Υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 0.1 *Να προσδιορίσετε την ενέργεια του σήματος*

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\xi t} \quad (\xi > 0) & giat \geq 0 \\ 0 & giat < 0. \end{cases}$$

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού της ενέργειας του σήματος προκύπτει αμέσως ότι

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2\xi t} dt = -\frac{1}{2\xi} e^{-2\xi t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\xi}$$

Παρατηρούμε πως η ενέργεια του σήματος είναι πεπερασμένη και επομένως το σήμα είναι σήμα ενέργειας.

Άσκηση 0.2 *Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα συνεχή σήματα $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ και $y(t) = e^{-\beta t}u(t)$ για τις περιπτώσεις (1) $\alpha \neq \beta$ και (2) $\alpha = \beta$ και στη συνέχεια για τις ειδικές περιπτώσεις (3) $\beta = 0$ (για $\alpha \neq 0$) και (4) $\alpha = \beta = 0$.*

Λύση: (1) Η συνέλιξη των δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ θα δίνεται από τη σχέση

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}u(\tau)e^{-\beta(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

όπου οι βηματικές συναρτήσεις $u(\tau)$ και $u(t-\tau)$ ορίζονται ως

$$u(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{για } \tau > 0 \\ 0 & \text{για } \tau < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{για } t-\tau > 0 (\text{δηλαδή για } \tau < t) \\ 0 & \text{για } t-\tau < 0 (\text{δηλαδή για } \tau > t) \end{cases}$$

Παρατηρούμε πως αν και στη γενική περίπτωση το παραπάνω ολοκλήρωμα θα πρέπει να υπολογιστεί στο άπειρο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, εντούτοις *η ύπαρξη των δύο βηματικών συναρτήσεων περιορίζει αυτά τα όρια*, αφού αυτές οι συναρτήσεις είναι και οι δύο διάφορες του μηδενός και ίσες με τη μονάδα μόνο στο διάστημα $0 < \tau < t$ και μηδέν οπουδήποτε αλλού. Με απευθείας υπολογισμό του ολοκληρώματος - το οποίο υπολογίζεται στο παραπάνω διάστημα τιμών - βρίσκουμε ότι

$$z(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau}e^{-\beta(t-\tau)}d\tau = e^{-\beta t}\int_0^t e^{(\beta-\alpha)\tau}d\tau = e^{-\beta t}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)\tau}}{\beta-\alpha}\right]_0^t = \frac{e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}\left[e^{(\beta-\alpha)t} - 1\right] = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για την περιοχή τιμών $t > 0$ και επειδή για $t < 0$ είναι $z(t) = 0$, μπορούμε να συνδυάσουμε τις παραπάνω περιπτώσεις σε μία απλή εξίσωση, γράφοντας

$$z(t) = x(t) * y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} & \text{για } t > 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases} = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}u(t)$$

(2) Εάν στην παραπάνω σχέση θέσουμε $\alpha = \beta$, η συνέλιξη $z(t)$ λαμβάνει την απροσδιόριστη μορφή 0/0. Εφαρμόζοντας, λοιπόν, τον κανόνα του Del' Hospital βρίσκουμε ότι

$$z(t) = \lim_{\alpha\to\beta}\left\{\frac{\frac{d}{d\alpha}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right)}{\frac{d}{d\alpha}(\beta - \alpha)}u(t)\right\} = -\lim_{\alpha\to\beta}\left\{-te^{-\alpha t}u(t)\right\} = te^{-\beta t}u(t)$$

(3) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (1) για την ειδική περίπτωση $\beta = 0$, βρίσκουμε ότι

$$z(t) = \left[\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}u(t)\right]_{\beta=0} = \frac{e^{-\alpha t} - 1}{-\alpha}u(t) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)u(t)$$

(4) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (2) για την ειδική περίπτωση $\alpha = \beta = 0$, βρίσκουμε ότι

$$z(t) = \left[te^{-\beta t}u(t)\right]_{\beta=0} = tu(t) = r(t)$$

όπου $r(t) = ru(t)$ η συνάρτηση ράμπας ή αναρρίχησης που έχουμε μελετήσει σε προηγούμενη ενότητα. Λαμβάνοντας υπόψη πως για $\alpha = \beta = 0$, θα έχουμε $x(t) = y(t) = u(t)$, καταλήγοντας στο σημαντικό συμπέρασμα *πως η συνέλιξη της βηματικής συνάρτησης $u(t)$ με τον εαυτό της οδηγεί στη συνάρτηση ράμπας $r(t)$.*

Άσκηση 0.3 *Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα σήματα* $x(t) = te^{\alpha t}u(t)$ *και* $y(t) = e^{\alpha t}u(t)$.

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης έχουμε

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau e^{\alpha\tau}u(\tau)e^{\alpha(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

Ακολουθώντας την επιχειρηματολογία της προηγούμενης άσκησης παρατηρούμε πως οι βηματικές συναρτήσεις $u(\tau)$ και $u(t-\tau)$ έχουν τιμή ίση με τη μονάδα στο διάστημα $0 < \tau < t$, δηλαδή η συνέλιξη των δύο σημάτων θα είναι μη μηδενική μόνο εντός αυτού του διαστήματος. Υπολογίζοντας το παραπάνω ολοκλήρωμα για αυτήν την περιοχή τιμών βρίσκουμε ότι

$$z(t) = \int_0^t \tau e^{\alpha\tau}e^{\alpha(t-\tau)}d\tau = e^{\alpha t}\int_0^t \tau d\tau = e^{\alpha t}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2}t^2e^{\alpha t}$$

ή ισοδύναμα $z(t) = (1/2)t^2e^{\alpha t}u(t)$ όπου στην τελευταία σχέση έχουμε ενσωματώσει την περίπτωση $t < 0$ για την οποία είναι $z(t) < 0$.

Άσκηση 0.4 *Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα σήματα* $x(t) = te^{\alpha t}u(t)$ *και* $y(t) = e^{\beta t}u(t)$.

Λύση: Χρησιμοποιώντας την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης και περιοριζόμενοι στο διάστημα ολοκλήρωσης $0 < \tau < t$, διαδοχικά έχουμε

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau e^{\alpha\tau}u(\tau)e^{\beta(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau e^{\alpha\tau}e^{\beta(t-\tau)}d\tau = e^{\beta t}\int_0^t \tau e^{(\alpha-\beta)\tau}d\tau$$

Αρχικά, ας υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στην τελευταία σχέση. Θέτοντας για λόγους απλότητας $\lambda = \alpha - \beta$ και εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, παίρνουμε

$$\int \tau e^{\lambda\tau}d\tau = \int \tau d\left(\frac{e^{\lambda\tau}}{\lambda}\right) = \frac{\tau e^{\lambda\tau}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int e^{\lambda\tau}d\tau = \frac{\tau e^{\lambda\tau}}{\lambda} - \frac{e^{\lambda\tau}}{\lambda^2} = \frac{\lambda\tau e^{\lambda\tau} - e^{\lambda\tau}}{\lambda^2} = \frac{(\lambda\tau - 1)e^{\lambda\tau}}{\lambda^2}$$

Θα είναι, λοιπόν,

$$\int_0^t \tau e^{(\alpha-\beta)\tau}d\tau = \left[\frac{\{(\alpha-\beta)\tau - 1\}e^{(\alpha-\beta)\tau}}{(\alpha-\beta)^2}\right]_0^t = \frac{(\alpha-\beta)te^{(\alpha-\beta)t} - e^{(\alpha-\beta)t} + 1}{(\alpha-\beta)^2}$$

και επομένως η συνέλιξη των δύο σημάτων θα έχει τη μορφή

$$z(t) = \frac{e^{\beta t}}{(\alpha-\beta)^2}\left[(\alpha-\beta)te^{(\alpha-\beta)t} - e^{(\alpha-\beta)t} + 1\right] = \frac{(\alpha-\beta)te^{\alpha t} - e^{\alpha t} + e^{\beta t}}{(\alpha-\beta)^2}$$

(για $t \geq 0$) ή ισοδύναμα

$$z(t) = \frac{(\alpha-\beta)te^{\alpha t} - e^{\alpha t} + e^{\beta t}}{(\alpha-\beta)^2}\,u(t)$$

έτσι ώστε να ενσωματώσουμε και την περίπτωση των αρνητικών χρονικών στιγμών για τις οποίες $z(t) = 0$.

Άσκηση 0.5 *Έστω γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο σύστημα συνεχούς χρόνου η κρουστική απόκριση του οποίου δίνεται από τη σχέση*

$$h(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\beta t} & \text{για } t \geq 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases} = \alpha e^{-\beta t}u(t), \quad b > 0$$

Να προσδιοριστεί η έξοδός του $y(t)$*, όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί ο τετραγωνικός παλμός πλάτους* A *και διάρκειας* ξ *που ορίζεται ως*

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{για } 0 \leq t \leq \xi \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} = Au(t) - Au(t-\xi)$$

Λύση: Χρησιμοποιώντας την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης μπορούμε να γράψουμε την έξοδο του συστήματος με τη μορφή

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[Au(\tau) - Au(\tau-\xi)\Big]\Big\{\alpha e^{-\beta(t-\tau)}u(t-\tau)\Big\}d\tau$$

ή, αναπτύσσοντας την παράσταση,

$$y(t) = \alpha A e^{-\beta t}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\tau}u(\tau-\xi)u(t-\tau)d\tau\right\}$$

Οι μοναδιαίες βηματικές συναρτήσεις $u(\tau)$ και $u(t-\tau)$ διαθέτουν κατά τα γνωστά μη μηδενική τιμή μόνο στο διάστημα $0 \leq \tau \leq t$ και επομένως το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^{\beta\tau}d\tau = \frac{1}{\beta}\Big[e^{\beta\tau}\Big]_0^t = \frac{e^{\beta t}-1}{\beta}$$

Για τον υπολογισμό του δεύτερου ολοκληρώματος προχωρούμε στην αλλαγή μεταβλητής $\tau - \xi = \lambda$. Εάν υπολογίσουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης και εκφράσουμε όλες τις ποσότητες που εμφανίζονται σε αυτό συναρτήσει της νέας μεταβλητής λ, αποδεικνύεται ότι*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\tau}u(\tau-\xi)u(t-\tau)d\tau = \frac{e^{\beta t}-e^{\beta\xi}}{\beta}$$

Πριν προχωρήσουμε στην αντικατάσταση των παραστάσεων που υπολογίσαμε για τα παραπάνω ολοκληρώματα στην εξίσωση ορισμού της εξόδου $y(t)$ έτσι ώστε να καταλήξουμε στον υπολογισμό της, θα πρέπει να κάνουμε μία επισήμανση όσον αφορά στη χρήση της βηματικής συνάρτησης η οποία καθιστά την έξοδο του συστήματος αιτιατό σήμα. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, εάν κατά τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος LTI καταλήξουμε σε μία σχέση της μορφής $y(t) = f(t)$, συνήθως τη γράφουμε ως $y(t) = f(t)u(t)$ έτσι ώστε να δώσουμε έμφαση στο γεγονός πως αυτή ορίζεται μόνο για χρονικές στιγμές $t \geq 0$. Στην προκειμένη περίπτωση, το σήμα εισόδου $x(t) = Au(t) - Au(t-\xi)$ μπορεί να θεωρηθεί πως προκύπτει από την επαλληλία δύο στοιχειωδών εισόδων και πιο συγκεκριμένα, των $x_1(t) = Au(t)$ και $x_2(t) = -Au(t-\xi)$. Επομένως, λόγω της γραμμικής φύσης του συστήματος, η έξοδός του θα προκύπτει από την επαλληλία των αντίστοιχων στοιχειωδών εξόδων $y_1(t)$ και $y_2(t)$ οι οποίες χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των ολοκληρωμάτων που υπολογίσαμε παραπάνω έχουν τη μορφή

$$y_1(t) = +\alpha A e^{-\beta t}\frac{e^{\beta t}-1}{\beta} = +\frac{\alpha A}{\beta}\Big(1-e^{-\beta t}\Big) \quad \text{και} \quad y_2(t) = -\alpha A e^{-\beta t}\frac{e^{\beta t}-e^{\beta\xi}}{\beta} = -\frac{\alpha A}{\beta}\Big[1-e^{-\beta(t-\xi)}\Big]$$

Ωστόσο όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, η είσοδος $x_2(t)$ είναι χρονικώς μετατοπισμένη ως προς την είσοδο $x_1(t)$ κατά ξ χρονικές μονάδες - αφού η $x_1(t)$ πολλαπλασιάζεται επί $u(t)$ ενώ η $x_2(t)$ πολλαπλασιάζεται επί $u(t-\xi)$· Επομένως, και η έξοδος $y_2(t)$ θα πρέπει να είναι μετατοπισμένη κατά ξ χρονικές μονάδες σε σχέση

*Πράγματι, στην περίπτωση αυτή θα είναι $\tau = \lambda+\xi$ και διαφορίζοντας παίρνουμε $d\tau = d(\lambda+\xi) = d\lambda$. Η εκθετική παράσταση γίνεται $e^{\beta\tau} = e^{\beta(\lambda+\xi)} = e^{\beta\lambda}e^{\beta\xi}$ ενώ οι δύο βηματικές συναρτήσεις θα λάβουν τη μορφή $u(\tau-\xi) = u(\lambda)$ και $u(t-\tau) = u(t-\lambda-\xi)$. Πραγματοποιώντας όλες αυτές τις αντικαταστάσεις, το δεύτερο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\tau}u(\tau-\xi)u(t-\tau)d\tau = e^{\beta\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\lambda}u(\lambda)u(t-\lambda-\xi)d\lambda$$

Παρατηρώντας πως οι βηματικές συναρτήσεις $u(\lambda)$ και $u(t-\lambda-\xi)$ ορίζονται ως

$$u(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{για } \lambda \geq 0 \\ 0 & \text{για } \lambda < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad u(t-\lambda-\xi) = \begin{cases} 1 & \text{για } \lambda \leq t-\xi \\ 0 & \text{για } \lambda > t-\xi \end{cases}$$

το τελευταίο ολοκλήρωμα έχει μη μηδενική τιμή στην περιοχή τιμών $0 \leq \lambda \leq t-\xi$, η οποία υπολογίζεται ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\lambda}u(\lambda)u(t-\lambda-\xi)d\lambda = \int_0^{t-\xi} e^{\beta\lambda}d\lambda = \frac{1}{\beta}\Big[e^{\beta\lambda}\Big]_0^{t-\xi} = \frac{e^{\beta(t-\xi)}-1}{\beta}$$

Κατά συνέπεια, το δεύτερο ολοκλήρωμα στην εξίσωση ορισμού της συνέλιξης θα έχει τιμή ίση με

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\tau}u(\tau-\xi)u(t-\tau)d\tau = e^{\beta\xi}\cdot\frac{e^{\beta(t-\xi)}-1}{\beta} = e^{\beta\xi}\cdot\frac{e^{\beta t}\cdot e^{\beta\xi}-1}{\beta} = \frac{e^{\beta t}-e^{\beta\xi}}{\beta}$$ που είναι και το ζητούμενο.

με την έξοδο $y_1(t)$. Προκειμένου, λοιπόν, να καταστήσουμε αυτές τις εξόδους αιτιατά σήματα θα κάνουμε τις αντικαταστάσεις $y_1(t) \to y_1(t)u(t)$ και $y_2(t) \to y_2(t)u(t-\xi)$ και επομένως η συνολική έξοδος του συστήματος έχει τη μορφή

$$y(t) = \frac{\alpha A}{\beta}\left\{\left(1 - e^{-\beta t}\right)u(t) - \left[1 - e^{-\beta(t-\xi)}\right]u(t-\xi)\right\}$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.6 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης*

$$x(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$$

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+1)\, e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-1)\, e^{-j\omega t} dt$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνάρτησης $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(t_0)$$

για τη συνάρτηση $\varphi(t) = e^{-i\omega t}$ θα λάβουμε

$$X(j\omega) = e^{-j\omega t}\Big|_{t=-1} + e^{-j\omega t}\Big|_{t=1} = e^{j\omega} + e^{-j\omega} = 2\cos(\omega)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.7 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$.*

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}u(t)dt = A\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}dt = A\left[\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{\alpha+j\omega}\right]_{\infty}^{0} = \frac{A}{\alpha+j\omega}$$

Άσκηση 0.8 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t)$.*

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier και αντικαθιστώντας τη συνάρτηση του συνημίτονου από τον τύπο του Euler, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)e^{-j\omega t}u(t)dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega t)}\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega-j\omega_0)t}dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega+j\omega_0)t}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(\alpha+j\omega-j\omega_0)t}}{\alpha+j\omega-j\omega_0}\right]_{\infty}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(\alpha+j\omega+j\omega_0)t}}{\alpha+j\omega+j\omega_0}\right]_{\infty}^{0}
\end{aligned}$$

και τελικά

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+j(\omega-\omega_0)} + \frac{1}{\alpha+j(\omega+\omega_0)}\right]$$

Άσκηση 0.9 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης*

$$x(t) \equiv \Pi_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \gamma\iota\alpha\ |t| \le \alpha \\ 0 & \gamma\iota\alpha\ |t| > \alpha \end{cases}$$

που περιγράφει τετραγωνικό σήμα με πλάτος $h = 1$ και διάρκεια $T = 2\alpha$.

