1 - Εργαλεία ανάλυσης συστημάτων

1) Προσδιορισμός κρουστικής, βηματικής και συχνοτικής απόκρισης
2) Επίλυση διαφορικής εξίσωσης - συσχέτιση εισόδου-εξόδου
3) Λογικά διαγράμματα και γραφήματα ροής σημάτων
4) Ολοκληρώματα συνέλιξης για συστήματα LTI
5) Συνάρτηση μεταφοράς.

ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑ περιορίζονται στη συσχέτιση εισόδου (εξόδου και ΔΕΝ εισχωρούν στην εσωτερική δομή

Χώρος κατάστασης και μεταβλητές κατάστασης

$$q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)$$

Ορισμός μεταβλητών κατάστασης

Η απόκριση του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή t εξαρτάται από τις εισόδους του συστήματος για το χρονικό διάστημα από το $-\infty$ έως την t:

Ολοκλήρωμα συνέλιξης

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Είναι τώρα

$$y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{t_0} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{y(t,t_0)} + \int_{t_0}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Εάν το σύστημα τη χρονική στιγμή $t=t_0$ βρισκόταν σε κατάσταση ηρεμίας, θα είναι $y(t,t_0)=0$ και είναι δυνατός ο υπολογισμός της $y(t)$ για $t>t_0$.

Ορισμοί

Αρχική κατάσταση

Το σύνολο των αρχικών συνθηκών του συστήματος τη χρονική στιγμή $t = t_0$

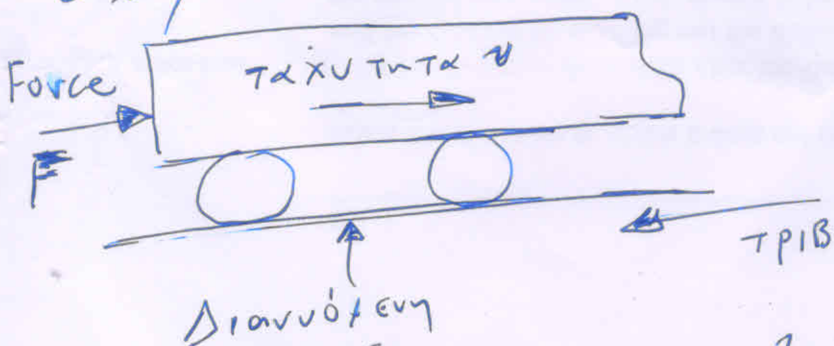
Καταστατικές μεταβλητές

Η ελάχιστη ποσότητα πληροφορίας (δηλαδή το ελάχιστο πλήθος μεταβλητών) που θα πρέπει να γνωρίζουμε για το σύστημα ώστε οι τιμές τους τη χρονική στιγμή $t = t_0$ να είναι επαρκείς για τον καθορισμό της συμπεριφοράς του συστήματος για χρονικές στιγμές $t \geq t_0$ εφόσον το σήμα εισόδου $x(t)$ είναι γνωστό.

- Η επιλογή των καταστατικών μεταβλητών **ΔΕΝ** είναι γνωστή.
- Το ελάχιστο πλήθος των καταστατικών μεταβλητών θα πρέπει να ταυτίζεται με την τάξη της διαφ. εξίσωσ
- Οι καταστατικές μεταβλητές θα πρέπει να είναι γραμμικώς ανεξάρτητες μεταξύ τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Όχημα κινούμενο σε επίπεδο



$$x(t) = vt + \frac{1}{2} a t^2 + x_0$$

$$a = v'(t) = x''(t)$$

$$a = \frac{F}{m} - F_{τριβ} = \frac{F}{m} - kv$$

Ορισμοί

Αρχική κατάσταση

Το σύνολο των αρχικών συνθηκών του συστήματος τη χρονική στιγμή $t = t_0$

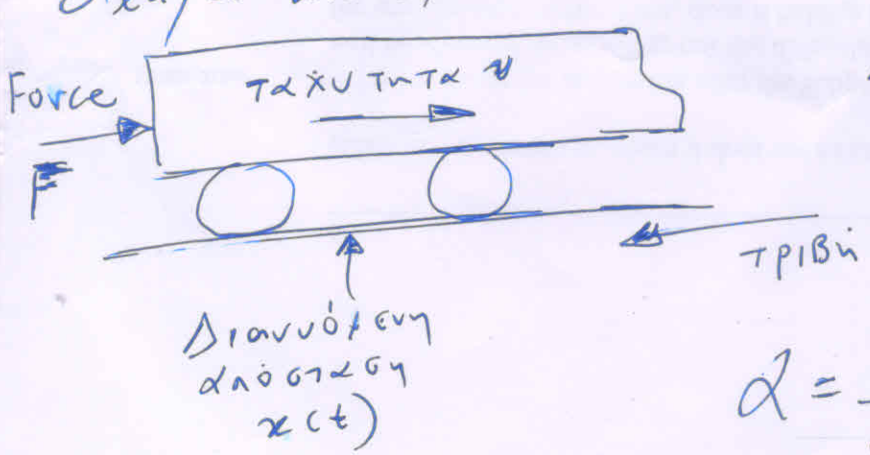
Καταστατικές μεταβλητές

Η ελάχιστη ποσότητα πληροφορίας (δηλαδή το ελάχιστο πλήθος μεταβλητών) που θα πρέπει να γνωρίζουμε για το σύστημα ώστε οι τιμές τους τη χρονική στιγμή $t=t_0$ να είναι επαρκείς για τον καθορισμό της συμπεριφοράς του συστήματος για χρονικές στιγμές $t \geq t_0$ εφόσον το σήμα εισόδου $x(t)$ είναι γνωστό.

- Η επιλογή των καταστατικών μεταβλητών ΔΕΝ είναι γνωστή.
- Το ελάχιστο πλήθος των καταστατικών μεταβλητών θα πρέπει να ταυτίζεται με την τάξη της διαφ. εξίσωσης.
- Οι καταστατικές μεταβλητές θα πρέπει να είναι γραμμικώς ανεξάρτητες μεταξύ τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Όχημα κινούμενο σε επίπεδο



$$x(t) = vt + \frac{1}{2} a t^2 + x_0$$

$$a = v'(t) = x''(t)$$

$$a = \frac{F}{m} - F_{τριβ} = \frac{F}{m} - kv$$

Καταστατικές μεταβλητές

$q_1(t) = x(t)$

$q_2(t) = v(t)$

Παρατηρούμε ότι

$v(t) = x'(t)$ δηλαδή $q_2(t) = q_1'(t)$

Λύση

$$a = \frac{F}{m} - kv \Rightarrow q_2'(t) = \frac{F}{m} - kq_2(t)$$

Άρα καταλήγουμε στο σύστημα των εξισώσεων

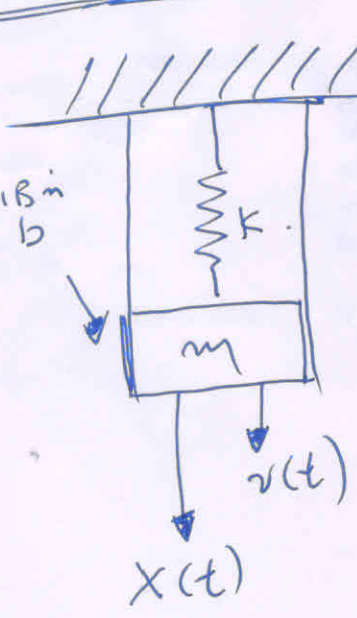
$q_1'(t) = q_2(t)$ και

$q_2'(t) = \frac{F}{m} - kq_2(t)$ ή σε μορφή πίνακα

$$\begin{pmatrix} q_1'(t) \\ q_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} F$$

Δυναμικές εξισώσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Σύστημα μάζας/ελατηρίου



Καταστατικές μεταβλητές

$q_1(t) = x(t)$, $q_2(t) = x'(t) = v(t)$

Άρα $q_2(t) = q_1'(t)$

$$q_2'(t) = x''(t) = -\frac{k}{m}q_1(t) - \frac{b}{m}q_2(t) + \frac{1}{m}F(t)$$

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = F(t)$$

Οι δυναμικές εξισώσεις είναι

$$q_1'(t) = q_2(t)$$

$$q_2'(t) = -\frac{k}{m} q_1(t) - \frac{B}{m} q_2(t) + \frac{1}{m} F(t)$$

ή σε μορφή πίνακα

$$\begin{pmatrix} q_1'(t) \\ q_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{B}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} F$$

<u>Κανονικές μορφές</u>

Έστω η γενική διαφορική εξίσωση

$$\alpha_N y^N(t) + \alpha_{N-1} y^{N-1}(t) + \dots + \alpha_2 y''(t) + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) =$$

$$B_M X^M(t) + B_{M-1} X^{M-1}(t) + \dots + B_2 X''(t) + B_1 X'(t) + B_0 X(t)$$

ή σε συνοπτική γραφή

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \frac{d^n y(t)}{dt} = \sum_{m=0}^{M} B_m \frac{d^m x(t)}{dt} \quad ή$$

$$\sum_{m=0}^{N} \alpha_n D^n y(t) = \sum_{m=0}^{M} B_m D^m x(t)$$

όπου $D^n \equiv \frac{d^n}{dt^n}$

Έστω

$M = N$. ορίζουμε

$$D^{-N} = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} \cdots \cdots \int_{-\infty}^{t}$$

Ολοκληρώνοντας τα μέλη της εξίσωσης N φορές,

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n D^{n-N} y(t) = \sum_{m=0}^{N} B_m D^{m-N} y(t)$$

