Θέμα 1ο

Η εξίσωση γράφεται: $f(x) = 2x - e^{-x} = 0$.

Έχουμε: για $x = 0 \rightarrow f(0) = -1 < 0$ και $x = 1 \rightarrow f(1) = 2 - 0.36788 = 1.632105 > 0$.

Οπότε επειδή $f(0) \cdot f(1) < 0$ προκύπτει σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano (f συνεχής στο [0, 1]) ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

Επιπλέον επειδή e = 0.04 προκύπτει ότι:

$$n > \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{|\alpha - b|}{e} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln \frac{|0-1|}{0.04} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\ln 1 - \ln(0.04)\right) = \frac{-\ln(0.04)}{\ln 2} = \frac{-(-3.21888)}{0.693147} = 4.64$$

Άρα θα απαιτηθούν n = 5 διχοτομήσεις (τουλάχιστον) του αρχικού διαστήματος [0,1].

<u>Βήμα 1ο: (n = 0).</u> Έχουμε: $\alpha_0 \equiv \alpha = 0$, $b_0 \equiv b = 1$. Άρα με βάση τον παραπάνω ισχυρισμό το διάστημα εντοπισμού της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 2x - e^{-x} = 0$ είναι το $[\alpha_0, b_0] = [0, 1]$.

Θεωρούμε το μέσο του διαστήματος $x_0 = \frac{\alpha_0 + b_0}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$ με $f(0.5) = 0.39347 > 0$.

<u>Βήμα 2ο: (n = 1).</u> Επειδή $f(0) \cdot f(0.5) < 0$ το νέο διάστημα εντοπισμού μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης είναι το $[\alpha_1, b_1] = [0, 0.5]$ με μέσο $x_1 = \frac{\alpha_1 + b_1}{2} = \frac{0 + 0.5}{2} = 0.25$, που αποτελεί μια πρώτη προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $f(0.25) = -0.2788009 < 0$ και $|x_1 - x_0| = |0.25 - 0.5| > 0.04 = e$.

<u>Βήμα 3ο: (n = 2).</u> Επειδή $f(0.25) \cdot f(0.5) < 0$ το νέο διάστημα εντοπισμού μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης είναι το $[\alpha_2, b_2] = [0.25, 0.5]$ με μέσο $x_2 = \frac{\alpha_2 + b_2}{2} = \frac{0.25 + 0.5}{2} = 0.375$ με $f(0.375) = 0.06271055 > 0$ και $|x_2 - x_1| = |0.375 - 0.25| > 0.04 = e$.

<u>Βήμα 4ο: (n = 3).</u> Επειδή $f(0.25) \cdot f(0.375) < 0$ το νέο διάστημα εντοπισμού μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης είναι το $[\alpha_3, b_3] = [0.25, 0.375]$ με μέσο $x_3 = \frac{\alpha_3 + b_3}{2} = \frac{0.25 + 0.375}{2} = 0.3125$ με $f(0.3125) = -0.1066 < 0$ και $|x_3 - x_2| = |0.3125 - 0.375| = 0.0625 > 0.04 = e$.

<u>Βήμα 5ο: (n = 4).</u> Επειδή $f(0.3125) \cdot f(0.375) < 0$ το νέο διάστημα εντοπισμού μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης είναι το $[\alpha_4, b_4] = [0.3125, 0.375]$ με μέσο $x_4 = \frac{\alpha_4 + b_4}{2} = \frac{0.3125 + 0.375}{2} = 0.34375$ και $|x_4 - x_3| = |0.34375 - 0.3125| = 0.03125 < e = 0.04$. Άρα μια προσεγγιστική τιμή της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 2x - e^{-x} = 0$ στο διάστημα [0, 1] και με σφάλμα μικρότερο του e = 0.04 είναι η $\xi^* = 0.34375$.

