ΕΝΟΤΗΤΑ 3
ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ-ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ορισμός. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας (nxn). Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{x}$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \ , \ \lambda \in R \ , \qquad (1)$$

καλείται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) του πίνακα A. O πραγματικός αριθμός λ καλείται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) του πίνακα A που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα $\vec{x}$, ενώ η εξίσωση (1) καλείται **εξίσωση ιδιοτιμών.**

Ισχύει ότι: $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \ \rightarrow \ (A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{x} = \mathbf{0}$. (2)

Αν ο πίνακας A-λI είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή

$$\det (A - \lambda \cdot I) \neq 0 \ , \qquad (3)$$

τότε το (2) (γραμμικό, ομογενές σύστημα nxn) έχει μοναδική λύση τη μηδενική $(\vec{x} = \vec{0})$, διαφορετικά, δηλαδή

$$\det (A - \lambda \cdot I) = 0 \qquad (4)$$

το σύστημα (2) θα έχει και μη μηδενικές λύσεις. Η εξίσωση (4) καλείται **χαρακτηριστική εξίσωση,** η $\det (A - \lambda \cdot I)$ **χαρακτηριστική ορίζουσα,** ενώ το πολυώνυμο $P(\lambda)$ (**χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A), που προκύπτει αν θεωρήσουμε το ανάπτυγμα της χαρακτηριστικής ορίζουσας, θα είναι (σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας πολυωνύμων) ένα πολυώνυμο n-στού βαθμού της μορφής

$$P(\lambda) = \det (A - \lambda \cdot I) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \cdot (\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_k} \ ,$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ διαφορετικές ανά δύο ρίζες της (4) με πολλαπλότητες $n_1, n_2, \ldots n_k$ αντίστοιχα έτσι, ώστε $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Ιδιότητες

1. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού πίνακα A nxn, οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε

(i) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 , \cdots, \lambda_n$,

(ii) $t_r (A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

Επιπλέον οι ιδιοτιμές και οι συντεταγμένες των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων τους είναι πραγματικοί αριθμοί, ενώ τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.

2. Δύο όμοιοι πίνακες Α, Β $\left(B = P^{-1} \cdot A \cdot P\right)$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

3. Οι ιδιοτιμές ενός τριγωνικού πίνακα ταυτίζονται με τα διαγώνια στοιχεία του.

4. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές ενός πίνακα Α nxn είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

3.2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

3.2.1. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα 1. Σχηματίζουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $\det\left(A - \lambda \cdot I\right) = 0$.

Βήμα 2. Βρίσκουμε τις ρίζες λ_i, i = 1, 2, ..., k, της χαρακτηριστικής εξίσωσης (ιδιοτιμές του Α).

Βήμα 3. Για κάθε μία από τις ιδιοτιμές λ_i, i = 1, 2, ..., k, επιλύουμε το αντίστοιχο γραμμικό, ομογενές σύστημα $\left(A - \lambda_i \cdot I\right) \cdot \vec{e}_i = \vec{0}$ για την εύρεση των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων τους $\vec{e}_i$, i=1,2,…,k.

Παρατηρήσεις

1. Δεδομένου ότι η χαρακτηριστική εξίσωση είναι ομογενής ως προς $\vec{x}$ το μέτρο του ιδιοδιανύσματος δεν μπορεί να προσδιοριστεί από αυτή. Για το σκοπό αυτό απαιτείται *κανονικοποίηση* των λύσεων σε ιδιοδιανύσματα μοναδιαίου μέτρου.

2. Η αλγεβρική μέθοδος επίλυσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων εφαρμόζεται σε τετραγωνικούς πίνακες μικρής τάξης.

Παράδειγμα (Γ. Στεφανίδης-Ν. Σαμαράς)

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Α.

