2η ΕΡΓΑΣΙΑ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 1ο

Έστω $p_2(x)$ το πολυώνυμο παρεμβολής 2ου βαθμού που παρεμβάλει την $f(x) = \sin x$ στα σημεία $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$ και $x_2 = \pi/2$. Από τον τύπο σφάλματος παρεμβολής (δες Θέμα 2).

$$\|f-p\|_\infty \le \max_{x\in[\alpha,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|\frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!} \quad (\text{Δίνεται η νόρμα } \|h\|_\infty \le \max_{x\in[\alpha,b]}|h(x)|)$$

για $n = 2$ έχουμε:

$$\max_{x\in[0,\pi/2]}|p_2(x)-\sin x| \le \max_{x\in[0,\pi/2]}|(x-0)\cdot(x-\pi/4)\cdot(x-\pi/2)| \cdot \frac{\max_{x\in[0,\pi/2]}\left|f^{(3)}(x)\right|}{(2+1)!} \qquad (1)$$

με

- $\underline{\max_{x\in[0,\pi/2]}\left|f^{(3)}(x)\right| = 1}$ (2)

Πράγματι: $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = (f'(x))' = (\cos x)' = \sin x$,
$f^{(3)}(x) = (f^{(2)}(x))' = (-\sin x)' = -\cos x$.

Οπότε: $\max_{x\in[0,\pi/2]}\left|f^{(3)}(x)\right| = \max_{x\in[0,\pi/2]}|-\cos x| = 1$ (για $|\cos x| \le 1$)

- $\underline{\max_{x\in[0,\pi/2]}|(x-0)\cdot(x-\pi/4)\cdot(x-\pi/2)| = \frac{\sqrt{3}\cdot\pi^3}{288}}$ (3)

Πράγματι: Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x\,(x-\pi/4)\,(x-\pi/2)$

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= (x)'\,(x-\pi/4)\cdot(x-\pi/2) + x\cdot(x-\pi/4)'\cdot(x-\pi/2) + x\cdot(x-\pi/4)\cdot(x-\pi/2)'\\ &= (x-\pi/4)\cdot(x-\pi/2) + x\cdot(x-\pi/2) + x\cdot(x-\pi/4)\\ &= x^2 - \pi/2\cdot x - \pi/4\cdot x + \frac{\pi^2}{8} + x^2 - \frac{\pi}{2}x + x^2 - \pi/4\cdot x\\ &= 3x^2 - \frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{8}\ ,\end{aligned}$$

$$\varphi''(x) = 6x - \frac{3\pi}{2}$$

Έχουμε: $\varphi'(x) = 0 \to 3x^2 - \frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{8} = 0$

$$(\,\Delta = \left(-\frac{3\pi}{2}\right)^2 - 4x\cdot 3x\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{9\pi^2}{4} - \frac{12\pi^2}{8} = \frac{9\pi^2}{4} - \frac{3\pi^2}{2} = \frac{9\pi^2-6\pi^2}{4} = \frac{3\pi^2}{4} > 0$$

Άρα η $\varphi'(x) = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες, πραγματικές

$$x_{1,2} = \frac{3\pi/2 \pm \sqrt{3\pi^2/4}}{2\times 3} = \frac{3\pi/2 \pm \pi\sqrt{3/2}}{6} =$$

$$\nearrow\ \frac{3\pi/2 + \pi\sqrt{3/2}}{6} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi/2}{6} = x_1$$

$$\searrow\ \frac{3\pi/2 - \sqrt{3\pi/2}}{6} = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\pi/2}{6} = x_2$$

$$\varphi''(x_1) = 6\cdot\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi/2}{6} - \frac{3\pi}{2} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} > 0 \ ,$$

$$\varphi''(x_2) = 6\cdot\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\pi/2}{6} - \frac{3\pi}{2} = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{3\pi}{2} = \frac{-\pi\sqrt{3}}{2} < 0 \ .$$