Θέμα 2ο

Θεωρούμε και πάλι ως διάστημα εντοπισμού το [0, 1]

<u>Βήμα 1ο: (n = 0).</u> Έχουμε: $\alpha_0 \equiv \alpha = 0$, $b_0 \equiv b = 1$. Άρα επειδή $f(0)\cdot f(1) = 0$ το αρχικό διάστημα εντοπισμού είναι το $[\alpha_0, b_0] = [0, 1]$. Η 1η προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0 είναι το

$$x_0 = b_0 - f(b_0)\ \frac{b_0 - \alpha_0}{f(b_0) - f(\alpha_0)} = 1 - 1.632105\frac{1-0}{1.632105-(-1)} = 0.379924$$

με $f(0.379924) = 0.07593$.

<u>Βήμα 2ο: (n = 1).</u> Επειδή $f(0)\cdot f(0.379924) < 0$ το νέο διάστημα εντοπισμού μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης είναι το $[\alpha_1, b_1] = [0, 0.379924]$. Η νέα προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης είναι το

$$x_1 = b_1 - f(b_1)\ \frac{b_1 - \alpha_1}{f(b_1) - f(\alpha_1)} = 0.379924 - 0.07593\frac{0.379924-0}{0.07593-(-1)} = 0.35311$$

με $f(0.35311) = 0.00372 > 0$ και $|x_1 - x_0| = |0.35311 - 0.379924| = 0.02 < e = 0.04$.

Άρα μία προσεγγιστική τιμή της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 2x - e^{-x} = 0$ στο διάστημα [0, 1] με τη μέθοδο regula-falsi είναι η $x_1 = 0.35311$ ($\rightarrow$ για σφάλμα μικρότερο του e = 0.04).

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι σε κάθε βήμα εφαρμογής της μεθόδου regula-falsi οι προσεγγιστικές τιμές της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 2x - e^{-x} = 0$ διαφέρουν σημαντικά από τις αντίστοιχες προσεγγίσεις της μεθόδου διχοτόμησης που εφαρμόστηκε στο θέμα 1ο για e = 0.04. Αν και η μέθοδος regula-falsi συγκλίνει σχετικά αργά ($\rightarrow$ αυτό δεν φαίνεται εδώ γιατί το σφάλμα είναι αρκετά μεγάλο e = 0.04) εντούτοις η σύγκλισή της στη ρίζα της εξίσωσης f (x) = 0 γενικά για την ίδια τιμή σφάλματος είναι πιο γρήγορη σε σχέση με τη σύγκλιση της μεθόδου διχοτόμησης.

Θέμα 3ο

Η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως $f(x) = e^{-x^2} - \cos x = 0$.

Για x = 0 έχουμε $f(0) = e^{-0^2} - \cos 0 = 1 - 1 = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η x = 0 είναι μια λύση της εξίσωσης f(x) = 0 όχι όμως θετική. Για x = 0.5 έχουμε $f(0.5) = e^{-(0.5)^2} - \cos\left(\frac{180}{3.1415927} * 0.5\right) = -0.09878 < 0$ και για x = 2, έχουμε $f(2) = e^{-2^2} - \cos\left(\frac{180}{3.1415927} * 2\right) = 0.434463 > 0$.

Άρα επειδή $f(0.5)\cdot f(2) < 0$ προκύπτει σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano (f συνεχής στο [0.5, 2]) ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [0.5, 2]. Επιλέγοντας ένα αρχικό σημείο x_0 του διαστήματος [0.5, 2] έστω $x_0 = 0.5$ και εφαρμόζοντας τον επαναληπτικό τύπο της μεθόδου Newton – Raphson έχουμε ότι

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{(-0.09878)}{-0.299375} = 0.170046.$$

($f'(x) = -2x\cdot e^{-x^2} + \sin x \rightarrow f'(x_0) = f'(0.5) = -2\,(0.5)\cdot e^{-0.5^2} + \sin\left(\frac{180}{3.1415927} * 0.5\right) = -0.299375$.

