1η Εργασία: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 1ο

Σύμφωνα με την τεχνική-κανόνες της Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας στη μέθοδο απαλοιφής Gauss το πλήθος των προσθαφαιρέσεων ισούται με το πλήθος των πολλαπλασιασμών.

Παρατήρηση 1: Έχουμε μετρήσει ως αριθμητικές πράξεις τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.

Α. Απαλοιφή

(i) Για τον υπολογισμό των πολλαπλασιαστών m_{i1}, i = 1, 2, …, n απαιτούνται (n-1) πράξεις.

(ii) Για τον υπολογισμό των στοιχείων $\alpha_{ij}^{(2)}$, i, j = 1, 2, …, n απαιτούνται $(n\text{-}1)^2$ πράξεις (δεν εκτελούμε τις πράξεις για τον υπολογισμό των μηδενικών που προκύπτουν στην 1η στήλη από τη 2η έως τη n-οστή θέση).

(iii) Στα πρώτα (n-1) βήματα προς την τριγωνοποίηση απαιτούνται.

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[(n-i)^2 + (n-i)\right] = \frac{n^3-n}{3}$$

πράξεις που γίνονται στους πίνακες του συστήματος για τον υπολογισμό των πολλαπλασιαστών m_{ij} και των νέων στοιχείων $\alpha_{ij}^{(k)}$, i, j = 1, 2, …, n.

(Πράγματι είναι γνωστό ότι

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}, \quad 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Επομένως

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[(n-i)^2 + (n-i)\right] = \left[(n-1)^2 + (n-2)^2 + ... + (n-n+1)^2\right] +$$

$$+ [(n-1) + (n-2) + \ldots + (n-n+1)] = [1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] +$$

$$+ [1 + 2 + \ldots + (n-1)] = \frac{(n-1)\cdot(n-1+1)\cdot\left[2(n-1)+1\right]}{6} + \frac{(n-1)\cdot(n-1+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdot(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{2n-1}{3}+1\right] = \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2n-1+3}{3} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2n+2}{3} = \frac{n(n-1)\cdot 2(n+1)}{6} = \frac{n(n-1)\cdot(n+1)}{3} = \frac{n(n^2-1)}{3} = \frac{n^3-n}{3}.)$$

(iv) Επιπλέον απαιτούνται

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ πράξεις για το 2ο μέλος.}$$

Β. Τριγωνοποίηση

Οπότε για την τριγωνοποίηση του συστήματος απαιτούνται

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[(n-i)^2 + (n-i)\right] + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3-n}{3} + \frac{n^2-n}{2} = \frac{2(n^3-n)+3(n^2-n)}{6} =$$

$$\frac{2n^3-2n+3n^2-3n}{6} = \frac{2n^3+3n^2-5n}{6} = \frac{n^3}{3} + O(n^2) \text{ πράξεις.}$$

(Δεν έχει μετρηθεί το υπολογιστικό κόστος εναλλαγής γραμμών).

C. Backward elimination

Κατά την backward elimination απαιτούνται:

- $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ πολ/σμοί και προσθέσεις
- n διαιρέσεις

Οπότε συνολικά απαιτούνται (για την απαλοιφή Gauss χωρίς οδήγηση)

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \text{ πράξεις.}$$

Επομένως το πλήθος των απαιτούμενων πράξεων για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος n × n με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss χωρίς οδήγηση είναι

$$\frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n + 3n(n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 6n^2 - 2n}{6} =$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 - n}{3} = \frac{n^3}{3} + O(n^2) \text{ πράξεις.}$$

Παρατήρηση 2: Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι $\dfrac{n^3 + 3n^2 - n}{3}$ συνολικά πράξεις εκφράζουν πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος σε σχέση με το υπολογιστικό κόστος των n!(n–1) πράξεων που απαιτούνται για την επίλυση του γραμμικού συστήματος n × n μέσω του κανόνα Cramer. Ειδικότερα όσον αφορά στην απαιτούμενη μνήμη αρκεί η αποθήκευση των στοιχείων του πίνακα A του συστήματος σε n^2 θέσεις μνήμης και των στοιχείων του πίνακα B των σταθερών όρων σε n θέσεις μνήμης. Δεν απαιτείται περισσότερη μνήμη αποθήκευσης γιατί οι πολλαπλασιαστές $-\dfrac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}}$, i = 2,…,n θα καταλάβουν τη θέση των στοιχείων α_{1j}, j = 2,…, n που θα γίνουν μηδενικά κ.ο.κ.