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-j\omega t}dt = \left[-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\right]_{-\alpha}^{+\alpha} = \frac{e^{j\omega\alpha} - e^{-j\omega\alpha}}{j\omega} \\
&= \frac{2}{\omega}\frac{e^{j\omega\alpha} - e^{-j\omega\alpha}}{2j} = \frac{2}{\omega}\sin(\omega\alpha) = 2\alpha\frac{\sin(\omega\alpha)}{\omega\alpha} = 2\alpha \mathrm{sinc}(\omega\alpha)
\end{aligned}$$

Άσκηση 0.10 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος* $x(t) = e^{-\alpha|t|}$ $(\alpha > 0)$.

Λύση: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης της απόλυτης τιμής

$$|t| = \begin{cases} +t & \text{για } t \geq 0 \\ -t & \text{για } t < 0 \end{cases}$$

μπορούμε να γράψουμε το σήμα $x(t)$ με τη μορφή

$$x(t) = e^{-\alpha|t|} = e^{-\alpha t}u(t) + e^{\alpha t}u(-t)$$

και από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα λάβουμε

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}u(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha t}e^{-j\omega t}u(-t)dt = \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-j\omega)t}dt = \left[\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{\alpha+j\omega}\right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{(\alpha-j\omega)t}}{\alpha-j\omega}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{\alpha+i\omega} + \frac{1}{\alpha-j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \end{aligned}$$

όπως μπορεί να αποδειχθεί.

Άσκηση 0.11 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier και τα φάσματα πλάτους και φάσης της συνάρτησης*

$$x(t) \equiv \Lambda_\alpha(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{\alpha} & \textit{για } |t| \leq \alpha \\ 0 & \textit{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

η οποία εκφράζει τριγωνικό συνεχές σήμα με πλάτος $h = 1$ *και διάρκεια* $T = 2\alpha$.

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}dt = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\left(1 - \frac{|t|}{\alpha}\right)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\alpha}^{0}\left(1+\frac{t}{\alpha}\right)e^{-j\omega t}dt \\ &+ \int_{0}^{\alpha}\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\alpha}\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)e^{-j\omega t}dt - \int_{0}^{-\alpha}\left(1+\frac{t}{\alpha}\right)e^{-j\omega t}dt \end{aligned}$$

Εάν στο δεύτερο ολοκλήρωμα προχωρήσουμε στην αντικατάσταση $t \to -t$ η συνάρτηση $X(j\omega)$ θα λάβει τη μορφή

$$X(j\omega) = \int_0^\alpha \left(1-\frac{t}{\alpha}\right)e^{-j\omega t}dt + \int_0^\alpha \left(1-\frac{t}{\alpha}\right)e^{j\omega t}dt = \int_0^\alpha \left(1-\frac{t}{\alpha}\right)\left[e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right]dt = 2\int_0^\alpha \left(1-\frac{t}{\alpha}\right)\cos(\omega t)dt$$

Για την τιμή $\omega = 0$ προκύπτει αμέσως ότι

$$X(j\omega) = 2\int_0^\alpha \left(1-\frac{t}{\alpha}\right)dt = 2\left[t - \frac{t^2}{2\alpha}\right]_0^\alpha = 2\left(\alpha - \frac{\alpha^2}{2\alpha}\right) = \alpha$$

ενώ για $\omega \neq 0$ ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες καταλήγουμε στην έκφραση

$$X(j\omega) = \frac{2}{\omega}\int_0^\alpha \left(1-\frac{t}{\alpha}\right)d\left[\sin(\omega t)\right] = \left[\frac{2}{\omega}\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)\sin(\omega t)\right]_0^\alpha - \frac{2}{\omega}\int_0^\alpha \sin(\omega t)d\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως η τιμή της πρώτης παράστασης είναι ίση με το μηδέν, ενώ όσον αφορά στη δεύτερη παράσταση, λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$d\left(1-\frac{t}{\alpha}\right) = -\frac{1}{\alpha}$$

η παραπάνω σχέση γράφεται

$$X(j\omega) = \frac{2}{\omega\alpha}\int_0^\alpha \sin(\omega t)dt = -\frac{2}{\alpha\omega^2}\left[\cos(\omega t)\right]_0^\alpha = \frac{2}{\alpha\omega^2}[1-\cos(\alpha\omega)] = \frac{4}{\alpha\omega^2}\sin^2\left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)$$

όπου για την εξαγωγή της τελευταίας παράστασης χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα $1 - \cos(\omega\alpha) = 2\sin^2(\omega\alpha/2)$. Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε πως ο μετασχηματισμός Fourier είναι πραγματικός αριθμός και επομένως τα φάσματα πλάτους και φάσης θα δίνονται από τις εξισώσεις

$$|X(j\omega)| = \frac{4}{\alpha\omega^2}\sin^2\left(\frac{\alpha\omega}{2}\right) \qquad \text{και} \qquad \measuredangle X(j\omega) = 0$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.12 *Να προσδιοριστούν τα φάσματα πλάτους και φάσης του σήματος*

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{για } t \geq 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases} \qquad \text{με} \qquad \alpha > 0.$$

Λύση: Το σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$ και όπως έχουμε δείξει σε προηγούμενη άσκηση, διαθέτει μετασχηματισμό Fourier που δίνεται από τη σχέση

$$X(j\omega) = \frac{A}{\alpha + j\omega}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε το πλάτος και τη φάση της μιγαδικής συνάρτησης $X(j\omega)$, θα πρέπει να τη διατυπώσουμε στην καρτεσιανή της μορφή $X(j\omega) = \Re\{X(j\omega)\} + j\Im\{X(j\omega)\}$. Θα είναι, λοιπόν,

$$X(j\omega) = \frac{A}{\alpha + j\omega} = \frac{A}{\alpha + j\omega}\frac{\alpha - j\omega}{\alpha - j\omega} = \frac{A\alpha - jA\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j\frac{A\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \Re\{X(j\omega)\} + j\Im\{X(j\omega)\}$$

και επομένως το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της εν λόγω συνάρτησης έχουν τη μορφή

$$\Re\{X(j\omega)\} = \frac{A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \qquad \text{και} \qquad \Im\{X(j\omega)\} = -\frac{A\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Κατά συνέπεια, το πλάτος και η φάση αυτής της συνάρτησης θα είναι τα

$$|X(j\omega)| = \sqrt{\Re\{X(j\omega)\}^2 + \Im\{X(j\omega)\}^2} = \sqrt{\frac{A^2\alpha^2 + A^2\omega^2}{[\alpha^2 + \omega^2]^2}} = \sqrt{\frac{A^2[\alpha^2 + \omega^2]}{[\alpha^2 + \omega^2]^2}} = \sqrt{\frac{A^2}{\alpha^2 + \omega^2}} = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

$$\measuredangle X(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\Im\{X(j\omega)\}}{\Re\{X(j\omega)\}}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Άσκηση 0.13 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος* $x(t) = te^{-2t}\sin(4t)u(t)$.

Λύση: Για την επίλυση της άσκησης, είναι αναγκαίος ο υπολογισμός της τιμής του ολοκληρώματος

$$I = \int_0^\infty te^{\alpha t}dt$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες βρίσκουμε ότι

$$\int e^{\alpha t}dt = \int d\left(\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\right)t = \frac{t}{\alpha}e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha t}dt = \frac{t}{\alpha}e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha t} = \frac{(\alpha t - 1)e^{\alpha t}}{\alpha^2}$$

Προκειμένου να συγκλίνει το παραπάνω ολοκλήρωμα στο όριο $t \to \infty$ θα πρέπει η τιμή της παραμέτρου α να είναι αρνητική. Θέτοντας $\alpha = -\beta$ ($\beta > 0$) το παραπάνω ολοκλήρωμα λαμβάνει τη μορφή

$$I = \int te^{-\beta t}dt = -\left(\frac{\beta t + 1}{\beta^2}\right)e^{-\beta t}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty te^{-\beta t}dt = -\left[\left(\frac{\beta t + 1}{\beta^2}\right)e^{-\beta t}\right]_0^\infty = \frac{1}{\beta^2}$$

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα και εκφράζοντας τη συνάρτηση του ημίτονου με τη βοήθεια των εκθετικών συναρτήσεων μέσω των εξισώσεων του Euler, η εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier του σήματος $x(t)$, επιτρέπει να γράψουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2t}\sin(4t)e^{-j\omega t}u(t)dt = \int_{0}^{\infty} te^{-(2+j\omega)t}\sin(4t)dt \\ &= \int_0^{\infty} te^{(2+j\omega)t}\frac{e^{j4t}-e^{-j4t}}{2j}dt = \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} te^{-(2+j\omega-4j)t}dt - \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} te^{-(2+j\omega+4j)t}dt\end{aligned}$$

από όπου τελικά έχουμε

$$\mathcal{X}(j\omega) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{[2+j(\omega-4)]^2} - \frac{1}{[2+j(\omega+4)]^2}\right]$$

όπου για την εξαγωγή του τελικού αποτελέσματος χρησιμοποιήθηκε η τιμή του βοηθητικού ολοκληρώματος που υπολογίσαμε προηγουμένως για τις τιμές $\beta = 2 + j\omega - 4j$ και $\beta = 2 + j\omega + 4j$.

Άσκηση 0.14 *Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης*

$$\mathcal{X}(j\omega) = \frac{\sin(2\omega)}{\omega^2+8\omega+20}.$$

Λύση: Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler για τη συνάρτηση του ημίτονου και αναπτύσσοντας την παράσταση του παρονομαστή ως γινόμενο της μορφής $\omega^2 + 8\omega + 20 = (\omega-2)(\omega-10)$, η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$ γράφεται ως

$$\mathcal{X}(j\omega) = \frac{e^{2j\omega}-e^{-2j\omega}}{2j(\omega-10)(\omega-2)} = \frac{e^{2j\omega}}{2j(\omega-10)(\omega-2)} - \frac{e^{-2j\omega}}{2j(\omega-10)(\omega-2)}$$

και στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα, θα έχουμε

$$\frac{1}{(\omega-10)(\omega-2)} = \frac{A}{\omega-10} + \frac{B}{\omega-2} = \frac{(A+B)\omega-(2A+10B)}{(\omega-10)(\omega-2)}$$

Εάν εξισώσουμε τους συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων του ω στο πρώτο και στο τελευταίο κλάσμα, προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων $A + B = 0$ και $2A + 10B = -1$ με λύση $(A, B) = (1/8, -1/8)$, όπως μπορεί να αποδειχθεί, γεγονός που μας επιτρέπει να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \frac{1}{2j(\omega-10)(\omega-2)} = \frac{1}{32}\left[\frac{2}{j(\omega-10)} - \frac{2}{j(\omega-2)}\right]$$

Στο επόμενο βήμα της διαδικασίας, ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών (όπως είναι, για παράδειγμα, ο Πίνακας 3.3) βρίσκουμε ότι $\mathcal{F}\{sgn(t)\} = 2/j\omega$ όπου $sgn(t)$ η *συνάρτηση πρόσημου* - αυτή η ιδιότητα έχει αποδειχθεί σε προηγούμενη ενότητα. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, την ιδιότητα της *συχνοτικής μετατόπισης* $z(t) = e^{j\omega_0 t}y(t) \Leftrightarrow \mathcal{Z}(j\omega) = \mathcal{Y}(\omega-\omega_0)$ για τις τιμές $\omega_0 = 10$ και $\omega_0 = 2$, θα λάβουμε

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j(\omega-10)}\right\} = e^{10jt}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega}\right\} = e^{10jt}\text{sgn}(t) \qquad \text{και} \\ z_2(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j(\omega-2)}\right\} = e^{2jt}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega}\right\} = e^{2jt}\text{sgn}(t)\end{aligned}$$

αντίστοιχα, από όπου προκύπτει

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) = \frac{1}{32}\left(e^{10jt} - e^{2jt}\right)\text{sgn}(t)$$

Στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της *χρονικής μετατόπισης* η οποία διατυπώνεται ως $x_1(t) = z(t-t_0) \Leftrightarrow \mathcal{X}_1(\omega) = e^{-j\omega t_0}\mathcal{Z}(j\omega)$, θα λάβουμε

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{2j\omega}}{2j(\omega-10)(\omega-2)}\right\} = \frac{1}{32}\left(e^{10jt}-e^{2jt}\right)\text{sgn}(t)\Big|_{t\to t+2} = \frac{1}{32}\left(e^{10j(t+2)}-e^{2j(t+2)}\right)\text{sgn}(t+2) \\ x_2(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{-2j\omega}}{2j(\omega-10)(\omega-2)}\right\} = \frac{1}{32}\left(e^{10jt}-e^{2jt}\right)\text{sgn}(t)\Big|_{t\to t-2} = \frac{1}{32}\left(e^{10j(t-2)}-e^{2j(t-2)}\right)\text{sgn}(t-2)\end{aligned}$$

και προσθέτοντας τις παραπάνω παραστάσεις, καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα

$$x(t) = \frac{1}{32}\left[\left(e^{10j(t+2)}-e^{2j(t+2)}\right)\text{sgn}(t+2) - \left(e^{10j(t-2)}-e^{2j(t-2)}\right)\text{sgn}(t-2)\right]$$

Άσκηση 0.15 *Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης*

$$\mathcal{X}(j\omega) = \frac{1}{(1+2j\omega)(1+j\omega)}.$$

Λύση: Για την επίλυση της άσκησης, αναπτύσσοντας τη συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$ σε σειρά μερικών κλασμάτων, γράφοντάς τη με τη μορφή

$$\frac{1}{(1+2j\omega)(1+j\omega)} = \frac{A}{1+2j\omega} + \frac{B}{1+j\omega} = \frac{(A+2B)j\omega + (A+B)}{(1+2j\omega)(1+i\omega)}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων του ω στο πρώτο και στο τελευταίο κλάσμα θα λάβουμε το σύστημα των εξισώσεων $(A+2B)j = 0$ και $A+B = 1$ με λύση $(A, B) = (2, -1)$ όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί. Θα είναι λοιπόν,

$$\mathcal{X}(j\omega) = \frac{2}{1+2j\omega} - \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1}{(1/2)+j\omega} - \frac{1}{1+j\omega}$$

και επομένως, το συνεχές σήμα $x(t)$ υπολογίζεται ως

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1/2)+j\omega}\right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\omega}\right\}$$

Ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών διαπιστώνουμε ότι

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1/2)+j\omega}\right\} = e^{-t/2}u(t) \qquad \text{και} \qquad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\omega}\right\} = e^{-t}u(t)$$

από όπου τελικά προκύπτει ότι $x(t) = (e^{-t/2} - e^{-t})u(t)$ που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.16 *Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης*

$$\mathcal{X}(j\omega) = \frac{\omega^2+21}{\omega^2+9}$$

Λύση: Αν και η επίλυση της άσκησης μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα, εντούτοις το σήμα $x(t)$ μπορεί να βρεθεί πάρα πολύ εύκολα γράφοντας την παραπάνω συνάρτηση με τη μορφή

$$\mathcal{X}(j\omega) = \frac{\omega^2+21}{\omega^2+9} = 1 + \frac{12}{\omega^2+9}$$

οπότε από τη σχέση αντίστροφου μετασχηματισμού θα έχουμε

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{1\} + 2\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{6}{\omega^2+9}\right\}$$

Είναι όμως $\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta(\omega)$ ενώ η παράσταση του δεύτερου όρου γράφεται ως

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \frac{2\cdot 3}{\omega^2+3^2} = \left.\frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}\right|_{\alpha=3} = \left.\mathcal{F}\{e^{-\alpha|t|}\}\right|_{\alpha=3}$$

όπως είχαμε αποδείξει σε προηγούμενη άσκηση. Θα είναι, λοιπόν, $y(t) = e^{-3|t|}$ και τελικά $x(t) = \delta(t) + 2e^{-3|t|}$ που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.17 *Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης*

$$\mathcal{X}(j\omega) = \frac{4+10j\omega}{-\omega^2+6j\omega+8}.$$

Λύση: Για την επίλυση της άσκησης παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο του παρονομαστή ως

$$-\omega^2 + 6j\omega + 8 = (2 + j\omega)(4 + j\omega)$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα, θα λάβουμε

$$\frac{4 + 10j\omega}{-\omega^2 + 6j\omega + 8} = \frac{A}{2 + j\omega} + \frac{B}{4 + j\omega} = \frac{(A + B)j\omega + (4A + 2B)}{(2 + j\omega)(4 + j\omega)}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων του ω στο πρώτο και στο τελευταίο κλάσμα θα λάβουμε το σύστημα των εξισώσεων $A + B = 10$ και $4A + 2B = 4$ με λύση $(A, B) = (-8, 18)$. Θα είναι, λοιπόν,

$$X(j\omega) = -\frac{8}{2 + j\omega} + \frac{18}{4 + j\omega}$$

και τελικά

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = -8\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2 + j\omega}\right\} + 18\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{4 + j\omega}\right\} = (18e^{-4t} - 8e^{-2t})u(t)$$

όπως προκύπτει εύκολα, ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών.

