3}{48} \le r_i \le \frac{h^3}{48} \cdot \frac{1}{i^{3/2}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (1)$$

Δεδομένου ότι $r_0 = \frac{h^{3/2}}{6}$ και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1) καθώς και τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ προκύπτει ότι για το συγκεκριμένο πρόβλημα η τάξη του σύνθετου κανόνα του τραπεζίου είναι 3/2.