Ε Ν Ο Τ Η Τ Α 4
ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

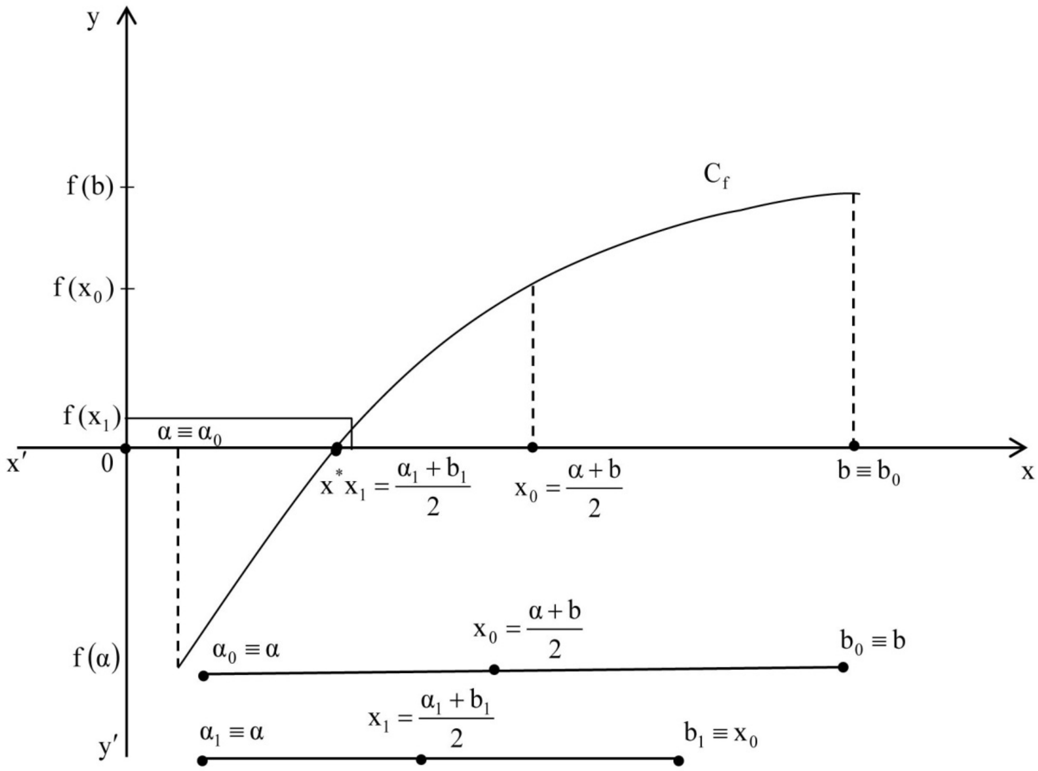
Θα ασχοληθούμε με την αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων της μορφής f(x)=0, όπου f δεδομένη πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, οι οποίες δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά. Ειδικότερα θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα προσέγγισης πραγματικών ριζών της εξίσωσης f(x)=0 μέσω της χρήσης κατάλληλων αριθμητικών μεθόδων, όπως η μέθοδος διχοτόμησης, η μέθοδος Regula Falsi, η μέθοδος Newton-Raphson και η μέθοδος της τέμνουσας. Οι συγκεκριμένες μέθοδοι είτε μέσω διχοτόμησης του διαστήματος στο οποίο εντοπίζεται κάθε φορά η ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 (προσεγγιστική και όχι ακριβής ρίζα) είτε μέσω επαναληπτικών σχέσεων παράγει μία ακολουθία προσεγγίσεων $\{x_n\}_n$ της ρίζας της εξίσωσης f(x)=0, η οποία υπό κατάλληλες προϋποθέσεις (κριτήρια τερματισμού) συγκλίνει στη ρίζα της εξίσωσης f(x)=0.

Θα συμβολίζουμε με $C([\alpha,b])$, $C^n([\alpha,b])$, όπου $[\alpha, b]\subseteq R$ και $n\in N^*$, τα σύνολα στα οποία η f είναι συνεχής και n φορές παραγωγίσιμη στο [α, b] αντίστοιχα.

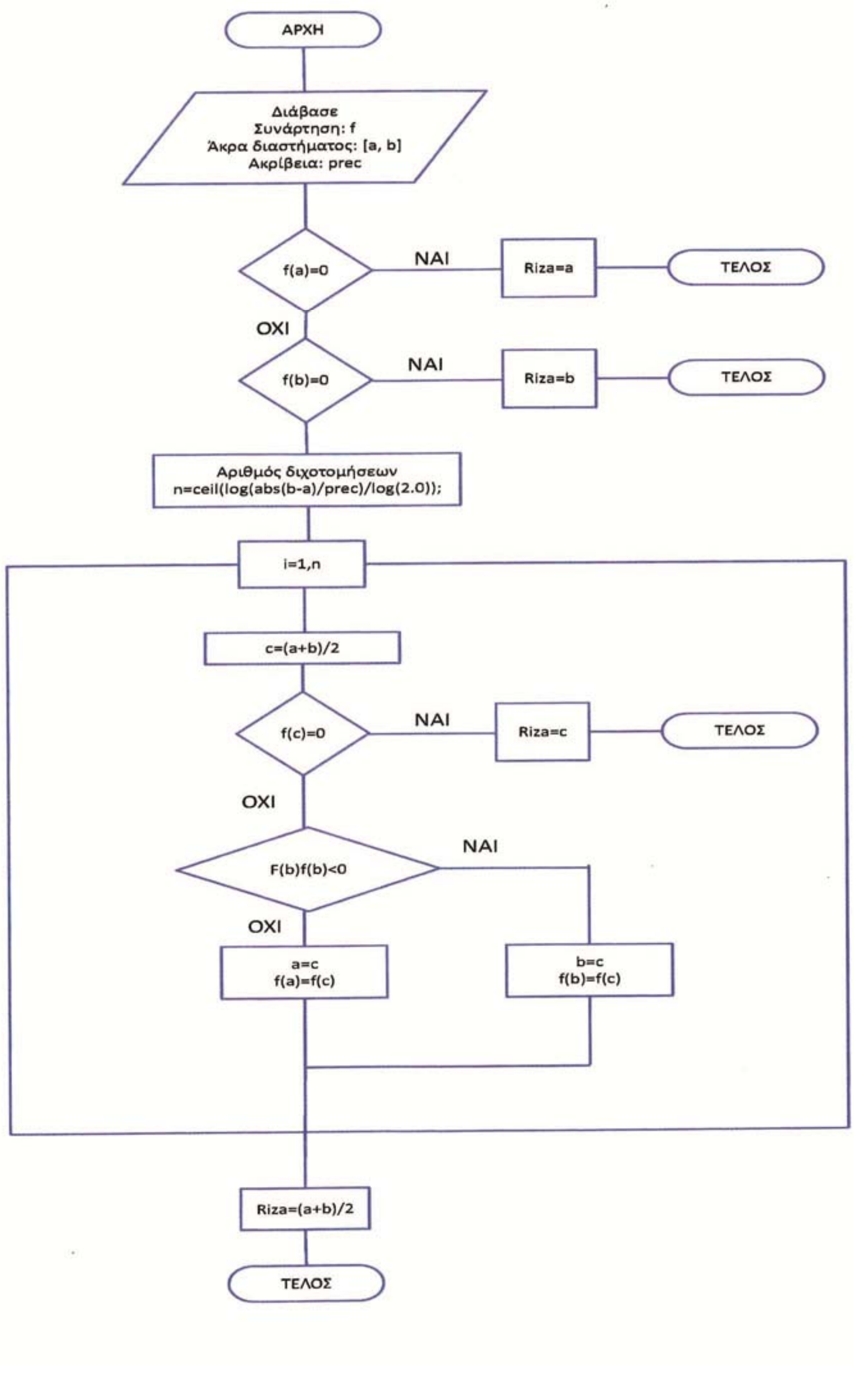
4.2. ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ

Η **μέθοδος διχοτόμησης** (ή **διαστήματος)** αποτελεί την πιο απλή αριθμητική μέθοδο προσδιορισμού μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης f(x)=0, η οποία χρησιμοποιεί το θεώρημα Bolzano σε κάθε βήμα εφαρμογής της για τον εντοπισμό του διαστήματος που περιέχει την προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης f(x)=0. (Αν f συνεχής συνάρτηση στο [α, b] $(f\in C([\alpha,b]))$, τότε για να αποτελεί η x^* μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 πρέπει $f(\alpha)\cdot f(b)<0$). Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο σε κάθε βήμα εφαρμογής της διχοτομούμε το αντίστοιχο διάστημα εντοπισμού της ρίζας της εξίσωσης f(x)=0 (εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano) μέχρις ότου καταλήξουμε σε μία ρίζα, η οποία θα αποτελεί την καλύτερη δυνατή προσέγγιση της ακριβής ρίζας της εξίσωσης f(x)=0 (θα συγκλίνει στην ακριβή ρίζα της εξίσωσης f(x)=0) κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις (κριτήρια τερματισμού της μεθόδου), όπως απεικονίζεται στη συνέχεια.