Άρα η συνάρτηση φ(x) εμφανίζει μέγιστο στο σημείο $x^* = \dfrac{\left(3-\sqrt{3}\right)\pi}{12}$ με μέγιστη τιμή

$$\varphi\left(\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\pi}{12}\right) = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\pi}{12}\left[\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right]\cdot\left[\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\pi}{12} - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\pi}{12}\left[\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\pi - 3\pi}{12}\right]\cdot\left[\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\pi - 6\pi}{12}\right] =$$

$$= \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\pi}{12}\cdot\frac{\left(-\sqrt{3}\pi\right)}{12}\cdot\frac{\left(-3-\sqrt{3}\right)\pi}{12} = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-3-\sqrt{3}\right)\pi^3}{12^3} =$$

$$= \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}\pi^3}{12^3} = \frac{\left(3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)\cdot\sqrt{3}\pi^3}{12^3} = \frac{(9-3)\cdot\sqrt{3}\,\pi^3}{12^3} = \frac{6\sqrt{3}\,\pi^3}{12^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi^3}{2\times 12^2} = \frac{\sqrt{3}\pi^3}{288}$$

Επομένως από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι:

$$\max_{x\in[0,\pi/2]}\left|\,p_2(x) - f(x)\,\right| \le \frac{1}{3!}\cdot\frac{\sqrt{3}\pi^3}{288}\cdot 1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}\pi^3}{288}$$

Θέμα 2ο

Η άσκηση ζητάει την απόδειξη του ακόλουθου Θεωρήματος που δίνει το **σφάλμα προσέγγισης στην παρεμβολή.**

Θεώρημα: Έστω $f \in C^{n+1}\left([\alpha, b]\right)$, όπου $C^{n+1}\left([\alpha, b]\right)$ το σύνολο των συναρτήσεων που είναι (n+1) φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο [α, b], n = 1, 2, … . Αν $p_n(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_0, $x_1, \ldots, x_n \in [\alpha, b]$, τότε το σφάλμα προσέγγισης (άνω φράγμα) δίνεται από τη σχέση

$$\left\|f - p_n\right\|_\infty \le \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\cdot\max_{x\in[\alpha,b]}\prod_{i=0}^{n}\left|x - x_i\right| \ ,$$

όπου

$$\left\|f\right\|_\infty = \max_{x\in[\alpha,b]}\left|f(x)\right|$$

Απόδειξη: Έστω $f \in C^{n+1}\left([\alpha, b]\right)$, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [\alpha, b]$ με $x \neq x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Θέτουμε

$G(t) = \prod\limits_{t=0}^{n}\left(t - x_i\right)$ και θεωρούμε τη συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση

$$g_n(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{G(x)}\cdot G(t) \ , \ t \in [\alpha, b] \ .$$

Είναι προφανές ότι $g_n(t) \in C^{n+1}\left([\alpha, b]\right)$

και

$$g_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \quad g_n(x) = 0.$$

(Πράγματι:

- $g_n(x_i) = f(t) - p_n(t) - \dfrac{f(x_i) - p_n(x_i)}{G(x_i)} \cdot G(t) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$

γιατί $f(x_i) - p_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$ (λόγω παρεμβολής),

- $g_n(x) = f(x) - p_n(x) - \dfrac{f(x) - p_n(x)}{G(x)} \cdot G(x) = 0$).

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $g_n(t)$ έχει $(n + 2)$ διαφορετικές ρίζες στο διάστημα $[\alpha, b]$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\alpha, b]$ προκύπτει ότι η $g_n'(t)$ έχει τουλάχιστον $(n + 1)$ διαφορετικές ρίζες στο (α, b), η $g_n''(t)$ έχει τουλάχιστον n διαφορετικές ρίζες στο (α, b) κλπ. και η $g_n^{(n+1)}(t)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $\xi \in (\alpha, b)$. Τότε επειδή $p^{(n+1)}(t) = 0$ και $G^{(n+1)}(t)=(n+1)!$ προκύπτει ότι

$$0= g^{(n+1)}(\xi)= f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - p_n(x)}{G(x)} \cdot (n+1)!\,, \quad \xi \in (\alpha, b)\,.$$

(γιατί: $g_n^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \dfrac{f(x) - p_n(x)}{G(x)}(n+1)!\,, \quad t \in [\alpha, b]$).