Θέμα 2ο

Α) Η μέθοδος απαλοιφής Gauss για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος m × n έχει ως στόχο να γραφεί ο πίνακας m × n A του γραμμικού συστήματος ως γινόμενο (μοναδικό) δύο πινάκων:

(i) ενός αντιστρέψιμου πίνακα B m × m και **(ii)** ενός πίνακα σε κλιμακωτή μορφή C, όπου A το γινόμενο των πινάκων που αντιστοιχούν πράξεις που εκτελούνται στις γραμμές. Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πίνακα C από τον πίνακα A θεωρεί

(a) A[i, j] → για την είσοδο στη γραμμή i, στη στήλη j στον πίνακα A, όπου 1 είναι ο πρώτος δείκτης.

(b) η μετατροπή γίνεται σε **θέση** με την έννοια ότι ο αρχικός πίνακας A του γραμμικού συστήματος m × n αντικαταστάθηκε διαδοχικά από τον πίνακα C

και είναι ο ακόλουθος (ψευδοκώδικας):

```
για  k = 1, 2, …, min (m, n):
Βρείτε την k-στη περιστροφή:
i_max: = argmax (i = k, …, m,   abs(A [i, k]))
αν  A [i_max, k] = 0
    σφάλμα   «Ο Πίνακας είναι μοναδικός!»
```

swap rows (k, i_max)

Εκτέλεσε για όλες τις γραμμές κάτω από την περιστροφή:

για $i = k + 1, \ldots, m$:

$f := A[i, k] / A[k, k]$

Εκτέλεσε για όλα τα υπόλοιπα στοιχεία, στην τρέχουσα γραμμή:

για $j = k + 1, \ldots, n$;

$A[i, j] := A[i, j] - A[k, j] * f$

Γέμισε τον κάτω τριγωνικό πίνακα με μηδενικά:

$A[i, k] := 0$.

Στον παραπάνω αλγόριθμο πριν από την απαλοιφή μιας μεταβλητής πραγματοποιείται αλλαγή των γραμμών με στόχο τη μετακίνηση της εισόδου με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή στη **θέση περιστροφής.** Η χρήση μιας τέτοιας **μερικής περιστροφής** έχει ως στόχο τη βελτίωση της **αριθμητικής ευστάθειας** του αλγορίθμου.

Με την ολοκλήρωση αυτής της διαδικασίας προκύπτει ότι ο αρχικός επαυξημένος πίνακας θα είναι σε **κλιμακωτή μορφή** και μπορεί να λυθεί εφαρμόζοντας τη μέθοδο της προς τα πίσω αντικατάστασης.

Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι ο αλγόριθμος Gauss δεν είναι πάντοτε ο πιο γρήγορος αλγόριθμος για τον υπολογισμό της κλιμακωτής μορφής ενός πίνακα. (Πηγή: Wikipedia).

B) Η μέθοδος απαλοιφής Gauss (χωρίς οδήγηση) για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $m \times n$ με $m \neq n$ εφαρμόζεται ως εξής:

(a) Έστω A ο επαυξημένος πίνακας $m \times n$ του γραμμικού συστήματος.

(b) Μετασχηματισμός των γραμμών του πίνακα A με χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών.

(c) Προκύπτει γραμμοϊσοδύναμος πίνακας κλιμακωτής μορφής, μέσω διαδοχικών μηδενισμών των συντελεστών των αγνώστων της k-στήλης του επαυξημένου πίνακα ή του γραμμοϊσοδύναμου του επαυξημένου πίνακα του συστήματος που βρίσκεται κάτω από το στοιχείο α_{kk}.