4.2.1. Γεωμετρική ερμηνεία



4.2.2. Διάγραμμα ροής (βιβλίο Ν. Σαρρής, Θ. Καρακασίδης «Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς»).



4.2.3. Ψευδοκώδικας MatLab (βιβλίο Ν. Σαρρής, Θ. Καρακασίδης «Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς»).

Κώδικας 7.1: Συνάρτηση Matlab για την εύρεση ρίζας με τη μέθοδο της διχοτόμησης.

```
function riza = dihotomisi( f,a,b,prec)
% Finds a root in the interval [a,b]
% of a function f
% with precision prec
% the function can be defined in the command window with handler
% example of use
% f=@(x)=x^3-6*x^2+4
% a=0, b=1, prec=0.01
% call of the routine
% bisect(f,0,1,0.01)

fa=feval(f,a);
if fa==0.0; riza=a;return;end
fb=feval(f,b);
if fb==0.0; riza=b;return;end
if fa*fb>0;
   error('no root in this interval')
end
% n = number of bisections to perform
n=ceil(log(abs(b-a)/prec)/log(2.0));
for i=1:n
    c=0.5*(a+b);
    i,c
    fc=feval(f,c);

    if fc==0.0
        riza=c;return
    end

    if fb*fc<0
        a=c;fa=fc;
    else
        b=c;fb=fc;
    end
end

riza=0.5*(a+b);
```

Παρατηρήσεις

1. Σε κάθε βήμα εφαρμογής (επανάληψη) της μεθόδου διχοτόμησης το διάστημα εντοπισμού της προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης f(x)=0 περιέχεται στο προηγούμενο διάστημα εντοπισμού της ρίζας (προηγούμενο βήμα εφαρμογής της μεθόδου) και έχει μήκος ίσο με το μισό του μήκους του προηγουμένου διαστήματος. Άρα στη n-οστή επανάληψη της μεθόδου η προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 θα βρίσκεται στο διάστημα $\left[\alpha_n, b_n\right]$ το οποίο θα είναι $\frac{\alpha+b}{2^n}$ φορές μικρότερο από το αρχικό διάστημα $\left[\alpha_0, b_0\right]$ $\left(\left[\alpha, b\right]\right)$ εντοπισμού της ρίζας.

2. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1 αν ε είναι η επιθυμητή ακρίβεια υπολογισμού της προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0 και [α, b] το αρχικό διάστημα εντοπισμού της, τότε θα πρέπει να πραγματοποιηθούν $n > \frac{1}{\ell n2}\ell n\frac{|\alpha-b|}{2\varepsilon}$ επαναλήψεις προκειμένου να επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση της μεθόδου.

3. Γενικότερα ισχύει η ακόλουθη πρόταση, η οποία περιγράφει τη σύγκλιση και την εκ προτέρων εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου διχοτόμησης:

- Έστω $f \in C\left(\left[\alpha, b\right]\right)$ με $f(\alpha)\cdot f(b) < 0$ και έχω $\left\{x_n\right\}_n$ η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων της ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0, δηλαδή η ακολουθία των μέσων των διαδοχικών διαστημάτων, η οποία προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου διχοτόμησης. Τότε θα ισχύει είτε $x_n = x^*$, για κάποιο $n \in N^*$, είτε $\lim_{n\to+\infty} x_n = x^*$, όπου x^*ε (α, β) η ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0, έτσι, ώστε

$$\left|x^* - x_n\right| \le \frac{b-\alpha}{2^n}\ , \quad n \in N^*.$$

(Έτσι για δοσμένο $\varepsilon > 0$ θα ισχύει ότι

$$\left|x^* - x_n\right| \le \varepsilon \quad ή \quad \frac{b-\alpha}{2^n} \le \varepsilon \quad ή \quad n \ge \frac{1}{\ell n2}\ell n\frac{|\alpha-b|}{\varepsilon}\ )$$

4. Τα κυριότερα κριτήρια τερματισμού της μεθόδου διχοτόμησης είναι:

(α) $\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ δοσμένο (απόλυτο σφάλμα)

(b) $\frac{\left|x_n - x_{n-1}\right|}{\left|x_n\right|} < \varepsilon$, $x_n \ne 0$ (σχετικό σφάλμα $\to$ καλύτερο έναντι του (α))

(c) $\left|f\left(x_n\right)\right| < \delta^*$, όπου $\delta^* = \frac{1}{2}$ x 10^{-k} (επιθυμητή ακρίβεια ή ανεκτικότητα της μεθόδου k δ.y.)

(d) $\frac{\left|x_n - x_{n-1}\right|}{\left|x_n\right|} \le \frac{1}{2} * 10^{1-t}$ (t ακρίβεια δ.y), όπου x_{n-1}, x_n, $n \in N^*$, δύο διαδοχικές προσεγγίσεις της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$.

5. Δεδομένου ότι το σφάλμα της μεθόδου είναι της τάξης του $\frac{b-\alpha}{2^n}$ (αρκετά μεγάλο), προκύπτει ότι η μέθοδος διχοτόμησης συγκλίνει πολύ αργά σε σχέση με άλλες αριθμητικές μεθόδους επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων. Αυτό σημαίνει ότι το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου (ανάλογο του πλήθους των υπολογισμών) είναι πολύ μεγάλο. Επομένως η μέθοδος της διχοτόμησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις για την εύρεση προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$ (συνέχεια της f, αλλαγή πρόσημου της f στην περιοχή μιας ρίζας). Ως συνέπεια αυτών των προϋποθέσεων η μέθοδος διχοτόμησης δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό προσεγγιστικών ριζών άρτιας πολλαπλότητας. Χρησιμοποιείται συνήθως ως αρχική μέθοδος «γενικού» εντοπισμού του διαστήματος που περιέχει μία ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$. Αξίζει να σημειωθεί ότι η μέθοδος διχοτόμησης χρησιμεύει για τον εντοπισμό μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$ και όχι όλων των ριζών της εξίσωσης στο αρχικό διάστημα εντοπισμού $[\alpha, b]$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί μία προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$ στο διάστημα $[0,1]$ και με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-2}$ εφαρμόζοντας τη μέθοδο διχοτόμησης.

Λύση

Αρχικά έχουμε $f(0) = 1$, $f(1) = -3$. Οπότε επειδή $f(0)\cdot f(1) < 0$ προκύπτει σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano (f συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική συνάρτηση) ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$.

Επιπλέον επειδή $\varepsilon = 10^{-2}$ προκύπτει ότι

$$n > \frac{1}{\ell n2}\cdot \ell n\frac{|\alpha-b|}{\varepsilon} = \frac{1}{\ell n2}\cdot \ell n\frac{|0-1|}{10^{-2}} = \frac{1}{\ell n2}\cdot \ell n\frac{1}{10^{-2}} = \frac{1}{\ell n2}\cdot\left(\ell n1 - \ell n\left(10^{-2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\ell n2}\cdot\left(-\ell n\left(10^{-2}\right)\right) = \frac{1}{\ell n2}\cdot\left(-\ell n\left(0.01\right)\right) = \frac{4.605170186}{0.6931471806} = 6.64$$

Άρα θα απαιτηθούν $n = 7$ διχοτομήσεις του αρχικού διαστήματος $[0, 1]$.

Βήμα 1 (n = 0). Έχουμε $\alpha_0 \equiv \alpha = 0$, $b_0 \equiv b = 1$. Άρα με βάση τα παραπάνω το αρχικό διάστημα εντοπισμού της ρίζας είναι το $[\alpha_0, b_0] = [0, 1]$. Θεωρούμε το μέσο του διαστήματος $x_0 = \frac{\alpha_0 + b_0}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$ με $f(0.5) = (0.5)^3 - 5\,(0.5) + 1 = 0.125 - 2.5 + 1 = -1.375$.

Βήμα 2 (n = 1). Επειδή $f(0)\cdot f(0.5)<0$ το νέο διάστημα εντοπισμού μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης είναι το [α_1, b_1] = [0, 0.5] με μέσο $x_1=\frac{\alpha_1+b_1}{2}=\frac{0+0.5}{2}=0.25$, που αποτελεί μία πρώτη προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0, με

$f(0.25) = (0.25)^3 - 5\,(0.25) + 1 = 0.015625\text{-}1.25\text{+}1\text{=-}0.234375$.