Παρατηρούμε ότι η τιμή $x_1 = 0.170046$ δεν ανήκει στο διάστημα [0.5, 2]. Επομένως με την επιλογή της αρχικής τιμής $x_0 = 0.5$ ενδέχεται η μέθοδος να αποκλίνει. Στην περίπτωση αυτή διχοτομούμε το διάστημα [0.5, 2] εφαρμόζοντας τη μέθοδο διχοτόμησης και εξετάζουμε σε ποιο από τα δύο υποδιαστήματα θα βρίσκεται η ρίζα. Το μέσο του διαστήματος [0.5, 2] είναι

$$x^* = \frac{0.5+2}{2} = 1.25 \text{ με } f(1.25) = e^{-1.25^2} - \cos\left(\frac{180}{3.1415927} * 1.25\right) = -0.105711$$

Επειδή $f(1.25)\cdot f(2.0) < 0$ το διάστημα εντοπισμού μιας προσεγγιστικής τιμής της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι [1.25, 2.0].

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα γενικής σύγκλισης έχουμε ότι:

(i) $f(x) \in C^2([1{,}25, 2.0])$.

(ii) $f(1.25) = -0.105711$, $f(2) = 0.434463 \;\rightarrow\; f(1.25)\cdot f(2) < 0$

(iii) $f'(x) = 2x\,e^{-x^2} + \sin x \neq 0$, για κάθε $x \in [1.25, 2]$

(iv) $f''(x) = -2\,e^{-x^2} + 4x^2 \cdot e^{-x^2} + \cos x > 0$, για κάθε $x \in [1.25, 2]$

(v) $\max\left\{\left|\frac{f(1.25)}{f'(1.25)}\right|, \left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right|\right\} = \max\left\{\left|\frac{(-0.105711)}{(0.4249596)}\right|, \left|\frac{0.434463}{-0.9825774}\right|\right\}$

$$(f'(1.25) = -2\,(1.25)\cdot e^{-1.25^2} + \sin\left(\frac{180}{3.1415927} * 1.25\right) =$$

$$= -2.5 \times (0.20961) - 0.948985$$

$$= 0.4249596\,,$$

$$f'(2) = -2\cdot(2)\cdot e^{-2^2} + \sin\left(\frac{180}{3.1415927} * 2\right) = -4\,(0.01832) - 0.9092974 = -0.9825774)$$

$= \max\{0.248755, 0.442167\} = 0.442167 < (2 - 1.25) = 0.75$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα γενικής σύγκλισης η μέθοδος Newton – Raphson συγκλίνει για κάθε $x_0 \in [1.25, 2]$.

Για $x_0 = 1.4 \in [1.25, 2.0]$ έχουμε ότι:

<u>**Βήμα 1ο (n = 0).**</u> Έχουμε $f(x_0) = f(1.4) = -0.02910853$ και $f'(x_0) = f'(1.4) = 0.59104573$. Άρα μία προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.4 - \frac{(-0.02910853)}{0.59104573} = 1.44925.$$

<u>**Βήμα 2ο (n = 1).**</u> Έχουμε $f(x_1) = f(1.44925) = 0.00116894$ και $f'(x_1) = f'(1.44925) = 0.63779898$. Επομένως μία προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.44925 - \frac{0.00116894}{0.63779898} = 1.4474172.$$

Επειδή $|x_2 - x_1| = |1.4474172 - 1.44925| = 0.0018328 < \frac{1}{2} \times 10^{-2} = 0.005$ η $x_2 = 1.4474172$ είναι μία προσεγγιστική τιμή της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ με ακρίβεια 2 δ.ψ.

Θέμα 4ο

(i) Η ζητούμενη εξίσωση είναι $f(x) = x^2 - 183 = 0$.

Για το Θεώρημα σύγκλισης της μεθόδου Newton – Raphson εργαζόμαστε ως εξής: αρχικά έχουμε ότι για $x = 13$ $\to f(13) = 13^2 - 183 = 169 - 183 = -14 < 0$ και για $x = 14 \to f(14) = 14^2 - 183 = 196 - 183 = 13 > 0$. Επειδή $f(13)\cdot f(14) < 0$ προκύπτει ότι εφαρμόζοντας το Θεώρημα Bolzano (f συνεχής στο [13, 14]) στο διάστημα (13, 14) υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. Έχουμε:

(α) $f(x) \in C^2([13, 14])$

(b) $f(13) = -14 < 0,\ \ f(14) = 13 > 0 \ \ \to \ \ f(13)\cdot f(14) < 0$

(c) $f'(x) = 2x \neq 0$, για κάθε $x \in [13, 14]$

(d) $f''(x) = 2$, για κάθε $x \in [13, 14]$

(e) $\max\left\{\left|\frac{f(13)}{f'(13)}\right|, \left|\frac{f(14)}{f'(14)}\right|\right\} = \max\left\{\left|\frac{-14}{26}\right|, \left|\frac{13}{28}\right|\right\} = \max\{0.53846, 0.4643\} = 0.53846 < 14 - 13 = 1.$

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα γενικής σύγκλισης η μέθοδος Newton – Raphson συγκλίνει στην $\sqrt{183}$, για κάθε $x_0 \in (13, 14)$.

Από τον επαναληπτικό τύπο της μεθόδου Newton – Raphson για τη ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x^2 - \alpha = 0$ ($f(x_k) = x_k^2 - \alpha$, $f'(x_k) = 2x_k$) προκύπτει ότι:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - \alpha}{2x_k} = \frac{2x_k^2 - x_k^2 + \alpha}{2x_k} = \frac{x_k^2 + \alpha}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{\alpha}{x_k}\right)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots .$

Θεωρούμε ως αρχικό σημείο το $x_0 = 13.5 \in (13, 14)$. Οπότε:

<u>Βήμα 1ο (k = 0)</u>

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{183}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(13.5 + \frac{183}{13.5}\right) = 13.52777778$$

με $|x_1 - x_0| = |13.52777778 - 13.5| > \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 0.00005$

<u>Βήμα 2ο (k = 1)</u>

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{183}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(13.52777778 + \frac{183}{13.52777778}\right) = 13.52774926 \quad \text{με}$$

$$|x_2 - x_1| = |13.52774926 - 13.52777778| = 0.000028522 < 0.00005 = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

Άρα μία προσεγγιστική τιμή της τετραγωνικής ρίζας του αριθμού $\alpha = 183$ είναι η $\xi^* = 13.52774926$. Ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου Newton – Raphson για τον υπολογισμό της $\sqrt[n]{\alpha}$ είναι ανάλογα

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - \alpha}{n\cdot x_k^{n-1}} = \frac{n\cdot x_k^n - x_k^n + \alpha}{n\cdot x_k^{n-1}} = \frac{(n-1)\cdot x_k^n + \alpha}{n\cdot x_k^{n-1}} = \frac{1}{n}\left[(n-1)\,x_k + \frac{\alpha}{x_k^{n-1}}\right], \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Θέμα 5ο

Έστω ρ η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και $e_n = \rho - x_n$ το σφάλμα της μεθόδου Newton – Raphson, όπου x_n μία προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στη n-οστή επανάληψη της μεθόδου. Τότε θα δείξουμε ότι $e_n \simeq -[f''(\rho) / 2f'(\rho)]\, e_{n-1}^2$. Αρκεί να αποδείξουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, οι οποίες είναι συνεχείς για κάθε x της περιοχής της ρίζας ρ και $f(\rho) = 0$, $f''(\rho) \neq 0$. Εάν το αρχικό σημείο x_0 βρίσκεται κοντά στη ρίζα ρ η ακολουθία των προσεγγίσεων της ρίζας $\{x_n\}$, $n \geq 0$, θα συγκλίνει στο ρ. Επιπλέον θα ισχύει ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\rho - x_{n+1}}{(\rho - x_n)^2} = -\frac{f''(\rho)}{2f'(\rho)} \quad \text{ή}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = -\frac{f''(\rho)}{2f'(\rho)} \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}^2} = -\frac{f''(\rho)}{2f'(\rho)} \quad \text{ή} \quad e_n \simeq -[f''(\rho)/2f'(\rho)]\cdot e_{n-1}^2$$

Παρατήρηση 1. Το παραπάνω Θεώρημα περιγράφει **την τοπική τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου Newton – Raphson** (δηλ. **σύμφωνα με αυτό το Θεώρημα η σύγκλιση είναι τουλάχιστον τετραγωνική).** Στην περίπτωση που $f''(\rho) \neq 0$ η τάξη της σύγκλισης είναι ακριβώς 2.