Για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n - 1$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij} - m_{ik} \cdot \alpha_{kj}, \quad \text{για κάθε} \quad i, j = k + 1, k + 2, \ldots, m,$$

$$\left(m_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{kk}} \;, \quad \alpha_{kk} \;\rightarrow\; \text{οδηγό στοιχείο} \right)$$

$$b_i = b_i - m_{ik} \cdot b_k \;, \quad \text{για κάθε} \quad i = k + 1, k + 2, \ldots, m.$$

Η λύση του αρχικού γραμμικού συστήματος $m \times n$ θα προκύψει από την επίλυση του ισοδύναμου του αρχικού συστήματος που αντιστοιχεί στον επαυξημένο πίνακα κλιμακωτής μορφής εφαρμόζοντας τη μέθοδο της προς τα πίσω αντικατάστασης (backward elimination).

$$x_k = \frac{1}{\alpha_{kk}} \left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_{kj} \cdot x_j \right) \;, \text{ για κάθε } k = n - 1, \; n - 2, \ldots, 2, 1.$$

Ειδικές περιπτώσεις

(a) Αν κατά τη διαδικασία των διαδοχικών απαλοιφών προκύψει εξίσωση της μορφής $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$, τότε η εξίσωση αυτή αφαιρείται από το γραμμικό σύστημα $m \times n$.

(b) Αν κατά τη διαδικασία των διαδοχικών απαλοιφών προκύψει εξίσωση της μορφής $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n =$ μη μηδενικός σταθερός όρος, τότε το αρχικό γραμμικό σύστημα $m \times n$ είναι αδύνατο.

(c) Έστω r(A) ο βαθμός του πίνακα A $m \times n$ του γραμμικού συστήματος $m \times n$ και r[A : B] ο βαθμός του επαυξημένου πίνακα $m \times (n+1)$ του συστήματος. Τότε:

(c_1) Αν r(A) = r[A:B] $\rightarrow$ Το σύστημα είναι συμβιβαστό ($\rightarrow$ έχει τουλάχιστον μια λύση).

(c_2) Αν r(A) = r[A:B] = n (πλήθος αγνώστων) $\rightarrow$ το σύστημα έχει μοναδική λύση.

(c_3) Αν r(A) = r[A:B] < n $\rightarrow$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (αόριστο)

(c_4) Αν r(A) $\neq$ r[A:B] (και ειδικότερα r(A) < r [A:B]) $\rightarrow$ το σύστημα είναι αδύνατο.

Θέμα 3ο

(i) Ελέγχουμε αρχικά αν ικανοποιείται η αρχή της αυστηρά κυριαρχικής διαγωνίου. Έχουμε:

$|\alpha_{11}| = 8 > |2| + |1| = 3$ (ναι)

$|\alpha_{22}| = 4 < |10| + |1| = 11$ (όχι)

$|\alpha_{33}| = 2 < |50| + |25| = 75$ (όχι)

Επομένως η μέθοδος Gauss – Seidel δεν συγκλίνει.

(ii) Όμοια έχουμε:

$|\alpha_{11}| = |2| > |1| + |0|$ (ναι)

$|\alpha_{22}| = |4| > |2| + |1|$ (ναι)

$|\alpha_{33}| = |6| > |2| + |0|$ (ναι)

Άρα η μέθοδος Gauss – Seidel συγκλίνει.

Στην περίπτωση που είναι γνωστός ο πίνακας των σταθερών όρων του συστήματος, τότε η μέθοδος Gauss – Seidel οδηγεί στην εύρεση της διαδοχικής καλύτερης προσέγγισης της λύσης $\underset{\sim}{x}^{(k+1)}$ μέσω της τιμής $\underset{\sim}{x}^{(k)}$ του προηγούμενου k-βήματος επανάληψης της μεθόδου μέσω της σχέσης $\underset{\sim}{x}^{(k+1)} = Q \cdot \underset{\sim}{x}^{(k)} + E$, $k = 0, 1, 2, \dots$, έχοντας ως γνωστή μια αρχική προσεγγιστική τιμή $\underset{\sim}{x}^{(0)}$ της λύσης.

Λαμβάνοντας υπόψη την

Επιλογή κριτηρίων σύγκλισης: Αρχικά το (a) $\xrightarrow{\text{OXI}}$ (b) $\xrightarrow{\text{OXI}}$ (c),

όπου **(a)** αρχή της αυστηρά κυριαρχικής διαγωνίου

(b) $\cdot \|Q\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} \|Q_{ij}\| < 1$,

$$\|Q\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} \|Q_{ij}\| < 1 ,$$

(c) $\rho\,(Q) < 1$ ($\rightarrow$ η φασματική ακτίνα του πίνακα Q (η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα Q, δηλ. η μεγαλύτερη ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det\,(Q - \lambda \cdot I)$).