Βήμα 3 (n = 2). Επειδή $f(0)\cdot f(0.25)<0$ το νέο διάστημα εντοπισμού μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης είναι το [α_2, b_2] = [0, 0.25] με μέσο $x_2=\frac{\alpha_2+b_2}{2}=\frac{0+0.25}{2}=0.125$, που αποτελεί μία δεύτερη προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0, με

$f(0.125) = (0.125)^3 - 5\cdot(0.125) + 1 = 0.001953125 - 0.625 + 1 = 0.376953125$

και $|x_2 - x_1| = |0.125 - 0.25| = 0.125 > \varepsilon = 10^{-2} = 0.01$.

Βήμα 4 (n = 3). Επειδή $f(0.125)\cdot f(0.25)<0$ το νέο διάστημα εντοπισμού μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης είναι το [α_3, b_3] = [0.125, 0.25] με μέσο $x_3=\frac{\alpha_3+b_3}{2}=\frac{0.125+0.25}{2}=0.1875$, που αποτελεί μία τρίτη προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0, με

$f(0.1875) = (0.1875)^3 - 5\cdot(0.1875) + 1 = 0.0065917969\text{-}0.9375\text{+}1\text{=}0.0690917969$

και $|x_3 - x_2| = |0.1875 - 0.125| = 0.0625 > \varepsilon = 10^{-2} = 0.01$.

Βήμα 5 (n = 4). Επειδή $f(0.1875)\cdot f(0.25)<0$ το νέο διάστημα εντοπισμού μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης είναι το [α_4, b_4] = [0.1875, 0.25] με μέσο $x_4=\frac{\alpha_4+b_4}{2}=\frac{0.25+0.1875}{2}=0.21875$, που αποτελεί μία τέταρτη κατά σειρά προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0, με

$f(0.21875) = (0.21875)^3 - 5\cdot(0.21875) + 1 = 0.0104675293\text{-}1.09375\text{+}1\text{=-}0.0832824707$

και $|x_4 - x_3| = |0.21875 - 0.1875| = 0.03125 > \varepsilon = 10^{-2} = 0.01$.

Βήμα 6 (n = 5). Επειδή $f(0.1875)\cdot f(0.21875)<0$ το νέο διάστημα εντοπισμού μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης είναι το [α_5, b_5] = [0.1875, 0.21875] με μέσο $x_5=\frac{\alpha_5+b_5}{2}=\frac{0.1875+0.21875}{2}=0.203125$, που αποτελεί μία πέμπτη κατά σειρά προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0, με

$f(0.203125) = (0.203125)^3 - 5\cdot(0.203125) + 1 = 0.0083808899\text{-}1.015625\text{+}1\text{=-}0072441101$

και $|x_5 - x_4| = |0.21875 - 0.203125| = 0.015625 > \varepsilon = 10^{-2} = 0.01$.

Βήμα 7 (n = 6). Επειδή $f(0.1875)\cdot f(0.203125)<0$ το νέο διάστημα εντοπισμού μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης είναι το $[\alpha_6,\ b_6]$ = [0.1875, 0.203125] με μέσο $x_6=\frac{\alpha_6+b_6}{2}=\frac{0.1875+0.203125}{2}=0.1953125$, που αποτελεί μία έκτη κατά σειρά προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης f(x)=0, με

$$\left|x_6-x_5\right| = \left|0.203125-0.1953125\right| = 0.007 < \varepsilon = 10^{-2} = 0.01$$

Άρα μία προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$ στο διάστημα [0, 1] και με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-2}$ είναι η $x_6 = 0.1953125$.

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

(i) Να αποδείξετε ότι έχει μοναδική πραγματική ρίζα ξ στο διάστημα [1, 2].

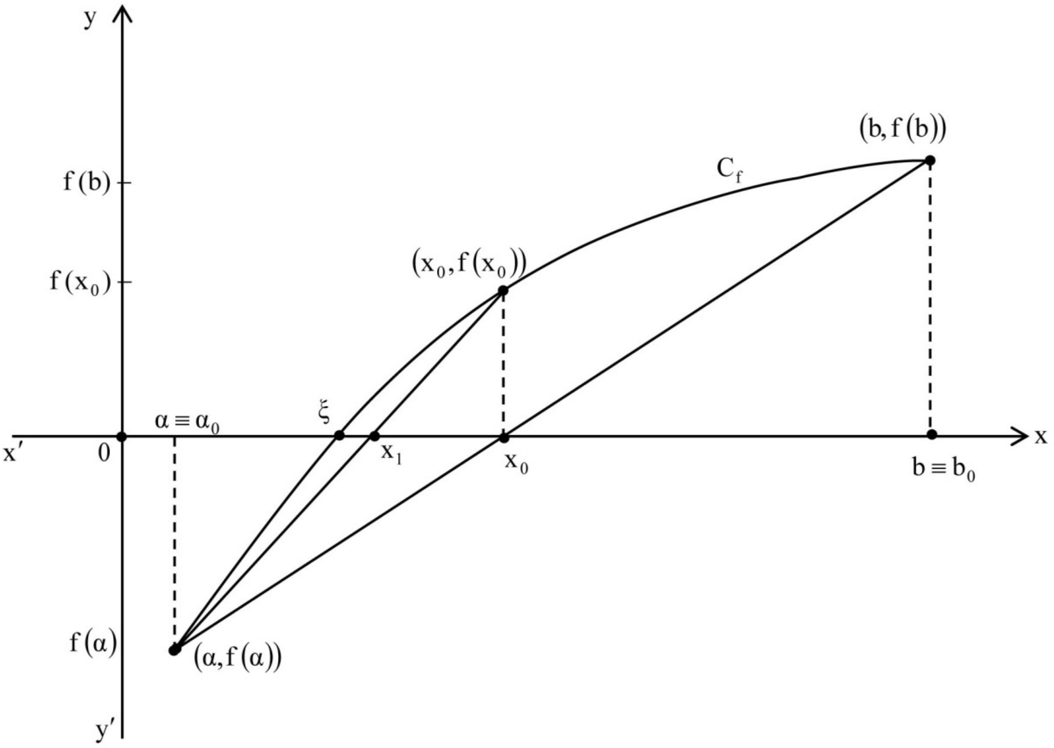
(ii) Να υπολογίσετε την τρίτη προσέγγιση της ξ που δίνει η μέθοδος της διχοτόμησης στο [α, b] = [1, 2].

(iii) Πόσα βήματα της μεθόδου διχοτόμησης απαιτούνται για τον υπολογισμό μιας προσέγγισης της ρίζας ξ που απέχει το πολύ 10^{-5} από την ακριβή ρίζα ξ;

4.3. ΜΕΘΟΔΟΣ REGULA FALSI (ΕΣΦΑΛΜΕΝΗΣ ΘΕΣΗΣ)

Αποτελεί μετεξέλιξη της μεθόδου διχοτόμησης. Ακολουθεί την ίδια φιλοσοφία με τη μέθοδο της διχοτόμησης. Διαφέρει στον τρόπο υπολογισμού του σημείου x_k που προσδιορίζει το διάστημα εντοπισμού της ρίζας της εξίσωσης f(x)=0, το οποίο προκύπτει σε κάθε επανάληψη της μεθόδου. Συγκεκριμένα στην k-στή επανάληψη της μεθόδου Regula Falsi μία προσέγγιση της ρίζας ξ της εξίσωσης f(x) = 0 είναι το σημείο x_k του διαστήματος εντοπισμού $[\alpha_k,\ b_k]$ της προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0 (και όχι το μέσο x_k του διαστήματος $[\alpha_k,\ b_k]$), το οποίο είναι το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(\alpha_k,\ f(\alpha_k))$, $(b_k,\ f(b_k))$ με τον άξονα $x'x$, όπως αυτό απεικονίζεται στη γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου.

4.3.1. Γεωμετρική ερμηνεία



Όπως παρατηρούμε το [α, b] είναι το αρχικό διάστημα εντοπισμού της ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0. Αν $\alpha_0 \equiv \alpha$ και $b_0 \equiv b$, τότε η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(\alpha_0, f(\alpha_0))$, $(b_0, f(b_0))$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{y - f(b_0)}{x - b_0} = \frac{f(b_0) - f(\alpha_0)}{b_0 - \alpha_0}.$$

Δεδομένου ότι η ευθεία τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $(x_0, 0)$ θα ισχύει $x = x_0$ και y=0. Οπότε έχουμε

$$\frac{0 - f(b_0)}{x_0 - b_0} = \frac{f(b_0) - f(\alpha_0)}{b_0 - \alpha_0} \quad \text{ή} \quad x_0 = b_0 - f(b_0) \cdot \frac{b_0 - \alpha_0}{f(b_0) - f(\alpha_0)} ,$$

όπου ο παρονομαστής $f(b_0) - f(\alpha_0)$ είναι πάντοτε ορισμένος δεδομένου ότι $f(\alpha_0).f(b_0) < 0$ και άρα το x_0 είναι πάντοτε ορισμένο.

Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως στη μέθοδο διχοτόμησης προκειμένου να βρεθεί το επόμενο διάστημα $[\alpha_1, b_1]$ στο οποίο εντοπίζεται μία προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης f(x)=0. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο τερματισμού. Με τον τρόπο αυτό παράγεται μια ακολουθία $\{x_n\}_n$ διαδοχικών προσεγγίσεων της ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0 μέσω της επαναληπτικής σχέσης

$$x_k = b_k - f(b_k) \cdot \frac{b_k - \alpha_k}{f(b_k) - f(\alpha_k)} , \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

η οποία συγκλίνει κάτω από ορισμένες συνθήκες με $f(\alpha_k) \cdot f(b_k) < 0$.

Άρα θα ισχύει $f(\alpha_k) \neq f(b_k)$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$. Οπότε το x_k είναι ένα σημείο πάντοτε ορισμένο με $\alpha_k < x_k < b_k$ ή $b_k < x_k < \alpha_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Παράδειγμα

Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1 = 0$, η οποία εμφανίζει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα [0, 1]. Να γίνουν τρεις επαναλήψεις της μεθόδου Regula – Falsi.

Λύση

Επειδή $f(0) \cdot f(1) < 0 \quad (f(0) = 1,\ f(1) = -3)$ έχουμε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano (f συνεχής στο [0, 1] ως πολυωνυμική συνάρτηση) ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [0, 1].

Βήμα 1 (n = 0). Έχουμε $\alpha_0 \equiv \alpha = 0$, $b_0 \equiv b = 1$. Άρα με βάση τα παραπάνω το αρχικό διάστημα εντοπισμού της ρίζας είναι το $[\alpha_0, b_0] = [0, 1]$. Η πρώτη προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης είναι το

$$x_0 = b_0 - f(b_0) \cdot \frac{b_0 - \alpha_0}{f(b_0) - f(\alpha_0)} = 1 - (-3) \cdot \frac{1 - 0}{(-3) - 1} = 0.25$$

με $f(0.25) = (0.25)^3 - 5\,(0.25)^2 + 1 = 0.015625 - 5\,(0.0625) + 1 =$

$= 0.015625 - 0.3125 + 1 = 0.703125.$

Βήμα 2 (n = 1). Επειδή $f(0.25) \cdot f(1) < 0$ το νέο διάστημα εντοπισμού μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης είναι το $[\alpha_1, b_1] = [0.25, 1]$. Η δεύτερη προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης είναι το

$$x_1 = b_1 - f(b_1) \cdot \frac{b_1 - \alpha_1}{f(b_1) - f(\alpha_1)} = 1 - (-3) \cdot \frac{1 - 0.25}{-3 - 0.703125} = 1 + 3\frac{0.75}{-3.703125}$$

$$= 0.3924 \approx 0.40$$

με $f(0.40) = (0.40)^3 - 5\,(0.40)^2 + 1 = 0.064 - 5\ (0.16) + 1 =$

$= 0.064 - 0.8 + 1 = 0.264.$

Βήμα 3 (n = 2). Επειδή $f(0.40) \cdot f(1) < 0$ το νέο διάστημα εντοπισμού μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης είναι το $[\alpha_2, b_2] = [0.40, 1]$. Η τρίτη προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης είναι το

$$x_2 = b_2 - f(b_2) \cdot \frac{b_2 - \alpha_2}{f(b_2) - f(\alpha_2)} = 1 - (-3) \cdot \frac{1 - 0.40}{(-3) - 0.264} = 1 + 3\frac{0.60}{-3.264} \approx 0.45$$

με $f(0.45) = (0.45)^3 - 5\,(0.45)^2 + 1 = 0.091125 - 5\ (0.2025) + 1 =$

$= 0.091125 - 1.0125 + 1 = 0.078625,$

με απόλυτο σφάλμα $|x_2 - x_1| = |0.45 - 0.40| = 0.05$.

Επομένως στην 4η επανάληψη το νέο διάστημα εντοπισμού της ρίζας είναι το $[\alpha_3,\ b_3]$ = [0.45, 1].

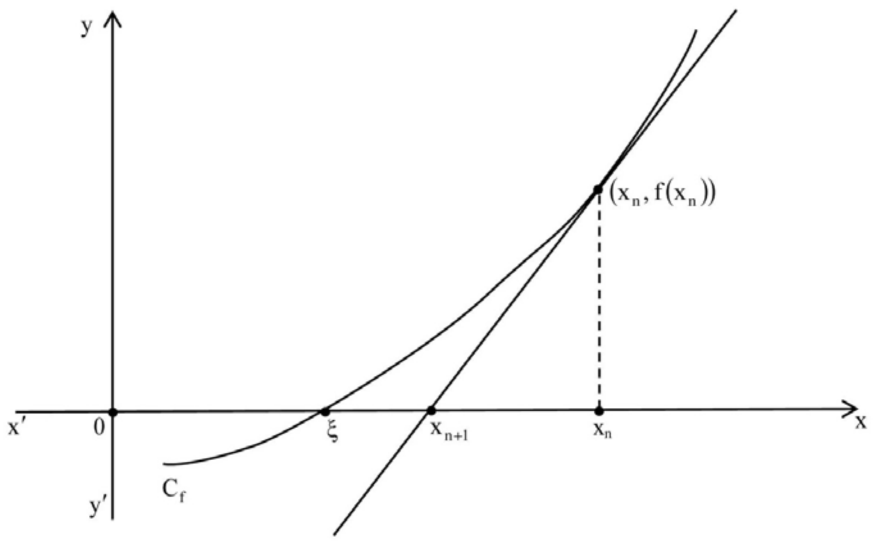
ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$. Να βρεθεί μία προσέγγιση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x)=0$ εφαρμόζοντας τη μέθοδο Regula-Falsi στο $[\alpha, b] = [1, 2]$ με ακρίβεια $\varepsilon=10^{-3}$.

4.4. ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON – RAPHSON (ΓΙΑ ΑΠΛΕΣ ΡΙΖΕΣ)

Είναι η πιο γνωστή επαναληπτική μέθοδος αριθμητικής επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων, η οποία συγκλίνει ταχύτερα από τις παραπάνω παρενθετικές μεθόδους (μέθοδος διχοτόμησης, μέθοδος Regula-Falsi).

4.4.1. Γεωμετρική ερμηνεία



Έστω x_n η προσέγγιση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο n-στό βήμα της μεθόδου Newton-Raphson. Κατασκευάζουμε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_n, f(x_n))$, της οποίας η εξίσωση δίνεται από τη σχέση

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Αν $f'(x_n) \neq 0$ έστω x_{n+1} το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα x΄x (η νέα προσέγγιση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$). Για $y = 0$ και $x = x_{n+1}$ η παραπάνω εξίσωση μετασχηματίζεται στην ακόλουθη σχέση

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)\cdot(x_{n+1} - x_n)$$

$$\rightarrow \quad x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{ή} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

η οποία είναι η ζητούμενη επαναληπτική σχέση της μεθόδου Newton – Raphson υπό την προϋπόθεση ότι $f'(x_n)\neq 0$, για κάθε $n\in N$ και x_0 μία δοσμένη αρχική προσέγγιση της ρίζας ξ της εξίσωσης f(x) = 0.