Οπότε προκύπτει

$$\left|f(x) - p_n(x)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \cdot \prod_{i=0}^{n} \left|x - x_i\right|}{(n+1)!}, \quad \xi \in (\alpha, b)$$

ή ισοδύναμα

$$\left|f(x) - p_n(x)\right| \le \frac{\left\|f^{(n+1)}(\xi)\right\|_\infty \cdot \prod\limits_{i=0}^{n} \left|x - x_i\right|}{(n+1)!}$$

ή

$$\left\|f - p\right\|_\infty \le \max_{x \in [\alpha, b]} \cdot \prod_{i=0}^{n} \left|x - x_i\right| \cdot \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}.$$

Θέμα 3ο

(i) Πολυώνυμο Παρεμβολής Lagrange

Θα κατασκευάσουμε κατάλληλο πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange 2ου βαθμού, το οποίο παρεμβάλει τη συνάρτηση f (που περιγράφει τη συγκέντρωση καπνού) στα σημεία $x_0 = 100$, $x_1 = 200$, $x_2 = 300$. Αυτό θα είναι

$$p_2(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1) + L_2(x) \cdot f(x_2),$$

όπου τα πολυώνυμα Lagrange $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ ορίζονται από τις σχέσεις

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} = \frac{(x - 200) \cdot (x - 300)}{(100 - 200) \cdot (100 - 300)} = \frac{(x - 200) \cdot (x - 300)}{(-100) \cdot (-200)}$$

$$= \frac{(x - 200) \cdot (x - 300)}{2 \cdot 10^4}\,,$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)} = \frac{(x-100)\cdot(x-300)}{(200-100)\cdot(200-300)} = \frac{(x-100)\cdot(x-300)}{100\cdot(-100)} =$$

$$= -\frac{(x-100)\cdot(x-300)}{10^4},$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)} = \frac{(x-100)\cdot(x-200)}{(300-100)\cdot(300-200)} = \frac{(x-100)\cdot(x-200)}{200\cdot(-100)} =$$

$$= \frac{(x-100)\cdot(x-200)}{2\cdot 10^4}.$$

Άρα το κατάλληλο πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange είναι το

$$p_2(x) = L_0(x)\cdot f(x_0) + L_1(x)\cdot f(x_1) + L_2(x)\cdot f(x_2)$$

$$= \frac{(x-200)\cdot(x-300)}{2\cdot 10^4}\cdot 800 - \frac{(x-100)\cdot(x-300)}{10^4}\cdot 400 + \frac{(x-100)\cdot(x-200)}{2\cdot 10^4}\cdot 160.$$

Επομένως θα ισχύει $f(240) \simeq p_2(240)$ (λόγω παρεμβολής), όπου

$$p_2(240) = \frac{(240-200)\cdot(240-300)}{2\cdot 10^4}\cdot 800 - \frac{(240-100)\cdot(240-300)}{10^4}\cdot 400 +$$

$$+ \frac{(240-100)\cdot(240-200)}{2\cdot 10^4}\cdot 160 =$$

$$= \frac{40\cdot(-60)}{2\cdot 10^4}\cdot 800 + \frac{140\cdot(-60)}{10^4}\cdot 400 + \frac{140\cdot 40}{2\cdot 10^4}\cdot 160$$

$$= \frac{-2400}{25} - \frac{8400}{25} + \frac{5600}{125} = -96 + 336 + 44{,}8 = 284{,}8 \quad \text{mgr/m}^3$$

Άρα μία προσεγγιστική τιμή της συγκέντρωσης καπνού σε 240 m υψόμετρο είναι η $f(240) \simeq p_2(240) = 284{,}8$ mgr/m^3 (εφαρμόζοντας τη μέθοδο παρεμβολής κατά Lagrange).

(ii) A_1) Πολυώνυμο Παρεμβολής Newton με διαιρεμένες διαφορές

Αρχικά κατασκευάζουμε τον πίνακα διαιρεμένων διαφορών

x_i	$f(x_i)$	f [,] <u>(Διαιρεμένη διαφορά 1ης τάξης)</u>	f [,,] <u>(Διαιρεμένη διαφορά 2ης τάξης)</u>
$x_0 = 100$	$f(x_0) = 800$	$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{400-800}{200-100} = -4$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$
$x_1 = 200$	$f(x_1) = 400$	$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{160-400}{200-100} = -2.4$	$= \frac{-2.4-(-4)}{300-100} = \frac{1.6}{200} = \frac{1}{125}$
$x_2 = 300$	$f(x_2) = 160$		