ορίζουμε

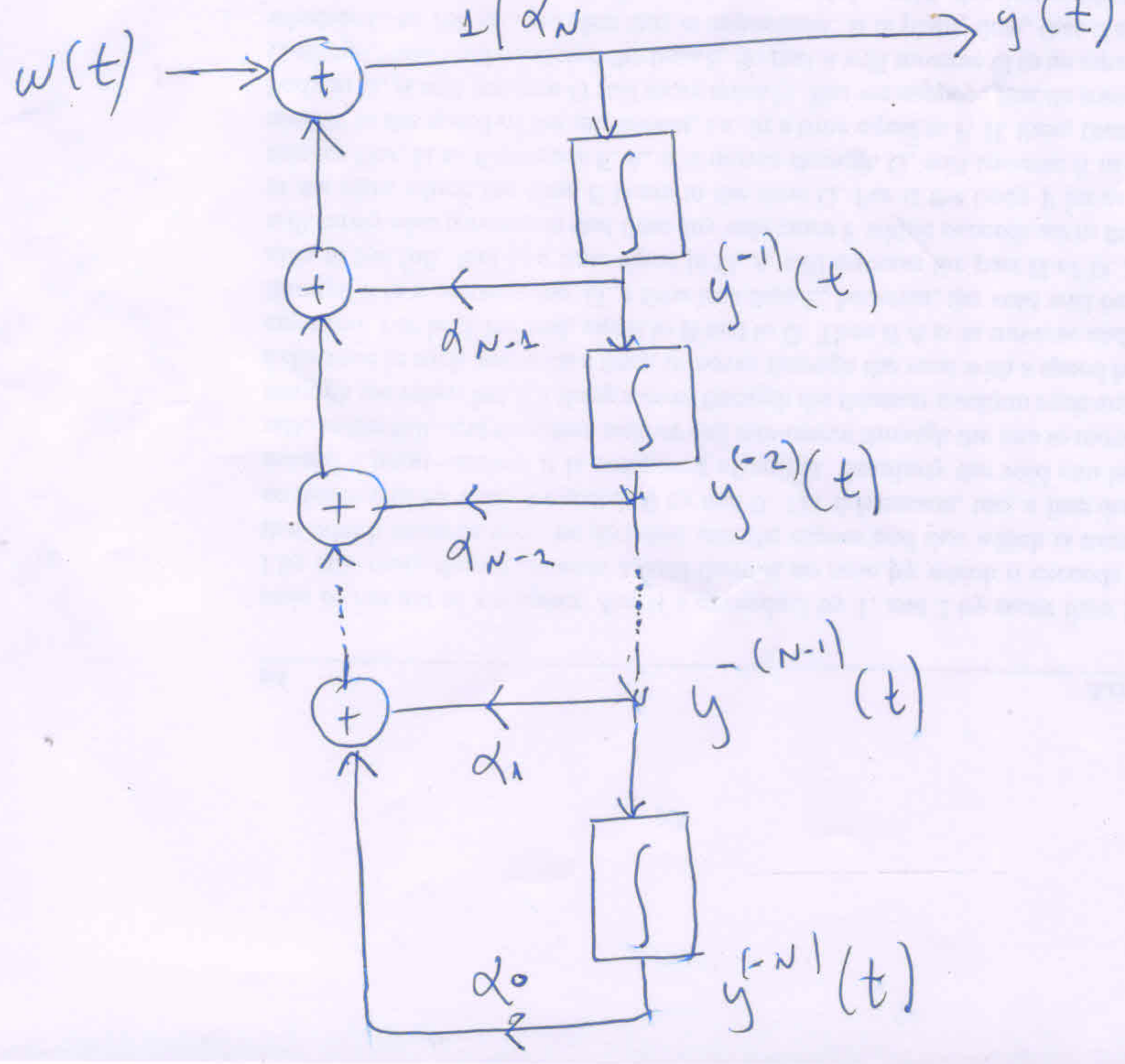
$$w(t) = \sum_{m=0}^{N} B_m D^{m-N} x(t) \quad \text{Επομένως}$$

$$\alpha_N y(t) + \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n D^{n-N} y(t) = w(t) \Rightarrow$$

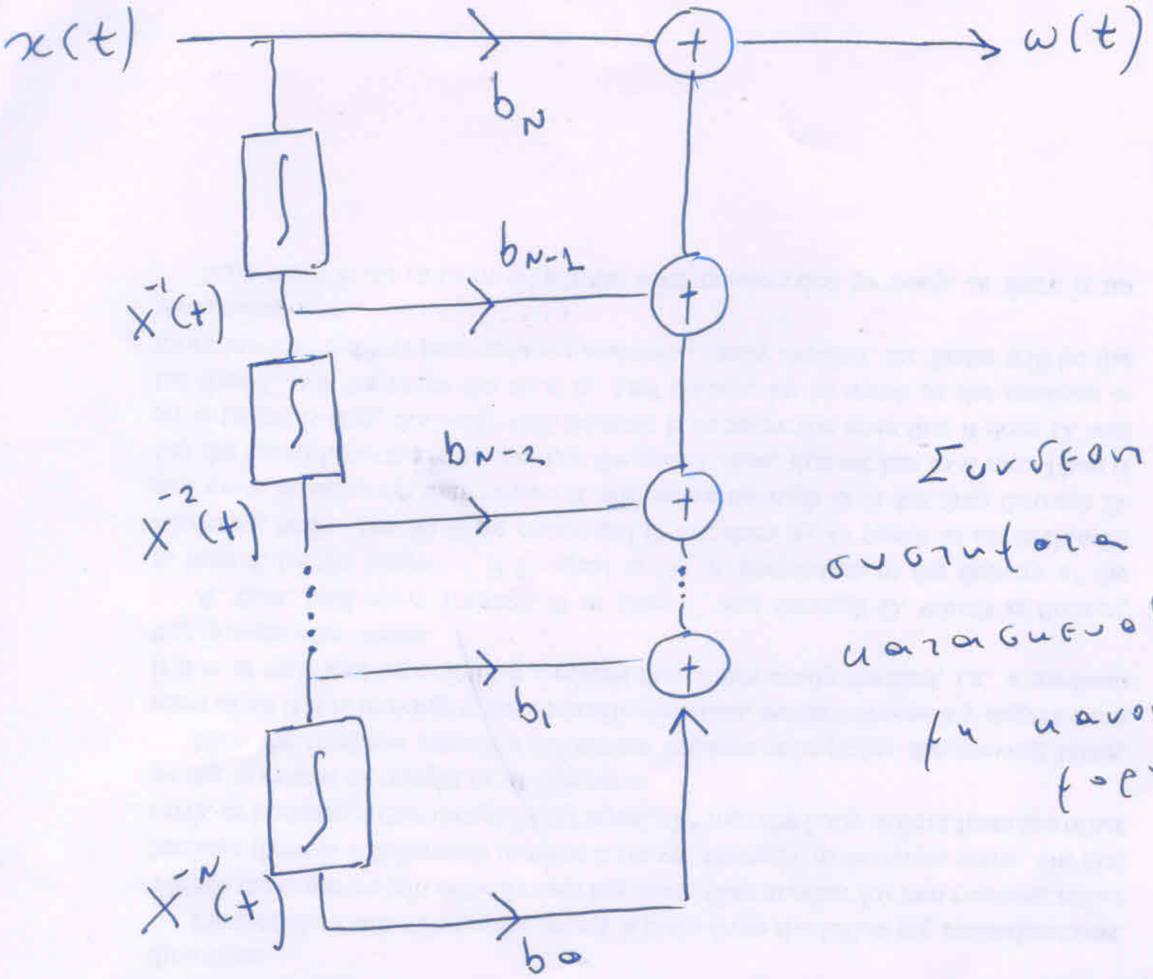
$$y(t) = \frac{1}{\alpha_N}\left[w(t) - \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n D^{n-N} y(t) \right]$$