Αναλυτικότερα η μέθοδος Newton-Raphson βασίζεται στην εφαρμογή του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης y = f(x) σε μία περιοχή του σημείου $\xi\in[\alpha, b]$ της ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0 υπό την προϋπόθεση ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του ξ. Ετσι αν $f(x)\in C^2([\alpha, b])$ και $x_n\in[\alpha, b]$ μία προσέγγιση της ρίζας ξ της εξίσωσης f(x) = 0 έτσι, ώστε $f'(x_n)\neq 0$ με $|x_n - \xi|$ αρκετά μικρό απόλυτο σφάλμα, τότε το ανάπτυγμα Taylor μέχρι και τον όρο 2ης τάξης (2ου βαθμού πολυώνυμο Taylor) της f(x) γύρω από το x_n δίνεται από τη σχέση

$$f(x)=f(x_n)+(x-x_n)\cdot f'(x_n)+\frac{(x-x_n)^2}{2!}f''(\xi(x_n)),$$

όπου το $\xi\ (x_n)$ βρίσκεται στο διάστημα $[x, x_n]$. Για $x = \xi$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$0=f(\xi)=f(x_n)+(\xi-x_n)\cdot f'(x_n)+\frac{(\xi-x_n)^2}{2!}f''(\xi(x_n))$$

Δεδομένου ότι από την υπόθεση το $|x_n - \xi|$ είναι αρκετά μικρό προκύπτει ότι και η ποσότητα $(\xi - x_n)^2$ είναι πάρα πολύ μικρή. Άρα μπορεί να απαλειφθεί και επομένως έχουμε

$$0\approx f(x_n) + (\xi - x_n)\cdot f'(x_n)$$

$$\rightarrow \quad \xi\approx x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ή \quad \xi\approx x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

γεγονός που σημαίνει ότι το σημείο x_{n+1} είναι καλύτερη προσέγγιση της ρίζας ξ της εξίσωσης f(x) = 0 από την προσέγγιση x_n.

Η μέθοδος τερματίζεται όταν σε κάποιο, έστω k, βήμα επανάληψης της μεθόδου για δοσμένη $tol \equiv \varepsilon > 0$, ικανοποιείται ένα από τα παρακάτω κριτήρια:

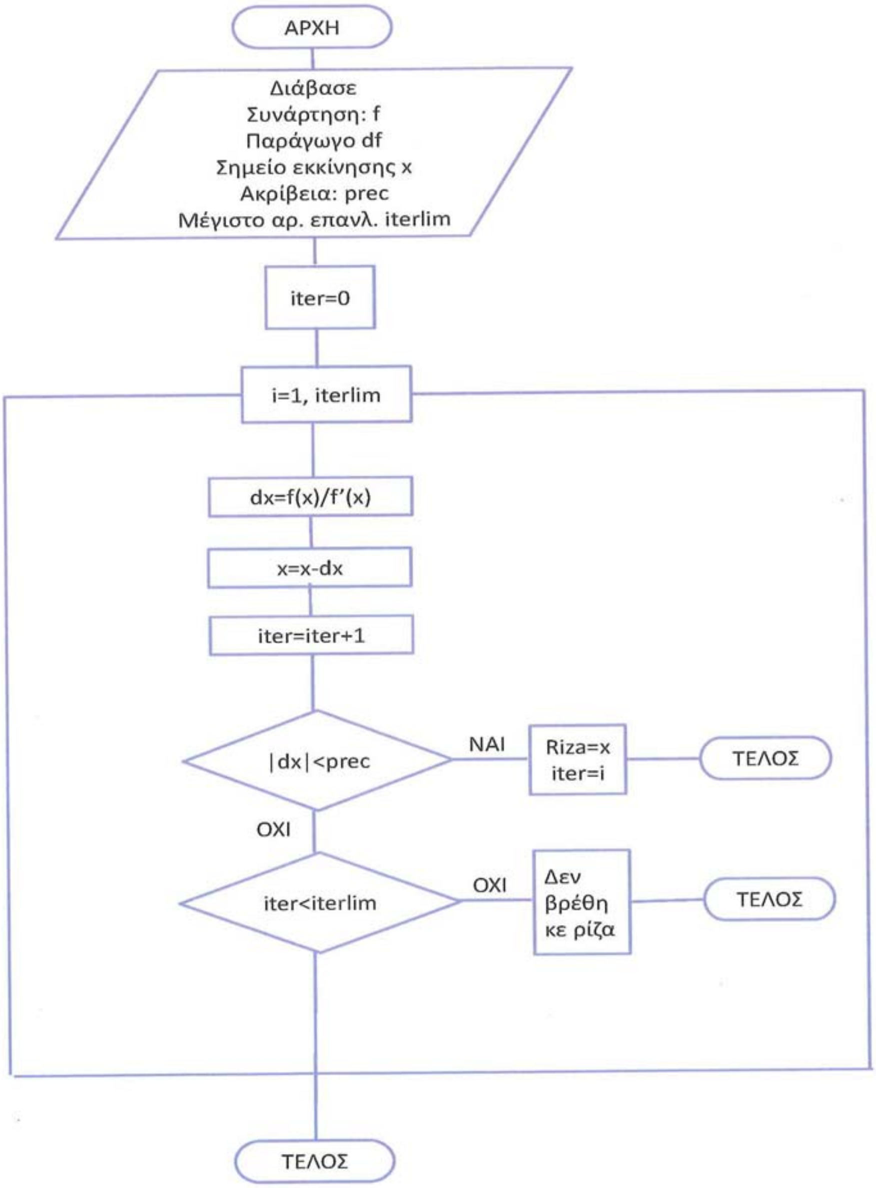
(i) $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$

(ii) $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < \varepsilon \ , \ x_k \neq 0$

(iii) $f(x_k) < \varepsilon$,

όπου x_{k-1}, x_k δύο διαδοχικές προσεγγίσεις της ρίζας ξ της εξίσωσης f(x) = 0 μέσω της μεθόδου Newton - Raphson.

4.4.2. Διάγραμμα ροής (βιβλίο Ν. Σαρρής, Θ. Καρακασίδης «Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς»)



Σχήμα 7.5.: Διάγραμμα ροής της μεθόδου Newton-Raphson.

4.4.3. Ψευδοκώδικας MatLab (βιβλίο Ν. Σαρρής, Θ. Καρακασίδης «Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς»)

Κώδικας 7.2: Συνάρτηση Matlab για τον υπολογισμό ρίζας εξίσωσης με τη μέθοδο Newton-Raphson.

```
function [ riza_iter ] = newton_raphson(f, df, x, prec, iterlim )
% finds a root using the newton raphson methdd
% f the function to find the root
% df the derivative of the function
% x the initial guess to start the algorithm
% prec precision for the calculation
% iterlim the number om maximum iterations
% example
% >> f=@(x)x^3-6*x+4
% >> df=@(x)3*x^2-6
% >> newton_raphson(f,df,0.5,0.01,20)

iter=0;
for i=1:iterlim
    dx=feval(f,x)/feval(df,x);
    x=x-dx
    iter=iter+1
    if abs(dx)< prec
        riza=x;
        iter=i;
        return
    end
    if iter==iterlim
       error('no root found')
    end
 nd
```

4.4.4. Σύγκλιση μεθόδου Newton - Raphson

Η σύγκλιση ή μη της μεθόδου Newton-Raphson εξαρτάται από την επιλογή της αρχικής προσέγγισης x_0 καθώς και από το αν η συνάρτηση f είναι ομαλή ή όχι σε μία περιοχή της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$. Στην περίπτωση μηδενισμού της πρώτης παραγώγου της f σε κάποια προσέγγιση x_k ή στην περίπτωση που η προσέγγιση x_k βρίσκεται κοντά σε σημείο καμπής δεν είναι δυνατόν να βρεθεί η επόμενη προσέγγιση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ μέσω της μεθόδου Newton-Raphson.

Έτσι αν η αρχική προσέγγιση x_0 βρίσκεται αρκετά κοντά στη ρίζα ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$, τότε η μέθοδος Newton–Raphson έχει ταχύτατη σύγκλιση σύμφωνα με το ακόλουθο Θεώρημα τοπικής τετραγωνικής σύγκλισης της μεθόδου.

Θεώρημα. Έστω ξ μία απλή ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 με $f'\{\xi\} \neq 0$ και έστω επίσης ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε μία περιοχή της ρίζας ξ. Τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, b] με μέσο την ξ έτσι, ώστε για κάθε $x_0 \in [α, b]$ η ακολουθία $\{x_n\}_n$ των διαδοχικών προσεγγίσεων της ρίζας ξ της εξίσωσης f(x) = 0, η οποία παράγεται μέσω της μεθόδου Newton - Raphson, συγκλίνει στην ξ. Επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1} - \xi}{(x_n - \xi)^2} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}$$

γεγονός που σημαίνει ότι η σύγκλιση είναι τουλάχιστον τετραγωνική. Ειδικότερα αν $f''\{\xi\} \neq 0$ η τάξη σύγκλισης της μεθόδου είναι ακριβώς δύο.

Παρατηρήσεις

1. Το γεγονός ότι η σύγκλιση της μεθόδου Newton–Raphson είναι ταχύτατη στην περίπτωση που η αρχική προσέγγιση x_0 ή η προσέγγιση x_n, για κάποιο n, ανήκει στο κλειστό διάστημα [α, b], το οποίο δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων ή είναι πολύ μικρό, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος Newton–Raphson σπάνια χρησιμοποιείται μόνη της. Συνήθως χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με άλλες παρενθετικές μεθόδους π.χ. με τη μέθοδο διχοτόμησης, η οποία εφαρμόζεται αρχικά για την εύρεση του διαστήματος εντοπισμού της ρίζας της εξίσωσης άρα και της αρχικής προσέγγισης x_0.