Λύση

Βήμα 1. Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα Α 4x4 είναι:

$$\det\left(A - \lambda \cdot I_4\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \left(5-\lambda\right) \cdot \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 2 & 5-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^4 - 10(5-\lambda)^2 + 9 = 0 .$$

Βήμα 2. Θέτουμε $5 - \lambda = \omega$. Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση γράφεται:

$$\det\left(A - \lambda \cdot I_4\right) = \omega^4 - 10\omega^2 + 9 = 0 .$$ (Διτετράγωνη εξίσωση)

ή $k^2 - 10k + 9 = 0$ (για $k = \omega^2$) με $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 9 = 100 - 36 = 64 > 0$ και ρίζες

$$k_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$ ή ($k_1 = 1$, $k_2 = 9$). Άρα

- για $\mathbf{k_1 = 1} \rightarrow \omega^2 = 1 \rightarrow \omega = \pm 1 \rightarrow 5 - \lambda = \pm 1 \rightarrow (\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 6)$ (ιδιοτιμές του Α)
- για $\mathbf{k_2 = 9} \rightarrow \omega^2 = 9 \rightarrow \omega = \pm 3 \rightarrow 5 - \lambda = \pm 3 \rightarrow (\lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = 8)$ (ιδιοτιμές του Α)

Βήμα 3. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές είναι:

(i) για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$ επιλύουμε το σύστημα

$$\left(A - 4 \cdot I_4\right) \cdot \vec{e}_1 = \vec{0} \quad ή \quad \begin{bmatrix} 5-4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5-4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5-4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5-4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$u_1 + 2u_2 + u_3 = 0$$
$$2u_1 + u_2 + u_4 = 0 \qquad \text{(γραμμικό, ομογενές σύστημα 4x4)}$$
$$u_1 + u_3 + 2u_4 = 0$$
$$u_2 + 2u_3 + u_4 = 0$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$u_2 = + u_4$, $u_1 = - u_4$, $u_3 = - u_4$, $u_4 \in R$ (άπειρες λύσεις).

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_1=4 είναι όλα τα βαθμωτά πολλαπλάσια διανύσματα του $\vec{e}_1 = (-1\ \ 1\ \ -1\ \ 1)^T$ (για u_4=1) ή μετά από κανονικοποίηση όλα τα βαθμωτά πολλαπλάσια του αντίστοιχου μοναδιαίου διανύσματος $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}(-1\ \ 1\ \ -1\ \ 1)^T$.

(ii) Όμοια προκύπτει ότι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των ιδιοτιμών $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 8$ είναι αντίστοιχα μετά από κανονικοποίηση τα βαθμωτά πολλαπλάσια των μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{2}(1\ \ 1\ \ -1\ \ -1)^T, \qquad \vec{e}_3 = \frac{1}{2}(-1\ 1\ 1\ -1)^T, \qquad \vec{e}_4 = \frac{1}{2}(1\ 1\ 1\ 1)^T .$$

Παρατήρηση

Η αλγεβρική μέθοδος επίλυσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός τετραγωνικού πίνακα μέσω της απαλοιφής Gauss δεν μπορεί να εφαρμοστεί για τετραγωνικούς πίνακες μεγάλης τάξης, διότι οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί μεταβάλλουν τις ιδιοτιμές.

3.2.2. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Η σημαντικότερη αριθμητική προσέγγιση εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων τετραγωνικών πινάκων Α μεγάλης τάξης είναι ο σχηματισμός και η επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης χωρίς υπολογισμό ορίζουσας.

Είναι γνωστό ότι η χαρακτηριστική εξίσωση $\det\left(A-\lambda\cdot I_n\right)=0$ (Α πίνακας nxn) είναι μία πολυωνυμική εξίσωση n-στού βαθμού της μορφής

$$\lambda^n+\alpha_2\cdot\lambda^{n-1}+\alpha_3\cdot\lambda^{n-2}+\cdots+\alpha_n\cdot\lambda+\alpha_{n+1}=0\ ,$$

οι ρίζες της οποίας αποτελούν τις ιδιοτιμές του πίνακα Α. Η επίλυση της παραπάνω πολυωνυμικής εξίσωσης προϋποθέτει τον προσδιορισμό των n σε πλήθος συντελεστών α_k, k = 2, ..., n+1, διαδικασία αρκετά δύσκολη. Για το σκοπό αυτό εφαρμόζουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα Cayley – Hamilton

