ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΟΡΙΖΟΥΣΑ-ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ-ΘΕΩΡΙΑ

2.1. Ορίζουσα Τετραγωνικού Πίνακα nxn

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) n=2. Θεωρούμε τον τετραγωνικό πίνακα 2x2 $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$. Τότε καλούμε **ορίζουσα του πίνακα** A = (α_{ij}), i,j = 1,2 και συμβολίζουμε με det(A) (determinant του A) τον πραγματικό αριθμό

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}.$$ Καλείται και **ορίζουσα 2ης τάξης.**

(-) (+)

(ii) n=3. Θεωρούμε τον τετραγωνικό πίνακα 3x3 $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$. Τότε καλούμε **ορίζουσα του πίνακα** A = (α_{ij}), i, j = 1, 2, 3 τον πραγματικό αριθμό που προκύπτει αν διαγράψουμε τη i- γραμμή και τη j- στήλη του αντίστοιχου στοιχείου α_{ij} του πίνακα A, i,j = 1,2,3 ως εξής:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \alpha_{11} \cdot E_{11} + \alpha_{12} \cdot E_{12} + \alpha_{13} \cdot E_{13}\ , \text{ όπου}$$

$$E_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det A_{11}\ ,\quad E_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det A_{12}\ ,\quad E_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det A_{13} \quad \text{με}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

Καλείται δε και **ορίζουσα 3ης τάξης.**

(Επιλέγουμε το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα A ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής. Μπορούμε να επιλέξουμε το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα A ως προς τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής και στήλης).

Άρα

$$\det(A) = \alpha_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det A_{11} + \alpha_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det A_{12} + \alpha_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det A_{13}$$

$$= \alpha_{11} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

(-) (+) (-) (+) (-) (+)

$$= \alpha_{11} \cdot (\alpha_{22} \cdot \alpha_{23} - \alpha_{23} \cdot \alpha_{32}) - \alpha_{12} \cdot (\alpha_{21} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{23} \cdot \alpha_{31}) + \alpha_{13} \cdot (\alpha_{21} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{22} \cdot \alpha_{31}) =$$

$$= \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{11} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31}.$$

Ειδικότερα η ορίζουσα 3ης τάξης (και μόνο αυτή) μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας τον κανόνα του Sarrus ως εξής:

$$\det A = \left|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{matrix} =$$

(-) (-) (-) (+) (+) (+)

$$= \alpha_{11}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{33} + \alpha_{12}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{31} + \alpha_{13}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{32} - \alpha_{12}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{33} - \alpha_{11}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{32} - \alpha_{13}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{31}$$

Γενικά για κάθε $n \geq 2$ η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2}\cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$ υπολογίζεται αναδρομικά μέσω των υποοριζουσών (n-1)-τάξης.

Για παράδειγμα επιλέγοντας την 1η γραμμή το ανάπτυγμα της ορίζουσας n-τάξης του πίνακα $A = (\alpha_{ij})$, i, j = 1,2,..., n είναι

$$\det(A) = \alpha_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\det A_{11} + \alpha_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\det A_{12} + ... + \alpha_{1n}\,(-1)^{1+n}\cdot\det A_{1n},$$

ενώ γενικά ως προς τα στοιχεία της i- γραμμής, i = 1, 2, ..., n είναι

$\det(A) = \alpha_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot\det A_{i1} + \alpha_{i2}\cdot(-1)^{i+2}\cdot\det A_{i2} + ... + \alpha_{in}\,(-1)^{i+n}\cdot\det A_{in}$ (Ανάπτυγμα κατά Laplace)

Ο αριθμός $E_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot\det A_{ij}$, όπου A_{ij}, για κάθε i,j = 1,2,...,n, είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον τετραγωνικό πίνακα nxn $A = (\alpha_{ij})$, i,j=1,2,..., n αν διαγράψουμε τη i-γραμμή και τη j-στήλη του πίνακα A, καλείται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του στοιχείου α_{ij}, i,j = 1, 2, ..., n, ενώ η $\det A_{ij}$ καλείται **ελάσσονα ορίζουσα** του πίνακα A, που αντιστοιχεί στο στοιχείο α_{ij}.

2.2. Ιδιότητες Οριζουσών

Ισχύει ότι:

(i) $\det I_n = 1$

(ii) $\det(A) = \det(A^T)$, όπου A^T ο ανάστροφος του πίνακα A.

(iii) Η ορίζουσα ενός άνω (ή κάτω) τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του. (Όμοια ισχύει και για την ορίζουσα ενός διαγώνιου πίνακα).

(iv) $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$, όπου $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$, i,j = 1, 2,..., n, τετραγωνικοί πίνακες nxn.

Γενικά $\det(A_1\cdot A_2\cdots A_k) = \det(A_1)\cdot\det(A_2)\cdots\det(A_k)$, όπου $A_\ell = (\alpha_{ij}^{\ell})$, i,j = 1, 2, ..., n, ℓ = 1,2,..., k, τετραγωνικοί πίνακας nxn.

Ειδική περίπτωση

Αν $A_1 = A_2 = ... = A_k = A$, τότε ισχύει ότι

$$\det\left(A^k\right) = \det\underbrace{(A \cdots A)} = \underbrace{(\det(A)) \cdots (\det(A))}_{k} = (\det(A))^k \quad , \; k = 1, 2, \dots .$$

(v) $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

(vi) Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα $A = (\alpha_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$ είναι 0 αν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης της είναι μηδέν.

(vii) Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα $A = (\alpha_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, αλλάζει πρόσημο αν αντιμεταθέσουμε δύο οποιεσδήποτε γραμμές ή στήλες της.

(viii) Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα $A = (\alpha_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, είναι 0 αν τα στοιχεία δυο γραμμών ή δύο στηλών του πίνακα A είναι ίσα.

(ix) Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα $A = (\alpha_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, είναι 0 αν τα αντίστοιχα στοιχεία δύο γραμμών ή δύο στηλών του πίνακα A είναι ανάλογα (έχουν τον ίδιο λόγο).

(x) Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα $A = (\alpha_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό $k \in R$ αν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης του πίνακα A πολλαπλασιαστούν με τον αριθμό k.

Γενικά ισχύει ότι:

$$\det(kA) = k^n \cdot \det(A) \; , \quad k \in R \, , \quad n = 1, 2, \dots .$$

(xi) Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα $A = (\alpha_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, δεν μεταβάλλεται ως προς την τιμή της αν στα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης της προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής ή στήλης της.

(xii) Αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης ενός τετραγωνικού πίνακα $A = (\alpha_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, είναι άθροισμα m αριθμών, τότε η ορίζουσα του πίνακα A γράφεται ως άθροισμα m οριζουσών.

2.3. Αντίστροφος Πίνακας

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A = (\alpha_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, ο πίνακας με στοιχεία τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A, δηλαδή ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \cdots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} \cdots & E_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{n1} & E_{n2} \cdots & E_{nn} \end{bmatrix}$$

καλείται **πίνακας αλγεβρικών συμπληρωμάτων του A,** ενώ ο ανάστροφός του

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} & \vline & E_{n1} \\ E_{12} & E_{22} & \vline & E_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vline & \vdots \\ E_{1n} & E_{2n} & \vline & E_{nn} \end{bmatrix}$$

καλείται **προσαρτημένος του πίνακα A** και συμβολίζεται με $\alpha d_j A$.

Ισχύει ότι:

$$A(\alpha djA) = (\alpha djA) \cdot A = (\det A) \cdot I_n$$

Καλούμε **αντίστροφο** ενός τετραγωνικού πίνακα $A = (\alpha_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, έναν πίνακα B τέτοιο ώστε

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Συμβολίζουμε με $B \equiv A^{-1} \cdot \left(A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n\right)$.