Δύο συστήματα $x(t) \longrightarrow w(t)$

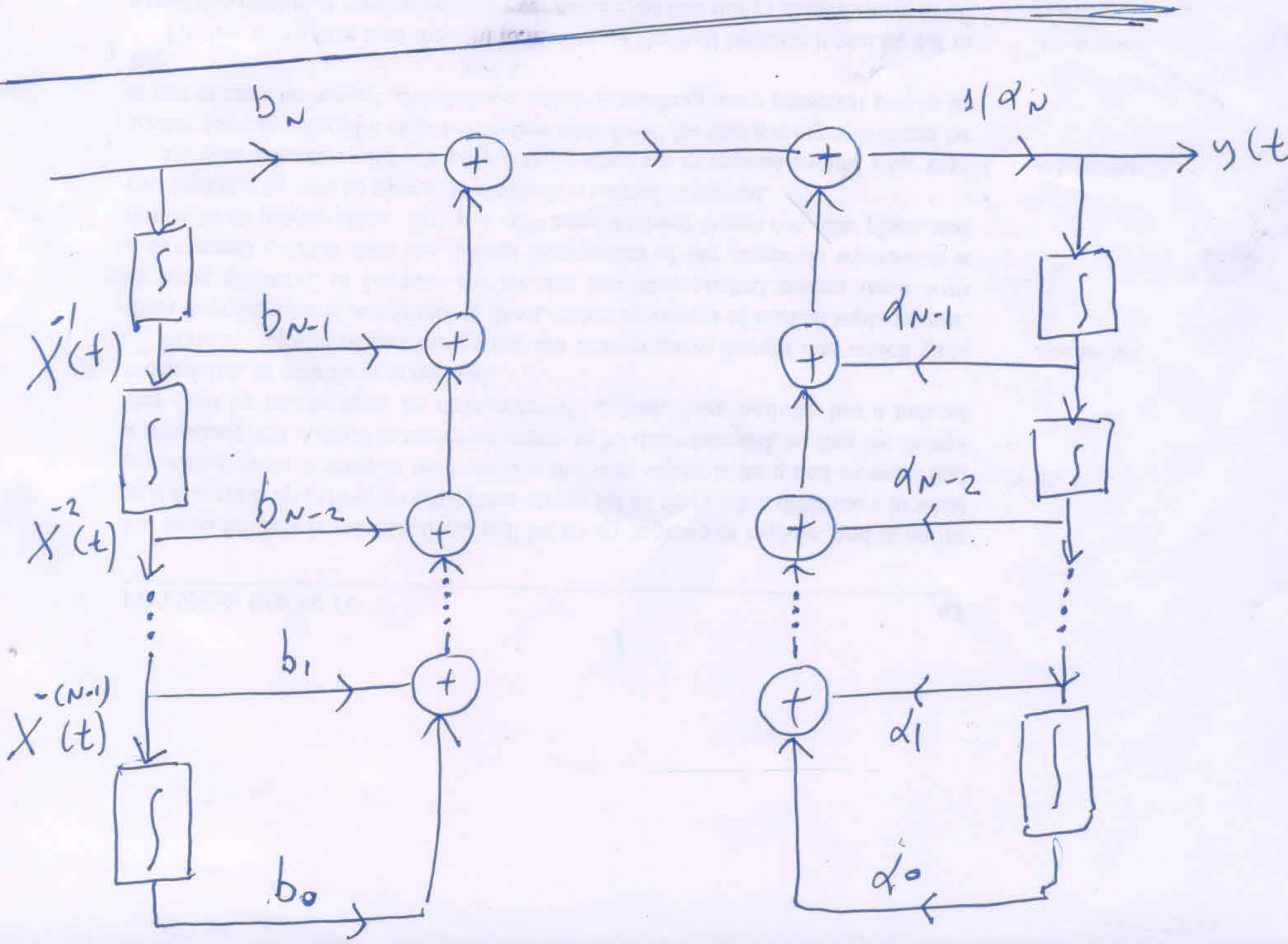
$w(t) \longrightarrow y(t)$



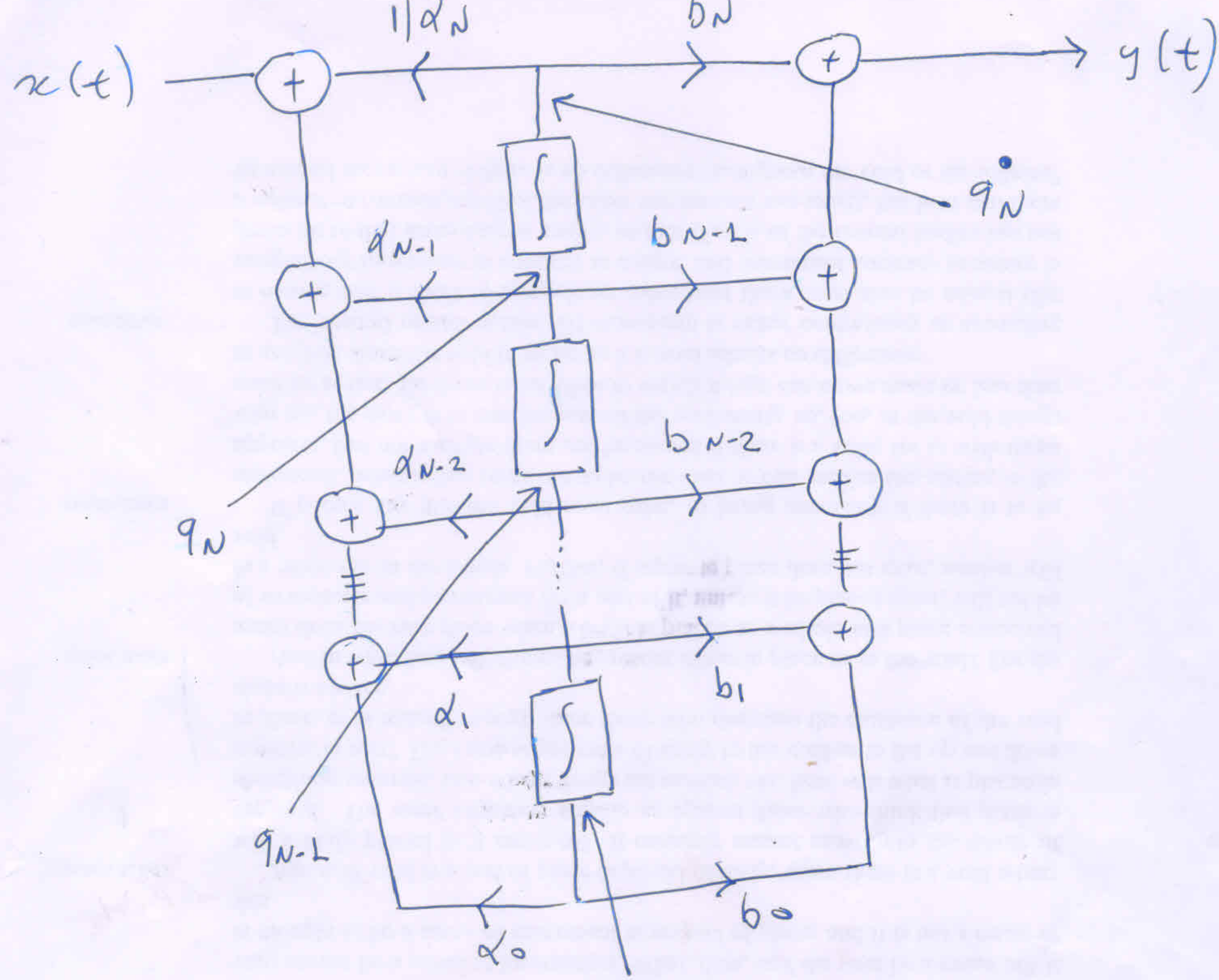
ομοίως για το άλλο σύστημα



Συνδέονται τα δύο συστήματα εν σειρά κατασκευάζοντε την κανονική μορφή



Εναλλάσσοντας τα δύο συστήματα κατασκευάζουμε την κανονική μορφή



ως N καταστατικές μεταβλητές επιλέγουμε τις εξόδους των N ολοκληρωτών

Επομένως:

$$q_1(t) = \int q_2(t)\,dt \Rightarrow \dot q_1(t) = q_2(t)$$

$$q_2(t) = \int q_3(t)\,dt \Rightarrow \dot q_2(t) = q_3(t)$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$q_{N-1}(t) = \int q_N(t)\,dt \Rightarrow \dot q_{N-1}(t) = q_N(t)$$

$$\dot q_N(t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_N} q_1(t) - \frac{\alpha_1}{\alpha_N} q_2(t) - \dots - \frac{\alpha_{N-1}(t)}{\alpha_N} q_N(t) + \frac{1}{\alpha_N} x(t)$$

Σε μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} \dot q_1(t) \\ \dot q_2(t) \\ \dot q_3(t) \\ \vdots \\ \dot q_{N-2}(t) \\ \dot q_{N-1}(t) \\ \dot q_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_N} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_N} & \cdots & -\frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N} & -\frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ \vdots \\ q_{N-2}(t) \\ q_{N-1}(t) \\ q_N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1/\alpha_N \end{pmatrix} x(t)$$

$$\dot{\vec q}(t) = A\vec q(t) + B x(t)$$

$\left.\begin{array}{l} A_{N\times N} \text{ πίνακας συστήματος} \\ B_{N\times 1} \text{ πίνακας εισόδου} \end{array}\right\}$ καταστατική εξίσωση

Εξίσωση εξόδου

$$y(t) = B_0 q_1(t) + B_1 q_2(t) + \cdots + B_{N-1} q_N(t) + B_N \dot q_N(t)$$

όπου

$$\dot q_N(t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} q_1(t) - \frac{\alpha_1}{\alpha_N} q_2(t) - \cdots - \frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N} q_{N-1}(t) - \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} q_N(t) + \frac{1}{\alpha_N} x(t)$$

Επομένως

$$y(t) = \left(B_0 - B_N \frac{\alpha_0}{\alpha_N}\right) q_1(t) + \left(B_1 - B_N \frac{\alpha_1}{\alpha_N}\right) q_2(t) + \cdots + \left(B_{N-2} - B_N \frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N}\right) q_{N-1}(t) + \left(B_{N-1} - B_N \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N}\right) q_N(t) + \frac{B_N}{\alpha_N} x(t)$$

Σε μορφή πινάκα

$$y(t) = \underbrace{\left[\left(B_0 - B_N \frac{\alpha_0}{\alpha_N}\right) \left(B_1 - B_N \frac{\alpha_1}{\alpha_N}\right) \cdots \left(B_{N-1} - B_N \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N}\right) \right]}_{C} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_{N-2}(t) \\ q_{N-1}(t) \\ q_N(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{B_N}{\alpha_N}}_{D} x(t)$$