2. Επειδή δεν είναι εύκολο στην πράξη να προσδιοριστεί η περιοχή πλησιέστερα της ρίζας έτσι, ώστε για οποιοδήποτε σημείο x_0 αυτής της περιοχής η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων της ρίζας της εξίσωσης μέσω της μεθόδου Newton-Raphson να συγκλίνει, συνήθως ως αρχική προσέγγιση x_0 επιλέγουμε ένα σημείο κοντά στη ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 που θέλουμε να προσεγγίσουμε (η εύρεση της οποίας γίνεται μέσω της κατασκευής της γραφικής παράστασης της f).

3. Η επιλογή του σημείου x_0 εξαρτάται από το $M = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right|$, όπου ξ η ακριβής ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0, δεδομένου ότι πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $|\xi - x_0| < \frac{1}{M} = 2 \cdot \left|\frac{f'(\xi)}{f''(\xi)}\right|$.

Αυτό σημαίνει ότι αν το M είναι αρκετά μεγάλο, τότε το σημείο x_0 επιλέγεται πολύ κοντά στη ρίζα ξ έτσι, ώστε η μέθοδος Newton – Raphson να συγκλίνει.

4. Η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει ταχύτατα υπό τον όρο ότι ικανοποιούνται οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

(i) η αρχική προσέγγιση x_0 βρίσκεται κοντά στη ρίζα ξ της εξίσωσης f(x) = 0,

(ii) η ξ είναι απλή ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0,

(iii) η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή της ξ,

(iv) είναι γνωστή (ή μπορεί να υπολογιστεί) η τιμή $f'(x_n)$, για κάθε n.

5. Για τον προσδιορισμό μιας ρίζας ξ πολλαπλότητας $k > 1$ με τη μέθοδο Newton – Raphson αποδεικνύεται ότι η ακολουθία $\{x_n\}_n$ των διαδοχικών προσεγγίσεων, που παράγεται μέσω της ακόλουθης επαναληπτικής σχέσης

$$x_{n+1} = x_n - k \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

θα συγκλίνει τουλάχιστον τετραγωνικά στη ρίζα ξ για κατάλληλα επιλεγμένη αρχική προσέγγιση x_0.

6. Ειδικότερα στην περίπτωση που η f έχει συγκεκριμένες ιδιότητες (μονοτονία, κυρτότητα), η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ συγκλίνει ακόμη και στην περίπτωση που η αρχική προσέγγιση x_0 δεν είναι κοντά στη ρίζα ξ, όπως περιγράφεται από το ακόλουθο

Θεώρημα. Αν η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη για $x \geq \alpha$, αν $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, για κάθε $x \geq \alpha$ και αν για $f(\alpha) < 0$ υπάρχει $b>\alpha$ έτσι, ώστε $f(b) > 0$, τότε η f έχει μοναδική πραγματική απλή ρίζα ξ στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$ και για οποιοδήποτε $x_0 \geq \alpha$ η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων $\{x_n\}_n$, που παράγεται μέσω της μεθόδου Newton – Raphson, συγκλίνει στην ξ.

Αναφορικά με τη σύγκλιση της μεθόδου Newton – Raphson ισχύει επίσης το ακόλουθο

Θεώρημα (γενικής σύγκλισης)

Αν **(i)** $f(x) \in C^2([\alpha, b])$,

(ii) $f(\alpha) \cdot f(b) < 0$ (ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της f(x) στο [α, b]),

(iii) $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, b]$ (το [α, b] περιέχει ακριβώς μία ρίζα της f(x)=0),

(iv) Η $f''(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α, b] (η f δεν εμφανίζει σημείο (ή σημεία) καμπής στο [α, b]),

(vi) $\max\left\{\left|\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right|, \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\right\} \leq b - \alpha$,

τότε για κάθε $x_0 \in [\alpha, b]$ η ακολουθία $\{x_n\}_n$ των διαδοχικών προσεγγίσεων της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ μέσω της μεθόδου Newton – Raphson συγκλίνει τετραγωνικά στη μοναδική ρίζα ξ της f(x) στο [α, b].

Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x - 1, \quad x \in [1, 2]$.

(i) Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της μεθόδου Newton – Raphson.

(ii) Για ένα κατάλληλα επιλεγμένο σημείο x_0 να γίνουν δύο επαναλήψεις της μεθόδου. Να βρεθεί η ακρίβεια σε κάθε επανάληψη της μεθόδου.

Λύση

(i) Εφαρμόζοντας το θεώρημα γενικής σύγκλισης έχουμε ότι:

- $f(x) \in C^2([1,2])$
- $f(1) = -2, \quad f(2) = 3 \quad \rightarrow \quad f(1)\ \ f(2) < 0$
- $f'(x) = 3x^2 - 2 \neq 0, \;$ για κάθε $x \in [1, 2]$
- $f''(x) = 6x > 0, \;$ για κάθε $x \in [1, 2]$
- $\max\left\{\left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right|, \left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right|\right\} = \max\left\{\left|\frac{-2}{1}\right|, \left|\frac{3}{10}\right|\right\} = 2 > (2-1) = 1.$

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα γενικής σύγκλισης η μέθοδος Newton – Raphson δεν συγκλίνει στο διάστημα [1, 2]. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο διχοτόμησης στο διάστημα [1, 2] θεωρούμε το μέσο $x' = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ για το οποίο ισχύει ότι

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{27}{8} - \frac{6}{2} - 1 = \frac{27-24-8}{8} = -\frac{5}{8} < 0.$$

Επειδή

$$f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot f(2) < 0 \text{ και } \max\left\{\left|\frac{f(3/2)}{f'(3/2)}\right|, \left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right|\right\} = \max\left\{\left|\frac{-5/8}{19/4}\right|, \left|\frac{3}{10}\right|\right\} = \frac{3}{10} < (2-1) = 1$$

προκύπτει σύμφωνα με το Θεώρημα γενικής σύγκλισης ότι η μέθοδος Newton – Raphson συγκλίνει για κάθε $x_0 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

(ii) Για $x_0 = 1.75$ έχουμε ότι

Βήμα 1 (n=0). Έχουμε $f(x_0) = f(1.75) = (1.75)^3 - 2 \cdot (1.75) - 1 = 5.36 - 3.5 - 1 = 0.86$, $f'(1.75) = 3\,(1.75)^2 - 2 = 7.19$. Άρα μία προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.75 - \frac{0.86}{7.19} = 1.63 \quad \text{με} \quad |x_1 - x_0| = |1.63 - 1.75| = 0.12.$$

Βήμα 2 (n=1). Έχουμε $f(x_1) = f(1.63) = (1.63)^3 - 2 \cdot (1.63) - 1 = 4.33 - 3.26 - 1 = 0.07$, $f'(x_1) = f'(1.63) = 3\cdot(1.63)^2 - 2 = 7.97 - 2 = 5.97$. Άρα μία προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.63 - \frac{0.07}{5.97} = 1.62 \quad \text{με} \quad |x_2 - x_1| = |1.63 - 1.62| = 0.01.$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - k, \;\; x > 0, \;$ k δοσμένος θετικός αριθμός.

(i) Να δείξετε ότι η μέθοδος Newton – Raphson συγκλίνει στη $\sqrt{k}$ για κάθε $x_0>0$.

(ii) Να βρεθεί η τετραγωνική ρίζα του 2 με τη μέθοδο Newton – Raphson και με ακρίβεια $\in = 10^{-3}$ $(x_0 = 1.5)$

Λύση

(i) Για κάθε διάστημα [α, b] με $0 < \alpha < \sqrt{k} < b$ έχουμε ότι:

- $f \in C^2([\alpha, b])$
- $f(\alpha) = \alpha^2 - k < 0$ $\quad(0 < \alpha < \sqrt{k} \to \alpha^2 < k \to \alpha^2 - k < 0)$

  $f(b) = b^2 - k > 0$ $\quad(0 < \sqrt{k} < b \to k < b^2 \to b^2 - k > 0)$

  $\to f(\alpha) \cdot f(b) < 0$
- $f'(x) = 2x \neq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, b]$
- $f''(x) = 2$, για κάθε $x \in [\alpha, b]$
- $\max\left\{\left|\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right|, \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\right\} = \max\left\{\left|\frac{\alpha^2 - k}{2\alpha}\right|, \left|\frac{b^2 - k}{2b}\right|\right\}$ θα πρέπει

  $\frac{|\alpha^2 - k|}{2\alpha} \le b - \alpha \quad \left(\text{ή} \quad \frac{|b^2 - k|}{2b} \le b - \alpha\right)$ σχέση η οποία ικανοποιείται για

  $b \ge \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{k}{\alpha}\right)$. Άρα με βάση το Θεώρημα γενικής σύγκλισης η μέθοδος Newton – Raphson συγκλίνει στη $\sqrt{k}$, για κάθε $x_0 > 0$.