Άσκηση 0.18 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\delta(t)$.*

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Laplace θα έχουμε

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st} dt = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει διά της εφαρμογής *της ιδιότητας της επιλογής* της συνάρτησης $\delta(t)$ για τη συνάρτηση $x(t) = e^{-st}$ η οποία περιγράφεται από την εξίσωση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, x(t)\, dt = x(0)$$

Άσκηση 0.19 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace του συνεχούς σήματος $x(t) = e^t u(t)$.*

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Laplace θα έχουμε

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^t u(t)\, e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(1-s)t} dt$$

Προκειμένου να ισχύει η ιδιότητα σύγκλισης $\lim_{t\to\infty}[e^{(1-s)t}] = 0$, θα πρέπει να είναι $\sigma \equiv \Re(s) > 1$ αφού ως γνωστόν θα έχουμε $|e^{(1-s)t}| = |e^{(1-\sigma)t}| \cdot |e^{-j\omega t}| = e^{(1-\sigma)t}$. Για αυτήν την περιοχή τιμών της μιγαδικής μεταβλητής s, το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{(1-s)t} dt = \left[\frac{e^{(1-s)t}}{1 - s}\right]_0^{\infty} = 1$$

Άσκηση 0.20 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace του συνεχούς σήματος $x(t) = \cos(\omega t)u(t)$.*

Λύση: Χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση του Euler $\cos(\omega t) = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$ και τον ορισμό της συνάρτησης $u(t)$, ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$ υπολογίζεται ως

$$X(s)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t)u(t)e^{-st} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{j\omega t}e^{-st} dt$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-j\omega t}e^{-st} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{(j\omega - s)t} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(j\omega + s)t} dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(j\omega - s)t}}{j\omega - s}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-(j\omega + s)t}}{j\omega + s}\right]_0^{\infty}$$

Η περιοχή σύγκλισης του παραπάνω μετασχηματισμού θα προκύψει από την απαίτηση να είναι

$$\lim_{t\to\infty}[e^{(j\omega - s)t}] = \lim_{t\to\infty}[e^{(j\omega - \sigma - j\omega)t}] = \lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty}[e^{-(j\omega + s)t}] = \lim_{t\to\infty}[e^{(-j\omega - \sigma - j\omega)t}] = \lim_{t\to\infty}[e^{-\sigma t}e^{-2j\omega}] = e^{-2j\omega}\lim_{t\to\infty}[e^{-\sigma t}] = 0$$

Οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν προφανώς για θετικές τιμές της παραμέτρου σ, δηλαδή η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace προσδιορίζεται από την εξίσωση $\sigma > 0$. Θα είναι, λοιπόν,

$$X(s) = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{j\omega + s} - \frac{1}{j\omega - s}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Άσκηση 0.21 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace του συνεχούς σήματος* $x(t) = \sin(\omega t)u(t)$.

Λύση: Σε πλήρη αναλογία με την προηγούμενη περίπτωση, από τη σχέση του Euler $\sin(\omega t) = (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2i$ και τις εξισώσεις ορισμού της συνάρτησης $u(t)$ και του μετασχηματισμού Laplace θα έχουμε

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega t)u(t)e^{-st}dt = \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{j\omega t}e^{-st}dt - \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{-j\omega t}e^{-st}dt \\ &= \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{(j\omega - s)t}dt - \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{-(j\omega+s)t}dt = \frac{1}{2j}\Big[\frac{e^{(j\omega-s)t}}{j\omega - s}\Big]_0^{\infty} - \frac{1}{2j}\Big[-\frac{e^{-(j\omega+s)t}}{j\omega + s}\Big]_0^{\infty} \end{aligned}$$

Η περιοχή σύγκλισης του παραπάνω μετασχηματισμού θα προκύψει από την απαίτηση να είναι

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty}[e^{(i\omega-s)t}] = \lim_{t\to\infty}[e^{(i\omega-\sigma-i\omega)t}] = \lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t} = 0 \\ &\lim_{t\to\infty}[e^{-(i\omega+s)t}] = \lim_{t\to\infty}[e^{(-i\omega-\sigma-i\omega)t}] = \lim_{t\to\infty}[e^{-\sigma t}e^{-2i\omega}] = e^{-2i\omega}\lim_{t\to\infty}[e^{-\sigma t}] = 0 \end{aligned}$$

Οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν προφανώς για θετικές τιμές της παραμέτρου σ, δηλαδή η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace προσδιορίζεται από την εξίσωση $\sigma > 0$. Θα είναι, λοιπόν,

$$\mathcal{X}(s) = -\frac{1}{2i}\Big[\frac{1}{i\omega - s} + \frac{1}{i\omega + s}\Big] = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$$

Άσκηση 0.22 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace του συνεχούς σήματος* $x(t) = tu(t)$

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Laplace θα έχουμε

$$\mathcal{X}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tu(t)\, e^{-st}dt = \int_0^{\infty} te^{-st}dt$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$\int te^{-st}dt = \int td\Big(-\frac{e^{-st}}{s}\Big) = -\frac{t}{s}e^{-st} + \frac{1}{s}\int e^{-st}dt = -\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}$$

και επομένως θα είναι

$$\mathcal{X}(s) = \int_0^{\infty} te^{-st}dt = -\frac{1}{s}\Big[te^{-st}\Big]_0^{\infty} - \frac{1}{s^2}\Big[e^{-st}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

με περιοχή σύγκλισης $\sigma > 0$ όπως διαπιστώνεται από τη μορφή του δεύτερου όρου της παραπάνω σχέσης.

Άσκηση 0.23 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace του συνεχούς σήματος* $x(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$.

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Laplace θα έχουμε

$$\mathcal{X}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\, u(t)\, e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{(s+\alpha)t}\cos(\omega t)\, dt$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler $\cos(\omega t) = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$, η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(s) &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t}e^{j\omega t}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{(j\omega-s-\alpha)t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(j\omega+s+\alpha)t}dt = \frac{1}{2}\Big[\frac{e^{(j\omega-s-\alpha)t}}{j\omega - s - \alpha}\Big]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\Big[-\frac{e^{-(j\omega+s+\alpha)t}}{j\omega + s + \alpha}\Big]_0^{\infty} \end{aligned}$$

Είναι προφανές πως, για να συγκλίνει ο μετασχηματισμός $X(s)$, θα πρέπει να είναι

$$\lim_{t\to\infty}\Big[e^{(j\omega-s-\alpha)t}\Big] = \lim_{t\to\infty}\Big[e^{-(j\omega+s+\alpha)t}\Big] = 0$$

Για να είναι μηδέν το πρώτο όριο, θα πρέπει να ισχύει η σχέση $j\omega - s - \alpha = j\omega - \sigma - j\omega - \alpha = -\sigma - \alpha < 0$ από όπου προκύπτει πως $\sigma > -\alpha$. Η ίδια συνθήκη ισχύει και για το δεύτερο όριο, δηλαδή η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $X(s)$ περιγράφεται από την εξίσωση $\sigma > -\alpha$. Για αυτήν την περιοχή τιμών του s ο μετασχηματισμός Laplace υπολογίζεται ως

$$\mathcal{X}(s) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{j\omega + (s+\alpha)} - \frac{1}{j\omega - (s+\alpha)}\Big] = \frac{s+\alpha}{\omega^2 + (s+\alpha)^2}$$

Άσκηση 0.24 *Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα να προσδιορίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης*

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s-3}{s^2+5s+6}.$$

Λύση: Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα διαπιστώνουμε πως η συνάρτηση του μετασχηματισμού Laplace μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s-3}{s^2+5s+6} = \frac{s-3}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} = \frac{(A+B)s+(3A+2B)}{(s+2)(s+3)}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του s στο πρώτο και στο τελευταίο κλάσμα θα λάβουμε το σύστημα των εξισώσεων $A+B=1$ και $2A+3B=-3$ από όπου προκύπτουν οι τιμές $A=-5$ και $B=6$. Θα είναι λοιπόν,

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s-3}{(s+2)(s+3)} = -\frac{5}{s+2} + \frac{6}{s+3}$$

και επομένως ο αντίστροφος μετασχηματισμός υπολογίζεται ως

$$x(t) = -5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = -5e^{-2t}u(t) + 6e^{-3t}u(t)$$

όπως προκύπτει ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών.

Άσκηση 0.25 *Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα να προσδιορίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης*

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s^2+2s-4}{s^4+2s^3+s^2}.$$

Λύση: Διατυπώνοντας τη συνάρτηση του μετασχηματισμού Laplace με τη μορφή

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s^2+2s-4}{s^4+2s^3+s^2} = \frac{s^2+2s-4}{s^2(s^2+2s+1)} = \frac{s^2+2s-4}{s^2(s+1)^2}$$

αυτή μπορεί να αναπτυχθεί στη σειρά μερικών κλασμάτων

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s^2+2s-4}{s^4+2s^3+s^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2} = \frac{(A+C)s^3+(2A+B+C+D)s^2+(A+2B)s+B}{s^2(s+1)^2}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του s στο πρώτο και στο τελευταίο κλάσμα οδηγούμαστε στο σύστημα των εξισώσεων $A+C=0$, $2A+B+C+D=1$, $A+2B=2$ και $B=-4$ από όπου προκύπτουν οι τιμές $(A,B,C,D)=(10,-4,-10,-5)$ και τελικά η εξίσωση

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s^2+2s-4}{s^4+2s^3+s^2} = \frac{10}{s} - \frac{4}{s^2} - \frac{10}{s+1} - \frac{5}{(s+1)^2}$$

Εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα της *γραμμικότητας* του αντίστροφου μετασχηματισμού μπορούμε να γράψουμε τη ζητούμενη συνάρτηση $x(t)$ με τη μορφή

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{X}(s)\} = 10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

Ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών, διαπιστώνουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = u(t), \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = tu(t), \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}u(t)$$

οπότε θα είναι,

$$x(t) = (10 - 4t - 10e^{-t} - 5te^{-t})u(t)$$

Άσκηση 0.26 *Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα να προσδιορίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης*

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s^2+4s+5)}.$$

Λύση: Η συνάρτηση του μετασχηματισμού Laplace γράφεται με τη μορφή

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s^2+4s+5} = \frac{(A+B)s^2 + (4A+3B+C)s + (5A+3C)}{(s+3)(s^2+4s+5)}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του s στο πρώτο και στο τελευταίο κλάσμα καταλήγουμε στο σύστημα των εξισώσεων $A+B=0$, $4A+3B+C=1$ και $5A+3C=1$ με λύση $A=-1$, $B=1$ και $C=2$. Επομένως,

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s^2+4s+5)} = -\frac{1}{s+3} + \frac{s+2}{s^2+4s+5} = -\frac{1}{s+3} + \frac{s+2}{(s+2)^2+1}$$

και ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών, προκύπτει ότι

$$x(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} = \left(e^{-3t} + e^{-2t}\cos(t)\right)u(t)$$

Άσκηση 0.27 *Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα να προσδιορίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης*

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2}.$$

Λύση: Η συνάρτηση του μετασχηματισμού Laplace γράφεται με τη μορφή

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+5} + \frac{C}{(s+5)^2} = \frac{(A+B)s^2 + (10A+8B+C)s + (25A+15B+3C)}{(s+3)(s+5)^2}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων του s στο πρώτο και στο τελευταίο κλάσμα οδηγούμαστε στο σύστημα των εξισώσεων $A+B=1$, $10A+8B+C=2$ και $25A+15B+3C=5$ με λύση $A=2$, $B=-1$ και $C=-10$. Θα είναι, λοιπόν,

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+5} - \frac{10}{(s+5)^2}$$

και ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών, καταλήγουμε τελικά στην εξίσωση

$$x(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\} - 10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+5)^2}\right\} = 2e^{-3t}u(t) - e^{-5t}u(t) - 10te^{-5t}u(t)$$

Άσκηση 0.28 *Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς των συνεχών συστημάτων*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t) \qquad \textit{και} \qquad \frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t).$$

Λύση: (α) Η διαφορική εξίσωση του συστήματος είναι της μορφής

$$\alpha_2 y''(t) + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = \beta_0 x(t)$$

με $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_0 = -2$ και $\beta_0 = 1$. Θα είναι, λοιπόν,

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\beta_0}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{1}{s^2 - s - 2}$$

(β) Με εντελώς ανάλογο τρόπο, η διαφορική εξίσωση του συστήματος είναι της μορφής

$$\alpha_3 y'''(t) + \alpha_2 y''(t) + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = \beta_0 x(t)$$

με τιμές παραμέτρων $\alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = 6$, $\alpha_1 = 11$, $\alpha_0 = 1$ και $\beta_0 = 1$ από όπου προκύπτει ότι

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\beta_0}{\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Άσκηση 0.29 *Έστω ένα γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο συνεχές σύστημα το οποίο, όταν δέχεται στην είσοδό του το σήμα $x(t) = e^{-t}u(t)$, δημιουργεί στην έξοδό του το σήμα $y(t) = 10e^{-t}\cos(4t)\,u(t)$. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και την κρουστική του απόκριση.*

Λύση: Ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος εισόδου υπολογίζεται ως

$$\mathcal{X}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+1)t}dt = -\frac{e^{-(s+1)t}}{s+1}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s+1}$$

Από την άλλη πλευρά, στην Άσκηση 4.3.5 είχαμε αποδείξει ότι

$$\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\cos(\omega t)u(t)\right\} = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση για τιμές παραμέτρων $\alpha = -1$ και $\omega = 4$, βρίσκουμε ότι

$$\mathcal{Y}(s) = 10\mathcal{L}\left\{e^{-t}\cos(4t)\,u(t)\right\} = 10\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}\Big|_{\substack{\alpha=-1\\ \omega=4}} = \frac{10\,(s+1)}{(s+1)^2+16}$$

και εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης $y(t) = h(t)*x(t) \Leftrightarrow \mathcal{Y}(s) = \mathcal{H}(s)\mathcal{X}(t)$,οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{10(s+1)^2}{(s+1)^2+16} = 10\,\frac{s^2+2s+1}{s^2+2s+17}$$

Η συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$ διαθέτει ένα *διπλό μηδενικό* στη θέση $s = -1$ και *δύο απλούς πόλους* στις θέσεις $s_1 = -1+4j$ και $s_2 = -1-4j$, όπως μπορεί να διαπιστωθεί.