Θα μπορούσαμε στο (i) να εφαρμόσουμε ένα ή περισσότερα από τα παραπάνω κριτήρια σύγκλισης.

Θέμα 4ο

Το γραμμικό σύστημα που προκύπτει είναι το

$$\begin{aligned} 4x + 3y + 2z &= 960 \\ x + 3y + z &= 510 \qquad (\Sigma) \\ 2x + y + 3z &= 610, \end{aligned}$$

όπου x → τρανζίστορ, y → αντιστάσεις, z → μικροεπεξεργαστές.

(i) Μέθοδος Gauss με μερική οδήγηση

A_1. Απαλοιφή - Τριγωνοποίηση

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 960 \\ 1 & 3 & 1 & 510 \\ 2 & 1 & 3 & 610 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} m_{21} = \dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} = \dfrac{1}{4} \\ m_{31} = \dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \Gamma_2 - \dfrac{1}{4}\Gamma_1 \to \Gamma_2 \\ \Gamma_3 - \dfrac{1}{2}\Gamma_1 \to \Gamma_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 960 \\ 0 & 9/4 & 1/2 & 270 \\ 0 & -1/2 & 2 & 130 \end{array}\right]$$

Επειδή το 4 είναι το μέγιστο στοιχείο σε απόλυτη τιμή στην 1η στήλη δεν απαιτείται εναλλαγή γραμμών. Επιπλέον αποτελεί και οδηγό στοιχείο.

Δεδομένου ότι το |9/4| = 9/4 είναι μεγαλύτερο από το |–1/2| = 1/2 δεν απαιτείται εναλλαγή μεταξύ της 2ης και 3ης γραμμής. Επιπλέον αποτελεί και οδηγό στοιχείο. Άρα:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 960 \\ 0 & 9/4 & 1/2 & 270 \\ 0 & -1/2 & 2 & 130 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \Gamma_3 - (-2/9)\,\Gamma_2 \to \Gamma_3 \\ m_{32} = \dfrac{\alpha_{32}}{\alpha_{22}} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}} = -\dfrac{2}{9} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 960 \\ 0 & 9/4 & 1/2 & 270 \\ 0 & 0 & 19/9 & 190 \end{array}\right]$$

Παρατηρούμε ότι ο βαθμός του πίνακα A του συστήματος r(A) ισούται με τον βαθμό του επαυξημένου πίνακα του συστήματος r[A:B]. Πράγματι r(A) = r[A:B] = 3 = n (πλήθος αγνώστων) → το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση. Καταλήξαμε σε άνω τριγωνικό πίνακα, ο οποίος είναι γραμμοϊσοδύναμος του αρχικού πίνακα A του συστήματος (Σ). Η λύση θα προκύψει εφαρμόζοντας το 2ο στάδιο της μεθόδου.

A_2. Προς τα πίσω αντικατάσταση (backward elimination)

$$4x + 3y + 2z = 960$$

$$9/4y + 1/2z = 270 \quad \to \quad 9/4y = 270 - 1/2z = 270 - 90/2 = 270 - 45 = 225$$

$$19/9z = 190 \quad \to \quad z = \frac{190 \times 9}{19} = 90$$

$$\to \; y = \frac{225 \times 4}{9} = 100 \quad \to \quad 4x = 960 - 3y - 2z = 960 - 300 - 180 = 480 \quad \to \quad x = \frac{480}{4} = 120\,.$$

$$z = 90$$

Άρα η μοναδική λύση του (Σ) είναι (x, y, z) = (120, 100, 90).

(ii) Μέθοδος Gauss – Jordan χωρίς οδήγηση

Θεωρούμε τον τελικό επαυξημένο πίνακα του (i) και έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 960 \\ 0 & 9/4 & 1/2 & 270 \\ 0 & 0 & 19/9 & 190 \end{array}\right] \; \overset{\sim}{\left(\frac{9}{19}\right)\Gamma_3 \to \Gamma_3} \; \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 960 \\ 0 & 9/4 & 1/2 & 270 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right] \; \frac{4}{9}\,\Gamma_2 \to \Gamma_2 \;\sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 960 \\ 0 & 1 & 2/9 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right] \; \underset{\sim}{\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma_1 \to \Gamma_1} \; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/4 & 1/2 & 240 \\ 0 & 1 & 2/9 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right] \; \overset{\sim}{\left(-\frac{2}{9}\right)\Gamma_3 + \Gamma_2 \to \Gamma_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/4 & 1/2 & 240 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right] \; \underset{\sim}{\left(-\frac{3}{4}\right)\Gamma_2 + \Gamma_1 \to \Gamma_1} \; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 165 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right] \; \overset{\sim}{\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma_3 + \Gamma_1 \to \Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right].$$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος και με τη συγκεκριμένη μέθοδο είναι (x, y, z) = (120, 100, 90).