Έστω $\lambda^n+\alpha_2\cdot\lambda^{n-1}+\alpha_3\cdot\lambda^{n-2}+\cdots+\alpha_n\cdot\lambda+\alpha_{n+1}=0$ η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα Α. Τότε θα ισχύει

$$A^n+\alpha_2\cdot A^{n-1}+\alpha_3\cdot A^{n-2}+\cdots+\alpha_n\cdot A+\alpha_{n+1}\cdot I_n=\mathbf{O}\ . \tag{5}$$

Άρα κάθε τετραγωνικός πίνακας Α είναι ρίζα του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου.

Σύμφωνα με αυτό το Θεώρημα θεωρώντας ένα αρχικό μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{x}_1=\left(x_{11}\ x_{12}\cdots x_{1n}\right)^T$ υπολογίζουμε τα διανύσματα

$$\vec{x}_2=A\cdot\vec{x}_1\ ,\qquad \vec{x}_3=A\cdot\vec{x}_2\ ,\ ...,\ \vec{x}_{n+1}=A\cdot\vec{x}_n\ .$$

Οπότε η εξίσωση (5) γράφεται

$$\vec{x}_{n+1}+\alpha_2\cdot\vec{x}_n+\alpha_3\cdot\vec{x}_{n-1}+\cdots+\alpha_n\cdot\vec{x}_2+\alpha_{n+1}\cdot\vec{x}_1=\vec{0}$$

ή

$$-\vec{x}_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n+2-k}\cdot\vec{x}_k\ . \tag{6}$$

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών α_{n+2-k}, k = 1, 2, ..., n, εργαζόμαστε ως εξής:

(i) αν τα διανύσματα $\vec{x}_k$, k = 1, 2,..., n, είναι ορθοκανονικά, τότε ο προσδιορισμός των συντελεστών προκύπτει πολλαπλασιάζοντας με καθένα από τα $\vec{x}_k^T$.

(ii) αν τα διανύσματα $\vec{x}_k$, k = 1, 2, ..., n, είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε υπάρχουν διανύσματα $\vec{y}_k$, k = 1, 2, ..., n, έτσι, ώστε να ισχύει $\vec{y}_k\cdot\vec{x}_m=\vec{y}_k^T.\vec{x}_m=\delta_{im}$.

Για την εύρεση των διανυσμάτων $\vec{y}_k$ έχουμε ότι αν Χ είναι ο πίνακας του οποίου οι στήλες είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{x}_k$ και Υ ο πίνακας το οποίου οι στήλες είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{y}_k$, τότε θα ισχύει $Y^TX=I$. Επομένως για την εύρεση των διανυσμάτων $\vec{y}_k$ αρκεί να υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πίνακα Χ. Στη συνέχεια οι συντελεστές προσδιορίζονται πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (6) με καθένα από τα διανύσματα $\vec{y}_k^T$, δηλαδή

$$\alpha_{n+2-k} = -\vec{y}_k^T \cdot \vec{x}_{n+1} ., \text{k}=1,2,\ldots,\text{n}.$$

3.3. ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΠΙΝΑΚΑ

3.3.1. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A nxn είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα B ανν ο πίνακας A έχει n σε πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Τότε τα διαγώνια στοιχεία του B είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του πίνακα A έτσι, ώστε $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$, όπου P ο πίνακας με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A.

Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας A καλείται **διαγωνοποιήσιμος,** ενώ η διαδικασία προσδιορισμού του πίνακα B καλείται **διαγωνοποίηση.**

Υπενθυμίζουμε ότι δυο τετραγωνικοί πίνακες A, B nxn καλούνται **όμοιοι** ανν υπάρχει μη ιδιάζων πίνακας P έτσι, ώστε $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Παράδειγμα

Να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A είναι

$$\det\left(A - \lambda \cdot I_3\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-4) = 0.$$

$\rightarrow \lambda_1 = -2$ (διπλή) ή $\lambda_2 = 4$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