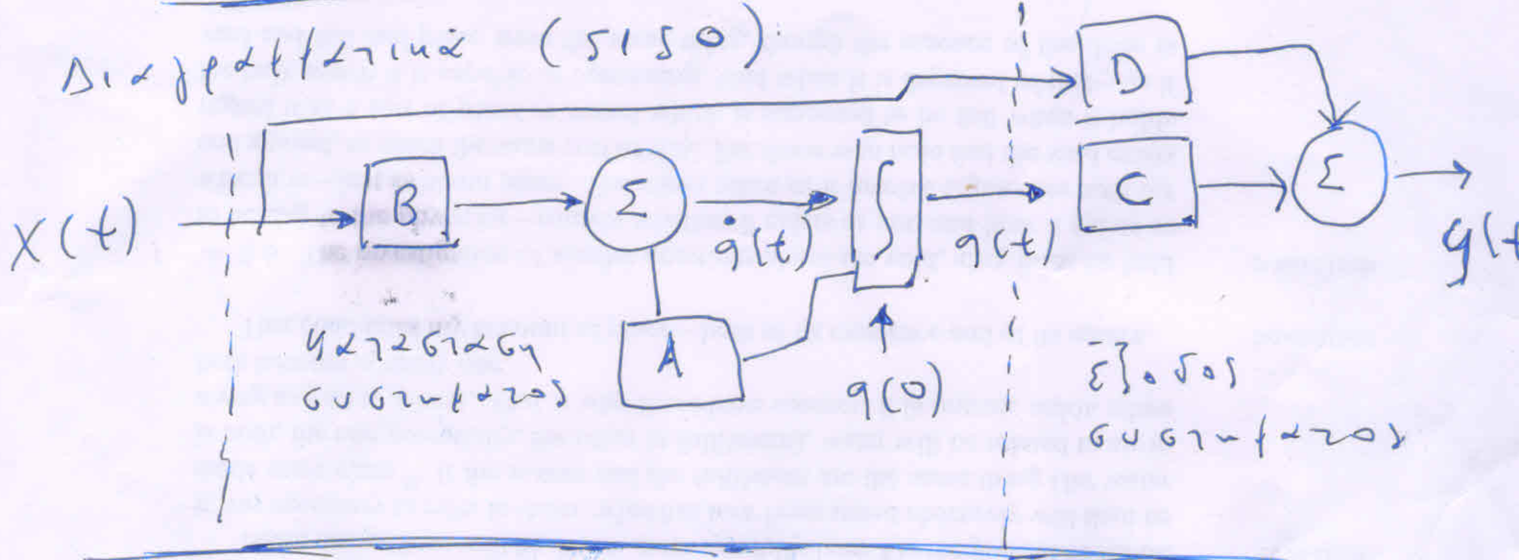
Άρα

$$y(t) = C q(t) + D x(t)$$ εξίσωση εξόδου

$C_{1\times N}$ πίνακας γραμμής

$D_{1\times 1}$ πίνακας εξόδου

Διαγραμματικά (SISO)



Μη κανονική μορφή (με την ίδια λογική)

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\alpha_1}{\alpha_N} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_N} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{N-1} - \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} B_N \\ B_{N-2} - \frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N} B_N \\ \vdots \\ B_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_N} B_N \\ B_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_N} B_N \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_N} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \quad D = \left[\frac{B_N}{\alpha_N}\right]$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Έστω το σύστημα

$$y'''(t) - 5y''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = 3x'(t) - 4x(t)$$

Είναι $N=3,\ M=1,\ \alpha_0 = 4,\ \alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = -5,\ \alpha_3 = 1$

$B_0 = -4,\ B_1 = 3$ Άρα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_3} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\alpha_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \left[\left(B_0 - B_3 \frac{\alpha_0}{\alpha_3}\right) \left(B_1 - B_3 \frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right) \left(B_2 - B_3 \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right) \right] = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$D = [0]$. Άρα

$$\begin{pmatrix} \dot q_1(t) \\ \dot q_2(t) \\ \dot q_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x(t)$$

οπότε

$$\dot q_1(t) = q_2(t)$$

$$\dot q_2(t) = q_3(t)$$

$$\dot q_3(t) = -4q_1(t) - 2q_2(t) + 5q_3(t) + x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} + [0]\, x(t) =$$

$$-4q_1(t) + 3q_2(t)$$

ομοίως για την μη κανονική μορφή

Παράδειγμα

$$\dot{q}(t) = A\bar{q}(t) + B\bar{x}(t) \quad \text{όπου}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{q}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = u(t)$$

Είναι

$$\vec{q}(t) = e^{At}\,\vec{q}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, x(\tau)\, d\tau$$

1) Υπολογισμός του

$$e^{At}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+3) + 2 =$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

α) $A x_1 = \lambda_1 x_1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_{12} = -x_{11}$$

$$-2x_{11} - 3x_{12} = -x_{12} \Rightarrow -2x_{11} = 2x_{12} \Rightarrow x_{12} = -x_{11}$$

Για $x_{11} = 1$ είναι $x_{12} = -1$

Άρα $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

B) $AX_2 = \lambda_2 X_2 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X_{22} = -2X_{21}$$

$$-2X_{21} - 3X_{22} = -2X_{22} \rightarrow -2X_{21} = X_{22}$$

Για $X_{21} = 1$ είναι $X_{22} = -2$ Άρα $X_2 = \begin{pmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Θα είναι λοιπόν

$$P = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Είναι $D(P) = -2 + 1 = -1$ και επομένως

$$P^{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$ Άρα

$$e^{At} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ -e^{\lambda_1 t} & -2e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$e^{At}q(0)=\begin{pmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-t}-e^{-2t}\\ -4e^{-t}+4e^{-2t}-e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5e^{-t}-3e^{-2t}\\ -5e^{-t}+6e^{-2t}\end{pmatrix}$$

Ακόμη είναι

$$e^{A(t-\tau)}B=\begin{pmatrix} 2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{pmatrix}$$

Επομένως $x(t)=u(t)$

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bx(\tau)\,d\tau=\begin{pmatrix}\int_0^t\left[e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\right]d\tau\\ \int_0^t\left[-e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\right]d\tau\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}I_1\\I_2\end{pmatrix}$$

όπου

$$I_1=\int_0^t\left(e^{-t}e^{\tau}-e^{-2t}e^{2\tau}\right)d\tau=$$

$$=e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau-e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau=$$

(4)

$$= e^{-t}\left[e^{\tau}\right]_0^t - \frac{1}{2} e^{-2t}\left[e^{2\tau}\right]_0^t =$$

$$= e^{-t}\left(e^{t}-1\right) - \frac{1}{2} e^{-2t}\left(e^{2t}-1\right) =$$

$$1 - e^{-t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} = \frac{1}{2} e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{2}$$

ομοίως

$$I_2 = \int_0^t -e^{-t} e^{\tau} d\tau + 2\int_0^t e^{-2t} e^{2\tau} d\tau =$$

$$= -e^{-t}\int_0^t e^{\tau} d\tau + 2e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau} d\tau =$$

$$= -e^{-t}\left[e^{\tau}\right]_0^t + 2e^{-2t}\frac{1}{2}\left[e^{2\tau}\right]_0^t =$$

$$= -e^{-t}\left(e^{t}-1\right) + e^{-2t}\left(e^{2t}-1\right) =$$

$$= -1 + e^{-t} + 1 - e^{-2t} = e^{-t} - e^{-2t}$$

Άρα

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} B x(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{2} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

και τελικά

$$\vec{q}(t) = e^{At}\,\vec{q}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\,x(\tau)\,d\tau =$$

$$= \begin{pmatrix} 5e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -5e^{-t} + 6e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{2} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ -4e^{-t} + 5e^{-2t} \end{pmatrix}$$

και επαλήθευση

$$\boxed{\begin{aligned} q_1(t) &= 4e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ q_2(t) &= -4e^{-t} + 5e^{-2t} \end{aligned}}$$

① Πίνακες - συναρτήσεις

Έστω $M = M(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{pmatrix}$

Τότε

$$M'(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \begin{pmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{pmatrix}$$

Εάν

$M(x) = \{m_{ij}(f(x)\}$ τότε

$$M'(x) = \frac{dM}{dx}\{m_{ij} f(x)\}\frac{df}{dx}$$

Έστω

$A = \{\alpha_{ij}(x)\} \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow A = A(x)$

$B = \{B_{ij}(x)\} \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow B = B(x)$ Τότε

$$\frac{d}{dx}\left(kA(x)\right) = k\frac{dA(x)}{dx}$$

$$\frac{d(A+B)}{dx} = \frac{dA(x)}{dx} + \frac{dB(x)}{dx}$$

Εάν $C = A \cdot B$ τότε $C = C(x) = \{c_{ij}(x)\}$ όπου

και $c_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(x) B_{kj}(x)$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{dA(x)}{dx}B(x) + A(x)\frac{dB(x)}{dx}$$ παράγωγος γινομένου πινάκων

② Εαν ο πινακας A ειναι αντιστρεψιμος τοτε

$$\frac{dA^{-1}(x)}{dx} = -A^{-1}(x)\frac{dA(x)}{dx}A^{-1}(x)$$

Τελος

$$\lim_{x \to x_0} A(x) = \left\{ \lim_{x \to x_0} \{ a_{ij} \} \right\}$$ και

$$\int_{\alpha}^{B} M(x)\,dx = \begin{pmatrix} \int_{\alpha}^{B} f_{11}(x)\,dx & \int_{\alpha}^{B} f_{12}(x)\,dx \\ \int_{\alpha}^{B} f_{21}(x)\,dx & \int_{\alpha}^{B} f_{22}(x)\,dx \end{pmatrix}$$

Πολυωνυμικες και εκθετικες συναρτησεις πινακων

Πολυωνυμικες συναρτησεις πινακα

$g : \mathbb{R}^{N\times N} \longmapsto \mathbb{R}^{N\times N}$ για καθε $M \in \mathbb{R}^{N\times N}$

$$g(M) = \alpha_0 M^{n} + \alpha_1 M^{n-1} + \alpha_2 M^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} M + \alpha_n I$$

οπου $M^{i} = \underbrace{M \cdot M \cdot M \cdots M}_{i \text{ φορες}}$, $\mathbb{I} = \mathbb{I}_N \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ταυτοτικος (μοναδιαιος) πινακας

Αναλογοσειρα τετραγωνικου πινακα

$$g(M) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i M^{i}$$

Εκθετική συνάρτηση

$$J(M) = e^{Mt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(Mt)^k =$$

$$I + Mt + \frac{1}{2!}(Mt)^2 + \frac{1}{3!}(Mt)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(Mt)^n + \cdots$$

Ιδιότητες

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} \cdot e^{At_2}, \quad e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$$

Εάν θέσουμε $t_2 = -t_1$

τότε

$$e^{At_1} \cdot e^{t_2} = e^{At_1} \cdot e^{-At_1} = e^{0} = I \quad \text{Άρα}$$

$$(e^{At_1})^{-1} = e^{-At_1} \quad \text{και ομοίως} \quad (e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

Χρονική παράγωγος εκθετικής συνάρτησης

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} \qquad \phi(t) = e^{At}$$

Ολοκλήρωμα εκθετικής συνάρτησης

$$\int \phi(t)\,dt = \int e^{At}\,dt = A^{-1}e^{At} = A^{-1}\phi(t)$$

Για διαγώνιο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι

$$e^{At} = \{\varphi_{ii}(t)\} = \{\exp(a_{ii}t)\}$$

4 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Έστω $A = \{a_{ij}\} \in F^{n\times n}$ και $x \in F^{n\times 1}$

Εάν υπάρχει $\lambda \in F$ τέτοιο ώστε

$$Ax = \lambda x$$

ο λ ονομάζεται ιδιοτιμή του πίνακα A με ιδιοδιάνυσμα x.