Ας περάσουμε τώρα στον υπολογισμό της *κρουστικής απόκρισης* του συστήματος $h(t)$ η οποία ορίζεται ως *ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης μεταφοράς $\mathcal{H}(s)$*. Εκφράζοντας αυτή τη συνάρτηση ως

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{10\,(s+1)^2}{(s+1)^2+16} = 10 - 40\,\frac{4}{(s+1)^2+4^2}$$

προκύπτει αμέσως ότι

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{H}(s)\} = 10\mathcal{L}^{-1}\{1\} - 40\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+1)^2+4^2}\right\} = 10\delta(t) - 40e^{-4}\sin(4t)u(t)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα. Για την εξαγωγή της τελευταίας σχέσης χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις ευθέως - αντίστροφου μετασχηματισμού

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\{1\} = \delta(t)$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\sin(\omega t)u(t)\right\} = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}\right\} = e^{-\alpha t}\sin(\omega t)u(t)$$

(για τις τιμές $\alpha = -1$ και $\omega = 4$) οι οποίες μπορούν να βρεθούν σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών.

Άσκηση 0.30 *Να προσδιορίσετε τους πόλους και τις μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς*

$$\mathcal{H}(s) = \frac{s^2-7s+12}{s^4+6s^3+16s^2+26s+5}$$

και στη συνέχεια να χαρακτηρίσετε το σύστημα όσον αφορά στην απόκριση μηδενικής εισόδου.

Λύση: Προχωρώντας σε διαδοχικές παραγοντοποιήσεις των πολυωνύμων του αριθμητή και του παρονομαστή, η συνάρτηση μεταφοράς διατυπώνεται με τη μορφή

$$\mathcal{H}(s) = \frac{(s-4)(s-3)}{(s^2+4s+3)(s^2+2s+5)} = \frac{(s-4)(s-3)}{(s+1)(s+3)(s+1+2j)(s+1-2j)}$$

από όπου προκύπτει το συμπέρασμα πως η συνάρτηση διαθέτει *δύο μηδενικά* στις θέσεις $z_1 = 4$ και $z_2 = 3$ και *τέσσερις πόλους* στις θέσεις $p_1 = -1$, $p_2 = -3$, $p_3 = -1+2j$ και $p_4 = -1-2j$.

Άσκηση 0.31 *Να προσδιοριστούν η απόκριση πλάτους και φάσης του συστήματος*

$$\mathcal{H}(s) = \frac{s+3}{s+5}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η απόκρισή του στο σήμα εισόδου $x(t) = 2\cos(20t - 30°)$.

Λύση: Προχωρώντας στην αντικατάσταση $s = j\omega$, η συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}(s)$ λαμβάνει τη μορφή

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{\mathcal{N}(j\omega)}{\mathcal{D}(j\omega)} = \frac{3 + j\omega}{5 + j\omega}$$

Διατυπώνοντας τις συναρτήσεις $\mathcal{N}(j\omega)$ και $\mathcal{D}(j\omega)$ σε εκθετική μορφή, θα λάβουμε

$$\mathcal{N}(j\omega) = \sqrt{\omega^2+9}\ \exp\left[j\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right)\right] \qquad \text{και} \qquad \mathcal{D}(j\omega) = \sqrt{\omega^2+25}\ \exp\left[j\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right)\right]$$

Επομένως, η συνάρτηση $\mathcal{H}(j\omega)$ διατυπώνεται ως

$$\mathcal{H}(j\omega) = |\mathcal{H}(j\omega)|e^{j\measuredangle\mathcal{H}(j\omega)} = \sqrt{\frac{\omega^2+9}{\omega^2+25}}\exp\left\{j\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right)\right]\right\}$$

δηλαδή η *απόκριση πλάτους* και η *απόκριση φάσης* του εν λόγω συστήματος θα δίνονται από τις σχέσεις

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2+9}{\omega^2+25}} \qquad \text{και} \qquad \measuredangle\mathcal{H}(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right)$$

Εάν στο εν λόγω σύστημα διαβιβάσουμε το ημιτονοειδές σήμα εισόδου $x(t) = 2\cos(20t - 30°)$ το οποίο είναι της μορφής $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ με τιμές παραμέτρων $A = 2$, $\omega = 20$ και $\varphi = -30°$, οι συναρτήσεις $|\mathcal{H}(j\omega)|$ και $\measuredangle\mathcal{H}(j\omega)$ για την τιμή $\omega = 20$ υπολογίζονται ως

$$|\mathcal{H}(20j)| = \sqrt{\frac{20^2+9}{20^2+25}} = \sqrt{\frac{409}{425}} = 0.980995 \qquad \text{και}$$
$$\measuredangle\mathcal{H}(20j) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{20}{5}\right) = 81.469234° - 75.963756° = 5.505477°$$

Επομένως, η έξοδος του συστήματος $y(t)$ για το συγκεκριμένο σήμα εισόδου, θα είναι ένα ημιτονοειδές σήμα με την ίδια συχνότητα $\omega = 20$, πλάτος ίσο με $2|\mathcal{H}(20j)| = 1.96199$ και φάση $(-30 + 5.505477)° = -24.494523°$ και θα περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(t) = 1.96199\cos(20t - 24.494523°)$$

Άσκηση 0.32 *Να προσδιοριστούν και να σχεδιαστούν η απόκριση πλάτους και φάσης του συστήματος*

$$\mathcal{H}(s) = \frac{s-2}{s^2+5s+6}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η έξοδός του, όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί το σήμα $x(t) = 12\cos(15t + 34°)$.

Λύση: Κάνοντας την αντικατάσταση $s = j\omega$, η συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}(s)$ λαμβάνει τη μορφή

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{\mathcal{N}(j\omega)}{\mathcal{D}(j\omega)} = \frac{j\omega - 2}{-\omega^2 + 5j\omega + 6} = \frac{-2 + j\omega}{(6-\omega^2) + 5j\omega}$$

Διατυπώνοντας τις συναρτήσεις $\mathcal{N}(j\omega)$ και $\mathcal{D}(j\omega)$ σε εκθετική μορφή θα λάβουμε

$$\mathcal{N}(j\omega) = \sqrt{\omega^2+4}\ \exp\left[j\tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{2}\right)\right] \qquad \text{και} \qquad \mathcal{D}(j\omega) = \sqrt{\omega^4+13\omega^2+36}\ \exp\left[j\tan^{-1}\left(\frac{5\omega}{6-\omega^2}\right)\right]$$

Επομένως, η συνάρτηση $\mathcal{H}(j\omega)$ θα λάβει τη μορφή

$$\mathcal{H}(j\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2+4}{\omega^4+13\omega^2+36}}\exp\left\{j\left[\tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{5\omega}{6-\omega^2}\right)\right]\right\}$$

δηλαδή η *απόκριση πλάτους* και η *απόκριση φάσης* του εν λόγω συστήματος θα δίνονται από τις σχέσεις

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2+4}{\omega^4+13\omega^2+36}} \qquad \text{και} \qquad \measuredangle\mathcal{H}(j\omega) = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{5\omega}{6-\omega^2}\right)$$

Εάν στο εν λόγω σύστημα διαβιβάσουμε το ημιτονοειδές σήμα εισόδου $x(t) = 12\cos(15t + 34°)$ το οποίο είναι της μορφής $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ με τιμές παραμέτρων $A = 12$, $\omega = 15$ και $\varphi = 34°$, οι συναρτήσεις $|\mathcal{H}(j\omega)|$ και $\measuredangle\mathcal{H}(j\omega)$ για την τιμή $\omega = 15$ υπολογίζονται ως

$$|\mathcal{H}(15j)| = \sqrt{\frac{15^2+4}{15^4+13(15)^2+36}} = \sqrt{\frac{229}{53586}} = 0.065372 \qquad \text{και}$$

$$\measuredangle\mathcal{H}(20j) = \tan^{-1}\left(-\frac{15}{2}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{75}{219}\right) = -82.405356° - 18.904575° = -101.309931°$$

Επομένως, η έξοδος του συστήματος $y(t)$ θα είναι ένα ημιτονοειδές σήμα με την ίδια συχνότητα $\omega = 20$, πλάτος $2|\mathcal{H}(15j)| = 0.784464$ και φάση $(34 - 101.309931)° = -67.309931°$ και θα περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(t) = 0.784464\cos(15t - 67.309931°)$$

Άσκηση 0.33 *Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα διακριτά σήματα*

$$x[n] = \alpha^n u[n] \qquad \text{και} \qquad y[n] = \beta^n u[n]$$

για τις περιπτώσεις $\alpha = \beta$ και $\alpha \neq \beta$.

Λύση: Χρησιμοποιώντας την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης, θα λάβουμε

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k]\beta^{n-k}u[n-k]$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε πως για $k < 0$ θα είναι $u[k] = 0$, ενώ για $k > n$ θα είναι $u[n-k] = 0$. Επομένως, η συνέλιξη των δύο σημάτων θα ορίζεται ως

$$z[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\beta^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\beta^n\beta^{-k} = \beta^n\sum_{k=0}^{n} \alpha^k\beta^{-k} = \beta^n\sum_{k=0}^{n}(\alpha\beta^{-1})^k$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Περίπτωση 1η: $\alpha = \beta$: Θα είναι $\alpha\beta^{-1} = \alpha\alpha^{-1} = 1$ και επομένως

$$z[n] = \beta^n\sum_{k=0}^{n} 1^k = \beta^n(n+1) = \alpha^n(n+1)$$

- Περίπτωση 2η: $\alpha \neq \beta$: Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη έκφραση από το μαθηματικό τυπολόγιο, θα λάβουμε

$$z[n] = \beta^n\frac{1-(\alpha\beta^{-1})^{n+1}}{1-(\alpha\beta^{-1})} = \beta^n\frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$$

Επομένως, τελικά η συνέλιξη ανάμεσα στα διακριτά σήματα $x[n]$ και $y[n]$ θα δίνεται από τη σχέση

$$z[n] = x[n]*y[n] = \begin{cases} \beta^n(n+1) & \alpha = \beta \\ \dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Άσκηση 0.34 *Να υπολογιστεί η συνέλιξη μεταξύ των διακριτών σημάτων*

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}u[n] \qquad \text{και} \qquad y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-2].$$

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης θα έχουμε

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-4} u[k] \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} u[n-k-2]$$

Στην προκειμένη περίπτωση, για $k < 0$ θα είναι $u[k] = 0$, ενώ για $k > n-2$ θα είναι $u[n-k-2] = 0$. Από την άλλη πλευρά, για $0 \le k \le n-2$ θα είναι $u[k] = u[n-k-2] = 1$ και η παραπάνω σχέση θα λάβει τη μορφή

$$\begin{aligned} z[n] &= \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-4} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} \\ &= 16 \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k} = 16 \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \frac{1-(3/2)^{n-1}}{1-(3/2)} = 32 \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right] \end{aligned}$$

για την περιοχή τιμών $n \ge 2$ που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.35 *Να υπολογιστεί η συνέλιξη μεταξύ των διακριτών σημάτων*

$$x[n] = (0.5)^n u[n] \qquad \text{και} \qquad y(n) = nu[n].$$

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης θα έχουμε

$$z[n] = x[n] * h[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (0.5)^k u[k](n-k)u[n-k]$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε πως για $k < 0$ θα είναι $u[k] = 0$, ενώ για $k > n$ είναι $u[n-k] = 0$. Επομένως, η παραπάνω σχέση γράφεται με τη μορφή

$$z[n] = \sum_{k=0}^{n} (n-k)(0.5)^k = n \sum_{k=0}^{n} (0.5)^k - \sum_{k=0}^{n} k(0.5)^k$$

Ανατρέχοντας στο μαθηματικό τυπολόγιο, διαπιστώνουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{n} (0.5)^k = 2\left[1-(0.5)^{n+1}\right] \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=0}^{n} k(0.5)^k = 4\left[n(0.5)^{n+2} - (n+1)(0.5)^{n+1} + 0.5\right]$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στην εξίσωση της συνέλιξης, προκύπτει μετά από πράξεις ότι

$$z[n] = 2\left[n + (0.5)^n - 1\right]$$

Άσκηση 0.36 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ διακριτού σήματος $x[n] = (1+n)u[n]$.*

Λύση: Ο μετασχηματισμός Z του σήματος θα δίνεται σύμφωνα με την εξίσωση ορισμού του από τη σχέση

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n)\, u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως τα δύο αθροίσματα της παραπάνω σχέσης έχουν κοινή περιοχή σύγκλισης η οποία περιγράφεται από την εξίσωση $|z| > 1$, ενώ τα ίδια τα αθροίσματα υπολογίζονται ως

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-(1/z)} = \frac{z}{z-1}$$

και

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{1/z}{[1-(1/z)]^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του εν λόγω διακριτού σήματος θα δίνεται από την εξίσωση

$$\mathcal{X}(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

Άσκηση 0.37 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ και να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών τιμών του διακριτού σήματος* $x[n] = (\alpha^n + \alpha^{-n})u[n]$ $(\alpha \in R)$.

Λύση: Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος θα δίνεται σύμφωνα με την εξίσωση ορισμού του από τη σχέση

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha^n + \alpha^{-n})\, u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^n + \alpha^{-n})\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-n} z^{-n}$$

Το πρώτο εκ των δύο αθροισμάτων υπολογίζεται ως

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^n = \frac{1}{1-(\alpha/z)} = \frac{z}{z-\alpha}$$

με τη σειρά να συγκλίνει για τιμές της μεταβλητής z, τέτοιες ώστε $|z| > |\alpha|$. Με εντελώς ανάλογο τρόπο, το δεύτερο άθροισμα θα λάβει τη μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\alpha z}\right)^n = \frac{1}{1-(1/\alpha z)} = \frac{\alpha z}{\alpha z - 1}$$

με τη σειρά να συγκλίνει για τιμές της μεταβλητής z, τέτοιες ώστε $|z| > 1/|\alpha|$. Επομένως, ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του διακριτού σήματος $x[n]$ υπολογίζεται ως

$$\mathcal{X}(z) = \frac{z}{z-\alpha} + \frac{\alpha z}{\alpha z - 1} = \frac{z\,(2\alpha z - \alpha^2 - 1)}{(z-\alpha)\,(\alpha z - 1)}$$

με περιοχή σύγκλισης $|z| > \max(|\alpha|, 1/|\alpha|)$.

Άσκηση 0.38 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ και να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών τιμών του διακριτού σήματος* $x[n] = n\alpha^n \sin(\omega n)u[n]$.