(i) για την ιδιοτιμή λ_1 = -2 το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι λύση του συστήματος

$$\left(A - \lambda_1 \cdot I_3\right) \cdot \vec{e}_1 = \vec{0}$$

ή $$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή $3u_1 - 3u_2 + 3u_3 = 0$

$3u_1 - 3u_2 + 3u_3 = 0$ (γραμμικό, ομογενές σύστημα 3x3)

$6u_1 - 6u_2 + 6u_3 = 0$

ή u_1-u_2 +u_3 = 0, u_1=u_2 -u_3, $u_2, u_3 \in R$ (άπειρες λύσεις).

Επομένως τα διανύσματα $\vec{e}_1' = (1 \quad 1 \quad 0)^T$, $\vec{e}_1'' = (1 \quad 0 \quad -1)^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα τον πίνακα A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_1 = -2 (διπλή ρίζα).

(ii) για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι λύση του συστήματος

$$(A - \lambda_2 \cdot I_3) \cdot \vec{e}_2 = \vec{0} \qquad ή$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή $- 3v_1 - 3v_2 + 3v_3 = 0$

$3v_1 - 9v_2 + 3v_3 = 0$ (γραμμικό, ομογενές σύστημα 3x3)

$6v_1 - 6v_2 = 0$

ή $- v_1 - v_2 + v_3 = 0$, $v_1 = v_2$, $v_2 \in R$ (άπειρες λύσεις).

Για $v_1 = 1$ (για παράδειγμα) προκύπτει ότι το διάνυσμα $\vec{e}_2 = (1 \; 1 \; 2)^T$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$. Επομένως δεδομένου ότι ο πίνακας A έχει τρία γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

$$\vec{e}_1' = (1 \quad 1 \quad 0)^T , \qquad \vec{e}_1'' = (1 \quad 0 \quad -1)^T , \qquad \vec{e}_2 = (1 \; 1 \; 2)^T$$

είναι διαγωνοποιήσιμος.

Για τη διαγωνοποίηση του πίνακα A θεωρούμε τον πίνακα P του οποίου οι στήλες είναι τα τρία παραπάνω γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

με

$$P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως ο όμοιος του A διαγώνιος πίνακας B είναι ο

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι σύμφωνα με το θεώρημα οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του πίνακα A.

3.3.2. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ-Διαγωνοποίηση μέσω διαδοχικών μετασχηματισμών ομοιότητας Jacobi

Στόχος της συγκεκριμένης αριθμητικής προσέγγισης είναι ο προσδιορισμός μιας ακολουθίας μετασχηματισμών ομοιότητας, η οποία θα οδηγήσει στη διαγωνοποίηση ενός αρχικού τετραγωνικού πίνακα Α nxn, συμμετρικού με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς (ιδιότητες που θα μας οδηγήσουν σε πραγματικές ιδιοτιμές και αντίστοιχα ορθογώνια διανύσματα, σύμφωνα με την Ιδ. 1 της § 3.1).

Παράδειγμα (Γ. Στεφανίδης-Ν. Σαμαράς)

Θεωρούμε τον πίνακα Α του παραδείγματος της § 3.2. Για τη διαγωνοποίησή του εργαζόμαστε ως εξής:

(i) Θεωρούμε τον υποπίνακα $A'_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ και αναζητούμε όμοιό του διαγώνιο πίνακα, δηλαδή πίνακα B_1 τέτοιο, ώστε: $B_1 = P_1^{-1} \cdot A_1 \cdot P_1$, για αντιστρέψιμο πίνακα P_1. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τον ορθογώνιο πίνακα $P_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (αντιστρέψιμος με αντίστροφο $P_1^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$) έτσι, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$A'_1 \equiv B = P_1^{-1} \cdot A_1 \cdot P_1 = P_1^T \cdot A_1 \cdot P_1$$

ή $$\begin{bmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{με } \beta_{12} = \beta_{21} = 0.$$