Θέμα 5ο

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \alpha & -1 & -2 \\ b & 7 & -3 \\ c & -2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -20 \\ 70 \end{bmatrix}$$

Έστω $\alpha = 5$, $b = 1$, $c = 1$. Τότε το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -20 \\ 70 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{aligned} 5x - y - 2z &= 8 \\ x + 7y - 3z &= -20 \quad (\Sigma) \\ x - 2y + 10z &= 70 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας του συστήματος ικανοποιεί την αρχή της αυστηράς κυριαρχικής διαγωνίου. Πράγματι έχουμε:
$|\alpha_{11}| = 5 > |-1| + |-2| = 3$, $|\alpha_{22}| = 7 > |1| + |-3| = 4$,
$|\alpha_{33}| = 10 > |1| + |-2| = 3$.

Άρα οι επαναληπτικές μέθοδοι συγκλίνουν.

Το παραπάνω σύστημα (Σ) γράφεται:

$$x = \frac{1}{5}(8 + \qquad + y + 2z)$$

$$y = \frac{1}{7}(-20 - x \qquad + 3z)$$

$$z = \frac{1}{10}(70 - x + 2y \qquad)$$

Α. Μέθοδος Jacobi

Για k = 0, 1, 2, …, έχουμε ότι: ($x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$)

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(8 \qquad + x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{7}\left(-20 - x_1^{(k)} \qquad + 3x_3^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(70 - x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} \qquad\right)$$

A$_1$) για **k = 0** και $\underset{\sim}{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$ έχουμε ότι:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{5}\left(8 \qquad + x_2^{(0)} + 2x_3^{(0)}\right) = 8/5$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{7}\left(-20 - x_1^{(0)} + 3x_3^{(0)}\right) = -20/7$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}\left(70 - x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)}\right) = 7$$

Το αντίστοιχο σχετικό ποσοστιαίο σφάλμα είναι:

$$\frac{\left\|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right\|}{\left\|x_1^{(1)}\right\|} = \frac{|8/5 - 0|}{|8/5|} = \frac{8/5}{8/5} > \frac{1}{2} \times 10^{-5} \quad ,$$

$$\frac{\left\|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right\|}{\left\|x_2^{(1)}\right\|} = \frac{|-20/7 - 0|}{20/7} = 1 > \frac{1}{2} \times 10^{-4} \quad ,$$

$$\frac{\left\|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right\|}{\left\|x_3^{(1)}\right\|} = \frac{|7 - 0|}{7} = 1 > \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

A$_2$) Για **k = 1** έχουμε:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{5}\left(8 \qquad + x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{5}\left(8 - 20/7 + 2x7\right) = ...$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{7}\left(-20 - x_1^{(1)} \qquad + 3x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{7}\left(-20 + 8/5 + 3x7\right) = ...$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}\left(70 - x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{10}\left(70 - 8/5 + 2\,x\left(-20/7\right)\right) = ...$$

με αντίστοιχο σχετικό ποσοστιαίο σφάλμα

$$\frac{\left\|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right\|}{\left\|x_1^{(2)}\right\|} \;, \quad \frac{\left\|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right\|}{\left\|x_2^{(2)}\right\|} \;, \quad \frac{\left\|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right\|}{\left\|x_3^{(2)}\right\|}$$

(για όλα ελέγχουμε αν είναι $\gtrless \frac{1}{2} \times 10^{-4}$)

Για να προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα θα πρέπει για όλα να ισχύει ότι είναι $> \frac{1}{2} \times 10^{-4}$.