Είναι $\lambda x = \lambda I x$ όπου $I = I_n \in R^{n\times n} \Rightarrow$

$$Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow Ax - \lambda I x = 0 \Rightarrow$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Σε μορφή πίνακα

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \cdots & a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \hline a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nj} \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ομογενές σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n τετραγωνικά αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$ που διαθέτει μη τετριμμένη λύση εάν είναι $\det(A - \lambda I) = 0$ ή

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \cdots & a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \hline a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nj} \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Η παραπάνω πολυωνυμική εξίσωση ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση και οι λύσεις της είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A

Το σύνολο $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ονομάζεται φάσμα του πίνακα ενώ η μέγιστη ~~[illegible]~~ απόλυτη ιδιοτιμή ονομάζεται φασματική ακτίνα

Επίλυση της καταστατικής εξίσωσης

$$\dot{\bar{q}}(t) = \bar{A}\bar{q}(t) + B\bar{x}(t) \Rightarrow$$

$$e^{-At}\dot{\vec{q}}(t) = e^{-At}A\vec{q}(t) + e^{-At}B\vec{x}(t) \Rightarrow$$

$$-e^{At}A\vec{q}(t) + e^{-At}\vec{q}\,'(t) = e^{-At}B\bar{x}(t) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\right)\vec{q}(t) + e^{-At}\vec{q}\,'(t) = e^{-At}B\bar{x}(t) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\vec{q}(t)\right) = e^{-At}B\bar{x}(t) \Rightarrow$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\vec{q}(t)\right)dt = \int_{t_0}^{t}e^{-At}B\bar{x}(t)\,dt \Rightarrow$$

$$e^{-At}\vec{q}(t)\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t}e^{-At}B\bar{x}(t)\,dt \Rightarrow$$

$$e^{-At}\vec{q}(t) - e^{-At_0}\vec{q}(t_0) = \int_{t_0}^{t}e^{-At}B\bar{x}(t)\,dt \Rightarrow$$

(6)

$$\Rightarrow e^{-At}\vec{q}(t) = e^{-At_0}\vec{q}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} B x(\tau)\, d\tau \Rightarrow$$

$$q(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{q}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B\bar{x}(\tau)\, d\tau$$ για τελικό

$$\vec{q}(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}\vec{q}(t_0)}_{\text{συνιστώσα μηδενική εισόδου (ανεξάρτητη του } x)} + \underbrace{e^{At} * B\bar{x}(t)}_{\text{συνιστώσα μηδενική κατάσταση (ανεξάρτητη του } \vec{q}(t))}$$

Εάν $t_0 = 0$ τότε

$$\vec{q}(t) = e^{At}\vec{q}(0) + e^{At} * B\bar{x}(t)$$ Εάν $\bar{x}(t) = 0$ τότε

$$\bar{q}(t) = e^{At}\bar{q}(0)$$

ο πίνακας $\phi(t)$ ονομάζεται πίνακας κατάστασης μετάβασης και γενικά ορίζεται ως

$$\phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

Ιδιότητες

$$\phi(\tau,\tau) = I$$

$$\phi^{-1}(t,\tau) = \phi(\tau,t)$$

$$\phi(t_2,t_1)\,\phi(t_1,t_0) = \phi(t_2,t_0)$$

$$\phi^{-1}(t,\tau)\,\phi(t,\tau) = I$$

$$\dot{\phi}(t,\tau) = A(t)\,\phi(t,\tau)$$

Μετά τον υπολογισμό της $\vec{q}(t)$ υπολογίζουμε την έξοδο ως

$$\vec{y}(t) = C\vec{q}(t) + Dx(t) \text{ όπου}$$

$$\vec{q}(t) = \Phi(t-t_0)\vec{q}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B\bar{x}(\tau)d\tau$$

<u>Άρα</u>

$$\vec{y}(t) = C\Phi(t,t_0)\vec{q}(t_0) + C\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B\bar{x}(\tau)d\tau + Dx(t)$$

① Η κρουστική απόκριση στο χώρο κατάστασης

Θεωρώντας για [illegible] αρχικοποίηση στο $t_0 = 0$ έχουμε

$$\vec{q}(t) = e^{At}\vec{q}(0) + e^{At} * B\vec{x}(t) = \text{(προσεταιριστική ιδιότητα)}$$

$$e^{At}\vec{q}(0) + \left(e^{At} * B\right)\vec{x}(t)$$

Θα είναι λοιπόν $\left(\Phi(t) = e^{At}\right)$

$\boxed{\text{από την εξίσωση εξόδου}}$

$$y(t) = C\underline{\vec{q}(t)} + D\vec{x}(t) =$$

$$C\left[\Phi(t)\vec{q}(0) + \Phi(t) * B\vec{x}(t)\right] + D\vec{x}(t)$$

Γνωρίζουμε ότι $\underline{x(t) * \delta(t) = x(t)}$

Στη γενική περίπτωση διανυσμάτων

$$\vec{x}(t) = \left[x_1(t)\ x_2(t)\ \ldots\ x_M(t)\right]^T \quad \text{ορίζουμε}$$

τον πίνακα

$$\vec{\delta}(t) = \begin{pmatrix} \delta(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta(t) & 0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & \cdots & & \cdots & \delta(t) \end{pmatrix}$$

και αποδεικνύεται εύκολα ότι $\underline{\vec{\delta}(t)\vec{x}(t) = \vec{x}(t)}$

Θα είναι τότε

$$\vec{y}(t) = C\left[\Phi(t)\vec{q}(0) + \Phi(t)B * \vec{x}(t)\right] + D\delta(t) * \vec{x}(t)$$

$$= C\Phi(t)\vec{q}(0) + \left[C\Phi(t) + D\delta(t)\right] * \vec{x}(t)$$

② Για να προσδιορίσουμε την κρουστική της συνεχούς κατάστασης θέτουμε $\vec{q}(0) = 0$.

Θα είναι τότε

$$\vec{y}(t) = \left[C\Phi(t)B + D\delta(t) \right] * x(t) =$$

$$\vec{h}(t) * \vec{x}(t) \quad \text{και επομένως}$$

$$\bar{h}(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t) = Ce^{At}B + D\bar{\delta}(t)$$

Το $h(t)$ περιλαμβάνει όλους τους πίνακες.

Για συστήματα SISO

$$\boxed{h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)}$$

Πίνακας καταστατικής μετάβασης

$$\Phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)} = \Phi(t, t_0)$$

Ιδιότητες

$$\Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t)$$

$$\Phi^{-1}(t, \tau)\Phi(t, \tau) = I$$

$$\dot{\Phi}(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau)$$

$$\Phi(\tau, \tau) = I$$

$$\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$$

3 Χώρος κατάστασης και Laplace Transform

Η καταστατική εξίσωση είναι

$$\vec{q}\,'(t) = A\vec{q}(t) + B\vec{x}(t) \quad \text{όπου}$$

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{pmatrix} \quad A_{NN} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2N} \\ - & - & - & - \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \cdots & \alpha_{NN} \end{pmatrix}$$

$$B_{NM} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1M} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2M} \\ - & - & - & - \\ B_{N1} & B_{N2} & \cdots & B_{NM} \end{pmatrix} \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\vec{q}_1\,'(t) = \alpha_{11} q_1(t) + \cdots + \alpha_{1N} q_N(t) + B_{11} x_1(t) + \cdots + B_{1M} x_M(t)$$

$$\vec{q}_2\,'(t) = \alpha_{21} q_1(t) + \cdots + \alpha_{2N} q_N(t) + B_{21} x_1(t) + \cdots + B_{2M} x_M(t)$$

$$- - - - -$$

$$q_N'(t) = \alpha_{N1} q_1(t) + \cdots + \alpha_{NN} q_N(t) + B_{N1} x_1(t) + \cdots + B_{NM} x_M(t)$$

Λαμβάνουμε το Laplace transform της κάθε εξίσωσης και λαμβάνουμε υπόψη ότι

$$\mathcal{L}\{q_i'(t)\} = sQ_i(s) - q_i(0)$$

Έστω ότι $X_j(s) = \mathcal{L}\{x_j(t)\}$ $j = 1, 2, \ldots, M$

$$sQ_i(s) - q_i(0) = \alpha_{i1} Q_1(s) + \cdots + \alpha_{iN} Q_N(s) + B_{i1} X_1(s) + \cdots + B_{iM} X_i(s)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N$$