(ii) Για $k = 2$ θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = x^2 - 2 = 0$ και εφαρμόζουμε τη μέθοδο Newton – Raphson για $x_0 = 1.5$. Επομένως έχουμε:

Βήμα 1 (n=0). $f(x_0) = f(1.5) = (1.5)^2 - 2 = 0.25$, $f'(x_0) = f'(1.5) = 2 \cdot (1.5) = 3$. Οπότε μία πρώτη προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας του 2 θα είναι

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.5 - \frac{0.25}{3} = 1.4167$$

με $|x_1 - x_0| = |1.4167 - 1.5| = 0.08 > \varepsilon = 10^{-3} = 0.001$.

Βήμα 2 (n=1). $f(x_1) = (1.4167)^2 - 2 = 0.007$, $f'(x_1) = f'(1.4167) = 2 \cdot (1.4167) = 2.8334$. Άρα μία 2η εκτίμηση της τετραγωνικής ρίζας του 2 θα είναι

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.4167 - \frac{0.007}{2.8334} = 1.4142$$

με $|x_2 - x_1| = |1.4142 - 1.4167| = 0.002 > \varepsilon = 10^{-3} = 0.001$.

Βήμα 3 (n=2). $f(x_2) = (1.4142)^2 - 2 = 0.000038$, $f'(x_2) = f'(1.4142) = 2 \cdot (1.4142) = 2.8284$. Άρα μία 3η εκτίμηση της τετραγωνικής ρίζας του 2 θα είναι

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.4142 - \frac{0.000038}{2.8284} = 1.414187$$

με $|x_3 - x_2| = |1.4142 - 1.414187| = 0.000013 < \varepsilon = 10^{-3} = 0.001$.

Άρα η $x_3 = 1.414187$ θα αποτελεί μία προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$, δηλαδή μία προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας του 2 με τη μέθοδο Newton – Raphson για $x_0 = 1.5$ και ακρίβεια $\in = 10^{-3}$.

(Για $x_0 = 1.21$ τι παρατηρείτε;)

Ασκήσεις

1. Δίνεται η εξίσωση $\sin x = e^{-x}$. Να βρεθεί μία προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton - Raphson με $x_0 = 0.75$ και ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-4}$ (x σε ακτίνια).

2. Να βρεθεί μία προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 2x^2 - x^3 + \sin x$ στο διάστημα $[1.5, 3]$ με τη μέθοδο Newton - Raphson και με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-4}$.

4.5 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΕΜΝΟΥΣΑΣ

Γενικά η μέθοδος Newton - Raphson έχει μεγαλύτερη ταχύτητα σύγκλισης από τις παρενθετικές μεθόδους (μέθοδος διχοτόμησης, μέθοδος Regula Falsi) δεδομένου ότι για τον υπολογισμό μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης μέσω αυτής της μεθόδου απαιτείται μικρός αριθμός επαναλήψεων. Εντούτοις μειονεκτεί στο γεγονός ότι απαιτείται σωστή επιλογή της αρχικής προσέγγισης x_0 καθώς και υπολογισμός της $f'(x_n)$ για κάθε n (βήμα επανάληψης μεθόδου), υπολογισμός που γίνεται ιδιαίτερα δύσκολος όταν η συνάρτηση f είναι σύνθετη.

Η αντικατάσταση της $f'(x_n)$ με το πηλίκο $\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ (χρησιμοποιώντας προς τα πίσω διαφορές) οδηγεί στην ακόλουθη επαναληπτική σχέση

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\cdot\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} ,$$

η οποία είναι μία καλή προσέγγιση της αντίστοιχης επαναληπτικής σχέσης της μεθόδου Newton - Raphson όταν οι προσεγγίσεις x_{n+1}, x_n είναι αρκετά κοντά, όπως απεικονίζεται και στη γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου.

Η μέθοδος που προκύπτει καλείται μέθοδος τέμνουσας και αποτελεί την ενδιάμεση λύση μεταξύ των παρενθετικών μεθόδων και της μεθόδου Newton - Raphson.

Παρατηρήσεις

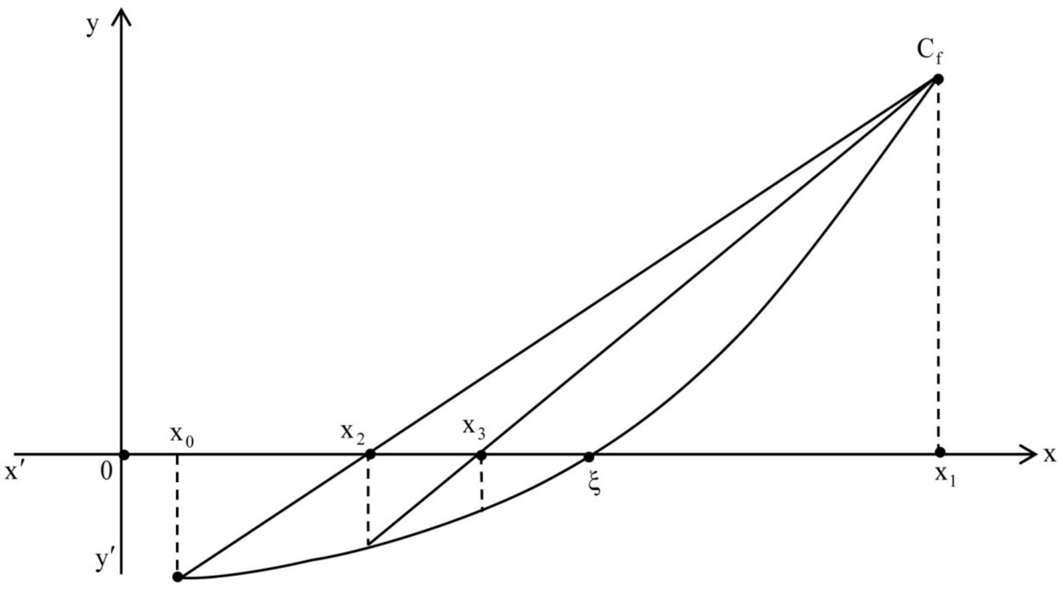
1. Η μέθοδος της τέμνουσας απαιτεί μικρότερο υπολογιστικό έργο έναντι της μεθόδου Newton - Raphson, διότι δεν είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της παραγώγου σε κάθε βήμα επανάληψης της μεθόδου αν και χρειάζονται περισσότερες επαναλήψεις σε σχέση με τη μέθοδο Newton - Raphson για να συγκλίνει και αυτό γιατί η ταχύτητα σύγκλισής της είναι καλύτερη από γραμμική αλλά όχι τετραγωνική.

2. Για την εφαρμογή της μεθόδου της τέμνουσας απαιτούνται δύο αρχικές τιμές (αρχικές προσεγγίσεις) x_0, x_1 κατάλληλα επιλεγμένες.