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A = (\alpha_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, υπάρχει ο αντίστροφος του A^{-1} ανν $\det(A) \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή ο τετραγωνικός πίνακας A καλείται **μη ιδιάζων** (ή **ομαλός**) πίνακας. Ισχύει ότι:

- για κάθε μη ιδιάζων τετραγωνικό πίνακα $A = (\alpha_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, υπάρχει μοναδικός αντίστροφός του A^{-1} έτσι, ώστε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\alpha djA)$$

Επιπλέον αν οι τετραγωνικοί πίνακας $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, είναι αντιστρέψιμοι (έχουν μοναδικό αντίστροφο A^{-1}, B^{-1}), τότε ισχύει ότι:

(i) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

(ii) $\left(A^{-1}\right)^{k} = \left(A^{k}\right)^{-1}$, (A^k, $k \in N^*$, αντιστρέψιμος)

(iii) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$, $\lambda \in R^*$

(iv) $\det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1}$

(v) $\alpha dj\left(A^{-1}\right) = (\alpha djA)^{-1}$

(vi) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ ($A \cdot B$ αντιστρέψιμος πίνακας)

(vii) Για κάθε τριγωνικό (άνω ή κάτω) πίνακα A nxn, τόσο ο προσαρτημένος όσο και ο αντίστροφός του είναι τριγωνικοί πίνακες.

(viii) Για κάθε διαγώνιο πίνακα A nxn, με $\alpha_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, τόσο ο προσαρτημένος όσο και ο αντίστροφός του είναι διαγώνιοι πίνακες. Ειδικότερα ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} θα έχει στοιχεία στην κύρια διαγώνιο τα αντίστροφα των στοιχείων του πίνακα A.

(ix) Για κάθε συμμετρικό πίνακα A nxn, τόσο ο προσαρτημένος όσο και ο αντίστροφός του είναι συμμετρικοί πίνακες.

(x) $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$

2.4. Γραμμικά Συστήματα

2.4.1. Καλούμε **βαθμό** ενός πίνακα mxn $A = (\alpha_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, και συμβολίζουμε με $r(A)$ έναν ακέραιο αριθμό k που αντιστοιχεί στην τάξη μιας μη μηδενικής υποορίζουσας του πίνακα Α έτσι, ώστε κάθε άλλη υποορίζουσα τάξης $\ell > k$ να είναι μηδενική.

2.4.2. Καλούμε **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί** ενός πίνακα mxn $A = (\alpha_{ij})$, $i = 1, 2,..., m$, $i = 1, 2, ..., n$, τις ακόλουθες πράξεις μεταξύ γραμμών (ή στηλών) του πίνακα Α:

(i) Εναλλαγή δυο γραμμών (ή δύο στηλών) i και j του πίνακα Α. Συμβολίζουμε με $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$ (ή $\Sigma_i \leftrightarrow \Sigma_j$).

(ii) Πολλαπλασιασμός όλων των στοιχείων μιας γραμμής (ή μιας στήλης) του πίνακα Α με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό t. Συμβολίζουμε με $\Gamma_i \to t\cdot\Gamma_j$ (ή $\Sigma_i \to t\cdot\Sigma_j$).

(iii) Πολλαπλασιασμός όλων των στοιχείων μιας γραμμής (ή μιας στήλης) του πίνακα Α με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό t, πρόσθεση στα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής (ή στήλης) του Α και μεταφορά του τελικού αποτελέσματος στα αντίστοιχα στοιχεία της αρχικής γραμμής (ή στήλης) του πίνακα Α. Συμβολίζουμε με $t\Gamma_i + \Gamma_j \to \Gamma_j$ (ή $t\Sigma_i + \Sigma_j \to \Sigma_j$).

Ισχύει ότι:

1. Δύο πίνακες Α και Β είναι **γραμμοϊσοδύναμοι** (Α ~ Β) ανν είναι του ίδιου βαθμού και ο ένας προκύπτει από τον άλλο μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών (ή στηλών), (δεδομένου ότι κατά την εκτέλεση οσωνδήποτε στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών ή στηλών ενός πίνακα ο βαθμός του πίνακα δεν μεταβάλλεται).

2. Κάθε πίνακας Α mxn με $m \neq n$ (ή $m=n$) μπορεί να μετατραπεί μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών (ή στηλών) του σε έναν γραμμοϊσοδύναμο πίνακα Β κλιμακωτής (ή ειδικά τριγωνικής) μορφής του οποίου ο βαθμός ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του.

Ειδικότερα αν ο πίνακας Β είναι της μορφής $B = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (I_k ο μοναδιαίος πίνακας τάξης k), τότε θα λέμε ότι ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας Β του Α είναι ο ισοδύναμος πίνακας **κανονικής μορφής** του πίνακα Α.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο βαθμός του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Λύση

<u>**α΄ τρόπος:**</u> Δεδομένου ότι ο πίνακας Α είναι ένας πίνακας 2x3 αναζητούμε ορίζουσα 2ης τάξης μη μηδενική. Πράγματι επειδή $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 10 = -10 \neq 0$

(-) (+)

Προκύπτει ότι r (A) = 2 $\neq$ 0

<u>**β΄ τρόπος:**</u> Με χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών στις γραμμές του πίνακα Α έχουμε ότι:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} (1/3)\ \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 5/3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & -1/3 & -10/3 \end{pmatrix} = B$$

Καταλήγουμε σε πίνακα Β 2x3 γραμμοϊσοδύναμο του Α κλιμακωτής μορφής του οποίου το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του είναι ίσο με 2. Άρα r (A) = 2.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί ο βαθμός του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Λύση

<u>**α΄ τρόπος:**</u> Δεδομένου ότι ο πίνακας Α είναι ένας πίνακας 3x3 ελέγχουμε αρχικά αν η det(A) $\neq$ 0. Πράγματι θεωρώντας το ανάπτυγμα της det(A) ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής της έχουμε ότι:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(-) (+) (-) (+)

$= (1-4) - 2(2-6) = -3 - 2 \cdot (-4) = -3 + 8 = 5 \neq 0$. Άρα r (A) = 3 (γιατί υπάρχει ορίζουσα 3ης τάξης, η ορίζουσα του πίνακα Α, η οποία είναι μη μηδενική).

<u>**β΄ τρόπος:**</u> Με χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών στις γραμμές του πίνακα Α έχουμε ότι:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \\ \Gamma_3 - 3\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} (-1/3)\ \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_3 + 4\Gamma_2 \to \Gamma_3 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & -11/3 \end{pmatrix} = B$$

Καταλήγουμε σε πίνακα B 3x3 γραμμοϊσοδύναμο του A (άνω) τριγωνικής μορφής του οποίου το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του είναι ίσο με 3. Άρα r(A) = 3.

2.4.3. Καλούμε **γραμμική εξίσωση** με αγνώστους $x_1, x_2, ..., x_n$ και συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n = b, \quad \alpha_i, \ b \in R, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

2.4.4. Καλούμε **γραμμικό σύστημα mxn** (m εξισώσεων με n αγνώστους $x_1, x_2, ..., x_n$) κάθε σύστημα της μορφής:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array}\right. \qquad (\Sigma_1)$$

όπου $\alpha_{ij} \in R$, i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n, οι συντελεστές του συστήματος και $b_i \in R$, i = 1, 2,..., m, οι σταθεροί όροι του συστήματος.

Ισοδύναμα το παραπάνω σύστημα (Σ_1) γράφεται σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$A \cdot X = B \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

όπου

(i) ο πίνακας mxn $A = (\alpha_{ij})$, $\alpha_{ij} \in R$, i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n καλείται **πίνακας του συστήματος** (Σ_1),

(ii) ο πίνακας n x 1 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ καλείται **πίνακας των αγνώστων,**

(iii) ο πίνακας m x 1 $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ καλείται **πίνακας σταθερών όρων,**

(iv) ο πίνακας $m \times (n+1)$

$$[A \vdots B] = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

καλείται **επαυξημένος πίνακας του συστήματος.**

2.4.5. Καλούμε **λύση** του συστήματος (Σ_1) κάθε n-άδα της μορφής $(x_1, x_2, ..., x_n)$ που επαληθεύει το σύστημα (Σ_1).

2.4.6. Θα λέμε ότι το γραμμικό σύστημα $m \times n$ (Σ_1) είναι **συμβιβαστό** ανν έχει μοναδική λύση (μόνο για γραμμικά συστήματα $n \times n$) ή άπειρες λύσεις (αόριστο). Διαφορετικά το σύστημα καλείται **μη συμβιβαστό** (αδύνατο).