① Ορίζουμε το διάνυσμα

$$\bar{q}(0) = \left[q_1(0) \ q_2(0) \dots q_n(0) \right]^T$$

Τελικά παίρνουμε

$$sQ(s) - q(0) = AQ(s) + BX(s) \Rightarrow$$

$$sQ(s) - AQ(s) = q(0) + BX(s) \Rightarrow$$

$$(sI - A)\,Q(s) = q(0) + BX(s).$$

Επομένως

$$Q(s) = (sI - A)^{-1}\left[q(0) + BX(s) \right] =$$

$$\Phi(s)\,q(0) + \Phi(s)\,BX(s) \quad \text{όπου}$$

$$\Phi(s) = \mathcal{L}\{e^{At}\} \quad \text{όπως αποδεικνύεται}$$

Επομένως

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\,q(0)\} + \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\,BX(s)\}$$

Ομοίως για την εξίσωση εξόδου

$$y(t) = Cq(t) + Dx(t) \Rightarrow$$

$$Y(s) = CQ(s) + DX(s)$$

(5) Είναι όμως

$$\Phi(s) = \phi(s) q(0) + \phi(s) B X(s)$$ και επομένως

$$Y(s) = C\left[\phi(s) q(0) + \phi(s) B X(s)\right] + D X(s) =$$

$$= C\phi(s) q(0) + \left[C\phi(s) B + D\right] X(s)$$ Άρα

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{C\phi(s) q(0)\} +$$

$$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[C\phi(s) B + D\right] X(s)\right\}$$

Η εκθετική συνάρτηση υπολογίζεται ως

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{\phi(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

Ενώ η συνάρτηση μεταφοράς ως

$$Y(s) = \left[C\phi(s) B + D\right] X(s) \Rightarrow$$

$$H(s) = C\phi(s) B + D = C(sI - A)^{-1} B$$

Επίλυση με Laplace Transform

Έστω

$$\dot{\vec{q}}(t) = A\vec{q}(t) + B\vec{x}(t) \quad \text{όπου}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{q}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x(t) = u(t)$$

Είναι

$$Q(s) = \Phi(s)\vec{q}(0) + \Phi(s)BX(s)$$

όπου

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}. \quad \text{Είναι}$$

$$sI - A = s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(sI - A) = s(s+3) + 2 = s(s+3) + 2 = s^2 + 3s + 2 =$$
$$= (s+2)(s+2). \quad \text{Επομένως}$$

$$\Phi(s) = \mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$\Phi(s)\vec{q}(0) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix} 2s+8 \\ s-2 \end{pmatrix}$$

Τώρα είναι $x(t) = u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s}$ και

$$BX(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/s \end{pmatrix}$$

② Επομένως

$$\phi(s)BX(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ -2 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/s \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix} \frac{2}{s} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$\varphi(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix} 2s+8+\frac{2}{s} \\ s-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix} \frac{2s^2+8s+2}{s} \\ s-1 \end{pmatrix}$$

Αρα

$$q_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+8s+2}{s(s+1)(s+2)}\right\},\quad q_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+1)(s+2)}\right\}$$

Υπολογισμός $q_1(t)$

Αναλυτά σε μερικά κλάσματα

$$\frac{2s^2+8s+2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \Longrightarrow$$

$$2s^2+8s+2 = A(s+1)(s+2) + B(s+2)s + Cs(s+1) =$$

$$= A(s^2+3s+2) + B(s^2+2s) + C(s^2+s) =$$

$$As^2+3As+2A+Bs^2+2Bs+Cs^2+Cs =$$

$$(A+B+C)s^2 + (3A+2B+C)s + 2A$$

Επομένως

$$A+B+C=2 \quad 3A+2B+C=8,\ 2A=2 \Rightarrow$$

$$A=1$$

(3) Επομένως

$$B + C = 1$$
$$2B + C = 5 \Rightarrow B = 4 \text{ και } C = -3$$

Άρα

$$\frac{2s^2+8s+2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{4}{s+1} - \frac{3}{s+2} \text{ και επομένως}$$

$$q_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} =$$

$$= u(t) + 4e^{-t}u(t) - 3e^{-2t}u(t)$$

Υπολογισμός του $q_2(t)$

Ανάπτυξη σε απλά κλάσματα

$$\frac{s-1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \Rightarrow$$

$$A(s+2) + B(s+1) = As + 2A + Bs + B =$$

$$= (A+B)s + (2A+B) = s-1 \Rightarrow$$

$$A+B = 1$$
$$2A+B = -1 \Rightarrow A = -2,\ B = 3 \quad \text{Άρα}$$

$$\frac{s-1}{(s+1)(s+2)} = -2\frac{1}{s+1} + 3\frac{1}{s+2} \Rightarrow$$

$$q_2(t) = -2e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t)$$

Να επιλυθεί η καταστατική εξίσωση (1)

$\dot{\vec{q}}(t) = A\bar{q}(t) + B\bar{x}(t)$ για πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad D = [2]$ και

είσοδο $x(t) = u(t)$ και $x(t) = \cos(4t)$.

Επίσης να επιλυθεί η εξίσωση εξόδου και να βρεθούν η συνάρτηση μεταφοράς, η κρουστική απόκριση και η διαφορική εξίσωση.

Η λύση της καταστατικής εξίσωσης είναι

$$\vec{q}(t) = e^{At}\bar{q}(0) + \int_0^t e^{At} B x(\tau)\, d\tau$$

Υπολογισμός του e^{At} μέσω ιδιοτιμών

• Εύρεση ιδιοτιμών

Είναι

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & +1-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-2\right]-2(2-\lambda)+2+(1-\lambda)=$$

$$-\lambda(\lambda^2-3\lambda)+2\lambda-4+1-\lambda=-\lambda^3+3\lambda^2+\lambda-3=0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3-3\lambda^2-\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda-3)-(\lambda-3)=0 \Rightarrow$$

$$(\lambda-3)(\lambda^2-1)=0 \Rightarrow (\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda-1)=0$$

Επομένως έχουμε τρεις πραγματικές ρίζες τις

$\lambda_1=+3$ | $\lambda_2=1$ | $\lambda_3=-1$

οι ρίζες είναι διακριτές μεταξύ τους και κατά συνέπεια ο πίνακας Α είναι διαγωνοποιήσιμος.

- Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων

Ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$

$$A x_1=\lambda_1 x_1 \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{12}\\ x_{13}\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{12}\\ x_{13}\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$-x_{12}+x_{13}=3x_{11} \Rightarrow 3x_{11}+x_{12}-x_{13}=0 \quad (1)$$

$$-2x_{11}+x_{12}+2x_{13}=3x_{12} \Rightarrow -2x_{11}-2x_{12}+2x_{13}=0 \quad (2)$$

$$-x_{11}+x_{12}+2x_{13}=3x_{13} \Rightarrow -x_{11}+x_{12}-x_{13}=0 \quad (3)$$

Εάν από την εξίσωση (1) αφαιρέσουμε την (3) προκύπτει $2x_{11}=0 \Rightarrow x_{11}=0$.

Τώρα για $x_{11}=0$ από την (2) έχουμε $x_{12}=x_{13}$ και για $x_{13}=1$ έχουμε $x_{12}=1$ Επομένως

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{12}\\ x_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$

(3)

$$AX_2 = \lambda_2 X_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$-x_{22} + x_{23} = x_{21} \Rightarrow x_{21} + x_{22} - x_{23} = 0$ (1)

$-2x_{21} + x_{22} + 2x_{23} = x_{22} \Rightarrow -2x_{21} + 2x_{23} = 0$ (2)

$-x_{21} + x_{22} + 2x_{23} = x_{23} \Rightarrow -x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0$ (3)

Προσθέτοντας τις (2) και (3) έχουμε $2x_{22} = 0 \Rightarrow$
$x_{22} = 0$. Από την (2) έχουμε $x_{21} = x_{23}$ και για
$x_{23} = 1$ έχουμε $x_{21} = 1$. Άρα

$$\vec{X_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμή $\lambda_3 = -1$

$$AX_3 = \lambda_3 X_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$-x_{32} + x_{33} = -x_{31} \Rightarrow x_{31} - x_{32} + x_{33} = 0$ (1)

$-2x_{31} + x_{32} + 2x_{33} = -x_{32} \Rightarrow -2x_{31} + 2x_{32} + 2x_{33} = 0$ (2)

$-x_{31} + x_{32} + 2x_{33} = -x_{33} \Rightarrow -x_{31} + x_{32} + 3x_{33} = 0$ (3)

~~Πολλαπλασιάζοντας την (1) επί -2 και προσθέτο-~~
~~ντας την (2) προκύπτει~~ Προσθέτοντας τις (1) και (3)
προκύπτει $4x_{33} = 0 \Rightarrow x_{33} = 0$. και από την (1)
για $x_{33} = 0$ προκύπτει $x_{31} = x_{32}$. Για $x_{32} = 1$ είναι $x_{31} = 1$
και επομένως $\vec{X_3} = \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Εχοντας υπολογισει τα 3 ιδιοδιανυσματα ο πινακας διαγωνιοποιησης ειναι

$$P = [\vec{x}_1 \ \ \vec{x}_2 \ \ \vec{x}_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Για την αντιστροφη του πινακα P χρησιμοποιουμε την εκφραση

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \alpha_{33}\alpha_{22}-\alpha_{32}\alpha_{23} & -(\alpha_{33}\alpha_{12}-\alpha_{32}\alpha_{13}) & \alpha_{23}\alpha_{12}-\alpha_{22}\alpha_{13} \\ -(\alpha_{33}\alpha_{21}-\alpha_{31}\alpha_{23}) & \alpha_{33}\alpha_{11}-\alpha_{31}\alpha_{13} & -(\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{21}\alpha_{13}) \\ \alpha_{32}\alpha_{21}-\alpha_{31}\alpha_{22} & -(\alpha_{32}\alpha_{11}-\alpha_{31}\alpha_{12}) & \alpha_{22}\alpha_{11}-\alpha_{21}\alpha_{12} \end{pmatrix}$$

οπου

$$D = \alpha_{11}(\alpha_{33}\alpha_{22}-\alpha_{32}\alpha_{23}) - \alpha_{21}(\alpha_{33}\alpha_{12}-\alpha_{32}\alpha_{13}) + \alpha_{31}(\alpha_{23}\alpha_{12}-\alpha_{22}\alpha_{13})$$

η οριζουσα του A.

