1. Μετασχηματισμός Laplace

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

Ιδιότητες Εάν $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ και $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ τότε

- Γραμμικότητα

$$\alpha x(t) + b y(t) \rightleftarrows \alpha X(s) + b Y(s)$$

- Χρονική μετατόπιση

$$x(t - t_0) \rightleftarrows e^{-st_0} X(s).$$

- Μετατόπιση στο μιγαδικό επίπεδο

$$e^{s_0 t} x(t) \rightleftarrows X(s - s_0)$$

- Χρονική κλιμάκωση

$$x(\alpha t) \rightleftarrows \frac{1}{|\alpha|} X(s/\alpha)$$

- Μιγαδική συζυγία

$$x^*(t) \rightleftarrows X^*(s^*)$$

- Διαφόριση ως προς t

$$x'(t) \rightleftarrows sX(s) - x(0)$$ Γενικά

$$x^{(n)}(t) \rightleftarrows s^n X(s) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0).$$

② • Διαφόριση ως προς s : $X'(s) \rightleftarrows -t\,x(t)$

• Ολοκλήρωση

$$\int_0^t x(\xi)\,d\xi \rightleftarrows \frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s} x^{(-1)}(0)$$

• Συνέλιξη

$$x(t) * y(t) \rightleftarrows X(s)\,Y(s)$$

• Γινόμενο

$$x(t)\,y(t) \rightleftarrows \frac{1}{2\pi j} X(s) * Y(s)$$

• Θεώρημα αρχικής τιμής

$$\lim_{s\to\infty} \{ s X(s) \} = \lim_{t\to 0^+} x(t) = x(0)$$

• Θεώρημα τελικής τιμής

$$\lim_{s\to 0} \{ s X(s) \} = \lim_{t\to\infty} x(t) = x(\infty)$$

Παράδειγμα αντιστροφής με μερικά κλάσματα

Έστω $X(s) = \dfrac{s-3}{s^2+5s+6}$ Είναι

$$\frac{s-3}{s^2+5s+6} = \frac{s-3}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} =$$

$$= \frac{As + 3A + Bs + 2B}{(s+2)(s+3)} = \frac{(A+B)s + (3A+2B)}{(s+2)(s+3)}$$

Επομένως

$$A+B=1 \Rightarrow \begin{array}{l} 3A+3B=3 \\ 3A+2B=-3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B=6 \\ A=-5 \end{array}$$

Άρα

$$\frac{s-3}{s^2+5s+6} = -5\frac{1}{s+2} + 6\frac{1}{s+3} \Rightarrow$$

$$x(t) = -5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} =$$

$$= -5e^{-2t}u(t) + 6e^{-3t}u(t).$$

Επίλυση διαφορικών εξισώσεων

Έστω πλήρης γραμμική Δ.Ε τάξεως n της μορφής

$$\alpha_n x^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_2 x''(t) + \alpha_1 x'(t) + \alpha_0 x(t) = \varphi(t)$$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών θα έχουμε

$$\alpha_n \mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} + \alpha_{n-1}\mathcal{L}\{x^{(n-1)}(t)\} + \cdots + \alpha_2\mathcal{L}\{x''(t)\} + \alpha_1\mathcal{L}\{x'(t)\} + \alpha_0\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{\varphi(t)\}$$

Είναι τώρα

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s), \quad \mathcal{L}\{\varphi(t)\} = \Phi(s)$$

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2X(s) - sX(0) - x'(0)$$

$$\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \cdots - s x^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$$

Με αντικατάσταση λαμβάνουμε

$$X(s)\left(\alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0\right) - \left(s^{n-1}x(0) + s^{n-2}x'(0) + \cdots + s x^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)\right) - $$

$$sX(0) - x'(0) = \Phi(s)$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i\right) X(s) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{i} s^{i-j} x^{(i-j)}(0)\right) =$$