2.4.7. Δύο γραμμικά συστήματα $m \times n$ καλούνται **ισοδύναμα** ανν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

2.4.8. Μέθοδος επίλυσης γραμμικών συστημάτων

2.4.8.1. Κανόνας Cramer (Γραμμικά συστήματα $n \times n$)

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται μόνο για γραμμικά συστήματα $n \times n$, δηλαδή για γραμμικά συστήματα της μορφής:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1} \cdot x_1 + \alpha_{n2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{nn} \cdot x_n = b_n \end{array}\right. \qquad (\Sigma_2)$$

Κατά την εφαρμογή του κανόνα Cramer εργαζόμαστε ως εξής:

α) Υπολογίζουμε την ορίζουσα det(A) του πίνακα του συστήματος

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Αν $\det(A) \neq 0$, τότε το σύστημα (Σ_2) έχει μοναδική λύση της μορφής

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, ..., \frac{\det(A_n)}{\det(A)}\right),$$

όπου $\det(A_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, η ορίζουσα που προκύπτει από την det(A) αν στη θέση των στοιχείων της j-στήλης του πίνακα A τοποθετήσουμε τη στήλη των σταθερών όρων.

(ii) Αν $\det(A) = 0$, τότε:

- αν μια τουλάχιστον από τις $\det(A_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, είναι μη μηδενική, τότε το σύστημα (Σ_2) είναι αδύνατο,
- αν $\det(A_i) = 0$, για κάθε $i = 1, 2, ..., n$, τότε το σύστημα (Σ_2) έχει άπειρες λύσεις (αόριστο) αρκεί να υπάρχει έστω μία υποορίζουσα τάξης $(n – 1)$ μη μηδενική.

2.4.8.2. Μέθοδος Οριζουσών (Γραμμικά συστήματα $m \times n$ με $m \neq n$)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $m > n$. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα (Σ_1) έχει μοναδική λύση ή είναι αδύνατο. Για την επίλυσή του εργαζόμαστε ως εξής:

- Έστω $m – n = s$. Αφαιρούμε s από τις m σε πλήθος γραμμικές εξισώσεις του γραμμικού συστήματος $m \times n$. Τότε προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα $n \times n$ για το οποίο αν η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος είναι μη μηδενική, τότε το γραμμικό σύστημα $n \times n$ άρα και το αρχικό γραμμικό σύστημα $m \times n$ θα έχει μοναδική λύση υπό την προϋπόθεση ότι η λύση αυτή ικανοποιεί και τις υπόλοιπες s γραμμικές εξισώσεις του αρχικού γραμμικού συστήματος $m \times n$ γεγονός που σημαίνει ότι θα πρέπει όλες οι ορίζουσες τάξης $(n + 1)$ να είναι μηδενικές. Σε κάθε άλλη περίπτωση το αρχικό γραμμικό σύστημα $m \times n$ είναι αδύνατο.

(ii) $m < n$. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα (Σ_1) έχει άπειρες λύσεις (αόριστο) ή είναι αδύνατο. Για την επίλυσή του εργαζόμαστε ως εξής:

- Αναζητούμε στον πίνακα $m \times n$ του συστήματος (Σ_1) μη μηδενική ορίζουσα τάξης ℓ μη μηδενική.
- Αν βρεθεί κατάλληλη ορίζουσα τάξης ℓ μη μηδενική, τότε ορίζουμε $(n - \ell)$ ελεύθερους αγνώστους στο αρχικό γραμμικό σύστημα $m \times n$ με $m < n_x$ (δηλαδή αγνώστους που μπορούν να έχουν ως τιμές οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό). Στην περίπτωση αυτή σχηματίζεται ένα γραμμικό σύστημα $\ell \times \ell$, για το οποίο εφαρμόζοντας τον κανόνα Cramer προκύπτει ότι έχει μοναδική λύση δεδομένου ότι η ορίζουσα του πίνακα αυτού του συστήματος, τάξης ℓ (όπως έχουμε αναφέρει πιο πάνω) είναι μη μηδενική. Συνεπώς το αρχικό γραμμικό σύστημα $m \times n$ έχει άπειρες λύσεις (αόριστο) οι οποίες προκύπτουν από τις αυθαίρετες πραγματικές τιμές των ελεύθερων αγώνων $(n - \ell)$ σε πλήθος.

2.4.8.3. Μέθοδος Πινάκων (μέσω βαθμού πίνακα) (Γραμμικά συστήματα $m \times n$)

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα $m \times n$ (Σ_1) εκφρασμένο σε μορφή πινάκων $A \cdot X = B$. Έστω $r(A)$ ο βαθμός του πίνακα $m \times n$ A του συστήματος και $r[A \vdots B]$ ο βαθμός του επαυξημένου πίνακα $m \times (n + 1)$ $[A \vdots B]$ του συστήματος. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Αν $r(A) = r[A \vdots B]$, τότε το σύστημα (Σ_1) είναι συμβιβαστό.

(ii) Αν $r(A) = r[A \vdots B] = n$ (πλήθος αγνώστων), τότε το σύστημα (Σ_1) έχει μοναδική λύση.

(iii) Αν $r(A) = r[A \vdots B] < n$, τότε το σύστημα (Σ_1) έχει άπειρες λύσεις (αόριστο). Για την επίλυση του συστήματος σ' αυτή την περίπτωση εργαζόμαστε ως εξής:

- Ορίζουμε $(n - r(A))$ ελεύθερους αγνώστους, οι οποίοι μπορούν να πάρουν ως τιμές οποιεσδήποτε τιμές του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα $r(A) \times r(A)$, το οποίο έχει μοναδική λύση.
- Οι άπειρες λύσεις του αρχικού συστήματος προκύπτουν διότι δεδομένου ότι οι $(n - r)$ σε πλήθος ελεύθεροι άγνωστοι μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε αυθαίρετες πραγματικές τιμές και οι τιμές των υπολοίπων $r(A)$ σε πλήθος αγνώστων ορίζονται συναρτήσει των αυθαίρετων τιμών των $(n - r)$ ελεύθερων αγνώστων.

(iv) Αν $r(A) \neq r[A \vdots B]$, τότε το σύστημα (Σ_1) είναι αδύνατο.

2.4.8.4. Μέθοδος πινάκων (Γραμμικά συστήματα $n \times n$)

Η μέθοδος πινάκων εφαρμόζεται μόνο για γραμμικά συστήματα $n \times n$ (Σ_2) που μπορούν να γραφούν ως $A \cdot X = B$ για τα οποία ο πίνακας $n \times n$ του συστήματος $A = (\alpha_{ij})$, $i, j = 1,2, ..., n$ είναι αντιστρέψιμος (δηλαδή $\det(A) \neq 0$). Τότε το σύστημα (Σ_2) έχει μοναδική λύση της μορφής $X = A^{-1} \cdot B$, όπου A^{-1} ο αντίστροφος του πίνακα A.

2.4.8.5. Μέθοδος απαλοιφής Gauss (Γραμμικά συστήματα $m \times n$)

Η μέθοδος απαλοιφής Gauss εφαρμόζεται για οποιαδήποτε γραμμικά συστήματα $m \times n$ (Σ_1) για τα οποία ο πίνακάς τους μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμο πίνακα κλιμακωτής μορφής (ή τριγωνικής μορφής για γραμμικά συστήματα $n \times n$). Για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $m \times n$ με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss εργαζόμαστε ως εξής:

(i) Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος. Κάνοντας χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών στις γραμμές του τον μετασχηματίζουμε σε γραμμοϊσοδύναμο πίνακα κλιμακωτής μορφής (ή τριγωνικής μορφής για γραμμικά συστήματα $n \times n$).

(ii) Επιλύουμε το ισοδύναμο του αρχικού σύστημα που αντιστοιχεί στον επαυξημένο πίνακα κλιμακωτής μορφής (ή τριγωνικής μορφής για γραμμικά συστήματα $n \times n$) του (i) εφαρμόζοντας τη μέθοδο ως προς τα πίσω αντικατάστασης (backward elimination).

Ισχύει ότι:

(α) Αν κατά τη διαδικασία των διαδοχικών απαλοιφών προκύψει εξίσωση της μορφής $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$, τότε η εξίσωση αυτή αφαιρείται από το γραμμικό σύστημα mxn.