Λύση: Χρησιμοποιώντας την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ για το διακριτό σήμα $x[n]$, θα λάβουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\alpha^n \sin(\omega n)u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n \sin(\omega n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n \left[\frac{e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}}{2j}\right] z^{-n} = \frac{1}{2j}\left[\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n e^{j\omega n} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n e^{-j\omega n} z^{-n}\right]\end{aligned}$$

όπου για την εξαγωγή της τελευταίας σχέσης αντικαταστήσαμε τη συνάρτηση του ημίτονου από τον τύπο του Euler. Από τα δύο αθροίσματα της παραπάνω σχέσης το πρώτο άθροισμα υπολογίζεται ως

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n e^{j\omega n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\alpha}{z} e^{j\omega}\right)^n = \frac{\alpha e^{j\omega}/z}{\left(1 - \dfrac{\alpha}{z} e^{j\omega}\right)^2} = \frac{\alpha e^{j\omega}/z}{\dfrac{(z-\alpha e^{j\omega})^2}{z^2}} = \frac{\alpha z^2 e^{j\omega}}{z(z-\alpha e^{j\omega})^2} = \frac{\alpha z e^{j\omega}}{(z-\alpha e^{j\omega})^2}$$

με τη σειρά να συγκλίνει για τιμές της μιγαδικής μεταβλητής z, τέτοιες ώστε να είναι $|z| > |\alpha|$, ενώ, με εντελώς ανάλογο τρόπο, για το δεύτερο άθροισμα θα έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n e^{-j\omega n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\alpha}{z} e^{-j\omega}\right)^n = \frac{\alpha e^{-j\omega}/z}{\left(1 - \dfrac{\alpha}{z} e^{-j\omega}\right)^2} = \frac{\alpha e^{-j\omega}/z}{\dfrac{(z-\alpha e^{-j\omega})^2}{z^2}} = \frac{\alpha z^2 e^{-j\omega}}{z(z-\alpha e^{-j\omega})^2} = \frac{\alpha z e^{-j\omega}}{(z-\alpha e^{-j\omega})^2}$$

με την περιοχή σύγκλισής του να είναι η ίδια με την προηγούμενη. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ για το εν λόγω διακριτό σήμα, αυτή θα λάβει τη μορφή

$$\mathcal{X}(z) = \frac{1}{2j}\left[\frac{\alpha z e^{j\omega}}{(z-\alpha e^{j\omega})^2} - \frac{\alpha z e^{-j\omega}}{(z-\alpha e^{-j\omega})^2}\right] = \frac{\alpha z}{2j}\left[\frac{e^{j\omega}}{(z-\alpha e^{j\omega})^2} - \frac{e^{-i\omega}}{(z-\alpha e^{-j\omega})^2}\right]$$

με την παράσταση εντός των αγκυλών να υπολογίζεται ως

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{e^{j\omega}}{(z-\alpha e^{j\omega})^2} - \frac{e^{-j\omega}}{(z-\alpha e^{-j\omega})^2} = \frac{(z-\alpha e^{-j\omega})^2 e^{j\omega} - (z-\alpha e^{j\omega})^2)\, e^{-j\omega}}{(z-\alpha e^{j\omega})^2 (z-\alpha e^{-j\omega})^2} \\
&= \frac{(z^2 - 2\alpha z e^{-j\omega} + \alpha^2 e^{-2j\omega})\, e^{j\omega} - (z^2 - 2\alpha z e^{j\omega} + \alpha^2 e^{2j\omega})\, e^{-j\omega}}{[(z-\alpha e^{j\omega})(z-\alpha e^{-j\omega})]^2} \\
&= \frac{z^2 e^{j\omega} - 2\alpha z + \alpha^2 e^{-j\omega} - z^2 e^{-j\omega} + 2\alpha z - \alpha^2 e^{j\omega}}{(z^2 - \alpha z e^{-j\omega} - \alpha z e^{j\omega} + \alpha^2)^2} \\
&= \frac{z^2 (e^{j\omega} - e^{-j\omega}) - \alpha^2 (e^{j\omega} - e^{-j\omega})}{[z^2 - \alpha z (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + \alpha^2]^2} = \frac{(z^2 - \alpha^2)(e^{j\omega} - e^{-j\omega})}{[z^2 - \alpha z (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + \alpha^2]^2}
\end{aligned}
$$

και τελικά

$$
A = \frac{(z^2 - \alpha^2) 2j \sin(\omega)}{[z^2 - 2\alpha z \cos(\omega) + \alpha^2]^2}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ξανά τις γνωστές μας εξισώσεις $e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos(x)$ και $e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin(x)$. Αντικαθιστώντας την παραπάνω παράσταση στην εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού $X(z)$, θα λάβουμε

$$
\mathcal{X}(z) = \frac{\alpha z}{2j} \frac{(z^2 - \alpha^2) 2j \sin(\omega)}{[z^2 - 2\alpha z \cos(\omega) + \alpha^2]^2} = \frac{\alpha z (z^2 - \alpha^2) \sin(\omega)}{[z^2 - 2\alpha z \cos(\omega) + \alpha^2]^2}
$$

με περιοχή σύγκλισης $|z| > |\alpha|$ που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα. ο διάγραμμα πόλων-μηδενικών τιμών του μετασχηματισμού $\mathcal{X}(z)$ απεικονίζονται στην εικόνα (γ) του Σχήματος 8.5.

Άσκηση 0.39 *Να βρεθεί ο αντίστροφος του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ που περιγράφεται από την εξίσωση*

$$
X(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - z^{-2})}
$$

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε σειρά μερικών κλασμάτων.

Λύση: Για λόγους απλότητας θέτουμε $z^{-1} = y$ και παρατηρώντας πως ο παρονομαστής της ρητής συνάρτησης $X(y) = 1/(1-y)(1-y^2)$ διατυπώνεται ως το γινόμενο των πρωτοβάθμιων πολυωνύμων $(1+y)(1-y)^2$, αναπτύσσουμε τη συνάρτηση $X(y)$ ως άθροισμα μερικών κλασμάτων της μορφής[5]

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1+y)(1-y)^2} &= \frac{A}{1+y} + \frac{B}{1-y} + \frac{C}{(1-y)^2} = \frac{A(1-y^2) + B(1+y)(1-y) + C(1+y)}{(1+y)(1-y^2)} \\
&= \frac{A(1-2y+y^2) + B(1-y^2) + C(1+y)}{(1+y)(1-y^2)} = \frac{(A-B)y^2 + (C-2A)y + (A+B+C)}{(1-y)(1-y^2)}
\end{aligned}
$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων του z καταλήγουμε στο σύστημα $A - B = 0$, $C - 2A = 0$ και $A + B + C = 1$ με λύση $A = B = 1/4$ και $C = 1/2$. Θα είναι, λοιπόν,

$$
\mathcal{X}(y) = \frac{1}{(1-y)(1-y^2)} = \frac{1}{4(1+y)} + \frac{1}{4(1-y)} + \frac{1}{2(1-y)^2}
$$

ή επιστρέφοντας στις αρχικές μας μεταβλητές

$$
\mathcal{X}(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-z^{-2})} = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{1+z^{-1}}\right\} + \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{1-z^{-1}}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(1-z^{-1})^2}\right\}
$$

Από την παραπάνω ανάλυση διαπιστώνουμε πως ο ζητούμενος μετασχηματισμός έχει γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός της μορφής

$$
\mathcal{X}(z) = \alpha \mathcal{X}_1(z) + \beta \mathcal{X}_2(z) + \gamma \mathcal{X}_3(z)
$$

με $\alpha = 1/4$, $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ και $\mathcal{X}_1(z) = (1+z^{-1})^{-1}$, $\mathcal{X}_2(z) = (1-z^{-1})^{-1}$, $\mathcal{X}_3(z) = [(1-z^{-1})^2]^{-1}$. Ανατρέχοντας στη συνέχεια στον Πίνακα 5 των στοιχειωδών ζευγών μετασχηματισμών, διαπιστώνουμε ότι:

[¶]Για μια εισαγωγή στη θεωρία του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα, δείτε την ομώνυμη ενότητα του παραρτήματος.

- Η συνάρτηση $\mathcal{X}_1(z) = (1 + z^{-1})^{-1}$ είναι της μορφής $\mathcal{X}(z) = (1 - \alpha z^{-1})^{-1}$ για τιμή παραμέτρου $\alpha = -1$ και Επομένως, ο αντίστροφος μετασχηματισμός της είναι η διακριτή ακολουθία $x_1[n] = (-1)^n u(n)$.
- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός της συνάρτησης $\mathcal{X}_2(z) = (1 - z^{-1})^{-1}$ είναι το διακριτό σήμα $x_2[n] = u[n]$.
- Η συνάρτηση $\mathcal{X}_3(z) = [(1 - z^2)^2]^{-1}$ δεν περιλαμβάνεται στον παραπάνω πίνακα και επομένως ο αντίστροφος μετασχηματισμός της θα πρέπει να υπολογιστεί με διαφορετικό τρόπο.

Προκειμένου να υπολογίσουμε τον τρίτο από τους παραπάνω αντίστροφους μετασχηματισμούς, παρατηρούμε πως εάν αναπτύξουμε τον όρο $\mathcal{X}_3(z)$ ως

$$\mathcal{X}_3(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^2} = \mathcal{X}_{3\alpha}(z) + \mathcal{X}_{3\beta}(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

και καταφύγουμε στην ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$, μπορούμε να διατυπώσουμε τον ισχυρισμό, πως αν προσδιορίσουμε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς $x_{3\alpha}[n]$ και $x_{3\beta}[n]$ των συναρτήσεων $X_{3\alpha}(z)$ και $X_{3\beta}(x)$, τότε προφανώς θα ισχύει η σχέση $x_3[n] = x_{3\alpha}[n] + x_{3\beta}[n]$. Αλλά η συνάρτηση $X_{3\beta}(z)$ περιλαμβάνεται σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών από όπου βρίσκουμε πως ο αντίστροφος μετασχηματισμός της είναι το διακριτό σήμα $x_{3\beta}[n] = u[n]$. Όσον αφορά στη συνάρτηση $X_{3\alpha}(z)$, εάν τη διατυπώσουμε με τη μορφή

$$X_{3\alpha}(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = (-z)\left\{-\frac{z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2}\right\} = -z\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{1 - z^{-1}}\right\}$$

και χρησιμοποιήσουμε *την ιδιότητα της διαφόρισης* του μετασχηματισμού Z σύμφωνα με την οποία εάν είναι $x[n] \rightleftarrows X(z)$ τότε θα είναι και $nx[n] \rightleftarrows [-zX'(z)]$, προκύπτει ότι

$$nu(n) \rightleftarrows -z\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{1 - z^{-1}}\right\}$$

Θα είναι, λοιπόν, $x_{3\alpha}[n] = nu[n]$ από όπου προκύπτει ότι $x_3[n] = (n + 1)u[n]$ και τελικά το διακριτό σήμα $x[n]$ υπολογίζεται ως

$$x[n] = \frac{1}{4}\Big[(-1)^n + 1 + 2(n + 1)\Big]u(n)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.40 *Να βρεθεί ο αντίστροφος του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ που περιγράφεται από την εξίσωση*

$$\mathcal{X}(z) = \left\{1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right\}\Big/\left\{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2\right\}$$

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε σειρά μερικών κλασμάτων.

Λύση: Για λόγους απλότητας θέτουμε $y = z^{-1}$ και ακολουθώντας τη μεθοδολογία της προηγούμενης άσκησης, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\mathcal{X}(y) = \frac{1 + (y/4)}{[1 - (y/2)]^2} = \frac{A}{1 - (y/2)} + \frac{B}{[1 - (y/2)]^2} = \frac{A[1 - (y/2)] + B}{[1 - (y/2)]^2} = \frac{-(A/2)y + (A + B)}{[1 - (y/2)]^2}$$

Θα είναι, λοιπόν, $-(A/2)y+(A + B) = (1/4)y + 1$, από όπου προκύπτει το σύστημα $-(A/2) = (1/4)$ και $A+B = 1$ με λύση $A = -1/2$ και $B = 3/2$. Επομένως, η συνάρτηση $\mathcal{X}(y)$ θα λάβει τη μορφή

$$\mathcal{X}(y) = -\frac{1}{2[1 - (y/2)]} + \frac{3}{2[1 - (y/2)]^2}$$

ή ισοδύναμα - επιστρέφοντας στην αρχική μας μεταβλητή - ως

$$\mathcal{X}(z) = -\frac{1}{2}\underbrace{\left\{\frac{1}{(1 - 0.5z^{-1})}\right\}}_{\mathcal{X}_1(z)} + \frac{3}{2}\underbrace{\left\{\frac{1}{(1 - 0.5z^{-1})^2}\right\}}_{\mathcal{X}_2(z)}$$

Ανατρέχοντας στον Πίνακα 8.2, διαπιστώνουμε ότι

$$x_1[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{\mathcal{X}_1(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Από την άλλη πλευρά, ωστόσο, η συνάρτηση $X_2(z)$ δεν περιλαμβάνεται στον παραπάνω πίνακα και επομένως ο αντίστροφος μετασχηματισμός της θα πρέπει να υπολογιστεί με διαφορετικό τρόπο. Προκειμένου να προχωρήσουμε σε αυτόν τον υπολογισμό, διατυπώνουμε τη συνάρτηση $X_2(z)$ με τη μορφή

$$X_2(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})^2} = X_{2\alpha}(z) + X_{2\beta}(z) = \frac{0.5z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})^2} + \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

και ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών, διαπιστώνουμε πλέον ότι $x_{2\alpha}[n] = n(1/2)^n u[n]$ και $x_{2\beta}[n] = (1/2)^n u(n)$. Θα είναι, λοιπόν, $x_2[n] = (n+1)(1/2)^n u[n]$ και τελικά ο αντίστροφος μετασχηματισμός της δοθείσας συνάρτησης $X(z)$ είναι η διακριτή ακολουθία

$$x[n] = \Big[3(n+1) - 1\Big]\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n]$$

(όπως προκύπτει μετά από απλές μαθηματικές πράξεις) που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.1 *Να βρεθεί το ανάπτυγμα Fourier του διακριτού περιοδικού σήματος* $x[n] = \{\mathbf{2}, 1, -1, -2, -1, 1\}$ *με περίοδο* $N = 6$.

Λύση: Επομένως από την εξίσωση ορισμού των συντελεστών Fourier θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]\exp\left(-i\frac{2\pi}{6}kn\right) = \frac{1}{6}\Big\{x[0] + x[1]\exp\left(-i\frac{2\pi}{6}k\right) + \\
&+ x[2]\exp\left(-i\frac{4\pi}{6}k\right) + x[3]\exp\left(-i\frac{6\pi}{6}k\right) + x[4]\exp\left(-i\frac{8\pi}{6}k\right) + \\
&+ x[5]\exp\left(-i\frac{10\pi}{6}k\right)\Big\} = \frac{1}{6}\Big\{2 + \exp\left(-i\frac{\pi}{3}k\right) - \exp\left(-i\frac{2\pi}{3}k\right) - \\
&- \exp(-i\pi k) - \exp\left(-i\frac{4\pi}{3}k\right) + \exp\left(-i\frac{5\pi}{3}k\right)\Big\}
\end{aligned}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως οι εκθετικές παραστάσεις της παραπάνω σχέσης γράφονται ως $\exp(-i\pi k) = (-1)^k$, $\exp(-i4\pi k/3) = (-1)^k\exp(-i\pi k/3)$ και $\exp(-i5\pi k/3) = (-1)^k\exp(-i2\pi k/3)$ και επομένως η τελευταία έκφραση μπορεί εύκολα να μετασχηματιστεί στη μορφή

$$\alpha_k = \frac{1-(-1)^k}{6}\left[2 + \exp\left(-i\frac{\pi k}{3}\right) - \exp\left(-i\frac{2\pi k}{3}\right)\right]$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις τιμές $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ διαπιστώνουμε εύκολα ότι $\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ και $\alpha_1 = \alpha_5 = 1$· επομένως, το διακριτό περιοδικό σήμα $x[n]$ θα λάβει τη μορφή

$$x[n] = \sum_{k=0}^{5}\alpha_k\exp\left(i\frac{2\pi}{6}kn\right) = \exp\left(i\frac{\pi n}{3}\right) + \exp\left(i\frac{5\pi n}{3}\right)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.2 *Να βρεθεί το ανάπτυγμα Fourier του διακριτού περιοδικού σήματος*

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta[n-mN] = \begin{cases} 1 & n = mN, \quad (m \in N) \\ 0 & \textit{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

με περίοδο N*, όπου* $\delta[n]$ *είναι η διακριτή κρουστική συνάρτηση.*

Λύση: Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως για την περιοχή τιμών $0 \le n \le N-1$ είναι $x[n] = \delta[n]$, η εφαρμογή της εξίσωσης ορισμού των συντελεστών Fourier θα μας οδηγήσει σε ένα αποτέλεσμα της μορφής

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right) = \sum_{n=0}^{N-1}\delta[n]\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right) = 1$$

αφού η κρουστική συνάρτηση $\delta[n]$ έχει *μη μηδενική τιμή* και ίση με τη μονάδα *μόνο* για την παράμετρο $k = 0$. Επομένως το σήμα $x[n]$ διατυπώνεται ως

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta[n-mN] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left(i\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.3 *Να βρεθούν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του διακριτού περιοδικού ορθογώνιου σήματος*

$$y[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN]$$

με το διακριτό σήμα $x[n]$ *να ορίζεται ως*

$$x[n] = \begin{cases} A & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & L < n \le N \end{cases}$$

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού των συντελεστών Fourier θα έχουμε

$$\alpha_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right) = \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1}\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως για $k = 0$ θα είναι

$$\alpha_0 = \frac{A}{N}\sum_{k=0}^{L-1} 1 = \frac{AL}{N}$$

ενώ για την περιοχή τιμών $0 < k \leq L-1$ και χρησιμοποιώντας την κατάλληλη έκφραση από το μαθηματικό τυπολόγιο (δείτε τον Πίνακα 6.2) θα έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1}\left\{\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}k\right)\right\}^n = \frac{A}{N}\left\{\frac{1-\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kL\right)}{1-\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}k\right)}\right\} = \\ &= \frac{A}{N}\frac{\exp\left(-i\frac{\pi kL}{N}\right)}{\exp\left(-i\frac{\pi k}{N}\right)}\left\{\frac{\exp\left(i\frac{\pi kL}{N}\right)-\exp\left(-i\frac{\pi kL}{N}\right)}{\exp\left(i\frac{\pi k}{N}\right)-\exp\left(-i\frac{\pi k}{N}\right)}\right\} \end{aligned}$$

και τελικά

$$\alpha_k = \frac{A}{N}\exp\left[-i\frac{\pi k(L-1)}{N}\right]\frac{\sin\left(\frac{\pi kL}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.4 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της διακριτής ακολουθίας* $x[n] = \alpha^n u[n]$ *με τιμή παραμέτρου* $|\alpha| < 1$.