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολής Newton με διαιρεμένες διαφορές 2ου βαθμού χρησιμοποιώντας όλα τα σημεία του πίνακα (x_0, x_1, x_2), το οποίο παρεμβάλει τη συνάρτηση f (που εκφράζει τη συγκέντρωση καπνού) στα σημεία $x_0 = 100$, $x_1 = 200$, $x_2 = 300$ είναι το

$$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)\cdot(x - x_1)$$

$$= 800 + (-4)\cdot(x - 100) + \frac{1}{125}(x - 100)\cdot(x - 200).$$

Επομένως θα ισχύει

$$f(240) \simeq p_2(240) = 800 + (-4)\cdot(240 - 100) + \frac{1}{125}(240 - 100)\cdot(240 - 200)$$

$$= 800 + (-4)\cdot 140 + \frac{1}{125}\,140\cdot 40 = 800 - 560 + 44.8 = 284.8 \text{ mgr/m}^3$$

(λόγω παρεμβολής)

A_2) Πολυώνυμο Παρεμβολής Newton με πεπερασμένες διαφορές προς εμπρός

Αρχικά κατασκευάζουμε τον πίνακα πεπερασμένων διαφορών προς τα εμπρός (Μπορούμε να κάνουμε χρήση των πεπερασμένων διαφορών προς τα εμπρός γιατί τα σημεία ισαπέχουν (h = 100)).

x_i	$f(x_i) \equiv \Delta^o f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$ (1ης τάξης)	$\Delta^2 f(x_i)$ (2ης τάξης)
$x_0 = 100$	$f(x_0) = 800$	$\Delta^1 f_0 = f(x_1) - f(x_0) =$ $= 400 - 800 = -400$	$\Delta^2 f_0 = \Delta^1 f_1 - \Delta^1 f_0 =$ $= -240 - (-400)$ $= -240 + 400 = 160$
$x_1 = 200$	$f(x_1) = 400$	$\Delta^1 f_1 = f(x_2) - f(x_1) =$ $= 160 - 400 = -240$	
$x_2 = 300$	$f(x_2) = 160$		

Άρα το πολυώνυμο παρεμβολής Newton με πεπερασμένες διαφορές προς τα εμπρός 2ου βαθμού είναι:

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{\Delta^1 f_0}{1!\,h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) =$$

$$= 800 + \frac{(-400)}{1\cdot(100)}(x - 100) + \frac{160}{2\cdot(100)^2}(x - 100)\cdot(x - 200)$$

$$= 800 - 4(x - 100) + \frac{1}{125}(x - 100)\cdot(x - 200).$$

Οπότε

$$f(240) \simeq p_2(240) = 800 - 4\cdot(240 - 100) + \frac{1}{125}(240 - 100)\cdot(240 - 200)$$

$$= 800 - 4\cdot 140 + \frac{1}{125}\,140\cdot 40 = 800 - 560 + 44.8 = 284.8 \text{ mgr/m}^3$$

(iii) Παρατηρούμε ότι και στις τρεις μεθόδους εύρεσης πολυωνύμου παρεμβολής το αντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολής είναι το ίδιο καθώς και η προσεγγιστική τιμή συγκέντρωσης καπνού σε υψόμετρο 240 m είναι η ίδια και στις τρεις περιπτώσεις. Πράγματι αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το πολυώνυμο παρεμβολής αν υπάρχει είναι μοναδικό.

Θέμα 4ο

Από την υπόθεση έχουμε ότι: $f(x) = 0, \quad 0 \le x \le 1$ και $f(x) = (x-1)^4, \quad 1 < x \le 2$.

(i) Έστω p η τμηματική πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής $p(x) = 0, 0 \le x \le 1$ και $p(x) = α + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, \quad 1 < x \le 2$. Για τον προσδιορισμό των α, b, c, d εργαζόμαστε ως εξής: Έχουμε ότι

- $p(0) = f(0) = 0$ (από την υπόθεση)
- $p(1) = f(1) = 0$ (από την υπόθεση)
- $p(2) = α + b(2-1) + c(2-1)^2 + d(2-1)^3 = f(2) = (2-1)^4 = 1 \to \mathbf{α + b + c + d = 1}$ (1)

Για $1 < x \le 2$ ισχύει ότι

$$f'(x) = 4 \cdot (x-1)^3 \to f'(2) = 4 \cdot (2-1)^3 = 4$$

$$p'(x) = b + 2c(x-1) + 3d(x-1)^2 \to p'(2) = β + 2c(2-1) + 3d(2-1)^2 = b + 2c + 3d.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $p'(2) = f'(2) \to \mathbf{b + 2c + 3d = 4}$ (2)