(b) Αν κατά τη διαδικασία των διαδοχικών απαλοιφών προκύψει εξίσωση της μορφής $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n$ = μη μηδενικός σταθερός όρος, τότε το αρχικό γραμμικό σύστημα mxn είναι αδύνατο.

2.5. Ομογενή Γραμμικά Συστήματα

Πρόκειται για γραμμικά συστήματα mxn (Σ_2) γενικά για τα οποία οι σταθεροί όροι είναι μηδέν, δηλαδή για συστήματα της μορφής

$$\begin{matrix} \alpha_{11}\cdot x_1+\alpha_{12}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{1n}\cdot x_n=0 \\ \alpha_{21}\cdot x_1+\alpha_{22}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{2n}\cdot x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m1}\cdot x_1+\alpha_{m2}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{mn}\cdot x_n=0 \end{matrix} \qquad (\Sigma_3) \text{ ή } A\cdot X=0.$$

τα οποία είναι πάντοτε συμβιβαστά (έχουν πάντοτε τη μηδενική λύση $(x_1, x_2, ..., x_n) = (0,0,...,0)$) γιατί ο βαθμός του πίνακα του συστήματος ταυτίζεται με τον βαθμό του επαυξημένου πίνακα του συστήματος. Για την επίλυσή τους διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Αν $r(A) = n$ (πλήθος αγνώστων), τότε το ομογενές γραμμικό σύστημα (Σ_3) θα έχει μοναδική λύση τη μηδενική,

(ii) Αν $r(A) < n$, τότε το ομογενές γραμμικό σύστημα (Σ_3) θα έχει και άλλες άπειρες λύσεις εκτός της μηδενικής. Για την επίλυσή του εφαρμόζουμε μία από τις παραπάνω μεθόδους.

Ειδική περίπτωση

Αν $m = n$, τότε για το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα n x n ισχύει ότι:

(i) Αν $\det(A) \neq 0$. (δηλαδή ο πίνακας A του συστήματος είναι αντιστρέψιμος), τότε το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα n x n έχει μοναδική λύση τη μηδενική.

(ii) Αν $\det(A) = 0$, τότε το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα n x n έχει και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δείξετε ότι η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix}$ είναι

$\det(A)=\det\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)\cdot\left(\alpha_n-\alpha_{n-2}\right)\cdots\left(\alpha_n-\alpha_1\right)\cdot\left(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}\right)\cdots\left(\alpha_{n-1}-\alpha_1\right)\cdots\left(\alpha_2-\alpha_1\right)$, n = 2, 3,...

Λύση

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής έχουμε ότι:

(i) για **n = 2** έχουμε: $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}=\alpha_2-\alpha_1$ (ισχύει).

(Για **n = 3** έχουμε :

$$\begin{array}{l} \quad\ (-1) \\ \det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2\end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{με } (-1) \text{ και προσθέτουμε}\\ \text{στη 2η και 3η στήλη}}]{\text{Πολίζουμε την 1η στήλη}} \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \alpha_1 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_3-\alpha_1\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2-\alpha_1^2 & \alpha_3^2-\alpha_1^2\end{vmatrix}\end{array}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{ως προς τα στοιχεία}\\ \text{της 1ης γραμμής}}]{\text{Ανάπτυγμα ορίζουσας}} \begin{vmatrix}\alpha_2-\alpha_1 & \alpha_3-\alpha_1\\ \alpha_2^2-\alpha_1^2 & \alpha_3^2-\alpha_1^2\end{vmatrix}=(\alpha_2-\alpha_1)\cdot(\alpha_3^2-\alpha_1^2)-(\alpha_3-\alpha_1)\cdot(\alpha_2^2-\alpha_1^2)$$

(-) (+)

$$=(\alpha_2-\alpha_1)\cdot(\alpha_3-\alpha_1)\cdot(\alpha_3+\alpha_1)-(\alpha_3-\alpha_1)\cdot(\alpha_2-\alpha_1)\cdot(\alpha_2+\alpha_1)$$

$$=(\alpha_2-\alpha_1)\cdot(\alpha_3-\alpha_1)\cdot[\alpha_3+\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_1)]=(\alpha_2-\alpha_1)\cdot(\alpha_3-\alpha_1)\cdot(\alpha_3+\alpha_1-\alpha_2-\alpha_1)$$

$$=(\alpha_2-\alpha_1)\cdot(\alpha_3-\alpha_1)\cdot(\alpha_3-\alpha_2)).$$

(ii) Υποθέτουμε ότι ισχύει για n = k, δηλαδή ισχύει ότι

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k^2\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_k^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1}\end{vmatrix} \begin{array}{l}=(\alpha_k-\alpha_{k-1})\cdot(\alpha_k-\alpha_{k-2})\cdots(\alpha_k-\alpha_1)\cdot(\alpha_{k-1}-\alpha_{k-2})\cdots\\ \quad(\alpha_{k-1}-\alpha_1)\cdots(\alpha_2-\alpha_1)\end{array}$$

(iii) Θα δείξουμε ότι ισχύει για n = k+1, δηλαδή ότι ισχύει

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k & \alpha_{k+1}\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_k^2 & \alpha_{k+1}^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \cdots & \alpha_k^k & \alpha_{k+1}^k\end{vmatrix} \begin{array}{l}=(\alpha_{k+1}-\alpha_k)\cdot(\alpha_{k+1}-\alpha_{k-1})\cdots(\alpha_{k+1}-\alpha_1)\cdot\\ \quad(\alpha_k-\alpha_{k-1})\cdot(\alpha_k-\alpha_{k-2})\cdots(\alpha_k-\alpha_1)\cdots(\alpha_2-\alpha_1)\end{array}$$

Πράγματι αν θεωρήσουμε το ανάπτυγμα προς τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής έχουμε ότι:

$$\det(A)=(-1)^{k+2}\alpha_1^k\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{k+1}\\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_{k+1}^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_2^{k-1} & \alpha_3^{k-1} & \cdots & \alpha_{k+1}^{k-1}\end{vmatrix} + (-1)^{k+3}\alpha_2^k\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \alpha_1 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{k+1}\\ \alpha_1^2 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_{k+1}^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_3^{k-1} & \cdots & \alpha_{k+1}^{k-1}\end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{2k+2}\alpha_{k+1}^k\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_k^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1}\end{vmatrix}$$

Κάθε μία από τις παραπάνω ορίζουσες είναι ελάσσονες ορίζουσες k-τάξης, οπότε εφαρμόζοντας την υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής για κάθε μία από αυτές καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\det(A) = (\alpha_{k+1}-\alpha_k)\cdot(\alpha_{k+1}-\alpha_{k-1})\cdots(\alpha_{k+1}-\alpha_1)\cdot(\alpha_k-\alpha_{k-1})\cdot(\alpha_k-\alpha_{k-2})\cdots(\alpha_k-\alpha_1)\cdots(\alpha_2-\alpha_1)$$

Άρα ισχύει για κάθε $n \geq 2$.

2. Να δείξετε ότι η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{είναι } \det(A) \equiv D_n = (n-1)\cdot(-1)^{n-1}, \text{ για κάθε } n \geq 2.$$

Λύση

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής έχουμε ότι:

(i) για $\mathbf{n=2}$ έχουμε ότι $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 = (2-1)\cdot(-1)^{2-1}$ (ισχύει)

(-) (+)

(ii) Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $D_k = (k-1)\cdot(-1)^{k-1}$.

(iii) Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k+1$, δηλαδή $D_{k+1} = k\cdot(-1)^k$. Πράγματι

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της 2ης, 3ης ,..., (k+1)−στήλης στην 1η στήλη}]{\text{Προσθέτουμε όλα τα στοιχεία}} \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (-1) \\ = k\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = k\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & (-1) \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της ορίζουσας ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής}]{\text{Παίρνουμε το ανάπτυγμα}}$$

$$= k\cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{διαγώνιου πίνακα}]{\text{Ορίζουσα k − τάξης}} k\,(-1)^k$$

Άρα ισχύει ότι $D_n = (n-1)\cdot(-1)^{n-1}$, για κάθε $n \geq 2$.