Το αποτελεσμα για τον πινακα P ειναι

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Θα ειναι λοιπον

$$\boxed{e^{At}} = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}+e^{t} & e^{-t}-e^{t} & e^{+t}-e^{-t} \\ e^{-t}-e^{+3t} & e^{-t}+e^{+3t} & e^{+3t}-e^{-t} \\ e^{t}-e^{+3t} & e^{+3t}-e^{t} & e^{+3t}+e^{t} \end{pmatrix}$$

μετα απο τις (ενοχλες και βαρετες) πραξεις.

Θα ειναι λοιπον

$$e^{At}q(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}+e^{t} & e^{-t}-e^{t} & e^{t}-e^{-t} \\ e^{-t}-e^{+3t} & e^{-t}+e^{+3t} & e^{+3t}-e^{-t} \\ e^{t}-e^{-3t} & e^{-3t}-e^{t} & e^{-3t}+e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}+e^{t} \\ e^{-t}+e^{+3t} \\ e^{+3t}+e^{t} \end{pmatrix} = A_1$$

Τωρα ειναι

$$e^{A(t-\tau)}B = e^{At}B\Big|_{t\to t-\tau} =$$

$$= \frac{1}{2}\left.\begin{pmatrix} e^{-t}+e^{t} & e^{-t}-e^{t} & e^{t}-e^{-t} \\ e^{-t}-e^{+3t} & e^{-t}+e^{+3t} & e^{+3t}-e^{-t} \\ e^{t}-e^{+3t} & e^{+3t}-e^{t} & e^{+3t}+e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|_{t\to t-\tau} =$$

$$= \frac{1}{2}\left.\begin{pmatrix} e^{t}-e^{-t} \\ e^{+3t}-e^{-t} \\ e^{+3t}+e^{t} \end{pmatrix}\right|_{t\to t-\tau} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{(t-\tau)}-e^{-(t-\tau)} \\ e^{+3(t-\tau)}-e^{-(t-\tau)} \\ e^{+3(t-\tau)}+e^{(t-\tau)} \end{pmatrix} \checkmark$$

Για την περιοχή τιμων 0 εως t και για την εισοδο

$\boxed{x(t) = u(t)}$ ειναι $x(t) = 1$ και επομενως

$$I = \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\,x(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\,d\tau$$

και απο την παραπανω εκφραση

$$I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \int_0^t \left[e^{(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \right] d\tau \\ \int_0^t \left[e^{3(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \right] d\tau \\ \int_0^t \left[e^{3(t-\tau)} + e^{(t-\tau)} \right] d\tau \end{pmatrix}$$

όπου

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^t e^{t-\tau} d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} e^{t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau - \frac{1}{2} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = -\frac{1}{2} e^{t}\left(e^{-t} - 1\right) -$$

$$- \frac{1}{2} e^{-t}\left(e^{t} - 1\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} = \boxed{\frac{1}{2} e^{t} + \frac{1}{2} e^{-t} - 1}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^t e^{3(t-\tau)} d\tau - \frac{1}{2}\int e^{-(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2} e^{3t}\int_0^t e^{-3\tau} d\tau$$

$$- \frac{1}{2} e^{-t}\int_0^t e^{\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{3t}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(e^{-3t} - 1\right) +$$

$$- \frac{1}{2} e^{-t}\left(e^{t} - 1\right) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} e^{3t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{6} e^{3t} + \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{2}{3}}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\int_0^t e^{3(t-\tau)}\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t e^{(t-\tau)}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}e^{3t}\int_0^t e^{-3\tau}\,d\tau + \frac{1}{2}e^{t}\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}e^{3t}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(e^{-3t}-1\right) + \frac{1}{2}e^{t}(-1)\left(e^{-t}-1\right) =$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}e^{3t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{t} = \boxed{-\frac{2}{3} + \frac{1}{6}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{t}}$$

Αρα

$$I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} - 1 \\ \frac{1}{6}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad A_2$$

Αρα

$$\vec{q}(t) = A_1 + A_2 =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} - 1 \\ \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{6}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} + e^{t} - 1 \\ \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3} + e^{-t} \\ e^{t} + \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Η λυση της καταστατικής εξίσωσης

Επομένως.

$$y(t) = C\vec{q}(t) + Dx(t) =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} + e^{t} - 1 \\ \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3} + e^{-t} \\ e^{t} + \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} + 2\left[u(t)\right] =$$

$$= 4e^{-t} + 4e^{t} - 4 - \frac{4}{3}e^{3t} + \frac{4}{3} - 2e^{-t} + e^{t} + \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3} + 2 = \boxed{\left(2e^{-t} + 5e^{t} - \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{4}{3}\right)u(t).}$$

η έξοδος του συστήματος. (Βηματική απόκριση)

Συνάρτηση μεταφοράς $(sI - A)^{-1}$

Είναι

$$\Phi(t) = \mathcal{L}\{e^{At}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{L}\{e^{-t}+e^{t}\} & \mathcal{L}\{e^{-t}-e^{t}\} & \mathcal{L}\{e^{t}-e^{-t}\} \\ \mathcal{L}\{e^{-t}-e^{3t}\} & \mathcal{L}\{e^{-t}+e^{3t}\} & \mathcal{L}\{e^{3t}-e^{-t}\} \\ \mathcal{L}\{e^{t}-e^{3t}\} & \mathcal{L}\{e^{3t}-e^{t}\} & \mathcal{L}\{e^{3t}+e^{t}\} \end{pmatrix} =$$

⑨

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1} & \frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-3} & \frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-3} & \frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-3} & \frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-1} & \frac{1}{s-3}+\frac{1}{s-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2s}{(s+1)(s-1)} & \frac{-2}{(s+1)(s-1)} & \frac{2}{(s+1)(s-1)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s-3)} & \frac{2(s-1)}{(s+1)(s-3)} & \frac{2\cdot 2}{(s-3)(s+1)} \\ \frac{-2}{(s-1)(s-3)} & \frac{2}{(s-1)(s-3)} & \frac{2(s-2)}{(s-3)(s-1)} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{s}{(s+1)(s-1)} & \frac{-1}{(s+1)(s-1)} & \frac{1}{(s+1)(s-1)} \\ \frac{-1}{(s+1)(s-3)} & \frac{(s-1)}{(s+1)(s-3)} & \frac{2}{(s-3)(s+1)} \\ \frac{-1}{(s-1)(s-3)} & \frac{1}{(s-1)(s-3)} & \frac{(s-2)}{(s-1)(s-3)} \end{pmatrix} = (sI-A)^{-1}$$

Απ α

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)(s-1)} \\ \frac{2}{(s-3)(s+1)} \\ \frac{s-2}{(s-1)(s-3)} \end{pmatrix} + [2] =$$

$$= \frac{4}{(s+1)(s-1)} - \frac{4}{(s-3)(s+1)} + \frac{s-2}{(s-1)(s-3)} + 2 =$$

$$\frac{4(s-3) - 4(s-1) + (s-2)(s+1) + 2(s^3-3s^2-s+3)}{s^3-3s^2-s+3} =$$

$$= \frac{\cancel{4s} - 12 - \cancel{4s} + 4 + s^2 + s - 2s - 2 + 2s^3 - 6s^2 - 2s + 6}{s^3-3s^2-s+3} \Rightarrow$$

$$\boxed{H(s) = \frac{2s^3 - 5s^2 - 3s - 4}{s^3 - 3s^2 - s + 3}}$$

Προηγούμενη άσκηση : Είναι

$$H(s) = \frac{4}{(s+1)(s-1)} - \frac{4}{(s-3)(s+1)} + \frac{s-2}{(s-1)(s+3)} + 2$$

Τώρα έχουμε Αντίστροφη Laplace με Μερικά κλάσματα

~~H(s)~~

$$\frac{4}{(s+1)(s-1)} - \frac{4}{(s-3)(s+1)} + \frac{(s-2)}{(s-1)(s+3)} =$$

$$= \frac{4(s-3) - 4(s-1) + (s-2)(s+1)}{(s+1)(s-1)(s-3)} =$$

$$= \frac{\cancel{4s} - 12 - \cancel{4s} + 4 + s^2 + s - 2s - 2}{(s+1)(s-1)(s-3)} =$$

$$= \frac{s^2 - s - 10}{(s+1)(s-1)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-3} \Rightarrow$$

$$A(s-1)(s-3) + B(s+1)(s-3) + C(s+1)(s-1) =$$

$$= A(s^2 - 4s + 3) + B(s^2 - 2s - 3) + C(s^2 - 1) =$$

$$= As^2 - 4As + 3A + Bs^2 - 2Bs - 3B + Cs^2 - C =$$

$$= (A+B+C)s^2 - (4A+2B)s + (3A - 3B - C) =$$

$$= s^2 - s - 10$$ Άρα

(1) $A + B + C = 1$ $\cancel{\Rightarrow 3A+}$

(2) $4A + 2B = 1$

(3) $3A - 3B - C = -10$

(1) + (3): $4A - 2B = -9$
(2) $4A + 2B = 1$

$$8A = -8 \Rightarrow A = -1$$

Άρα $2B = 1 - 4A = 5 \Rightarrow B = \frac{5}{2}$

και $C = 1 - A - B = 1 + 1 - \frac{5}{2} = 2 - \frac{5}{2} = \frac{4}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$H(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{5}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-3} + 2 \Rightarrow$$

$$h(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} -$$

$$-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\{1\} \Rightarrow$$

$$\boxed{h(t) = -e^{-t} + \frac{5}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{3t} + 2\delta(t)}$$