Επιπλέον από την υπόθεση ισχύει ότι $p \in C^1([0, 2])$. Άρα η πολυωνυμική συνάρτηση p(x) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [0, 2]. Επομένως θα έχουμε ότι:

- $p(1) = \lim_{x\to 1^+} p(x) \xrightarrow[p(1)=0]{} 0 = \lim_{x\to 1^+}\left[α + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3\right] \to \mathbf{α = 0}$ (3)
- $p'(1) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{p(x)-p(1)}{x-1} \to p'(1) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{α + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3}{x-1} =$

  $= \lim_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)\left[b + c(x-1) + d(x-1)^2\right]}{x-1} = b \to p'(1) = b \to \mathbf{b = 0}$ (4)

Άρα από τις (1), (2), (3), (4) έχουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} c + d = 1 \\ 2c + 3d = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} d = 1 - c \\ 2c + 3(1-c) = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} d = 1 - c \to d = 1-(-1) \to \mathbf{d = 2} \\ -c = 4 - 3 \to \mathbf{c = -1} \end{array}$$

Άρα

$$p(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 \\ -(x-1)^2 + 2(x-1)^3, & 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad (*)$$

(ii) Αρχικά θα πρέπει να βρεθεί η κυβική φυσική spline s, η οποία παρεμβάλει την f στα σημεία {0, 1, 2} με συνοριακές συνθήκες $s'(0) = f'(0)$, $s'(2) = f'(2)$. Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε μία ομοιόμορφη διαμέριση D του διαστήματος [0, 2] με βήμα h = 1

$$D = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 = 2 \ / \ h = \frac{2-0}{2} = 1, \ x_i = 0 + i \cdot 1 = i, \ i = 0, 1, 2\}.$$

Θεωρούμε τον χώρο όλων των συναρτήσεων, οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο [0, 2] και οι οποίες είναι κυβικά πολυώνυμα σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, i = 0, 1, 2 της διαμέρισης D. Οι συναρτήσεις αυτές καλούνται κυβικές splines.

Τότε η μοναδική συνάρτηση παρεμβολής $S_3(x)$ που προκύπτει αποτελείται από δυο κυβικές splines $S_0^3(x)$, $S_1^3(x)$ έτσι, ώστε

$$S_3(x)=\begin{cases} S_0^3(x)=\alpha_0+b_0\cdot x+c_0\cdot x^2+d_0\cdot x^3, & 0\le x\le 1 \\ \\ S_1^3(x)=\alpha_1+b_1\cdot(x-1)+c_1\cdot(x-1)^2+d_1\cdot(x-1)^3, & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

Αρκεί να προσδιορίσουμε τους συντελεστές b_i, c_i, d_i, $i = 0, 1$ και τους σταθερούς όρους α_i, $i = 0,1$. Έχουμε ότι:

- **Λόγω παρεμβολής**

$$S_0^3(0)=f(0)=0 \;\rightarrow\; \alpha_0=0 \qquad (5)$$

$$S_1^3(1)=f(1) \;\rightarrow\; \alpha_0+b_0+c_0+d_0=0 \;\rightarrow\; \mathbf{b_0+c_0+d_0=0} \qquad (6)$$

$$S_1^3(2)=f(2) \;\rightarrow\; \alpha_1+b_1\cdot(2-1)+c_1\cdot(2-1)^2+d_1\cdot(2-1)^3=1 \;\rightarrow\; \boldsymbol{\alpha_1+b_1+c_1+d_1=1} \qquad (7)$$

- **Λόγω ισότητας των γειτονικών πολυωνύμων στα εσωτερικά σημεία**

$$S_0^3(1)=S_1^3(1) \;\rightarrow\; \alpha_0+b_0+c_0+d_0=\alpha_1 \;\rightarrow\; \boldsymbol{\alpha_1=0} \qquad (8)$$