3. Να δείξετε ότι η ορίζουσα του πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & \alpha_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{είναι} \quad \det(A)=(-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n\ .$$

Λύση

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής έχουμε ότι:

(i) για **n=2** έχουμε ότι $\det(A)=\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{vmatrix}=-\alpha_1\cdot\alpha_2\ \left(=(-1)^{\frac{2\cdot(2-1)}{2}}\ \alpha_1\cdot\alpha_2\right)$ (ισχύει)

(-) (+)

(ii) Υποθέσουμε ότι ισχύει για n=k έχουμε:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & \alpha_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_k & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}}\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k$$

(iii) Θα δείξουμε ότι ισχύει για n = k+1, δηλαδή ότι ισχύει

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & \alpha_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \alpha_k\cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{k+1} & 0\cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{k\cdot(k+1)}{2}}\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k\cdot\alpha_{k+1}$$

Πράγματι

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & \alpha_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \alpha_k\cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{k+1} & 0\cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{ως προς τα στοιχεία} \\ \text{της τελευταίας γραμμής}}}{\overset{\text{Ανάπτυγμα ορίζοντας}}{=\!=\!=}} (-1)^k\ \alpha_{k+1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & \alpha_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_k & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Υπόθεση Επαγωγής}}{=\!=\!=} (-1)^k\,\alpha_{k+1}(-1)^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}}\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k=(-1)^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}+k}\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k\alpha_{k+1}$$

$$=(-1)^{\frac{k^2+k}{2}}\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k\cdot\alpha_{k+1}=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k\cdot\alpha_{k+1}\,.$$

Άρα ισχύει για κάθε $n\geq 2$.

4. Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Λύση

Παίρνοντας το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα Α ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής έχουμε ότι:

$$\det(\mathrm{A}) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (+1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (1-0) - 3(2-0) + 5(4-4) = 1 - 6 = -5$$

(-) (+) (-) (+) (-) (+)

Επειδή det (A) = - 5 $\neq$ 0 αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1} και είναι μοναδικός. (Ο πίνακας Α είναι μη ιδιάζων (ομαλός)). Για τον υπολογισμό τον εργαζόμαστε ως εξής:

(i) Υπολογίζουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα όλων των στοιχείων του πίνακα Α.

$$E_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$E_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$E_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (4-4) = 0$$

$$E_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3-10) = 7$$

$$E_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 20 = -19$$

$$E_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(2-12) = 10$$

$$E_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5$$

$$E_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-10) = 10$$

$$E_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$$

(ii) Βρίσκουμε τον προσαρτημένο του πίνακα Α

$$\alpha\mathrm{dj}(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} & E_{31} \\ E_{12} & E_{22} & E_{32} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 \\ -2 & -19 & 10 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

(iii) $$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \left(\alpha\mathrm{dj}(\mathrm{A})\right) = \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 \\ -2 & -19 & 10 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & -7/5 & 1 \\ 2/5 & 19/5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Να λυθεί η εξίσωση

$$D = \begin{vmatrix} x & \beta & \beta & \beta \\ \beta & x & \beta & \beta \\ \beta & \beta & x & \beta \\ \beta & \beta & \beta & x \end{vmatrix} = 0$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{array}{l} \quad\;\; (-1) \\ D = \begin{vmatrix} x & \beta & \beta & \beta \\ \beta & x & \beta & \beta \\ \beta & \beta & x & \beta \\ \beta & \beta & \beta & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \beta - x & \beta - x & \beta - x \\ \beta & x-\beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & x-\beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 & x-\beta \end{vmatrix} \end{array}$$

Κοινός παράγοντας στη 2η, 3η, & 4η στήλη ο (x−β)

$$= (x-\beta)\cdot(x-\beta)\cdot(x-\beta)\cdot \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & -1 \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Πρόσθεση των στοιχείων της 2ης, 3ης, 4ης γραμμής στα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης γραμμής

$$= (x-\beta)^3 \cdot \begin{vmatrix} x+3\beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς, τα στοιχεία της 1ης γραμμής

$$= (x-\beta)^3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot (x+3\beta) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-\beta)^3 \cdot (x+3\beta)\cdot \overset{1}{\det(I_3)} = (x-\beta)^3 \cdot (x+3\beta)$$

Προκύπτει ότι $D = (x-\beta)^3 \cdot (x+3\beta) = 0 \rightarrow x = \beta$ (τριπλή ρίζα) ή $x = -3\beta$.

6. Να δείξετε ότι η ορίζουσα τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha-\beta & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ \gamma-\alpha & \alpha-\beta & \beta-\gamma \end{bmatrix}$ είναι $\det(A) = 0$.

Λύση

Πράγματι αν προσθέσουμε όλα τα στοιχεία της 2ης, 3ης στήλης στα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης στήλης έχουμε ότι:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} \alpha-\beta & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ \gamma-\alpha & \alpha-\beta & \beta-\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ 0 & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ 0 & \alpha-\beta & \beta-\gamma \end{bmatrix} = 0$$

(γατί όλα τα στοιχεία της 1ης στήλης είναι ίσα με το 0).

7. Έστω $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$, $i, j = 1,2, ..., n$ αντιστρέψιμοι πίνακες. Τότε ο πίνακας $(A \cdot B)$ είναι αντιστρέψιμος και $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Λύση

Από την υπόθεση έχουμε ότι οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι (det(A) $\neq$ 0, det (A) $\neq$ 0). Άρα υπάρχουν οι αντίστροφοί τους A^{-1}, B^{-1} και είναι μοναδικοί. Για να δείξουμε ότι ο πίνακας $(A \cdot B)$ είναι αντιστρέψιμος αρκεί να δείξουμε ότι $\det(A \cdot B) \neq 0$ και

ότι $\quad (A \cdot B) \cdot (AB)^{-1} = (A \cdot B)^{-1} \cdot (A \cdot B) = I_n$

ή $\quad (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I_n$

Πράγματι έχουμε ότι

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0$. (γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι $\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$).

Άρα ο πίνακας $(A \cdot B)$ είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον έχουμε ότι:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n ,$$

$$(B^{-1} \cdot A^{-1})(A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot I_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$$

8. Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$ ένας διαγώνιος πίνακας nxn. Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμος ανν $\alpha_i \neq 0$, για κάθε $i = 1,2,..., n$ και ότι $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^{-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}$.

Λύση

Έχουμε ότι

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n$$

Άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος ανν $\det(A) \neq 0$ ή $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \neq 0$ ή $\alpha_i \neq 0$, για κάθε $i = 1, 2,..., n$. Έστω ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Τότε ο αντίστροφός του A^{-1} υπολογίζεται ως εξής:

(i) Υπολογίζουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα όλων των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του πίνακα A. Αυτά θα είναι: $E_{ij} = 0$, για κάθε $i, j = 1, 2, ..., n$ με $i \neq j$,

$E_{ii} = (-1)^{i+i} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \; \alpha_{i-1} \, \alpha_{i+1} \cdots \alpha_n$, για κάθε i=1, 2, …, n.

(ii) Βρίσκουμε τον προσαρτημένο τον πίνακα Α

$$\alpha dj(A) = \left[\begin{array}{cc|c} E_{11} & E_{21} & E_{n1} \\ E_{12} & E_{22} & E_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{1n} & E_{2n} & E_{nn} \end{array}\right]$$

(iii) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \alpha dj(A) = \begin{bmatrix} \alpha_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^{-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n^{-1} \end{bmatrix}$

9. Να βρεθεί (αν υπάρχει) ο αντίστροφος του πίνακα

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Λύση

Αρχικά εξετάζουμε αν ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος. Αρκεί $\det(A) \neq 0$.

Πράγματι

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (+1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

(θεωρούμε το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής)

$= (-1 -2) - 2\,(-2 - 6) + 3\,(2 - 3) = -3 + 16 - 3 = 10 \neq 0$. Άρα υπάρχει ο αντίστροφος του Α, A^{-1} έτσι, ώστε: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$ και είναι μοναδικοί. (Ο πίνακας Α είναι μη ιδιάζων (ομαλός)).