Λύνουμε ως προς β_{21} και έχουμε (λαμβάνοντας υπόψη ότι ο Α είναι συμμετρικός)

$$\beta_{21} = (\alpha_{22} - \alpha_{11}) \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta + \alpha_{12} \cdot (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

$$\rightarrow \tan(2\theta) = \frac{2\alpha_{12}}{\alpha_{22} - \alpha_{11}} \rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4} \quad (\text{για } \alpha_{11} = \alpha_{22}).$$

Επειδή $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 5 \rightarrow \theta = \pi/4$. Άρα αρχικά ο συμμετρικός πίνακας Α μετασχηματίζεται μέσω του πίνακα

$$P_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

στον ακόλουθο πίνακα

$$A' = P_{12}^T \cdot A \cdot P_{12} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0.7071 & 0.7071 \\ 0 & 3 & -0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 & 5 & 2 \\ 0.7071 & 0.7071 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{(απαλοιφή } \alpha'_{12}\text{)}.$$

(ii) Εργαζόμαστε όμοια όπως στο (i) για την απαλοιφή του α'_{13} χρησιμοποιώντας τον ορθογώνιο πίνακα

$$P_{13} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{13} & 0 & -\sin\theta_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_{13} & 0 & \cos\theta_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\theta_{13} = -0.5\tan^{-1}\frac{2\alpha_{13}}{\alpha_{33}-\alpha_{11}} = \frac{\pi}{4}.$$

Επομένως ο συμμετρικός πίνακας Α΄ μετασχηματίζεται μέσω του πίνακα

$$P_{13} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

στον ακόλουθο πίνακα

$$A'' = P_{13}^T \cdot A' \cdot P_{13} = \begin{bmatrix} 7.2247 & -0.2142 & 0 & 1.2797 \\ -0.2142 & 3 & -0.6739 & 0.7071 \\ 0 & -0.6739 & 4.7753 & 1.6919 \\ 1.2797 & 0.7071 & 1.6919 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{απαλοιφή } \alpha'_{13}).$$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία που είχαν μηδενιστεί αρχικά τώρα αντικαθίστανται με μικρότερες μη μηδενικές τιμές.

(iii) Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για όλους τους υπόλοιπους συνδυασμούς των 2x2 πινάκων προσπαθώντας να μηδενίσουμε διαδοχικά τα στοιχεία α_{14}, α_{23}, α_{24} και α_{34} του πίνακα καταλήγοντας στον πίνακα

$$A'_1 = \begin{bmatrix} 7.8080 & 0.2809 & 0.3485 & 0.5492 \\ 0.2809 & 2.1528 & -0.4051 & -0.3986 \\ 0.3485 & -0.4051 & 3.9338 & 0 \\ 0.5492 & -0.3986 & 0 & 6.1055 \end{bmatrix}$$

(1η ακολουθία μετασχηματισμών ομοιότητας Jacobi).

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A'_1 είναι συμμετρικός, όχι ακόμη διαγώνιος του οποίου τα στοιχεία εκτός της κυρίας διαγωνίου ελαττώνονται συνεχώς.

(iv) Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για δύο ακόμη ακολουθίες μετασχηματισμών ομοιότητας Jacobi οπότε προκύπτουν οι ακόλουθοι μετασχηματισμένοι πίνακες

$$A'_2 = \begin{bmatrix} 7.9962 & -0.1463 & 0.0207 & 0.0153 \\ -0.1463 & 2.0036 & 0.0047 & 0.0001 \\ 0.0207 & 0.0047 & 4.0001 & 0 \\ 0.0153 & 0.0001 & 0 & 6.0001 \end{bmatrix},$$

$$A_3' = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Το γινόμενο όλων των μετασχηματισμών ομοιότητας που έχουν ήδη πραγματοποιηθεί δίνει τον ζητούμενο πίνακα

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

έτσι, ώστε μέσω του συνδυασμού όλων των μετασχηματισμών που εφαρμόστηκαν πιο πάνω να ισχύει ότι

$$A' \equiv B = P^T \cdot A \cdot P = P^T \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot P = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Συνοψίζοντας έχουμε ότι:

εφαρμόζοντας μία ακολουθία μετασχηματισμών ομοιότητας Jacobi μετατρέπουμε έναν συμμετρικό πίνακα A σε διαγώνιο (διαγωνοποίηση συμμετρικού πίνακα) έτσι, ώστε να είναι όμοιος με τον A και επιπλέον δεδομένου ότι οι μετασχηματισμοί ομοιότητας δεν προκαλούν μεταβολές στις ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτει ότι τα στοιχεία της διαγωνίου του τελικού διαγώνιου πίνακα (όμοιος με τον A) είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A, ενώ οι στήλες του ορθογώνιου πίνακα P είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα (Θεώρημα Schur).

Παρατηρήσεις

1. Η ακολουθία μετασχηματισμών ομοιότητας Jacobi που οδηγεί στον τελικό διαγώνιο πίνακα (όμοιο του αρχικού) συγκλίνει.

2. Η μέθοδος μετασχηματισμών Jacobi είναι πιο πολύπλοκη από τη μέθοδο απαλοιφής Gauss και μειονεκτεί στο γεγονός ότι κάθε στοιχείο που μηδενίζεται σε ένα βήμα συνήθως εμφανίζεται εκ νέου ως ένα μικρότερο, μη μηδενικό στοιχείο στο επόμενο βήμα.

3. Εκτός από τη μέθοδο μετασχηματισμών Jacobi εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός συμμετρικού ή μη πίνακα καθώς και διαγωνοποίησης αυτού του πίνακα υπάρχουν και άλλες αριθμητικές προσεγγίσεις σύμφωνα με τις οποίες κατασκευάζονται ακολουθίες μετασχηματισμών του αρχικού πίνακα έτσι, ώστε κάθε ένας από αυτούς τους μετασχηματισμένους πίνακες να αφήνει ανέπαφες τις ιδιοτιμές του αρχικού πίνακα χωρίς να μεταβάλλει τα στοιχεία που έχουν μηδενιστεί σε κάποιο βήμα επανάληψης αυτών των μεθόδων.

3.4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗΣ ΚΑΤΑ ΜΕΤΡΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΗΣ ΕΝΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΚΑΙ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ (ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ)

Υποθέτουμε ότι ο τετραγωνικός πίνακας Α $n x n$ με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς έχει n σε πλήθος ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι ο πίνακας Α έχει n σε πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τα οποία αποτελούν μία βάση του R^n και ότι $|\lambda_1| > |\lambda_j|$, $j = 2, 3, ..., n$. Κάθε διάνυσμα $\vec{y}^{(0)} \in R$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης, δηλαδή

$$\vec{y}^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \vec{x}_k ,$$

όπου α_k βαθμωτά μεγέθη όχι όλα μηδέν.

Σχηματίζουμε την ακολουθία των διανυσμάτων που ορίζεται από την επαναληπτική σχέση

$$\vec{y}^{(m+1)} = A \cdot \vec{y}^{(m)} , \quad m = 0, 1, 2 ..., \qquad (7)$$

όπου $\vec{y}^{(0)}$ γνωστό, αυθαίρετα επιλεγμένο διάνυσμα.

Από την (7)

- για **m = 0** έχουμε

$$\vec{y}^{(1)} = A \cdot \vec{y}^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \lambda_k \cdot \vec{x}_k$$

- για **m=1** έχουμε

$$\vec{y}^{(2)} = A \cdot \vec{y}^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \lambda_k^2 \cdot \vec{x}_k$$

$$\vdots$$

Γενικά για κάθε $m = 0, 1, 2, ...$ ισχύει ότι

$$\vec{y}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \lambda_k^m \cdot \vec{x}_k ,$$

όπου

$$\lambda_1 = \lim_{m \to +\infty} \frac{y_j^{(m)}}{y_j^{(m-1)}} , \quad j = 1, 2, ..., n. \quad \left(|\lambda_1| > |\lambda_j| \quad ή \quad \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1 , \quad j = 2,3,...,n \right)$$

η μεγαλύτερη κατά μέτρο πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα Α.

Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα (αυτό που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη κατά μέτρο ιδιοτιμή λ_1) δίνεται από τη σχέση

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{\vec{y}^{(m)}}{\lambda_1^m} = \alpha_1 \cdot \vec{x}_1 .$$

Παρατηρήσεις

1. Η μέθοδος των δυνάμεων συνίσταται στη δημιουργία μιας ακολουθίας διανυσμάτων $\vec{y}^{(0)}$, $\vec{y}^{(1)}$, ..., $\vec{y}^{(m)}$ έως ότου οι λόγοι των αντίστοιχων συνιστωσών δύο διαδοχικών διανυσμάτων να τείνουν (οριακά) στην ίδια σταθερή τιμή, η οποία αποτελεί προσέγγιση της μεγαλύτερης κατά μέτρο ιδιοτιμής λ_1 του πίνακα Α. Το διάνυσμα $\vec{y}^{(m)}$ αποτελεί μία μη κανονικοποιημένη προσέγγιση του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος.

2. Η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου των δυνάμεων εξαρτάται από τα βαθμωτά μεγέθη (σταθερές) α_k, k=1,2,…,n και τους λόγους $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$, $\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right|$, ..., $\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right|$. Όσο μικρότεροι είναι αυτοί οι λόγοι τόσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου.

3.5. ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Αποτελείται από τα ακόλουθα διαδοχικά βήματα σε κάθε επανάληψη της μεθόδου

Βήμα 1. $y_{i_m}^{(m)} = \max_i \left|y_i^{(m)}\right| = \left\|\vec{y}^{(m)}\right\|_\infty$

Βήμα 2. $\vec{z}^{(m)} = \frac{1}{y_{i_m}^{(m)}} \cdot \vec{y}^{(m)}$ (κανονικοποίηση του $\vec{y}^{(m)}$)

Βήμα 3. $\vec{y}^{(m+1)} = A \cdot \vec{z}^{(m)}$, m = 0, 1, 2, ...

ή $$\vec{y}^{(m)} = \frac{1}{y_{i_0}^{(0)} \cdot y_{i_1}^{(1)} \cdots y_{i_{m-1}}^{(m-1)}} \cdot \lambda_1^m \cdot \left[\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \cdot \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^m \cdot \vec{x}_k \right]$$ (επαναληπτική σχέση)

Βήμα 4. Η μεγαλύτερη κατά μέτρο πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα Α είναι

$$\lambda_1 = \lim_{m\to+\infty} y_{i_{m-1}}^{(m)}$$

και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{z}^{(m-1)} = \frac{1}{y_{i_{m-1}}^{(m-1)}} \cdot \vec{y}^{(m-1)} .$$

Παρατηρήσεις

1. Η ακολουθία των συνιστωσών i_{m-1} του $\vec{y}^{(m)}$ (η συνιστώσα i_{m-1} του $\vec{y}^{(m)}$ αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη κατά μέτρο συνιστώσα του $\vec{y}^{(m-1)}$) τείνει (οριακά) στη μεγαλύτερη κατά μέτρο ιδιοτιμή του πίνακα Α.

2. Η ακολουθία των διανυσμάτων $\vec{z}^{(m)}$ συγκλίνει στο κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1.

3. Η ταχύτητα σύγκλισης της τροποποιημένης μεθόδου των δυνάμεων είναι της τάξης του $O\left((\lambda_2/\lambda_1)^m\right)$ και είναι γραμμική.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 8$. Να γίνουν δύο επαναλήψεις της τροποποιημένης μεθόδου των δυνάμεων για τον υπολογισμό της μεγαλύτερης κατά μέτρο ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος του πίνακα A. $\left(\vec{y}^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^T\right)$.