- **Λόγω ισότητας των παραγώγων 1ης και 2ης τάξης των γειτονικών πολυωνύμων στα εσωτερικά σημεία**

$$S_0'^3(1)=S_1'^3(1) \;\rightarrow\; \mathbf{b_0+2c_0+3d_0=b_1} \qquad (9)$$

$$S_0''^3(1)=S_1''^3(1) \;\rightarrow\; \mathbf{2c_0+6d_0=2c_1} \qquad (10)$$

- **Από τις δοθείσες συνοριακές συνθήκες**

$$S_0'^3(0)=f'(0) \;\rightarrow\; \mathbf{b_0=0} \qquad (11)$$

$$S_0'^3(2)=f'(2) \;\rightarrow\; \mathbf{b_1+2c_1+3d_1=4} \qquad (12)$$

Επομένως από τις σχέσεις **5 – 12** έχουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0=0 \\ b_0+c_0+d_0=0 \\ \alpha_1+b_1+c_1+d_1=1 \\ \alpha_1=0 \\ b_0+2c_0+3d_0=b_1 \\ 2c_0+6d_0=2c_1 \\ b_0=0 \\ b_1+2c_1+3d_1=4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha_0=0 \\ \alpha_1=0 \\ b_0=0 \\ \left.\begin{array}{l} c_0+d_0=0 \\ 2c_0+3d_0=b_1 \\ 2c_0+6d_0=2c_1 \rightarrow c_0+3d_0=c_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow c_0=-d_0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{c_0=-d_0} \\ \rightarrow -2d_0+3d_0=b_1 \quad \mathbf{b_1=d_0} \\ \quad -d_0+3d_0=c_1 \quad \mathbf{c_1=2d_0} \end{array} \\ b_1+2c_1+3d_1=4 \rightarrow d_0+4d_0+3(1-3d_0)=4 \rightarrow -4d_0=1 \rightarrow \mathbf{d_0=-1/4} \\ b_1+c_1+d_1=1 \rightarrow d_0+2d_0+d_1=1 \rightarrow d_1=1-3d_0 \end{array}$$

Οπότε: $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $b_0 = 0$, $c_0 = 1/4$, $d_0 = -1/4$, $b_1 = -1/4$, $c_1 = -1/2$, $d_1 = 7/4$.

Άρα θα έχουμε:

$$S_3(x)=\begin{cases} S_0^3(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x^3, & 0\le x\le 1 \\ \\ S_1^3(x)=-\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{7}{4}(x-1)^3, & 1\le x\le 2 \end{cases} \qquad (**)$$

Από τους τύπους (*), (**) είναι προφανές ότι η συνάρτηση p δεν συμπίπτει με την κυβική φυσική spline S.

Θέμα 5ο

Έστω ότι η μεταβλητή x εκφράζει τη βροχόπτωση (σε cm) (ανεξάρτητη μεταβλητή) και η μεταβλητή y εκφράζει την απορροή (σε cm) (εξαρτημένη μεταβλητή). Ζητείται η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της απορροής (y) ως συνάρτηση της βροχόπτωσης (x) $\hat{y} = \hat{\alpha} \cdot x + \hat{b}$.

Αρχικά κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα:

α/α	**Βροχόπτωση (x_i cm)**	**Απορροή (y_i cm)**	**x^2_i**	**$x_i \cdot y_i$**
1	1.18	0.80	1.3924	0.944
2	5.32	6.01	28..3024	31.9732
3	3.20	1.61	10.24	5.152
4	2.75	2.51	7.5625	6.9025
5	1.53	1.13	2.3409	1.7289
6	1.19	1.29	1.4161	1.5351
7	2.11	1.92	4.4521	4.0512
8	5.09	3.49	25.9081	17.7641
9	3.59	2.05	12.6736	7.298
10	1.67	1.55	2.7889	2.5885
11	2.61	0.91	6.8121	2.3751
12	2.82	2.49	7.9524	7.0218
n= 12	$\sum_{i=1}^{12} x_i = 33.03$	$\sum_{i=1}^{12} y_i = 25.76$	$\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 111.8415$	$\sum_{i=1}^{12} x_i \cdot y_i = 89.3344$

Οι εκτιμώμενες τιμές των $\hat{\alpha}$, $\hat{b}$ που ικανοποιούν το κριτήριο μείωσης του σφάλματος μπορούν να βρεθούν επιλύοντας το γραμμικό σύστημα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{12} x_i^2 & \sum_{i=1}^{12} x_i \\ \sum_{i=1}^{12} x_i & n \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{12} x_i \quad y_i \\ \sum_{i=1}^{12} y_i \end{bmatrix} \quad ή \quad \begin{bmatrix} 111.8415 & 33.03 \\ 33.03 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89.3344 \\ 25.76 \end{bmatrix}$$

με det(A) = 111.8415 × 12 – $(33.03)^2$ = 1.342.098 – 1.090.9809 = 251.1171 ≠ 0.