Παρατήρηση 2. Η σύγκλιση της ακολουθίας $\{x_n\}_{n\geq 0}$ των διαδοχικών προσεγγίσεων της μεθόδου Newton – Raphson είναι ταχύτατη στην περίπτωση που η αρχική προσέγγιση x_0 ή γενικότερα η προσέγγιση x_n στο n-στό βήμα της μεθόδου βρεθεί σε διάστημα κλειστό με μέσο τη ρίζα ρ τέτοιο ώστε για κάθε σημείο x_0 του διαστήματος η ακολουθία $\{x_n\}_{n\geq 0}$ που κατασκευάζεται μέσω της μεθόδου Newton – Raphson να συγκλίνει στη ρίζα ρ (το διάστημα αυτό εξαρτάται τόσο από τη συνάρτηση f όσο και από τη ρίζα ρ). Επιπλέον το κριτήριο τερματισμού $|x_{n+1} - x_n| \leq e$ θα συνεπάγεται ότι το αντίστοιχο σφάλμα $|\rho - x_{n+1}|$ θα είναι της τάξης του e μόνο όταν η προσέγγιση x_n ανήκει στο συγκεκριμένο διάστημα, το οποίο δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων ή μπορεί να είναι και πολύ μικρό. Για τον λόγο αυτό η μέθοδος Newton – Raphson σπάνια χρησιμοποιείται στην πράξη μόνη της. Συνήθως αρχικά γίνεται ο προσδιορισμός καλών αρχικών τιμών π.χ. με τη μέθοδο της διχοτόμησης (βλ. Θέμα 3ο) και κατόπιν εφαρμόζεται η μέθοδος Newton – Raphson για την επιτάχυνση της σύγκλισης. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου οι γεωμετρικές ιδιότητες της f (μονοτονία, κυρτότητα) εγγυώνται τη σύγκλιση της ακολουθίας ακόμη και στην περίπτωση που το x_0 δεν βρίσκεται κοντά στη ρίζα.

Απόδειξη

Θεωρούμε το διάστημα $I = [\rho - e, \rho + e]$ (περιοχή της ρίζας ρ με ακτίνα e) στο οποίο η $f'(x) \neq 0$ (αυτό ισχύει γιατί $f'(x)$ συνεχής και $f'(\rho) \neq 0$). Συμβολίζουμε με

$$M = \frac{\max_{x\in I} |f''(x)|}{2\min_{x\in I} |f'(x)|}$$

τον λόγο που περιγράφει πόσα αργά ή γρήγορα θα συγκλίνει η μέθοδος. Επιπλέον έχουμε ότι:

$$\rho - x_{n+1} = \rho - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = \rho - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (1)$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι:

$$f(x_n) = f(\rho) + (x_n - \rho)\cdot f'(\rho) + \frac{(x_n - \rho)^2}{2} f''(\xi_{n_1}). \qquad (2)$$

Επιπλέον εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor 1ης τάξης για την f' έχουμε ότι:

$$f'(x_n) = f'(\rho) + (x_n - \rho)\cdot f''(\xi_{n_2}) \qquad (3)$$

ή $\qquad f'(\rho) = f'(x_n) - (x_n - \rho)\cdot f''(\xi_{n_2})$.

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3) στη σχέση (2) προκύπτει ότι:

$$f(x_n) = (x_n - \rho)\,[\,f'(x_n) - (x_n - \rho)\cdot f''(\xi_{n_2})\,] + \frac{(x_n-\rho)^2}{2}\cdot f''(\xi_{n_1})$$

$$= (x_n - \rho)\cdot f'(x_n) - (x_n-\rho)^2\cdot f''(\xi_{n_2}) + \frac{(x_n-\rho)^2}{2}\cdot f''(\xi_{n_1})$$

ή

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (x_n-\rho) - (x_n-\rho)^2\cdot\frac{f''(\xi_{n_2})}{f'(x_n)} + \frac{(x_n-\rho)^2}{2}\cdot\frac{f''(\xi_{n_1})}{f'(x_n)}\ ,$$

όπου τα ξ_{n_1}, ξ_{n_2} βρίσκονται μεταξύ της ρ και της x_n.