Λύση: Κατ' αρχήν παρατηρούμε πως η παραπάνω ακολουθία είναι *απολύτως αθροίσιμη* για την παραπάνω περιοχή τιμών της παραμέτρου α και επομένως υφίσταται ο μετασχηματισμός της κατά Fourier. Από την εξίσωση ορισμού του εν λόγω μετασχηματισμού θα έχουμε

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^n u[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha e^{-i\omega})^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-i\omega}}$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε την κατάλληλη έκφραση από το μαθηματικό τυπολόγιο) που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα. Διατυπώνοντας την παραπάνω μιγαδική συνάρτηση στην καρτεσιανή της μορφή προκύπτει εύκολα ότι

$$X(\omega) = \frac{1}{(1-\alpha\cos\omega)+i\alpha\sin\omega} = \frac{1-\alpha\cos\omega}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2} - i\frac{\alpha\sin\omega}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

Επομένως το *μέτρο* και η *φάση* του μετασχηματισμού ω θα δίδονται από τις σχέσεις

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}} \quad \text{και} \quad \measuredangle X(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha\sin\omega}{1-\alpha\cos\omega}\right)$$

ενώ η συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας θα έχει τη μορφή

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 = \frac{1}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

Άσκηση 0.5 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτής ακολουθίας* $x[n]$ *η οποία ορίζεται ως*

$$x[n] = \begin{cases} A & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \textit{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

Λύση: Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως το διακριτό σήμα $x[n]$ είναι μία *ακολουθία πεπερασμένου μήκους*, ο ζητούμενος μετασχηματισμός Fourier υφίσταται και υπολογίζεται ως

$$\mathcal{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-i\omega n} = A\sum_{n=0}^{L-1}(e^{-i\omega})^n = \frac{A(1-e^{-i\omega L})}{1-e^{-i\omega}}$$

Εργαζόμενοι όπως στην Άσκηση 9.2.6 η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\mathcal{X}(\omega) = A\left\{\frac{e^{-i\omega L/2}}{e^{-i\omega/2}}\right\}\left\{\frac{e^{i\omega L/2}-e^{-i\omega L/2}}{e^{i\omega/2}-e^{-i\omega/2}}\right\} = A\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}\exp\left[-i\frac{\omega(L-1)}{2}\right]$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει εύκολα το συμπέρασμα πως το μέτρο και η φάση της συνάρτησης $\mathcal{X}(\omega)$ υπολογίζονται ως

$$|\,\mathcal{X}(\omega)\,| = A\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \quad \text{και} \quad \measuredangle\mathcal{X}(\omega) = -\frac{\omega(L-1)}{2}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως για την τιμή $\omega = 0$ είναι $|\,\mathcal{X}(\omega)\,| = AL$ και $\measuredangle\mathcal{X}(\omega) = 0$.

Άσκηση 0.6 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier και να σχεδιαστούν τα φάσματα πλάτους και φάσης της διακριτής ακολουθίας $x[n]$ η οποία ορίζεται ως*

$$x[n] = \alpha^{|n|}, \quad |\,\alpha\,| < 1$$

Λύση: Ο μετασχηματισμός Fourier του παραπάνω διακριτού σήματος υφίσταται λόγω της συνθήκης $|\,\alpha\,| < 1$ και δίδεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{|n|}e^{-i\omega n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{-i\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\alpha^{-n}e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha e^{-i\omega})^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}(\alpha e^{i\omega})^{-n}\end{aligned}$$

όπου για την κατασκευή της τελευταίας σχέσης χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της συνάρτησης της *απόλυτης τιμής*. Ανατρέχοντας στο μαθηματικό τυπολόγιο, το πρώτο άθροισμα υπολογίζεται ως

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha e^{-i\omega})^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-i\omega}}$$

Από την άλλη πλευρά, για τον υπολογισμό του δεύτερου αθροίσματος προχωρούμε στην αλλαγή του βωβού δείκτη από n σε $m = -n$. Για $n = -\infty$ είναι $m = \infty$ ενώ για $n = -1$ είναι $m = 1$ και το παραπάνω άθροισμα υπολογίζεται ως

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}(\alpha e^{i\omega})^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty}(\alpha e^{i\omega})^m = \sum_{m=0}^{\infty}(\alpha e^{i\omega})^m - (\alpha e^{i\omega})^m\Big|_{m=0} = \frac{1}{1-\alpha e^{i\omega}} - 1 = \frac{\alpha e^{i\omega}}{1-\alpha e^{i\omega}}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, ο μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος $x[n]$ υπολογίζεται ως

$$\mathcal{X}(\omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{-i\omega}} + \frac{\alpha e^{i\omega}}{1-\alpha e^{i\omega}} = \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

όπως προκύπτει εύκολα μετά από απλές αλγεβρικές πράξεις, που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.7 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της διακριτής ακολουθίας $x[n]$ η οποία ορίζεται ως*

$$x[n] = n\alpha^n u[n], \quad |\,\alpha\,| < 1$$

Λύση: Το διακριτό σήμα $x[n]$ διαθέτει μετασχηματισμό Fourier - λόγω της ιδιότητας $|\ \alpha\ | < 1$ - ο οποίος υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\alpha^n e^{-i\omega n}u[n] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(\alpha e^{-i\omega})^n = \frac{\alpha e^{-i\omega}}{(1-\alpha e^{-i\omega})^2} = \frac{\alpha e^{i\omega}}{(e^{i\omega}-\alpha)^2}\end{aligned}$$

όπως προκύπτει μετά από απλές μαθηματικές πράξεις και χρησιμοποιώντας την κατάλληλη έκφραση από το μαθηματικό τυπολόγιο (δείτε τον Πίνακα 6.2).

Άσκηση 0.8 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της διακριτής ακολουθίας $x[n]$ η οποία ορίζεται ως*

$$x[n] = -\alpha^n u[-(n+1)], \quad |\ \alpha\ | < 1$$

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε

$$\mathcal{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n e^{-i\omega n}u[-(n+1)]$$

Από την εξίσωση ορισμού της βηματικής συνάρτησης προκύπτει εύκολα ότι

$$u[-(n+1)] = \begin{cases} 1 & n \le -1 \\ 0 & n > -1 \end{cases}$$

και η παραπάνω σχέση θα λάβει τη μορφή

$$\mathcal{X}(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n (e^{-i\omega})^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} (\alpha e^{-i\omega})^n$$

Στο επόμενο βήμα της διαδικασίας προχωρούμε σε αλλαγή του δείκτη του αθροίσματος από n σε $m = -n$. Για $n = -1$ θα είναι $m = 1$ ενώ για $n = -\infty$ θα είναι $m = \infty$ και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\omega) &= \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha e^{-i\omega})^{-m} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega}}{\alpha}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega}}{\alpha}\right)^m - \left(\frac{e^{i\omega}}{\alpha}\right)^m \Big|_{m=0} = \\ &= \frac{1}{1-(e^{i\omega}/\alpha)} - 1 = \frac{e^{i\omega}}{\alpha - e^{i\omega}} = \frac{1}{\alpha e^{-i\omega} - 1}\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την εκθετική συνάρτηση του παρονομαστή σύμφωνα με τον τύπο του Euler προκύπτει αμέσως ότι

$$\mathcal{X}(\omega) = \frac{1}{(\alpha\cos\omega - 1) - i\sin\omega}$$

και εργαζόμενοι όπως στην Άσκηση 9.3.1 διαπιστώνουμε πως το μέτρο και η φάση της συνάρτησης $\mathcal{X}(\omega)$ θα έχουν τη μορφή

$$|\ \mathcal{X}(\omega)\ | = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2 - 2\alpha\cos\omega}} \quad \text{και} \quad \measuredangle\mathcal{X}(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha\sin\omega}{\alpha\cos\omega - 1}\right)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.9 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της διακριτής ακολουθίας $x[n]$ η οποία ορίζεται ως*

$$x[n] = [\alpha^n \sin(\omega_0 n) + \beta^n]u[n], \quad |\ \alpha\ | < 1, |\ \beta\ | < 1$$

Λύση: Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση του ημιτόνου σύμφωνα με τον τύπο του Euler, το διακριτό σήμα $x[n]$ διατυπώνεται ως

$$x[n] = \left(\alpha^n \frac{e^{i\omega_0 n} - e^{-i\omega_0 n}}{2i} + \beta^n\right)u[n] = \left[\frac{1}{2i}(\alpha e^{i\omega_0})^n - \frac{1}{2i}(\alpha e^{-i\omega_0})^n + \beta^n\right]u[n]$$

και από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\alpha e^{i\omega_0})^n e^{-i\omega n}u[n] - \frac{1}{2i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\alpha e^{-i\omega_0})^n e^{-i\omega n}u[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\beta^n u[n] = \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha e^{-i(\omega-\omega_0)n}\right] - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha e^{-i(\omega+\omega_0)n}\right]^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\beta e^{-i\omega})^n \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη έκφραση από το μαθηματικό τυπολόγιο προκύπτει εύκολα ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha e^{-i(\omega-\omega_0)n}\right]^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-i(\omega-\omega_0)}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha e^{-i(\omega+\omega_0)n}\right]^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-i(\omega+\omega_0)}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\beta e^{-i\omega})^n = \frac{1}{1-\beta e^{-i\omega}}$$

και αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση του μετασχηματισμού Fourier οδηγούμαστε στην έκφραση

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{1-\alpha e^{-i(\omega-\omega_0)}} - \frac{1}{1-\alpha e^{-i(\omega+\omega_0)}}\right\} + \frac{1}{1-\beta e^{-i\omega}} = \\ = &= \frac{1-\alpha(\sin\omega_0 + 2\cos\omega_0)e^{-i\omega} + \alpha(\alpha+\beta\sin\omega_0)e^{-2i\omega}}{(1-2\alpha\cos\omega_0 e^{-i\omega} + \alpha^2 e^{-2i\omega})(1-\beta e^{-i\omega})} \end{aligned}$$

- όπως προκύπτει εύκολα μετά από απλές μαθηματικές πράξεις - που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.10 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής συνάρτησης $\delta[n]$ η οποία ως γνωστόν ορίζεται ως*

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier και της διακριτής κρουστικής συνάρτησης προκύπτει αμέσως ότι

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]e^{-i\omega n} = \delta[n]e^{-i\omega n}\Big|_{n=0} = 1$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως το συμπέρασμα πως *ο μετασχηματισμός Fourier της διακριτής κρουστικής συνάρτησης έχει μοναδιαίο πλάτος και μηδενική φάση για όλες τις συχνότητες που ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, +\pi)$.*

Άσκηση 0.11 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της χρονικώς μετατοπισμένης κρουστικής συνάρτησης $\delta[n-n_0]$ η οποία ως γνωστόν ορίζεται ως*

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1 & n = n_0 \\ 0 & n \neq n_0 \end{cases}$$

Λύση: Σε πλήρη αναλογία με την προηγούμενη περίπτωση θα έχουμε

$$\mathcal{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0]e^{-i\omega n} = \delta[n]e^{-i\omega n}\Big|_{n=n_0} = e^{-i\omega n_0}$$

Επομένως, στην προκειμένη περίπτωση *το μέτρο του μετασχηματισμού είναι όπως και πρίν ίσο με τη μονάδα, αλλά η φάση του είναι πλέον μη μηδενική και ανάλογη της συχνότητας για όλες τις συχνότητες που ανήκουν στο διάστημα* $(-\pi, +\pi)$.

Άσκηση 0.12 *Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης*

$$\mathcal{X}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\,\omega\,| \leq W \\ 0 & W <|\,\omega\,| \leq \pi \end{cases}$$

Λύση: Από την εξίσωση σύνθεσης του μετασχηματισμού Fourier προκύπτει αμέσως ότι

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{X}(\omega)e^{i\omega n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{+W} e^{i\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{iWn}-e^{-iWn}}{in}\right] = \\ &= \frac{1}{\pi n}\frac{e^{iWn}-e^{-iWn}}{2i} = \frac{\sin(Wn)}{\pi n} \end{aligned}$$

Άσκηση 0.13 *Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης* $\mathcal{X}(\omega) = \cos^2\omega$.

Λύση: Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση του συνημιτόνου από τον τύπο του Euler θα λάβουμε

$$\mathcal{X}(\omega) = \cos^2\omega = \left(\frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2i\omega} + \frac{1}{4}e^{-2i\omega} + \frac{1}{2}$$

και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της γραμμικότητας που επίσης χαρακτηρίζει τον αντίστροφο μετασχηματισμό, προκύπτει εύκολα ότι

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}(\omega)\} = \frac{1}{4}\mathcal{F}^{-1}\{e^{2i\omega}\} + \frac{1}{4}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-2i\omega}\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Αλλά από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης για την τιμή $n_0 = 2$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{e^{2i\omega}\} &= e^{2i\omega}\mathcal{F}\{1\} = \delta[n]\Big|_{n\to n+2} = \delta[n+2] \\ \mathcal{F}^{-1}\{e^{-2i\omega}\} &= e^{-2i\omega}\mathcal{F}\{1\} = \delta[n]\Big|_{n\to n-2} = \delta[n-2] \end{aligned}$$

ενώ ακόμη θα είναι

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \frac{1}{2}\delta[n]$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην εξίσωση ορισμού της συνάρτησης $x[n]$ προκύπτει εύκολα ότι

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{\cos^2\omega\} = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n+2] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.14 *Να προσδιοριστεί η απόκριση ενός διακριτού συστήματος LTI στα στοιχειώδη τριγωνομετρικά σήματα* $x_1[n] = A\cos(\omega n)$ *και* $x_2[n] = A\sin(\omega n)$.