Αρά το παραπάνω γραμμικό σύστημα 2 × 2 έχει μοναδική λύση των

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 111.8415 & 33.03 \\ 33.03 & 12 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 89.3344 \\ 25.76 \end{bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό του αντίστροφου του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 111.8415 & 33.03 \\ 33.03 & 12 \end{bmatrix}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Έχουμε ότι:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{251.1171} \cdot \begin{bmatrix} 12 & -33.03 \\ -33.03 & 111.8415 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12/251.1171 & -33.03/251.1171 \\ -33.03/251.1171 & 111.8415/251.1171 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.047 & -0.1315 \\ -0.1315 & 0.4454 \end{bmatrix}.$$

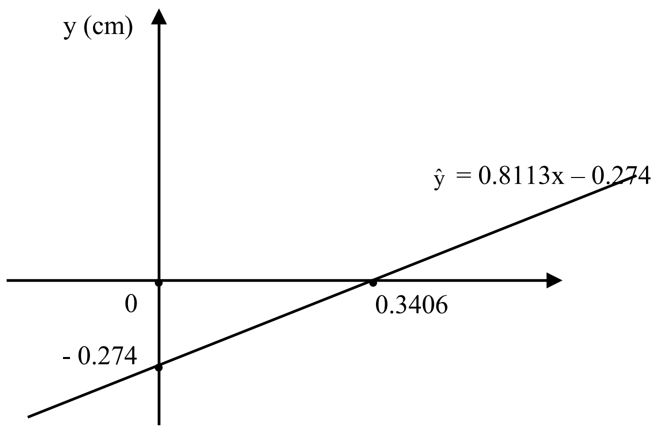
Άρα θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.047 & -0.1315 \\ -0.1315 & 0.4454 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 89.3344 \\ 25.76 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8113 \\ -0.274 \end{bmatrix}.$$

Επομένως η ζητούμενη ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης είναι

$$\hat{y} = 0.8113x - 0.274,$$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



← μπορείτε να κατασκευάσετε σ’ αυτό το καρτεσιανό σύστημα ορθογωνίων αξόνων και το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς των σημείων (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 12$.

Εδώ έχουμε: $|\hat{y}_i - y_i| = e_i$, $i = 1, 2, \ldots, 12$ τα αντίστοιχα σφάλματα.

Για να ελέγξουμε την προσαρμογή της παραπάνω ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης στα δεδομένα του πίνακα χρησιμοποιούμε την τιμή του συντελεστή προσδιορισμού

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{12} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{12} (y_i - \bar{y})^2}.$$

Αρχικά θα κατασκευάσουμε τη στήλη των εκτιμώμενων τιμών $\hat{y}_i$, $i = 1, 2, \ldots, 12$ μέσω της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης και στη συνέχεια θα υπολογίζουμε τον μέσο αριθμητικό $\bar{y} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^{12} y_i$.

Ακολούθως θα κατασκευάσουμε τις στήλες $(\hat{y}_i - \bar{y})^2$ και $(y_i - \bar{y})^2$ και θα υπολογίσουμε τα τελικά αθροίσματα $\sum_{i=1}^{12} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ και $\sum_{i=1}^{12} (y_i - \bar{y})^2$ αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας στον τύπο του R^2 ελέγχουμε αν η τιμή του R^2 πλησιάζει προς το 1. Για παράδειγμα αν $R^2 = 0.98$ αυτό σημαίνει η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης ερμηνεύει το 98% της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής (αν $R^2 = 1$ τότε έχουμε ένα τέλειο μοντέλο) και άρα έχουμε μία πάρα πολύ καλή προσαρμογή της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης στα αρχικά δεδομένα.