Λύση

- για **m=0** έχουμε

  $$y_{i_0}^{(0)} = \left\|\vec{y}^{(0)}\right\|_\infty = \max\{|1|, |0|, |0|, |0|\} = 1 \rightarrow i_0 = 1$$

  $$\vec{z}^{(0)} = \frac{1}{y_1^{(0)}} \cdot \vec{y}^{(0)} = \frac{1}{1}[1, 0, 0, 0]^T = [1, 0, 0, 0]^T.$$

Επομένως

$$\vec{y}^{(1)} = A \cdot \vec{z}^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Η πρώτη προσέγγιση της μεγαλύτερης κατά μέτρο ιδιοτιμής είναι

$$\lambda_1 = y_{i_0}^{(1)} = y_1^{(1)} = 5.$$

- για **m=1** έχουμε
  - $y_{i_1}^{(1)} = \left\|\vec{y}^{(1)}\right\|_\infty = \max\{|5|, |2|, |1|\} = 5 \rightarrow i_1 = 1$
  - $\vec{z}^{(1)} = \dfrac{1}{y_1^{(1)}}\ \vec{y}^{(1)} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1, 2/5, 1/5, 0]^T.$

Επομένως

$$\vec{y}^{(2)} = A \cdot \vec{z}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 4/5 \end{bmatrix}.$$

Η δεύτερη προσέγγιση της μεγαλύτερης κατά μέτρο ιδιοτιμής του πίνακα A είναι

$$\lambda_2 = y_1^{(2)} = 6 \ ,$$

ενώ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\vec{z}^{(2)} = \dfrac{1}{y_1^{(2)}} \cdot \vec{y}^{(2)} = [1, 2/3, 1/3, 2/15]^T$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (Ν.Μ. Μισυρλής)

Είναι γνωστό ότι η μηχανή αναζήτησης Google στην προσπάθεια αναζήτησης ενός ιστοτόπου κατασκευάζει τον πίνακα γειτνίασης A nxn με στοιχεία της μορφής

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν ο ιστότοπος i συνδέεται με τον j,} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε μία εταιρεία επτά υπαλλήλων για την οποία ο πίνακας γειτνίασης είναι

$$A = \begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

όπου X_k, $k = 1, 2, ..., 7$, κάθε υπάλληλος της εταιρείας, τότε παρατηρούμε ότι

1. Από τη γραμμή X_4 διαπιστώνουμε ότι ο ιστότοπος του υπαλλήλου X_4 συνδέεται με τους ιστότοπους των X_1, X_2, X_6.

2. Το πρόβλημα κατάταξης των ιστοτόπων με βάση τη συχνότητα αναφοράς τους συνδέεται άμεσα με τον υπολογισμό της μεγαλύτερης κατά μέτρο ιδιοτιμής του πίνακα γειτνίασης και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος.

3. Ο ιστότοπος με τον υψηλότερο βαθμό αναφοράς είναι η μεγαλύτερη συνιστώσα του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη κατά μέτρο ιδιοτιμή του πίνακα.

4. Όλοι οι υπόλοιποι ιστότοποι κατατάσσονται με βάση το μέγεθος της αντίστοιχης συνιστώσας του ιδιοδιανύσματος. Έτσι δεδομένου ότι το ιδιοδιάνυσμα αυτό είναι το $\vec{x} = (0.4261,\ 0.4746,\ 0.2137,\ 0.3596,\ 0.4416,\ 0.4214,\ 0.2137)^T$ και δεδομένου ότι $\max_i x_i = 0.4746$ προκύπτει ότι ο υπάλληλος X_2 έχει ιστότοπο με το μεγαλύτερο βαθμό (όσον αφορά στη συχνότητα εμφάνισης) και ακολουθούν οι υπάλληλοι X_5, X_1 κλπ. (Παραδοχή: ιδιοδιάνυσμα με θετικές συνιστώσες).

5. Αν και ο ιστότοπος του X_1 έχει τις περισσότερες αναφορές από εκείνες π.χ. του X_5 ή του X_2 εντούτοις εμφανίζει μικρότερο βαθμό αναφοράς, λαμβάνοντας υπόψη ότι η μέθοδος κατάταξης ενός ιστότοπου συνδέεται με τον βαθμό του ιστότοπου, ο οποίος είναι υψηλότερος όσο υπάρχουν ιστότοποι με μεγαλύτερο βαθμό που είναι συνδεδεμένοι με αυτόν.