Εύρεση αντιστρόφου του πίνακα Α

__α΄ τρόπος:__ **(i)** Υπολογίζουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα όλων των στοιχείων του πίνακα Α.

$E_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$ $\qquad$ $E_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-3) = 5$

$E_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-6) = 8$ $\qquad$ $E_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 9 = -10$

$E_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$ $\qquad$ $E_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1-6) = 5$

$E_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$

$$E_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix} = -(2-6) = 4$$

$$E_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 1-4 = -3$$

(ii) Βρίσκουμε τον προσαρτημένο του πίνακα Α

$$\alpha dj(A) = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{21} & E_{31}\\ E_{12} & E_{22} & E_{32}\\ E_{13} & E_{23} & E_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1\\ 8 & -10 & 4\\ -1 & 5 & -3\end{pmatrix}$$

(iii) $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\alpha dj(A) = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 5 & 1\\ 8 & -10 & 4\\ -1 & 5 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/10 & 5/10 & 1/10\\ 8/10 & -10/10 & 4/10\\ -1/10 & 5/10 & -3/10\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3/10 & 1/2 & 1/10\\ 4/5 & -1 & 2/5\\ -1/10 & 1/2 & -3/10\end{pmatrix}$$

<u>β΄ τρόπος:</u> Σχηματίζουμε τον πίνακα $[I_3 \vdots A]$ και προσπαθούμε μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών να καταλήξουμε στον πίνακα $\left[A^{-1} \vdots I_3\right]$. Οπότε έχουμε:

$$[I_3 \vdots A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1\end{array}\right] \begin{array}{l}\Gamma_2 - 2\Gamma_1 \to \Gamma_2\\ \Gamma_3 - 3\Gamma_1 \to \Gamma_3\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & -4\\ -3 & 0 & 1 & 0 & -5 & -10\end{array}\right] \left(-\tfrac{1}{3}\right)\Gamma_2 \to \Gamma_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1 & 4/3\\ -3 & 0 & 1 & 0 & -5 & -10\end{array}\right] \Gamma_3 + 5\Gamma_2 \to \Gamma_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1 & 4/3\\ 1/3 & -5/3 & 1 & 0 & 0 & -10/3\end{array}\right] \sim \left(-\tfrac{3}{10}\right)\Gamma_3 \to \Gamma_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1 & 4/3\\ -1/10 & 1/2 & -3/10 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \Gamma_1 - 2\Gamma_2 \to \Gamma_1 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1/3 & 2/3 & 0 & 1 & 0 & 1/3\\ 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1 & 4/3\\ -1/10 & 1/2 & -3/10 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\Gamma_2 - \frac{4}{3}\Gamma_3 \to \Gamma_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1/3 & 2/3 & 0 & 1 & 0 & 1/3\\ 4/5 & -1 & 2/5 & 0 & 1 & 0\\ -1/10 & 1/2 & -3/10 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \Gamma_1 - \frac{1}{3}\Gamma_3 \to \Gamma_1 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3/10 & 1/2 & 1/10 & 1 & 0 & 0\\ 4/5 & -1 & 2/5 & 0 & 1 & 0\\ -1/10 & 1/2 & -3/10 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]. \quad \text{Άρα} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/10 & 1/2 & 1/10\\ 4/5 & -1 & 2/5\\ -1/10 & 1/2 & -3/10\end{pmatrix}.$$

10. Να λυθεί το σύστημα:

$x + 2y + 3z = 5$

$2x - y + z = 7$

$3x + y - z = 3$

Λύση

Πρόκειται για ένα γραμμικό σύστημα 3 x 3.

<u>**α΄ τρόπος:**</u> Κανόνας Gramer.

Εργαζόμαστε ως εξής:

(i) Υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-1) - 2 \cdot (-2-3) + 3 \cdot (2+3) = 10 + 15 = 25$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (1-1) - 2 \cdot (-7-3) + 3 \cdot (7+3) = 20 + 30 = 50$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-7-3) - 5 \cdot (-2-3) + 3 \cdot (6-21) = -10 + 25 - 45 = -30$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3-7) - 2 \cdot (6-21) + 5 \cdot (2+3) = -10 + 30 + 25 = 45$$

(ii) Παρατηρούμε ότι $D \equiv \det(A) = 25 \neq 0$. Αρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$(x, y, z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D} \right) = \left(\frac{50}{25}, \frac{-30}{25}, \frac{45}{25} \right) = (2, -6/5, 9/5)$$

<u>**β΄ τρόπος:**</u> Μέθοδος απαλοιφής Gauss

<u>**Βήμα 1ο:**</u> Μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος $[A \vdots B]$ σε γραμμοϊσοδύναμο πίνακα τριγωνικής μορφής. Οπότε έχουμε:

$$[A \vdots B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 1 & 7\\ 3 & 1 & -1 & 3\end{array}\right] \begin{array}{l}\Gamma_2-2\Gamma_1 \to \Gamma_2\\ \Gamma_3-3\Gamma_1 \to \Gamma_3\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & -5 & -5 & -3\\ 0 & -5 & -10 & -12\end{array}\right] \Gamma_3-\Gamma_2 \to \Gamma_3 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & -5 & -5 & -3\\ 0 & 0 & -5 & -9\end{array}\right]$$

<u>Βήμα 2ο:</u> Προς τα πίσω αντικατάσταση

Το (άνω) τριγωνικό σύστημα που αντιστοιχεί στον παραπάνω (άνω) τριγωνικό πίνακα είναι:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5\\ -5y - 5z &= -3\\ -5z &= -9 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της προς τα πίσω αντικατάστασης έχουμε ότι:

$-5z = -9 \to z = 9/5$

$-5y - 5z = -3 \to -5y = -3 + 5z \to -5y = -3 + 5\,(9/5) = -3 + 9 = 6$

$\to y = -6/5$

$x + 2y + 3z = 5 \to x = 5 - 2y - 3z = 5 - 2\,(-6/5) - 3\,(9/5)$

$\to x = 5 + 12/5 - 27/5 \to x = 5 - 15/5 = 5 - 3 \to x = 2.$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση της μορφής $(x, y, z) = (2, -6/5, 9/5)$

11. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1\\ 2x + y + 2z &= 2\\ 3x + y - z &= 3 \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο πινάκων.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω γραμμικό και ομογενές σύστημα 3 x 3 μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$A \cdot X = B \quad ή \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

Επιπλέον από την άσκηση 9 προέκυψε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος ($\det(A) \neq 0$) με

αντίστροφο πίνακα $A^{-1} = \begin{pmatrix}-3/10 & 1/2 & 1/10\\ 4/5 & -1 & 2/5\\ -1/10 & 1/2 & 3/10\end{pmatrix}$.

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση της μορφής $X = A^{-1} \cdot B$ ή

$$X = \begin{pmatrix} -3/10 & 1/2 & 1/10 \\ 4/5 & -1 & 2/5 \\ -1/10 & 1/2 & 3/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/10 & +2/2 & +3/10 \\ 4/5 & -2 & +6/5 \\ -1/10 & +2/2 & +9/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9/5 \end{pmatrix}$$

12. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x \quad & + 10z = 5 \\ 3x + y \quad & - 4z = -1 \\ 4x + y \quad & + 6z = 1 \end{aligned}$$

Λύση

<u>α΄ τρόπος:</u> Κανόνας Gramer

(i) Υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 10 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (6+4) + 10 \cdot (3-4) = 10 - 10 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 10 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 10 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (6+4) + 10 \cdot (-1-1) = 50 - 20 = 30$$

Δεδομένου ότι $D \equiv \det(A) = 0$ και $D_x = 30 \neq 0$ δεν απαιτείται να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες ορίζουσες D_y και D_z διότι σύμφωνα με τον κανόνα Cramer το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

<u>β΄ τρόπος:</u> Μέθοδος απαλοιφής Gauss

<u>Βήμα 1ο:</u> Μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος $[A \vdots B]$ σε γραμμοϊσοδύναμο πίνακα τριγωνικής μορφής. Οπότε έχουμε:

$$[A \vdots B] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Gamma_2 - 3\Gamma_1 \to \Gamma_2 \\ \Gamma_3 - 4\Gamma_1 \to \Gamma_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 1 & -34 & -19 \end{array}\right] \;\Gamma_3 - \Gamma_2 \to \Gamma_3 \;\sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