Να σημειώσουμε εδώ ότι (για γραμμική παλινδρόμηση)

- ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 αποτελεί ένα καλό (εύκολο) μέτρο εκτίμησης της ερμηνευτικής δύναμης ενός γραμμικού μοντέλου.
- Ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 μετρά πόση διακύμανση της εξαρτημένης μεταβλητής y κατάφερε να ερμηνεύσει η ανεξάρτητη μεταβλητή x.
- Ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 είναι το πιο απλό μέτρο μέτρησης της ικανότητας ενός παράγοντα (για γραμμική παλινδρόμηση) να ερμηνεύσει ένα φαινόμενο.
- Ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 ισούται με τον λόγο της διακύμανσης των εκτιμώμενων τιμών $\hat{y}_i$ της εξαρτημένης μεταβλητής y προς τη διακύμανση των πραγματικών τιμών y_i της εξαρτημένης μεταβλητής y.
- Ισχύει ότι: $0 \leq R^2 \leq 1$. Αν $R^2 = 1$ προκύπτει ότι οι ερμηνευτικές μεταβλητές ερμηνεύουν το 100% της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής y και άρα το μοντέλο είναι τέλεια προσαρμοσμένο στα δεδομένα.
- Στην πράξη ο R^2 είναι ικανοποιητικός ή όχι ανάλογα με την εμπειρική εφαρμογή.

Θέμα 6ο

Από την λογαρίθμηση του τύπου $S = Te^{Wx}$ έχουμε:

$$\ln S = \ln\left(T \cdot e^{Wx}\right) = \ln T + \ln\left(e^{Wx}\right) = \ln T + Wx \qquad (1)$$

Θέτουμε $\ln S = y$, $\ln T = \alpha_0$, $W = \alpha_1$. Οπότε η σχέση (1) γράφεται: $y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x$. Οι τιμές του y για τις αντίστοιχες τιμές του x δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x_i	1.2	1.5	2.2	3.0	3.5
y_i	ln15 = 2.7080	ln20 = 2.9957	ln30 = 3.4012	ln32 = 3.4657	ln36 = 3.5835

και κατασκευάζουμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που προσεγγίζει την y, $\hat{y} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot x$.

Αρχικά σχηματίζουμε τον πίνακα

i	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{y_i}$	x_i^2	$\mathbf{x_i \cdot y_i}$
0	1.2	2.7080	1.44	3.2496
1	1.5	2.9957	2.25	4.49355
2	2.2	3.4012	4.84	7.48264
3	3.0	3.4657	9.0	10.3971
4	3.5	3.5835	12.25	12.54225
n+1 = 5	$\sum_{i=0}^{4} x_i = 11.4$	$\sum_{i=0}^{4} y_i = 16.1541$	$\sum_{i=0}^{4} x_i^2 = 29.78$	$\sum_{i=0}^{4} x_i \cdot y_i = 38.16514$

Οι τιμές των $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$ που ικανοποιούν το κριτήριο μείωσης του σφάλματος μπορούν να βρεθούν επιλύοντας το γραμμικό σύστημα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{4} x_i^2 & \sum_{i=0}^{4} x_i \\ \sum_{i=0}^{4} x_i & n+1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{4} x_i \cdot y_i \\ \sum_{i=0}^{4} y_i \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} 29.78 & 11.4 \\ 11.4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38.16514 \\ 16.1541 \end{bmatrix}$$

με $\det(A) = (29.78) \times 5 - (11.4)^2 = 148.9 - 129.96 = 18.94 \neq 0$.

Άρα

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.78 & 11.4 \\ 11.4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 38.16514 \\ 16.1541 \end{bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό του αντιστρόφου A^{-1} του πίνακα A έχουμε:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{18.94} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -11.4 \\ -11.4 & 29.78 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/18.94 & -11.4/18.94 \\ -11.4/18.94 & 29.78/18.94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2639 & -0.602 \\ -0.602 & 1.5723 \end{bmatrix}.$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.26399 & -0.6019 \\ -0.6019 & 1.5723 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 38.16514 \\ 16.1541 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.352 \\ 2.428 \end{bmatrix}.$$

Άρα η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που προσεγγίζει τα y_i είναι:

$$\hat{y} = 2.428 + 0.352x$$

και επειδή $\ln T = \alpha_0 = 2.428$, $W = \alpha_1 = 0.3521$ ο τύπος $S = Te^{Wx}$ γράφεται ως $S = 11.336\, e^{0.352x}$.

Πράγματι $\quad \ln S = 2.428 + 0.352x$

$\rightarrow \quad \ln S = \ln(11.336) + 0.352x$

$$\rightarrow \quad \ln\left(\frac{S}{11.336}\right) = 0.352x \;\rightarrow\; \ln\left(\frac{S}{11.336}\right) = \ln e^{0.352x}.$$