Λύση: Για την επίλυση της άσκησης θα χρησιμοποιήσουμε *την ιδιότητα των ιδιοτιμών* μαζί με την *αρχή της επαλληλίας*. Σύμφωνα με την πρώτη ιδιότητα, οι αποκρίσεις ενός συστήματος LTI στα στοιχειώδη εκθετικά σήματα $\kappa_1[n] = Ae^{i\omega n}$ και $\kappa_2[n] = Ae^{-i\omega n}$ θα έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \lambda_1[n] &= \mathcal{H}(\omega)\kappa_1[n] = A\,|\,\mathcal{H}(\omega)\,|\,e^{i\omega n}e^{i\measuredangle\mathcal{H}(\omega)} \quad \text{και} \\ \lambda_2[n] &= \mathcal{H}(\omega)\kappa_2[n] = A\,|\,\mathcal{H}(\omega)\,|\,e^{-i\omega n}e^{i\measuredangle\mathcal{H}(\omega)} \end{aligned}$$

όπου αντικαταστήσαμε τη συνάρτηση απόκρισης συχνότητας από την εκθετική της μορφή και κάναμε χρήση των ιδιοτήτων συμμετρίας $\mid \mathcal{H}(-\omega) \mid = \mid \mathcal{H}(\omega) \mid$ και $\measuredangle\mathcal{H}(-\omega) = -\measuredangle\mathcal{H}(\omega)$. Χρησιμοποιώντας τώρα την *αρχή της επαλληλίας* μπορούμε να διατυπώσουμε τον ισχυρισμό πως η απόκριση του συστήματος στο γραμμικό συνδυασμό

$$x_1[n] = \cos(\omega n) = \frac{1}{2}e^{i\omega n} + \frac{1}{2}e^{-i\omega n} = \frac{1}{2}\kappa_1[n] + \frac{1}{2}\kappa_2[n]$$

θα είναι το σήμα

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \frac{1}{2}\lambda_1[n]+\frac{1}{2}\lambda_2[n]=\frac{1}{2}A \mid \mathcal{H}(\omega) \mid e^{i\omega n}e^{i\measuredangle\mathcal{H}(\omega)}+\frac{1}{2}A \mid \mathcal{H}(\omega) \mid e^{-i\omega n}e^{i\measuredangle\mathcal{H}(\omega)} = \\ &= A \mid \mathcal{H}(\omega) \mid \frac{e^{i[\omega n+\measuredangle\mathcal{H}(\omega)]}+e^{-i[\omega n+\measuredangle\mathcal{H}(\omega)]}}{2} = A \mid \mathcal{H}(\omega) \mid \cos(\omega n+\measuredangle\mathcal{H}(\omega)) \end{aligned}$$

ενώ αντίστοιχα, η απόκριση του συστήματος στο γραμμικό συνδυασμό

$$x_2[n] = \sin(\omega n) = \frac{1}{2i}e^{i\omega n} - \frac{1}{2i}e^{-i\omega n} = \frac{1}{2}\kappa_1[n] - \frac{1}{2}\kappa_2[n]$$

θα είναι το σήμα

$$\begin{aligned} y_2[n] &= \frac{1}{2i}\lambda_1[n]-\frac{1}{2i}\lambda_2[n]=\frac{1}{2i}A\mid \mathcal{H}(\omega) \mid e^{i\omega n}e^{i\measuredangle\mathcal{H}(\omega)}-\frac{1}{2i}A\mid \mathcal{H}(\omega) \mid e^{-i\omega n}e^{i\measuredangle\mathcal{H}(\omega)} = \\ &= A \mid \mathcal{H}(\omega) \mid \frac{e^{i[\omega n+\measuredangle\mathcal{H}(\omega)]}-e^{-i[\omega n+\measuredangle\mathcal{H}(\omega)]}}{2i} = A \mid \mathcal{H}(\omega) \mid \sin(\omega n+\measuredangle\mathcal{H}(\omega)) \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.15 *Να προσδιοριστεί η συχνοτική απόκριση του διακριτού αναδρομικού συστήματος LTI που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών*

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

Λύση: Λαμβάνοντας το *μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου* και των δύο μελών της παραπάνω εξίσωσης θα λάβουμε

$$\mathcal{F}\{y[n]\} - \frac{1}{2}\mathcal{F}\{y[n-1]\} = \mathcal{F}\{x[n]\} + 2\mathcal{F}\{x[n-1]\} + \mathcal{F}\{x[n-2]\}$$

Είναι όμως $\mathcal{F}\{y[n]\} = \mathcal{Y}(\omega)$ και $\mathcal{F}\{x[n]\} = \mathcal{X}(\omega)$ ενώ από την *ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης* του μετασχηματισμού προκύπτει εύκολα ότι

$$\mathcal{F}\{y[n-1]\} = e^{-i\omega}y[n], \quad \mathcal{F}\{x[n-1]\} = e^{-i\omega}x[n], \quad \mathcal{F}\{x[n-2]\} = e^{-2i\omega}x[n]$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις παραστάσεις στην αρχική μας εξίσωση αυτή θα λάβει τη μορφή

$$\mathcal{Y}(\omega) - \frac{1}{2}e^{-i\omega}\mathcal{Y}(\omega) = \mathcal{X}(\omega) + 2e^{-i\omega}\mathcal{X}(\omega) + e^{-2i\omega}\mathcal{X}(\omega)$$

από όπου τελικά θα λάβουμε

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{\mathcal{Y}(\omega)}{\mathcal{X}(\omega)} = \frac{1 + 2e^{-i\omega} + e^{-2i\omega}}{1 - (1/2)e^{-i\omega}}$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα (για το συνεχές ανάλογο αυτής της μεθόδου, δείτε την Άσκηση 3.4.7).

Άσκηση 0.16 *Να προσδιοριστεί η συχνοτική και η κρουστική απόκριση του διακριτού αναδρομικού συστήματος LTI που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών*

$$y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

Λύση: Λαμβάνοντας το *μετασχηματισμό Fourier* των δύο μελών της εξίσωσης διαφορών και χρησιμοποιώντας την *ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης*, η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$\mathcal{Y}(\omega) - \frac{1}{6}e^{-i\omega}\mathcal{Y}(\omega) - \frac{1}{6}e^{-2i\omega}\mathcal{Y}(\omega) = \mathcal{X}(\omega)$$

και επομένως η συχνοτική απόκριση του συστήματος θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{\mathcal{Y}(\omega)}{\mathcal{X}(\omega)} = \frac{1}{1-(1/6)e^{-i\omega}-(1/6)e^{-2i\omega}}$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την *κρουστική απόκριση* του συστήματος θα πρέπει να προσδιορίσουμε τον *αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier* της παραπάνω σχέσης. Αναπτύσσοντας τη συνάρτηση $\mathcal{H}(\omega)$ σε άθροισμα μερικών κλασμάτων προκύπτει εύκολα ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\omega) &= \frac{1}{1-(1/6)e^{-i\omega}-(1/6)e^{-2i\omega}} = \frac{1}{1-(1/2)e^{-i\omega}}\frac{1}{1+(1/3)e^{-2i\omega}} = \\ &= \frac{3}{5}\frac{1}{1-(1/2)e^{-i\omega}} + \frac{2}{5}\frac{1}{1+(1/3)e^{-i\omega}}\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της παραπάνω σχέσης και ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών, η *κρουστική απόκριση* του θεωρούμενου διακριτού συστήματος LTI υπολογίζεται ως

$$h[n] = \frac{3}{5}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1-(1/2)e^{-i\omega}}\right\} + \frac{2}{5}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+(1/3)e^{-i\omega}}\right\} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.17 *Να προσδιοριστεί η εξίσωση διαφορών του διακριτού αναδρομικού συστήματος LTI η συχνοτική απόκριση του οποίου δίδεται από τη σχέση*

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{1-(1/2)e^{-i\omega}+e^{-3i\omega}}{1+(1/2)e^{-i\omega}+(3/4)e^{-2i\omega}}$$

Λύση: Στην προκειμένη περίπτωση, η μεθοδολογία που ακολουθούμε είναι *η αντίστροφη της προηγούμενης*. Διατυπώνοντας τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος με τη μορφή

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{\mathcal{Y}(\omega)}{\mathcal{X}(\omega)} = \frac{1-(1/2)e^{-i\omega}+e^{-3i\omega}}{1+(1/2)e^{-i\omega}+(3/4)e^{-2i\omega}}$$

προκύπτει αμέσως ότι

$$\mathcal{Y}(\omega) + \frac{1}{2}e^{-i\omega}\mathcal{Y}(\omega) + \frac{3}{4}e^{-2i\omega}\mathcal{Y}(\omega) = \mathcal{X}(\omega) - \frac{1}{2}e^{-i\omega}\mathcal{X}(\omega) + e^{-3i\omega}\mathcal{X}(\omega)$$

Λαμβάνοντας τον *αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier* των δύο μελών της παραπάνω σχέσης αυτή γράφεται με τη μορφή

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{Y}(\omega)\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-i\omega}\mathcal{Y}(\omega)\} + \frac{3}{4}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-2i\omega}\mathcal{Y}(\omega)\} &= \\ \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}(\omega)\} - \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-i\omega}\mathcal{X}(\omega)\} + \mathcal{F}^{-1}\{e^{-3i\omega}\mathcal{X}(\omega)\}&\end{aligned}$$

Είναι όμως $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{Y}(\omega)\} = y[n]$ και $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}(\omega)\} = x[n]$ ενώ από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης του μετασχηματισμού θα πάρουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-i\omega}\mathcal{Y}(\omega)\} &= y[n-1], \quad \mathcal{F}^{-1}\{e^{-2i\omega}\mathcal{Y}(\omega)\} = y[n-2], \\ \mathcal{F}^{-1}\{e^{-i\omega}\mathcal{X}(\omega)\} &= x[n-1], \quad \mathcal{F}^{-1}\{e^{-3i\omega}\mathcal{Y}(\omega)\} = x[n-3]\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις παραστάσεις στην τελευταία σχέση αυτή γράφεται ως

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{3}{4}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] + x[n-3]$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση διαφορών του συστήματος (για το συνεχές ανάλογο αυτής της μεθόδου δείτε την Άσκηση 3.4.6).

Άσκηση 0.18 *Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier να προσδιορίσετε την έξοδο του συστήματος $y[n]$ με κρουστική απόκριση της μορφής $h[n] = 5(-1/2)^n u[n]$ όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί το διακριτό σήμα $x[n] = (1/3)^n u[n]$.*

Λύση: Για την επίλυση της άσκησης θα προσδιορίσουμε το *μετασχηματισμό Fourier* της εξόδου του συστήματος η οποία σύμφωνα με το *θεώρημα της συνέλιξης* θα έχει τη μορφή $\mathcal{Y}(\omega) = \mathcal{H}(\omega)\mathcal{X}(\omega)$ και στη συνέχεια τη ζητούμενη έξοδο ως τον αντίστροφο μετασχηματισμό $y[n] = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{Y}(\omega)\}$. Αρχικά ας υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς Fourier των διακριτών σημάτων $h[n]$ και $x[n]$ οι οποίοι όπως εύκολα αποδεικνύεται έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 5\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n u[n]e^{-i\omega n} = 5\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{1}{2}e^{-i\omega}\Big)^n = \frac{5}{1+(1/2)e^{-i\omega}}\\ \mathcal{X}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n u[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{3}e^{-i\omega}\Big)^n = \frac{1}{1-(1/3)e^{-i\omega}}\end{aligned}$$

Επομένως ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του συστήματος θα δίδεται σύμφωνα με το *θεώρημα της συνέλιξης* από τη σχέση

$$\mathcal{Y}(\omega)=\mathcal{H}(\omega)\mathcal{X}(\omega)=\frac{5}{[1+(1/2)e^{-i\omega}][1-(1/3)e^{-i\omega}]}=\frac{3}{1+(1/2)e^{-i\omega}}+\frac{2}{1-(1/3)e^{-i\omega}}$$

όπου για την εξαγωγή της τελευταίας έκφρασης αναπτύξαμε κατά τα γνωστά τη συνάρτηση $\mathcal{Y}(\omega)$ σε *σειρά μερικών κλασμάτων*. Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό της τελευταίας σχέσης καταλήγουμε στην έκφραση

$$y[n] = 3\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n u[n] + 2\Big(\frac{1}{3}\Big)^n u[n]$$

- όπως προκύπτει εύκολα ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών - που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα (για το συνεχές ανάλογο αυτής της μεθόδου δείτε την Άσκηση 3.4.3).

Άσκηση 0.19 *Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier να προσδιορίσετε την έξοδο του συστήματος $y[n]$ με κρουστική απόκριση της μορφής*

$$h[n] = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \cos\Big(\frac{\pi n}{2}\Big)u[n]$$

όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί το διακριτό σήμα $x[n] = \cos(\pi n/2)$.

Λύση: Στην προκειμένη περίπτωση, αντί να ακολουθήσουμε τη μεθοδολογία της προηγούμενης άσκησης (κάτι το οποίο ενθαρρύνεται να πράξει ο αναγνώστης προκειμένου να επιλύσει την άσκηση με ένα διαφορετικό τρόπο), θα στηριχθούμε στο γεγονός πως *οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αποτελούν ιδιοτιμές ενός διακριτού συστήματος LTI*. Αρχικά θα πρέπει να υπολογίσουμε όπως και πριν, τη συχνοτική απόκριση του συστήματος. Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση του συνημιτόνου από τον τύπο του Euler, η κρουστική απόκριση του συστήματος λαμβάνει τη μορφή

$$h[n] = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n (e^{i\pi n/2} + e^{-i\pi n/2})u[n]$$

και η *συνάρτηση απόκρισης συχνότητας* υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-i\omega n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}e^{i\pi/2}e^{-i\omega}\Big)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}e^{-i\pi/2}e^{-i\omega}\Big)^n =\\ &= \frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{1-(1/2)e^{i\pi/2}e^{-i\omega}}\Big\} + \frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{1-(1/2)e^{-i\pi/2}e^{-i\omega}}\Big\}\end{aligned}$$

Στο επόμενο βήμα της διαδικασίας χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler για τη συνάρτηση του συνημιτόνου μπορούμε να διατυπώσουμε το σήμα εισόδου $x[n]$ με τη μορφή

$$x[n] = \cos\Big(\frac{\pi n}{2}\Big) = \frac{1}{2}e^{i\pi n/2} + \frac{1}{2}e^{-i\pi n/2} = \frac{1}{2}x_1[n] + \frac{1}{2}x_2[n]$$

δηλαδή ως ένα γραμμικό συνδυασμό των μιγαδικών εκθετικών σημάτων

$$x_1[n] = e^{i\omega_1 n} = e^{i\pi n/2} \quad \text{και} \quad x_2[n] = e^{i\omega_2 n} = e^{-i\pi n/2}$$

με τιμές συχνότητας $\omega_1 = \pi/2$ και $\omega_2 = -\pi/2$. Στην περίπτωση αυτή, σύμφωνα με τη θεωρία περί *ιδιοσυναρτήσεων* και *ιδιοτιμών* που παραθέσαμε συνοπτικά στην Ενότητα 9.4, οι αποκρίσεις του συστήματος στις στοιχειώδεις εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ θα έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \mathcal{H}(\omega_1)e^{i\omega_1 n} = \frac{4}{3}e^{i\pi n/2} \quad \text{και} \\ y_2[n] &= \mathcal{H}(\omega_2)e^{i\omega_2 n} = \frac{4}{3}e^{-i\pi n/2} \end{aligned}$$

- αφού εύκολα αποδεικνύεται ότι $\mathcal{H}(\omega_1) = \mathcal{H}(\omega_2) = 4/3$ - και σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας που χαρακτηρίζει το θεωρούμενο γραμμικό σύστημα, η έξοδός του υπολογίζεται ως

$$y[n] = \frac{1}{2}y_1[n] + \frac{1}{2}y_2[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}e^{i\pi n/2} + \frac{4}{3}e^{-i\pi n/2}\right) = \frac{4}{3}\frac{e^{i\pi n/2} + e^{-i\pi n/2}}{2} = \frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.20 *Θεωρώντας ενα συνεχές σήμα της μορφής* $x(t) = 5\cos(200\pi t)$, *να προσδιορίσετε το διακριτό σήμα που θα προκύψει από τη δειγματοληψία του παραπάνω σήματος με συχνότητες* $F_{s1} = 300$ *Hz και* $F_{s2} = 800$ *Hz.*

Λύση: Εάν συγκρίνουμε την εξίσωση του συνεχούς σήματος $x(t)$ με τη γενική εξίσωση του απλού συνημιτονοειδούς σήματος

$$x(t) = A\cos(2\pi Ft + \varphi)$$

προκύπτει αμέσως ότι $A = 5$, $\varphi = 0°$ και $F = 100$ Hz. Επομένως το διακριτό σήμα που θα προκύψει από διαδικασία δειγματοληψίας με συχνότητα $F_{s1} = 300$ Hz θα έχει τη μορφή

$$x[n] = 5\cos\left(2\pi\frac{100}{300}n\right) = 5\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

ενώ το διακριτό σήμα που θα προκύψει από δειγματοληψία με συχνότητα $F_{s2} = 800$ Hz θα έχει τη μορφή

$$x[n] = 5\cos\left(2\pi\frac{100}{800}n\right) = 5\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

Άσκηση 0.21 *Θεωρώντας το αναλογικό σήμα* $x(t) = 3\cos(100\pi t)$ *να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:*

(α) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί έτσι ώστε να μην εμφανιστεί το φαινόμενο του aliasing;

(β) Θεωρώντας πως το σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα $F_s = 200$ *Hz να προσδιορίσετε το σήμα διακριτού χρόνου που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία.*

(γ) Θεωρώντας πως το σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα $F_s = 75$ *Hz να προσδιορίσετε το σήμα διακριτού χρόνου που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία.*

(δ) Να προσδιοριστεί η συχνότητα F $(0 < F < F_s/2)$ *του ημιτονοειδούς σήματος η δειγματοληψία του οποίου με συχνότητα* $F_s = 75$ *Hz θα οδηγήσει στη δημιουργία του ίδιου διακριτού σήματος με εκείνο του αρχικού αναλογικού σήματος.*

Λύση: (α) Η μαθηματική μορφή του αναλογικού σήματος εισόδου αποδίδεται από την εξίσωση $x(t) = 3\cos(2\pi Ft) = 3\cos(100\pi t)$ από όπου προκύπτει πως η συχνότητά του είναι ίση με $F = 50$ Hz. Επομένως η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να μην εμφανιστεί το φαινόμενο της αναδίπλωσης, είναι $F_s^{min} = 2F = 100$ Hz.