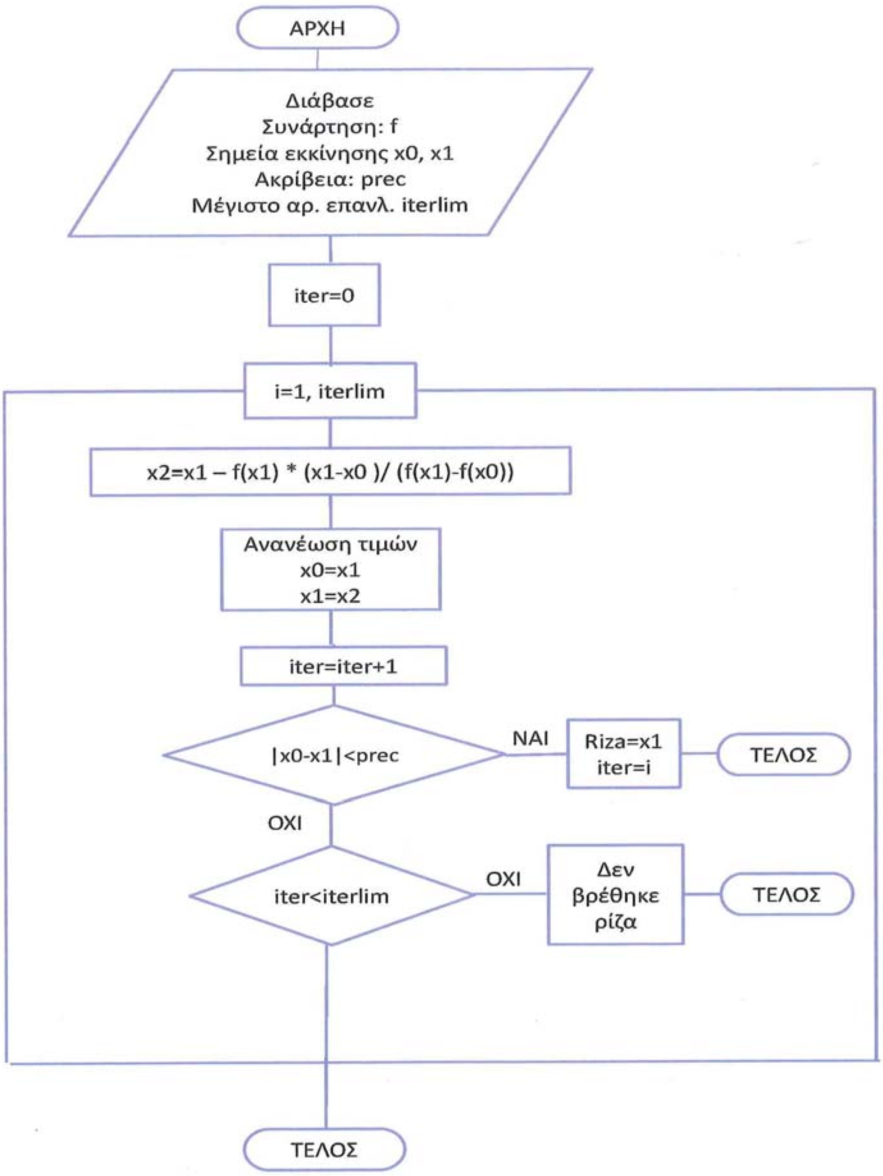
3. Αποδεικνύεται ότι η μέθοδος της τέμνουσας συγκλίνει σε απλές ρίζες με τάξη σύγκλισης ίση με $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, όπως προκύπτει από το ακόλουθο θεώρημα:

- Αν ξ ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και αν $[\alpha, b] \subseteq R$ με $\xi \in C^2([\alpha, b])$, $f'(\xi) \neq 0$ και $f''(\xi) \neq 0$, τότε υπάρχει ένα διάστημα I το οποίο περιέχει την ξ έτσι, ώστε για x_0, $x_1 \in I$ με $x_0 \neq x_1$ η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων $\{x_n\}_n$ της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ που παράγεται με τη μέθοδο της τέμνουσας με αρχικές τιμές x_0, x_1 είναι καλά ορισμένη και συγκλίνει στην ξ με τάξη σύγκλισης ίση με $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4.5.1. Γεωμετρική ερμηνεία



4.5.2. Διάγραμμα ροής (βιβλίο Ν. Σαρρής, Θ. Καρακασίδης «Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς»)



Σχήμα 7.9.: Διάγραμμα ροής της μεθόδου της τέμνουσας.

4.5.3. Ψευδοκώδικας MatLab (βιβλίο Ν. Σαρρής, Θ. Καρακασίδης «Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς»)

Κώδικας 7.3: Συνάρτηση Matlab για τον υπολογισμό της ρίζας μιας συνάρτησης με τη μέθοδο της τέμνουσας.

```
function [ riza_iter ] = temnousa(f, x0, x1, prec, iterlim )
% finds a root using the newton secant method
% f the function to find the root
% % x1, x2 the two initial points to start the algorithm
% prec precision for the calculation
% iterlim the number om maximum iterations
% example
% >> f=@(x)x^3-6*x+4
% >> newton_raphson(f,df,0.5,0.01,30)

iter=0;

for i=1:iterlim
  iter=iter+1;
  f0=feval(f,x0);
  f1=feval(f,x1);
  x2=x1-f1*(x1-x0)/(f1-f0);
  x0=x1;
  x1=x2;

  if abs(x1-x0)< prec
    iter=i
    riza=x1
    return
  end

  if iter==iterlim
    error('no root found')
  end

end
```

Παράδειγμα

Να βρεθεί η τετραγωνική ρίζα του 2 με η μέθοδο της τέμνουσας και με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-3}$.

Λύση

Για την εφαρμογή της μεθόδου της τέμνουσας στην εύρεση μιας προσεγγιστικής ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 2 = 0$ απαιτούνται δύο αρχικές προσεγγίσεις x_0, x_1.

Έχουμε για $x_0 = 1.5$ και $x_1 = 1.21$ με $f(1.5) = 1.5^2 - 2 = 0.25$ και $f(1.21) = 1.21^2 - 2 = -0.54$ ότι $f(x_0) \cdot f(x_1) = f(1.5) \cdot f(1.21) < 0$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano (f συνεχής στο [1.21, 1.5] ως πολυωνυμική συνάρτηση η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [1.21, 1.5].

Βήμα 1. Οπότε μία προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 2 = 0$ θα είναι

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\cdot\frac{x_1 - x_0}{f(x_1)-f(x_0)} = 1.21 - (-0.54)\cdot\frac{1.21-1.5}{(-0.54)-0.25} = 1.408$$

με $|x_2 - x_1| = |1.408 - 1.21| = 0.198 > \varepsilon = 10^{-3}$.

Βήμα 2. Έχουμε $f(x_2) = f(1.408) = 1.408^2 - 2 = -0.018$. Οπότε μία προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 2 = 0$ θα είναι

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\cdot\frac{x_2 - x_1}{f(x_2)-f(x_1)} = 1.408 - (-0.018)\cdot\frac{1.408-1.21}{(-0.018)-(-0.54)} = 1.4148$$

με $|x_3 - x_2| = |1.4148 - 1.408| = 0.0068 > \varepsilon = 10^{-3}$.

Βήμα 3. Έχουμε $f(x_3) = f(1.4148) = 1.4148^2 - 2 = 0.0017$. Οπότε μία προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 2 = 0$ θα είναι

$$x_4 = x_3 - f(x_3)\cdot\frac{x_3 - x_2}{f(x_3)-f(x_2)} = 1.4148 - 0.0017\cdot\frac{1.4148-1.408}{0.0017-(-0.018)} = 1.4142$$

με $|x_4 - x_3| = |1.4142 - 1.4148| = 0.0006 < \varepsilon = 10^{-3}$

Άρα η ζητούμενη προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 2 = 0$ με τη μέθοδο της τέμνουσας και με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-3}$ είναι η $x_3 = 1.4142$.

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος Newton – Raphson χρησιμοποιεί το ίδιο πλήθος επαναλήψεων (n=3) για $x_0 = 1.5$ και $\varepsilon = 10^{-3}$ και δίνει την ίδια προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας του 2 ως 3η και όχι ως 4η κατά σειρά προσέγγιση (η ακριβής ρίζα είναι η $\xi = \sqrt{2} = 1.4142135624$ με ακρίβεια t = 10 δ.ψ.).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της τέμνουσας να βρεθεί μία προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης $\sin x = x$ με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-5}$ και αρχικές προσεγγίσεις $x_0 = 0.5$, $x_1 = \pi/4$ (x σε ακτίνια).

2. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της τέμνουσας να βρεθεί μία εκτίμηση της ρίζας της εξίσωσης $x^3 = 6$ με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-4}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί μία προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης $\sin x = e^{-x}$ στο διάστημα [0, 1] και με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-3}$ εφαρμόζοντας

(i) τη μέθοδο διχοτόμησης,

(ii) τη μέθοδο Regula Falsi,

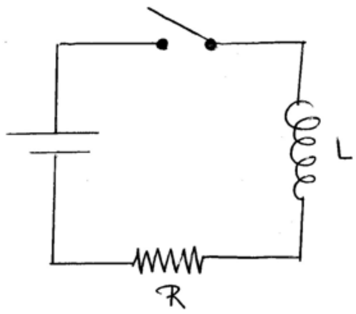
(iii) τη μέθοδο Newton – Raphson,

(iv) τη μέθοδο της τέμνουσας.

Τι παρατηρείτε;

2. Μία πηγή με ΗΕΔ = Ε = 70 V συνδέεται με σειρά με αντίσταση R = 20Ω και πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L = 4 H. Ο διακόπτης κλείνει όταν t = 0. Η μεταβολή του ρεύματος ως συνάρτηση του χρόνου περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



Να βρεθεί σε πόσο χρόνο το ρεύμα θα έχει την τιμή I = 1.25 A.