A$_3$) Για **k = 2** έχουμε:

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{5}\left(8 \qquad + x_2^{(2)} + 2x_3^{(2)}\right) = ...$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{7}\left(-20 - x_1^{(2)} + 3x_3^{(2)}\right) = ...$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{10}\left(70 - x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}\right) = ...$$

και το αντίστοιχο σχετικό ποσοστιαίο σφάλμα

$$\frac{\left\|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right\|}{\left\|x_1^{(3)}\right\|} \;, \quad \frac{\left\|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right\|}{\left\|x_2^{(3)}\right\|} \;, \quad \frac{\left\|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right\|}{\left\|x_3^{(3)}\right\|}$$

(για όλα ελέγχουμε αν είναι $\gtrless \frac{1}{2} \times 10^{-4}$)

Β. Μέθοδος Gauss - Seidel

Για k = 0, 1, 2, …, έχουμε ότι:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(8 \qquad + x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{7}\left(-20 - x_1^{(k+1)} \qquad + 3x_3^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(70 - x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)}\right)$$

Εργαζόμαστε ανάλογα με τη μέθοδο Jacobi για k = 0, 1, 2.

Θέμα 6ο

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\alpha x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$bx_1 - 2x_2 - x_3 = 3$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Α) Αν **α = b = 1** (για παράδειγμα), τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \qquad (\Sigma) \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$ ο πίνακας του συστήματος.

Για την εφαρμογή της μεθόδου της LU παραγοντοποίησης εργαζόμαστε ως εξής:

Α$_1$) Υπολογισμός του πίνακα μετάθεσης P

Δεδομένου ότι δεν πραγματοποιείται καμία εναλλαγή στον πίνακα Α του συστήματος ο πίνακας μετάθεσης P είναι $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv I_3$.

Α$_2$) Υπολογισμός των πινάκων L, U κατά την εφαρμογή της LU παραγοντοποίησης του πίνακα Α.

(i) Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Gauss (χωρίς οδήγηση) (μπορούμε να εφαρμόσουμε και τον αλγόριθμο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση) για την επίλυση του συστήματος $(P\cdot A)\cdot X = PB$ ή $A\cdot X = B$ (διότι $P \equiv I_3$). Οπότε έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} m_{21} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} = 1 \quad \Gamma_2 - \Gamma_1 \to \Gamma_2 \\ \\ m_{31} = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}} = 1 \quad \Gamma_3 - \Gamma_1 \to \Gamma_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Gamma_3 + \frac{1}{3}\Gamma_2 \to \Gamma_3 \\ m_{32} = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{22}} = -1/3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$ (→ ο ζητούμενος κάτω τριγωνικός πίνακας),

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix}$$ (→ ο ζητούμενος άνω τριγωνικός πίνακας)

έτσι, ώστε

$$A = L \cdot U.$$

(Πράγματι: $L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = A$)

Παρατηρούμε ότι det(A)=det(LU)=(det(L)).(det(U))=1(1x3x(-8/3))=-8≠0. Άρα το σύστημα (Σ) είναι συμβιβαστό.

A_3) Επίλυση γραμμικού συστήματος

(i) Επιλύουμε αρχικά το κάτω τριγωνικό σύστημα $L.B' = P.B = B$, όπου $B' = \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix}$ και έχουμε:

$$L.B' = B \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{aligned} b_1' &= 10 \\ b_1' + b_2' &= 1 \\ b_1' + -1/3\, b_2' + b_3' &= 3 \end{aligned}$$

Με εφαρμογή της μεθόδου της προς τα μπρος αντικατάστασης προκύπτει ότι

$$b_1' = 10$$

$$b_2' = 1 - b_1' = 1 - 10 = -9$$

$$b_3' = 3 - b_1' + \frac{1}{3} b_2' = 3 - 10 + \frac{1}{3}(-9) = 3 - 10 - 3 = -10 \quad \text{(forward elimination)}$$

(ii) Επιλύουμε στη συνέχεια το αντίστοιχο άνω τριγωνικό σύστημα $U.X = B'$

ή $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -9 \\ -10 \end{bmatrix}$$

ή $\quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$

$$3x_2 + x_3 = -9$$

$$-8/3 \cdot x_3 = -10$$

Με εφαρμογή της μεθόδου της προς τα πίσω αντικατάστασης προκύπτει ότι

$$x_1 = 10 + x_2 - 2x_3 = 10 - \frac{51}{12} - 2 \cdot \frac{15}{4} = 10 - \frac{51}{12} - \frac{30}{4} = \frac{120-51-90}{12} = -\frac{21}{12}$$

$$3x_2 = -9 - \frac{15}{4} = \frac{-36-15}{4} = \frac{-51}{4} \to x_2 = \frac{-51}{12}$$

$$x_3 = \frac{-10}{-8/3} = \frac{-30}{-8} = \frac{15}{4}$$

Άρα το αρχικό σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση της μορφής