(β) Εάν το παραπάνω σήμα υποστεί δειγματοληψία συχνότητας $F_s = 200$ Hz, το διακριτό σήμα που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία θα δίδεται σύμφωνα με τη θεωρία από τη σχέση

$$x[n] = 3\cos\left(\frac{100}{200}\pi n\right) = 3\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

(γ) Με εντελώς ανάλογο τρόπο, εάν το παραπάνω σήμα υποστεί δειγματοληψία συχνότητας $F_s = 75$ Hz, το διακριτό σήμα που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία θα δίδεται σύμφωνα με τη θεωρία από τη σχέση

$$\begin{aligned} x[n] &= 3\cos\left(\frac{100}{75}\pi n\right) = 3\cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right) = 3\cos\left(-\frac{2n\pi}{3} + 2n\pi\right) = \\ &= 3\cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right) = 3\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

(δ) Λαμβάνοντας υπ′ όψιν πως το διακριτό σήμα που προκύπτει από διαδικασία δειγματοληψίας έχει τη μορφή $x[n] = A\cos(2\pi f_0 n)$, η τελευταία σχέση γράφεται

$$x[n] = 3\cos\left[2\pi\left(\frac{1}{3}\right)n\right] = 3\cos(2\pi f n)$$

από όπου προκύπτει πως η σχετική ή κανονικοποιημένη συχνότητα είναι ίση με $f = F/F_s = 1/3$. Επομένως η συχνότητα F του ημιτονοειδούς σήματος η δειγματοληψία του οποίου θα οδηγήσει στο ίδιο διακριτό σήμα με εκείνο του αρχικού σήματος θα είναι ίση με $F = f * F_s = 75/3 = 25$ Hz ενώ η μαθηματική αναπαράσταση αυτού του σήματος θα είναι η $x(t) = 3\cos(2\pi F t) = 3\cos(50\pi t)$. Παρατηρούμε πως τα αναλογικά σήματα με συχνότητες $F_1 = 50$ Hz και $F_2 = 25$ Hz δίνουν το ίδιο ακριβώς διακριτό σήμα για συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 75$ Hz, ήτοι, το σήμα συχνότητας F_1 θεωρείται *ψευδεπίγραφο* του σήματος συχνότητας F_2.

Άσκηση 0.22 *Θεωρώντας ένα αναλογικό σήμα που περιέχει συχνότητες μέχρι* 10 *KHz να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα:*

(α) Για ποια περιοχή συχνοτήτων δειγματοληψίας είναι δυνατή η πλήρης ανακατασκευή του αναλογικού σήματος από τα διακριτά δείγματά του;

(β) Έστω πως δειγματοληπτούμε το σήμα με συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 8$ KHz. Να εξηγήσετε τί θα συμβεί με τις στοιχειώδεις ημιτονοειδείς κυματομορφές συχνοτήτων $F_1 = 5$ KHz και $F_2 = 9$ KHz.

Λύση: (α) Εφόσον η μέγιστη συχνότητα που περιέχεται στο σήμα είναι η $F_{max} = 10$ KHz, η περιοχή συχνοτήτων δειγματοληψίας για την οποία είναι δυνατή η πλήρης ανακατασκευή του αναλογικού σήματος είναι η $F_s \geq 2F_{max} = 20$ KHz.

(β) Για τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας $F_s = 8$ KHz, η μέγιστη συχνότητα που μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως από τα διακριτά δείγματα θα είναι η $F = 4$ KHz. Επομένως οι συχνότητες $F_1 = 5$ KHz και $F_2 = 9$ KHz αποτελούν *ψευδεπίγραφα μικρότερων συχνοτήτων* που ανήκουν στο διάστημα $[0 - 4]$ KHz. Προκειμένου να προσδιορίσουμε αυτές τις μικρότερες συχνότητες εργαζόμαστε με τον ακόλουθο τρόπο:

(α) Για τη συχνότητα $F_1 = 5$ KHz έχουμε:

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos\left[2\pi\left(\frac{5000}{8000}\right)n\right] = \cos\left[2\pi\left(\frac{5}{8}\right)n\right] = \cos\left(\frac{5\pi n}{4}\right) = \\ &= \cos\left(-\frac{3n\pi}{4} + 2n\pi\right) = \cos\left(-\frac{3n\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Επομένως το ημιτονοειδές σήμα συχνότητας $F_1 = 5$ KHz είναι ψευδεπίγραφο του σήματος συχνότητας $F = 3$ KHz.

Για τη συχνότητα $F_2 = 9$KHz έχουμε:

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos\left[2\pi\left(\frac{9000}{8000}\right)n\right] = \cos\left[2\pi\left(\frac{9}{8}\right)n\right] = \cos\left(\frac{9\pi n}{4}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{n\pi}{4} + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Επομένως το ημιτονοειδές σήμα συχνότητας $F_2 = 5$ KHz είναι ψευδεπίγραφο του σήματος συχνότητας $F = 1$ KHz.

Άσκηση 0.23 *Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων της διακριτής κρουστικής συνάρτησης.*

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier και της διακριτής κρουστικής συνάρτησης προκύπτει αμέσως ότι

$$\mathcal{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(i\frac{2\pi k}{N}n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] \exp\left(i\frac{2\pi k}{N}n\right) = 1$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα (δείτε και την Άσκηση 1.3.7).

Άσκηση 0.24 *Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων της χρονικώς μετατοπισμένης διακριτής κρουστικής συνάρτησης η οποία ορίζεται ως $x[n] = \delta[n - n_0]$ $(0 < n_0 < N)$*

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier και της χρονικώς μετατοπισμένης διακριτής κρουστικής συνάρτησης προκύπτει αμέσως ότι

$$\mathcal{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(i\frac{2\pi k}{N}n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] \exp\left(i\frac{2\pi k}{N}n\right) = \exp\left(i\frac{2\pi k}{N}n_0\right)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα (δείτε και την Άσκηση 1.3.8).

Άσκηση 0.25 *Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων του ορθογώνιου διακριτού σήματος $x[n] = u[n] - u[n - N]$ όπου $u[n]$ είναι η διακριτή μοναδιαία συνάρτηση βήματος.*

Λύση: Από τον ορισμό της διακριτής συνάρτησης βήματος θα έχουμε

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad u[n-N] = \begin{cases} 1 & n \geq N \\ 0 & n < N \end{cases}$$

και από την εξίσωση ορισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier θα λάβουμε

$$\mathcal{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}n\right) = \frac{1 - e^{-i2\pi k}}{1 - \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}\right)} = 0$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για $k \neq 0$ ενώ για $k = 0$ προκύπτει εύκολα ότι $\mathcal{X}(0) = N$.

Άσκηση 0.26 *Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων του διακριτού σήματος $x[n] = \alpha^n$ $(0 \leq n \leq N-1)$.*

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier προκύπτει αμέσως ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\alpha \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}\right)\right]^n = \\ &= \frac{1 - \left[\alpha \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}\right)\right]^N}{1 - \alpha \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}\right)} = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}\right)} \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.27 *Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων του διακριτού σήματος*

$$u[n] = \begin{cases} e^{i\omega_0 n} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \textit{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

και να αποδειχθεί πως αυτός προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου $\mathcal{X}(\omega)$ για τιμές συχνότητας $\omega = 2\pi k/N$.

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier και χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία της Άσκησης 9.2.6 προκύπτει εύκολα ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\Big(-i\frac{2\pi k}{N}n\Big) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\omega_0 n}\exp\Big(-i\frac{2\pi k}{N}n\Big) = \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\exp\Big[-i\Big(\frac{2k\pi}{N}-\omega_0\Big)n\Big] = \frac{1-\exp\Big[-i\Big(\frac{2k\pi}{N}-\omega_0\Big)N\Big]}{1-\exp\Big[-i\Big(\frac{2k\pi}{N}-\omega_0\Big)\Big]} = \\
&= \exp\Big[-i\Big(\frac{2k\pi}{N}-\omega_0\Big)\Big(\frac{N-1}{2}\Big)\Big]\frac{\sin\Big[\Big(\frac{2k\pi}{N}-\omega_0\Big)\frac{N}{2}\Big]}{\sin\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{2k\pi}{N}-\omega_0\Big)\Big]}
\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του διακριτού σήματος $x[n]$ υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\omega_0 n}e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(\omega-\omega_0)n} = \frac{1-e^{-i(\omega-\omega_0)N}}{1-e^{-i(\omega-\omega_0)}} = \\
&= \exp\Big[-i(\omega-\omega_0)\Big(\frac{N-1}{2}\Big)\Big]\frac{\sin\Big[(\omega-\omega_0)\frac{N}{2}\Big]}{\sin\Big(\frac{\omega-\omega_0}{2}\Big)}
\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις των μετασχηματισμών $\mathcal{X}(\omega)$ και $\mathcal{X}(k)$ διαπιστώνουμε αμέσως πως η δεύτερη συνάρτηση προκύπτει από την πρώτη για τιμές συχνότητας $\omega_k = 2\pi k/N$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$), διαπίστωση που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Άσκηση 0.28 *Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων του διακριτού σήματος* $x[n] = \exp(i2\pi k_0 n/N)$ $(0 \le n \le N-1)$.

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier προκύπτει αμέσως ότι

$$\mathcal{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\exp\Big(-i\frac{2\pi k}{N}n\Big)=\sum_{n=0}^{N-1}\exp\Big[-i\frac{2\pi}{N}(k-k_0)n\Big]=\frac{1-\exp[-i2\pi(k-k_0)]}{1-\exp\Big[-i\frac{2\pi}{N}(k-k_0)\Big]}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς, πως για $k \neq k_0$ η εκθετική παράσταση του αριθμητή είναι ίση με τη μονάδα και επομένως θα είναι $\mathcal{X}(k) = 0$, ενώ για $k = k_0$ η παραπάνω σχέση λαμβάνει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Εφαρμόζοντας λοιπόν τον *κανόνα του Del' Hospital* θα λάβουμε

$$\mathcal{X}(k) = \lim_{k\to k_0}\frac{d}{dk}\left\{\frac{1-\exp[-i2\pi(k-k_0)]}{1-\exp\Big[-i\frac{2\pi}{N}(k-k_0)\Big]}\right\} = \left.\frac{i2\pi\exp[-i2\pi(k-k_0)]}{\frac{i2\pi}{N}\exp\Big[-i\frac{2\pi}{N}(k-k_0)\Big]}\right|_{k=k_0} = N$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα θα λάβουμε

$$\mathcal{X}(k) = \begin{cases} 0 & k \neq k_0 \\ N & k = k_0 \end{cases} = N\begin{cases} 0 & k \neq k_0 \\ 1 & k = k_0 \end{cases} = N\delta[k-k_0]$$

που είναι και το ζητούμενο.

Άσκηση 0.29 *Να προσδιοριστεί η κυκλική συνέλιξη ανάμεσα στα διακριτά σήματα* $x[n] = \{\mathbf{2}, 1, 2, 1\}$ *και* $y[n] = \{\mathbf{1}, 2, 3, 4\}$.

Λύση: Παρατηρούμε πως οι διακριτές ακολουθίες $x[n]$ και $y[n]$ έχουν μήκος $N = 4$ δείγματα· εφαρμόζοντας λοιπόν την εξίσωση ορισμού της *κυκλικής συνέλιξης* για αυτή την τιμή του N θα λάβουμε

$$z[n] = \sum_{m=0}^{3} x[m]y[((n-m))_4], \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως η μεταβλητή m παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, 3$, είναι προφανές πως θα πρέπει να προσδιορίσουμε τα περιεχόμενα των χρονικώς μετατοπισμένων διακριτών σημάτων $y[((n-0))_4]$, $y[((n-1))_4]$, $y[((n-2))_4]$ και $y[((n-3))_4]$. Εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του Παραδείγματος 1.5.4 διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$\begin{aligned} y[((n-0))_4] &= \{\mathbf{1}, 2, 3, 4\} \qquad & y[((n-1))_4] &= \{\mathbf{2}, 3, 4, 1\} \\ y[((n-2))_4] &= \{\mathbf{3}, 4, 1, 2\} \qquad & y[((n-3))_4] &= \{\mathbf{4}, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των τιμών $z[n]$ θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το σήμα $x[n]$ δείγμα προς δείγμα με τα τέσσερα παραπάνω διακριτά σήματα και να προσθέσουμε τα επιμέρους γινόμενα. Για λόγους ευκολίας της γραφής θα υιοθετήσουμε το συμβολισμό

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \times \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Αναλυτικά λοιπόν θα έχουμε

$$\begin{aligned} \text{για } n = 0: &\quad z[0] = \{2, 1, 2, 1\} \times \{1, 2, 3, 4\} = 2 + 2 + 6 + 4 = 14 \\ \text{για } n = 1: &\quad z[1] = \{2, 1, 2, 1\} \times \{2, 3, 4, 1\} = 4 + 3 + 8 + 1 = 16 \\ \text{για } n = 2: &\quad z[2] = \{2, 1, 2, 1\} \times \{3, 4, 1, 2\} = 6 + 4 + 2 + 2 = 14 \\ \text{για } n = 3: &\quad z[3] = \{2, 1, 2, 1\} \times \{4, 1, 2, 3\} = 8 + 1 + 4 + 3 = 16 \end{aligned}$$

Επομένως η κυκλική συνέλιξη των διακριτών σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ είναι το διακριτό σήμα $z[n] = \{\mathbf{14}, 16, 14, 16\}$ που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα. Είναι προφανές, πως δεν έχει νόημα να συνεχίσουμε τη διαδικασία για τιμές $n > 3$, αφού θα παίρνουμε συνεχώς την ακολουθία των τεσσάρων παραπάνω αριθμών κάτι που βέβαια είναι αναμενόμενο.

Άσκηση 0.30 *Να προσδιοριστεί η κυκλική συνέλιξη ανάμεσα στα διακριτά σήματα που ορίζονται από τις σχέσεις*

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \quad \textit{και} \quad y[n] = 2^n \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

Λύση: Ακολουθώντας τη μεθοδολογία της προηγούμενης άσκησης θα υπολογίσουμε την *κυκλική συνέλιξη* από τη γενική εξίσωση ορισμού της, για μήκος διακριτών ακολουθιών $N = 4$. Θα είναι λοιπόν

$$z[n] = \sum_{m=0}^{3} x[m]y[((n-m))_4], \quad n = 0, 1, 2, 3$$

με τις διακριτές ακολουθίες $x[n]$ και $y[n]$ να έχουν τις τιμές $x[n] = \{\mathbf{1}, 0, -1, 0\}$ και $y[n] = \{\mathbf{1}, 2, 4, 8\}$ όπως προκύπτει αμέσως αντικαθιστώντας τις τιμές $n = 0, 1, 2, 3$ στις εξισώσεις ορισμού τους. Στην προκειμένη περίπτωση, οι χρονικώς μετατοπισμένες ακολουθίες υπολογίζονται ως

$$\begin{aligned} y[((n-0))_4] &= \{\mathbf{1}, 2, 4, 8\} \qquad & y[((n-1))_4] &= \{\mathbf{2}, 4, 8, 1\} \\ y[((n-2))_4] &= \{\mathbf{4}, 8, 1, 2\} \qquad & y[((n-3))_4] &= \{\mathbf{8}, 1, 2, 4\} \end{aligned}$$

και επομένως θα έχουμε

$$\begin{aligned} \text{για } n = 0: &\quad z[0] = \{1, 0, -1, 0\} \times \{1, 2, 4, 8\} = 1 - 4 = -3 \\ \text{για } n = 1: &\quad z[1] = \{1, 0, -1, 0\} \times \{2, 4, 8, 1\} = 2 - 8 = -6 \\ \text{για } n = 2: &\quad z[2] = \{1, 0, -1, 0\} \times \{4, 8, 1, 2\} = 4 - 1 = +3 \\ \text{για } n = 3: &\quad z[3] = \{1, 0, -1, 0\} \times \{8, 1, 2, 4\} = 8 - 2 = +6 \end{aligned}$$

Επομένως η κυκλική συνέλιξη των διακριτών σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ είναι το διακριτό σήμα $z[n] = \{\mathbf{-3}, -6, +3, +6\}$ που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα. Η άσκηση αυτή θα επιλυθεί και στην επόμενη ενότητα δια της εφαρμογής του θεωρήματος της συνέλιξης του διακριτού μετασχηματισμού.