Επομένως η (1) γράφεται:

$$\rho - x_{n+1} = \rho - x_n + (x_n-\rho) - (x_n-\rho)^2\cdot\frac{f''(\xi_{n_2})}{f'(x_n)} + \frac{(x_n-\rho)^2}{2}\cdot\frac{f''(\xi_{n_1})}{f'(x_n)}$$

$$= -(x_n-\rho)^2\cdot\frac{1}{f'(x_n)}\left[f''(\xi_{n_2}) - \frac{1}{2}f''(\xi_{n_1})\right]$$

$$= -(x_n-\rho)^2\cdot\frac{1}{2f'(x_n)}\cdot f''(\xi_n)$$

ή

$$\rho - x_{n+1} = -(\rho - x_n)^2\cdot\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}$$ (4), όπου το άγνωστο σημείο ξ_n βρίσκεται μεταξύ του x_n και του ρ ($\rightarrow$ δηλ. $\xi_n \rightarrow \rho$ όταν $n \rightarrow +\infty$).

Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι

$$M\,|\rho - x_1| \le (M\,|\rho - x_0|)^2.$$

Επιλέγουμε κατάλληλο e έτσι, ώστε $|\rho - x_0| \le e$ και $M\,|\rho - x_0| \le 1$. Τότε έχουμε ότι:

$M\,|\rho - x_1| \le M\,|\rho - x_0|$ από όπου προκύπτει ότι $|\rho - x_1| \le e$.

Για την τοπική τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου από τη σχέση

$$\rho - x_{n+1} = -(\rho - x_n)^2\cdot\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\ ,\ n \ge 0,$$

προκύπτει ότι:

$$\lim_{n\to+\infty}\cdot\frac{\rho - x_{n+1}}{(\rho - x_n)^2} = -\lim_{n\to+\infty}\cdot\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} = -\frac{f''(\rho)}{2f'(\rho)}$$

ή $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\cdot\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = -\frac{f''(\rho)}{2f'(\rho)}$ $\quad$ ή $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\cdot\frac{e_n}{e_{n-1}^2} = -\frac{f''(\rho)}{2f'(\rho)}$ $\quad$ ή $\quad \displaystyle e_n \approx -\frac{f''(\rho)}{2f'(\rho)}\cdot e_{n-1}^2$

Θέμα 6ο

Αντικαθιστώντας τις τιμές των E, R, L η σχέση γράφεται:

$$I = \frac{60}{20}\left(1 - e^{-\frac{20}{4}t}\right) \quad ή \quad I = 3\left(1 - e^{-5t}\right)$$

Για $I = 1.5A$ προκύπτει ότι: $1.5 = 3\left(1-e^{-5t}\right)$ ή $\frac{1.5}{3} = 1-e^{-5t}$ ή $0.5 = 1-e^{-5t}$

ή $1-e^{-5t} - 0.5 = 0$ ή $0.5 - e^{-5t} = 0$.

Άρα η εξίσωση που προκύπτει είναι: $f(t) = \frac{1}{2} - e^{-5t} = 0$ για την οποία αναζητούμε μία προσεγγιστική ρίζα.

Παρατηρούμε ότι για $t = 0 \rightarrow f(0) = \frac{1}{2} - e^{0} = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2} < 0$ και για $t = 1$ (μονάδα χρόνου) $\rightarrow f(1) = \frac{1}{2} - e^{-5} = 0.493262053 > 0$. Άρα το αρχικό διάστημα εντοπισμού της ρίζας είναι το [0, 1]. Οπότε για την εύρεση της προσεγγιστικής τιμής του χρόνου t έτσι, ώστε το ρεύμα να έχει την τιμή $I = 1.5A$ μπορούμε για παράδειγμα να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της διχοτόμησης (όπως στο 1ο Θέμα) ή τη μέθοδο Newton – Raphson με κατάλληλη επιλογή της αρχικής προσέγγισης x_0 (όπως στο 3ο Θέμα).