η κρουστική απόκριση

$h(t) = C e^{At} B + D$ προκύπτει το ίδιο

Διαφορική εξίσωση από συνάρτηση μεταφοράς με inverse Laplace

Είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s^3 - 5s^2 - 3s - 4}{s^3 - 3s^2 - s + 3} \Rightarrow$$

$$Y(s)\left(s^3 - 3s^2 - s + 3\right) = X(s)\left(2s^3 - 5s^2 - 3s - 4\right) \Rightarrow$$

$$s^3 Y(s) - 3s^2 Y(s) - sY(s) + 3Y(s) =$$

$$= 2s^3 X(s) - 5s^2 X(s) - 3s X(s) - 4X(s) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^3 Y(s)\} - 3\mathcal{L}^{-1}\{s^2 Y(s)\} - \mathcal{L}^{-1}\{sY(s)\} + 3\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} =$$

$$2\mathcal{L}^{-1}\{s^3 X(s)\} - 5\mathcal{L}^{-1}\{s^2 X(s)\} - 3\mathcal{L}^{-1}\{sX(s)\} - 4\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} & y'''(t) - 3y''(t) - y'(t) + 3y(t) = \\ & 2x'''(t) - 5x''(t) - 3x'(t) - 4x(t). \end{aligned}}$$

(1) Ελεγξιμότητα

Ένα συνεχές σύστημα

$$\dot{q}(t) = A q(t) + B x(t)$$
$$y(t) = C q(t) + D x(t)$$

χαρακτηρίζεται ως ελέγξιμο εάν όλες του οι καταστατικές μεταβλητές $q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)$ μπορούν να ελεγχθούν με τη βοήθεια των εισόδων του, έτσι ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να κατευθύνουμε το σύστημα προς οποιαδήποτε συγκεκριμένη κατάσταση, διαβιβάζοντας σε αυτό την κατάλληλη είσοδο.

Ειδικότερα το σύστημα χαρακτηρίζεται ως πλήρως ελέγξιμο κατά το χρονικό διάστημα $[t_0, t_1]$ εάν για κάθε αρχική κατάσταση $\vec{q}_0 = \vec{q}(t_0)$ και για κάθε κατάσταση $\vec{q}_1$ υπάρχει είσοδος

$$x(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

η οποία προκαλεί τη μετάβαση του συστήματος στην κατάσταση $\vec{q}(t_1) = \vec{q}_1$

Κριτήριο ελεγξιμότητας

Η κατάσταση $\vec{q}(t_1)$ ορίζεται ως

$$\vec{q}(t_1) = e^{A(t_1 - t_0)} \vec{q}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1 - \tau)} B x(\tau) \, d\tau$$

Επομένως

$$\vec{0} = \left(e^{A(t_1 - t_0)} \vec{q}(t_0) - \vec{q}(t_1) \right) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1 - \tau)} B x(\tau) \, d\tau$$

(2)

Ορίζοντας

$$\vec{p}(t_0) = I\vec{q}(t_0) - e^{A(t_0-t_1)}\vec{q}(t_1)$$

Παρατηρούμε ότι

$$e^{A(t_1-t_0)}\vec{q}(t_0) - \vec{q}(t_1) =$$

$$e^{A(t_1-t_0)}\vec{q}(t_0) - e^{A(t_1-t_0)}e^{-A(t_1-t_0)}\vec{q}(t_1) =$$

$$= e^{A(t_1-t_0)}\left(I\vec{q}(t_0) - e^{A(t_0-t_1)}\vec{q}(t_1)\right) = e^{A(t_1-t_0)}\vec{p}(t_0)$$

και η εξίσωση γίνεται

$$\vec{0} = e^{A(t_1-t_0)}\vec{p}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bx(\tau)\,d\tau$$

Άρα η μετάβαση

$\vec{q}(t_0) \rightarrow \vec{q}(t_1)$ είναι ισοδύναμη με την $\vec{p}(t_0) \rightarrow \vec{0}$

Τώρα ορίζουμε

$$\tilde{p}(t_1, t_0) = e^{A(t_1-t_0)}\vec{p}(t_0) = -\tilde{p}(t_0, t_1) \quad \text{οπότε}$$

$$\tilde{p}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t_1-\tau)}Bx(\tau)\,d\tau$$

Από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε

$$e^{A(t_1-\tau)} = \sum_{i=0}^{N-1} B_i(t_1-\tau)A^i \quad \text{και επομένως}$$

(3)

$$\tilde{p}(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \beta_i (t_1-\tau) A^i \right) B\, x(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} A^i B \left(\int_{t_0}^{t_1} \beta_i (t_1-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \right) =$$

$$= \left[B \;\; AB \;\; A^2B \ldots \; A^{N-1}B \right] \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_1} B_0 (t_1-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \\ \int_{t_0}^{t_1} B_1 (t_1-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \\ \text{-----------} \\ \int_{t_0}^{t_1} B_{N-1} (t_1-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \end{bmatrix} =$$

$$= S_c \cdot \Gamma$$

οπου

$S_c = \left[B \;\; AB \;\; A^2B \ldots \; A^{N-1} B \right]$ ο πινακας ελεγξιμοτητας διαστασεων $N \times KN$ για συστημα MIMO $K \times M$

και

$\Gamma = \left[\gamma_1 \;\; \gamma_2, \ldots \; \gamma_{N-1} \right]^T$ οπου $\gamma_i = \int_{t_0}^{t_1} \beta_i (t_1-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$

Το συστημα ειναι πληρως ελεγξιμο εαν ειναι

$$\boxed{\text{rank}(S_c) = N}$$

Θεωρημα ελεγξιμοτητας

4 Παρατηρησιμότητα

Ένα συνεχές σύστημα

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + Bx(t)$$
$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)$$

χαρακτηρίζεται ως πλήρως παρατηρήσιμο, όταν για κάθε συνεχή ακολουθία διανυσμάτων κατάστασης και εισόδου, μπορούμε να προσδιορίσουμε την τρέχουσα κατάσταση του σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα γνωρίζοντας μόνο την είσοδο του και την αντίστοιχη έξοδο για το χρονικό διάστημα ενδιαφέροντος $[t_0, t_1]$

Κριτήριο παρατηρησιμότητας

Με διαδοχικές παραγωγίσεις της εξίσωσης εξόδου και χρησιμοποιώντας και την καταστατική εξίσωση έχουμε

$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)$$
$$\dot{y}(t) = C\dot{q}(t) + D\dot{x}(t) = CAq(t) + CBx(t) + D\dot{x}$$
$$\ddot{y}(t) = CA\dot{q}(t) + CB\ddot{x}(t) + D\ddot{x}(t) =$$
$$= CA^2q(t) + CABx(t) + CB\dot{x}(t) + D\ddot{x}(t)$$

— — — — — — — — —

$$y^{(N-1)}(t) = CA^{N-1}q(t) + CA^{N-1}Bx(t) +$$
$$+ CA^{(N-3)}\dot{x}(t) + \dots + CABx^{N-3}(t) +$$
$$+ CBx^{N-2}(t) + Dx^{(N-1)}(t)$$

Σε μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} \vec{q}(t) +$$

$$\begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 & 0 \\ CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{N-1}(t) \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\vec{Y} = S_o \vec{q} + \vec{R}\vec{X} \Rightarrow \vec{q} = S_o^{-1}(\vec{Y} - RX)$$

όπου $S_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}$ πίνακας παρατηρησιμότητας

Για να είναι αντιστρέψιμος ο πίνακας έτσι ώστε να μπορεί να υπολογιστεί το $\vec{q}$ θα πρέπει να είναι

$$\text{rank}(S_o) = N$$

Θεώρημα παρατηρησιμότητας

6 Δυϊσμός ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας

Έστω το σύστημα (1) με πίνακες A, B, C, D

και το σύστημα (2) με πίνακες A^T, B^T, C^T, D^T.

Θα είναι τότε

$$S_c^{(2)} = \left(S_o^{(1)}\right)^T \quad \text{και} \quad S_o^{(2)} = \left(S_c^{(1)}\right)^T$$ όπου

(2) το σύστημα

$$\dot{p}(t) = A^T p(t) + C^T v(t)$$
$$w(t) = B^T p(t) + D^T v(t)$$

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right] = M^T$$

Επομένως

Το σύστημα που περιγράφεται από τον πίνακα M είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν το σύστημα που περιγράφεται από τον πίνακα M^T είναι παρατηρήσιμο.

Να ελέγξετε εάν το σύστημα LTI που περιγράφεται από την καταστατική εξίσωση

$$\dot{\vec{q}}(t) = A\vec{q}(t) + Bx(t) \quad \text{όπου}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{N=4}$$

Είναι πλήρως ελέγξιμο ή όχι

Είναι

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^2B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$, $A^3B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$

και

$$S_c = \left[B \;\; AB \;\; A^2B \;\; A^3B \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Είναι

$$\text{rank}(S_c) = N = 4$$

$\Rightarrow$ Το σύστημα είναι <u>πλήρως ελέγξιμο</u>

Να ελέγξετε εάν το σύστημα LTI που περιγράφεται από τις δυναμικές εξισώσεις

$$\dot{\vec{q}}(t) = A\vec{q}(t) + B\vec{x}(t) \qquad \boxed{N=3}$$

$$y(t) = C\vec{q}(t) + Dx(t)$$ όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 1] \quad D = [0]$$

είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

Είναι $C = [1 \ 0 \ 1]$

$$CA = [1 \ 0 \ 0], \quad CA^2 = [1 \ 0 \ -2]$$

Άρα $$S_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\text{rank}(S_o) = 2 < N$$ άρα το

σύστημα <u>ΔΕΝ</u> είναι παρατηρήσιμο.