<u>Βήμα 2ο:</u> Το (άνω) τριγωνικό σύστημα που αντιστοιχεί στον παραπάνω (άνω) τριγωνικό πίνακα είναι:

$$x \qquad + 10z = 5$$
$$y \quad -34z = -16$$
$$0_x + 0_y + 0_z = -3$$

Από την 3η εξίσωση του συστήματος παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

13. Να λυθεί το σύστημα

$$x + 2y - z = 2$$
$$2x + 5y + 2z = -1$$
$$7x + 17y + 5z = -1$$

Λύση

<u>**α΄ τρόπος:**</u> Κανόνας Cramer

(i) Υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 7 & 17 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 17 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$= (25-34) - 2\cdot(10-14) - (34-35) = -9 + 8 + 1 = -9 + 9 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ -1 & 17 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 17 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (25-34) - 2\cdot(-5+2) - (-17+5) = -18 + 6 + 12 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5+2) - 2\cdot(10-14) - (-2+7) = -3 + 8 - 5 = 8 - 8 = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 7 & 17 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 17 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5+17) - 2 \cdot (-2+7) + 2 \cdot (34-35) = 12 - 10 - 2 = 12 - 12 = 0$$

Παρατηρούμε ότι $D \equiv \det(A) = 0$ και $D_x = D_y = D_z = 0$. Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (αόριστο) δεδομένου ότι υπάρχει ορίζουσα 2ης τάξης η $D' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$ μη μηδενική. Η ορίζουσα D' αποτελεί ορίζουσα του γραμμικού συστήματος 2 x 2

$x + 2y = 2 + z$

$2x + 5y = -1 - 2z$

με $\quad D'_x = \begin{vmatrix} 2+z & 2 \\ -1-2z & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot (2+z) - 2 \cdot (-1-2z) = 10 + 5z + 2 + 4z = 12 + 9z$,

$D'_y = \begin{vmatrix} 1 & 2+z \\ 2 & -1-2z \end{vmatrix} = -1 - 2z - 2(2+z) = -1 - 2z - 4 - 2z = -5 - 4z$

Άρα το παραπάνω γραμμικό σύστημα 2x2 έχει μοναδική λύση της μορφής

$(x, y) = \left(\frac{D'_x}{D'}, \frac{D'_y}{D'} \right) = \left(\frac{12+9z}{1}, \frac{-5-4z}{1} \right) = (12 + 9z, \quad -5 - 4z)$, $z \in R$ (με εφαρμογή του κανόνα Cramer), η οποία ικανοποιεί την 3η εξίσωση του αρχικού γραμμικού συστήματος 3x3. Πράγματι

$7x + 17y + 5z = 7\ (12 + 9z) + 17\ (-5 - 4z) + 5z = 84 + 63z - 85 - 68z + 5z = -1$

Άρα το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$(x, y, z) = (12 + 9z,\ -5 - 4z,\ z),\ z \in R$

β΄ τρόπος: Μέθοδος απαλοιφής Gauss.

Βήμα 1ο: Μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος $[A \vdots B]$ σε γραμμοϊσοδύναμο πίνακα κλιμακωτής μορφής. Οπότε έχουμε:

$$[A \vdots B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 7 & 17 & 5 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \to \Gamma_2 \\ \Gamma_3 - 7\Gamma_1 \to \Gamma_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 12 & -15 \end{array}\right] \Gamma_3 - 3\Gamma_2 \to \Gamma_3 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Βήμα 2ο: Το σύστημα που αντιστοιχεί στον παραπάνω επαυξημένο πίνακα είναι:

$x + 2y - z = 2$

$y + 4z = -5$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της προς τα πίσω αντικατάστασης έχουμε ότι:

$y = -5 - 4z$

$x = 2 - 2y + z = 2 - 2\ (-5 - 4z) + z = 2 + 10 + 8z + z = 12 + 9z$

Άρα το αρχικό γραμ1 μικό σύστημα 3 x 3 έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$(x, y, z) = (12 + 9z,\ -5 - 4z,\ z),\quad z \in R$

14. Να λυθεί το σύστημα

$$x + 2y - 3z = 4$$
$$2x + 4y + z = 2$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω γραμμικό σύστημα 2x3 έχει m = 2 (πλήθος εξισώσεων), n=3 (πλήθος αγνώστων) με n > m.

Εξετάζουμε αν ο πίνακας του συστήματος $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ περιέχει ορίζουσα 2ης τάξης μη μηδενική. Πράγματι υπάρχει $D' = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7 \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις (αόριστο). Για να βρούμε τη μορφή των άπειρων λύσεων του συστήματος εργαζόμαστε ως εξής:

- Το σύστημα που αντιστοιχεί στην ορίζουσα D' είναι το

$$x - 3z = 4 - 2y$$
$$2x + z = 2 - 4y$$

Πρόκειται για ένα γραμμικό σύστημα 2 x 2 με

$$D'_x = \begin{vmatrix} 4-2y & -3 \\ 2-4y & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2y + 3(2-4y) = 4 - 2y + 6 - 12y = 10 - 14y\,,$$

$$D'_z = \begin{vmatrix} 1 & 4-2y \\ 2 & 2-4y \end{vmatrix} = 2 - 4y - 2(4-2y) = 2 - 4y - 8 + 4y = -6$$

Άρα έχει μοναδική λύση της μορφής $(x,z) = \left(\frac{D'_x}{D'}, \frac{D'_z}{D'}\right) = \left(\frac{10-14y}{7}, \frac{-6}{7}\right)$. (Εφαρμόζοντας τον κανόνα Cramer).

Επομένως το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x,y,z) = \left(\frac{10-14y}{7},\ y,\ \frac{-6}{7}\right),\quad y \in R\,.$$

15. Να λυθεί το σύστημα

$$x - y = -1$$
$$2x - 3y = 2$$
$$3x - 4y = 1$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι m = 3 (πλήθος εξισώσεων) και n = 2 (πλήθος αγνώστων) με m > n. Αρα παραλείπουμε s = m – n = 3 – 2 = 1 εξίσωση, για παράδειγμα την πρώτη. Τότε προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό σύστημα 2x2

$$2x - 3y = 2$$
$$3x - 4y = 1$$

για το οποίο έχουμε:

$$D' = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8+9=1\ ,\quad D'_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8+3=-5\ ,\quad D'_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2-6=-4\,.$$

Άρα εφαρμόζοντας τον κανόνα Cramer προκύπτει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$(x,\,y) = \left(\frac{D'_x}{D'}, \frac{D'_y}{D'}\right) = \left(\frac{-5}{1}, \frac{-4}{1}\right) = (-5,\ -4)$$

Για να αποτελεί η παραπάνω λύση και λύση του αρχικού συστήματος πρέπει:

- οι τιμές της να επαληθεύουν την 1η εξίσωση του αρχικού συστήματος. Πράγματι $x - y = -5 - (-4) = -5 + 4 = -1$

16. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z - 3w &= 2 \\ 2x - 5y - 3z + 12w &= 4 \\ 7x + y + 8z + 5w &= 1 \end{aligned}$$

Λύση

Πρόκειται για γραμμικό σύστημα 3x4. Για την επίλυσή του εργαζόμαστε ως εξής:

__**α΄ τρόπος:**__ Βρίσκουμε αρχικά τον βαθμό του πίνακα και του επαυξημένου πίνακα του συστήματος. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$[A \vdots B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & 12 & 4 \\ 7 & 1 & 8 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \to \Gamma_2 \\ \Gamma_3 - 7\Gamma_1 \to \Gamma_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -9 & -9 & 18 & 0 \\ 0 & -13 & -13 & 26 & -13 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-1/9)\,\Gamma_2 \to \Gamma_2 \\ (-1/13)\,\Gamma_3 \to \Gamma_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \Gamma_3 - \Gamma_2 \to \Gamma_3 \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Παρατηρούμε ότι $r\,(A) = 2$ (πλήθος μη μηδενικών γραμμών) και $r\,[A \vdots B] = 3$ (πλήθος μη μηδενικών γραμμών). Δεδομένου ότι $r\,(A) \neq r\,[A \vdots B]$ προκύπτει ότι το σύστημα δεν έχει λύση (αδύνατο).