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-21}{12}, \ \frac{-51}{12}, \ \frac{15}{4}\right)$$

Β) Αν **$\alpha = 0$ και $b = 3$** (για παράδειγμα), τότε το σύστημα γράφεται

$$0x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$$

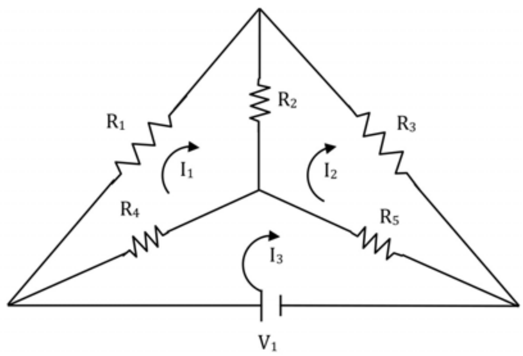
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3$$

Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε όπως στο Παράδειγμα (σελ. 11, ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)).

Θέμα 7ο

Το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων που περιγράφει με βάση τον **νόμο του Kirchoff** τα ρεύματα που διαπερνούν τους τρεις κλειστούς βρόχους του παραπάνω ηλεκτρικού κυκλώματος για $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 3\Omega$, $V_1 = 1{,}5V$ προκύπτει ως εξής:



(i) Κλειστός βρόχος (1)

$$-I_1 \cdot R_1 + (-I_1 + I_2) \cdot R_2 + (I_3 - I_1) \cdot R_4 = 0$$

$$\to (R_1 + R_2 + R_4) \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 - R_4 \cdot I_3 = 0$$

$$\to 5I_1 - 2I_2 - 2I_3 = 0$$

(ii) Κλειστός βρόχος (2)

$$(-I_2 + I_1) \cdot R_2 + (-I_2) \cdot R_3 + (-I_2 + I_3) \cdot R_5 = 0$$

$$\to -R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3 + R_5) \cdot I_2 - R_5 \cdot I_3 = 0$$

$$\to -2I_1 + 7I_2 - 3I_3 = 0$$

(iii) Κλειστός βρόχος (3)

$$V_1 + (-I_3 + I_1) \cdot R_4 + (-I_3 + I_2) \cdot R_5 = 0$$

$$\to -R_4 \cdot I_1 - R_5 \cdot I_2 + (R_4 + R_5) \cdot I_3 = V_1$$

$$\to -2I_1 - 3I_2 + 5I_3 = 1{,}5$$

Άρα προκύπτει το σύστημα (γραμμικό σύστημα 3 x 3)

$$(\Sigma)\quad \begin{array}{r} 5I_1 - 2I_2 - 2I_3 = 0 \\ -2I_1 + 7I_2 - 3I_3 = 0 \\ -2I_1 - 3I_2 + 5I_3 = 1{,}5 \end{array} \quad \text{ή (σε μορφή πινάκων)} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Cramer έχουμε ότι:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 5(35-9) + 2(-10-6) -$$

$$-2\,(6+14) = 5 \times 26 - 2 \times 16 - 2 \times 20 = 130 - 32 - 40 = 58 \neq 0$$

$\rightarrow$ το σύστημα (Σ) είναι συμβιβαστό.

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 1.5 & -3 & 5 \end{vmatrix} = (1.5)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = (1.5)\cdot(6+14) = 30\ ,$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & 1.5 & 5 \end{vmatrix} = (-1.5)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1.5)\cdot(-15-4) = 28{,}5\ ,$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ -2 & -3 & 1.5 \end{vmatrix} = (1.5)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = (1.5)\cdot(35-4) = 46{,}5$$

Άρα το γραμμικό σύστημα 3 × 3 (Σ) έχει μοναδική λύση της μορφής

$$(I_1, I_2, I_3) = \left(\frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ \frac{\det(A_2)}{\det(A)},\ \frac{\det(A_3)}{\det(A)}\right) = \left(\frac{30}{58},\ \frac{28{,}5}{58},\ \frac{46{,}5}{58}\right).$$