__**β΄ τρόπος:**__ Εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss προκύπτει ο ακόλουθος γραμμοϊσοδύναμος πίνακας του επαυξημένου πίνακα του συστήματος

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

απ' τον οποίο προκύπτει ότι η τελευταία γραμμή αντιστοιχεί στην εξίσωση $0x + 0y + 0z + 0w = 1$. Άρα το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

17. Να λυθεί το σύστημα

$$12x + 2y - 3z - 2w + 4t = 1$$
$$2x + 5y - 8z - w + 6t = 4$$
$$x + 4y - 7z + 5w + 2t = 8$$

Λύση

Πρόκειται για γραμμικό σύστημα 3 x 5. Για την επίλυσή του εργαζόμαστε ως εξής:

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πινάκων υπολογίζουμε τον βαθμό του πίνακα και του επαυξημένου πίνακα του συστήματος. Οπότε έχουμε:

$$[A \vdots B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 12 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_1} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 12 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \to \Gamma_2 \\ \Gamma_3 - 12\Gamma_1 \to \Gamma_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & 6 & -11 & 2 & -12 \\ 0 & -46 & 81 & -62 & -20 & -95 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1/3)\Gamma_3 \to \Gamma_3} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 11/3 & -2/3 & 4 \\ 0 & -46 & 81 & -62 & -20 & -95 \end{array}\right]$$

$$\Gamma_3 + 46\Gamma_2 \to \Gamma_3 \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 11/3 & -2/3 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & 168 & 72 & 89 \end{array}\right]$$

Παρατηρούμε ότι r (A) = r $[A \vdots B] = 3$ (πλήθος μη μηδενικών γραμμών) < n = 5 (πλήθος αγνώστων). Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες προκύπτουν αν δώσουμε αυθαίρετες πραγματικές τιμές σε n – r (A) = 5 – 3 = 2 ελεύθερους αγνώστους έστω w, t. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss προκύπτει ότι το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στον παραπάνω τελικό επαυξημένο πίνακα κλιμακωτής μορφής είναι:

$$x + 4y - 7z + 5w + 2t = 8$$
$$y - 2z + 11/3w - 2/3t = 4$$
$$-11z + 168w + 72t = 89$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της προς τα πίσω αντικατάστασης και επιλέγοντας ως ελεύθερους αγνώστους τους w και t έχουμε ότι:

$$-11z + 168w + 72t = 89 \to -11z = 89 - 168w - 72t \to z = \frac{-89}{11} + \frac{168w}{11} + \frac{72}{11}t = \alpha$$

$$y - 2z + \frac{11}{3}w - \frac{2}{3}t = 4 \to y = 4 + 2z - \frac{11}{3}w + \frac{2}{3}t = 4 + 2\alpha - \frac{11}{3}w + \frac{2}{3}t = \beta$$

$$x + 4y - 7z + 5w + 2t = 8 \to x = -4y + 7z - 5w - 2t + 8 = -4\beta + 7\alpha - 5w - 2t + 8$$

Άρα το αρχικό γραμμικό σύστημα 3 x 5 έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x, y, z, w, t) = (-4\beta + 7\alpha - 5w - 2t + 8,\ \ \beta,\ \alpha,\ w,\ t),\ \ w, t \in R .$$

18. Να λυθεί το σύστημα

$2x - y + 3z = 0$

$3x + 2y + z = 0$

$x - 4y + 5z = 0$

Λύση

Πρόκειται για ένα γραμμικό και ομογενές σύστημα 3x3. Για την επίλυσή του εργαζόμαστε ως εξής:

<u>**α΄ τρόπος:**</u> Κανόνας Cramer

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα του συστήματος

$$D \equiv \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (10+4) + (15-1) + 3 \cdot (-12-2) = 28 + 14 - 42 = 0$$

Άρα το σύστημα έχει και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής. Για να βρεθεί η μορφή των άπειρων λύσεων του αρχικού συστήματος αναζητούμε ελάσσονα 2ης τάξης μη μηδενική. Έστω η $D' = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0$, η οποία είναι η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος

$2x - y = -3z$

$3x + 2y = -z$

Πρόκειται για γραμμικό σύστημα 2 x 2 με

$$D'_x = \begin{vmatrix} -3z & -1 \\ -z & 2 \end{vmatrix} = -6z - z = -7z \;, \quad D'_y = \begin{vmatrix} 2 & -3z \\ 3 & -z \end{vmatrix} = -2z + 9z = 7z\,.$$

Άρα εφαρμόζοντας τον κανόνα Cramer το σύστημα έχει μοναδική λύση της μορφής

$$(x, y) = \left(\frac{D'_x}{D'}, \frac{D'_y}{D'} \right) = \left(\frac{-7z}{7}, \frac{7z}{7} \right) = (-z,\ z)$$, η οποία θα πρέπει να ικανοποιεί την 3η εξίσωση του συστήματος.

Πράγματι

$x - 4y + 5z = -z - 4z + 5z = 0$

Άρα το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x, y, z) = (-z, z, z)$, $z \in R$

<u>**β΄ τρόπος:**</u> Μέθοδος πινάκων

Αρχικά βρίσκουμε τον βαθμό τον πίνακα του συστήματος. Οπότε έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \; \Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3 \; \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \; \begin{matrix} \Gamma_2 - 3\Gamma_1 \to \Gamma_2 \\ \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \to \Gamma_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 14 & -14 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

$$(1/14)\,\Gamma_2 \to \Gamma_2 \; \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \; \Gamma_3 - 7\Gamma_2 \to \Gamma_3 \; \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα $r(A) = 2 < n = 3$ (πλήθος εξισώσεων). Άρα το αρχικό σύστημα έχει και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής. Για να βρεθεί η μορφή των άπειρων λύσεων του συστήματος εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss για γραμμικά ομογενή συστήματα. Οπότε προκύπτει ότι το σύστημα που αντιστοιχεί στον παραπάνω επαυξημένο πίνακα είναι το

$$x - 4y + 5z = 0$$
$$y - z = 0$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της προς τα πίσω αντικατάστασης και επιλέγοντας $n - r(A) = 3 - 2 = 1$ ελεύθερο άγνωστο, έστω τον z, έχουμε ότι:

$$y - z = 0 \;\to\; y=z,\; x = 4y - 5z = 4z - 5z = -z$$

Άρα το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y,z) = (-z, z, z), \;\in R$

19. Να δείξετε ότι το σύστημα

$$x + 2y + 3z - 3w = \alpha$$
$$2x - 5y - 3z + 12w = \beta$$
$$7x + y + 8z + 5w = \gamma$$

Είναι συμβιβαστό όταν $37\alpha + 13\beta - 9\gamma = 0$. Στη συνέχεια να βρεθεί η λύση του συστήματος για $\alpha = 2$ και $\beta = 4$.

20. Να λυθεί το σύστημα

$$\lambda x + y + z = 1$$
$$x + \lambda y + z = \lambda$$
$$x + y + \lambda z = \lambda^2$$

21. Να λυθεί το σύστημα

$$\lambda (x - \alpha) + 2x - z = 0$$
$$\lambda (y - \alpha) + 2y - z = 0 \qquad \lambda, \alpha \in R$$
$$\lambda (z - \alpha) - x - y + 2z = 0$$

22. Για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ το παρακάτω σύστημα

$$5x + (\lambda + 1)\, y - 5 = 0$$
$$(\lambda - 1)\, x - y + 5 = 0$$
$$3x + 5y + 1 = 0$$

είναι συμβιβαστό.

23. Ένα δίκτυο αντιστάσεων δίνει τις παρακάτω εξισώσεις

$$2\,(R_3 - R_2) + 5\,(R_3 - R_1) = 24$$

$$(R_2 - R_3) + 2\,R_2 + (R_2 - R_1) = 0$$

$$5\,(R_1 - R_3) + 2\,(R_1 - R_2) + R_1 = 6$$

Να βρεθούν οι τιμές των αντιστάσεων R_1, R_2, R_3.