και τελικά

$$X(s) = \frac{\Phi(s) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{i} s^{i-j} x^{(i-j)}(0)\right)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s^i}$$

Η συνάρτηση $x(t)$ προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $X(s)$

Παραδείγματα · Έστω

$$My''(t) + by'(t) + ky(t) = r(t)$$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε

$$M\mathcal{L}\{y''(t)\} + b\mathcal{L}\{y'(t)\} + k\mathcal{L}\{y(t)\} =$$

$$= \mathcal{L}\{r(t)\}$$ όπου

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) \quad , \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

Άρα για $r(t) = 0$
$y(0) = y_0 , \; y'(0) = 0$ έχουμε

$$Ms^2Y(s) - Msy_0 + bsY(s) - by_0 + kY(s) = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y(s)(Ms^2 + bs + k) = Msy_0 + by_0 \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{(Ms+b)y_0}{Ms^2+bs+k} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$ ρίζες συνάρτησης

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$Ms^2 + bs + k = 0$$

Μηδενικές τιμές $\quad Ms + b = 0 \Rightarrow s = -\dfrac{b}{M}$

Πόλοι

$$Ms^2 + bs + K = 0 \Rightarrow$$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4MK}}{2b}$$

Εάν $\frac{K}{M} = 2$ και $\frac{b}{M} = 3$ τότε

$$Y(s) = \frac{(s+3)Y_0}{(s+1)(s+2)}$$ και για $y_0 = 1$

προκύπτει $y(t) = 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$

Σύστημα 1ης τάξεως

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = B_0 x(t) \Rightarrow$$

$$\frac{a_1}{a_0} y'(t) + y(t) = \frac{B_0}{a_0} x(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\tau y'(t) + y(t) = K x(t)}$$ όπου $\tau = \frac{a_1}{a_0}, K = \frac{B_0}{a_0}$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace έχουμε

$$\tau s Y(s) + Y(s) = K X(s) \Rightarrow$$

$$(\tau s + 1) Y(s) = K X(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{K X(s)}{\tau s + 1}$$

όπου τ: σταθερά χρόνου (μέτρο της ταχύτητας με την οποία το σύστημα αντιδρά σε μεταβολές της εισόδου)

K: στατικό κέρδος (ευαισθησία της εξόδου από την εισό

8 Συστήματα 2ας τάξεως

$$\alpha_2 y''(t) + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = B_0 x(t) \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_0} y''(t) + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} y'(t) + y(t) = \frac{B_0}{\alpha_0} x(t)$$

Έστω $\tau = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}$, $\zeta = \frac{\alpha_1}{2}\sqrt{\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}}$, $K = \frac{B_0}{\alpha_0}$

Τότε
$$\boxed{\tau^2 y''(t) + 2\tau\zeta y'(t) + y(t) = K x(t)}$$

Πράγματι $2\tau\zeta = 2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,\frac{\alpha_1}{2}\sqrt{\frac{1}{\alpha_0\alpha_2}} = \alpha_1\sqrt{\frac{1}{\alpha_0^2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$

Λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Laplace

$$\tau^2 \mathcal{L}\{y''(t)\} + 2\tau\zeta \mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = K\mathcal{L}\{x($$

Άρα

$$\tau^2 s^2 Y(s) + 2\tau\zeta s Y(s) + Y(s) = K X(s) \Rightarrow$$

$$Y(s)\left(\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1\right) = K X(s) \Rightarrow$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1} X(s)}$$

Βηματική απόκριση $x(t) = \alpha u(t) \Rightarrow$

$X(s) = \frac{\alpha}{s}$. Επομένως,

Επομένως

$$Y(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1}\frac{\alpha}{s} = \frac{K\alpha}{\tau^2}\frac{1}{s\left(s^2 + \frac{2\zeta}{\tau}s + \frac{1}{\tau^2}\right)}$$

Ρίζες πολυωνύμου παρονομαστή

$$\Delta = B^2 - 4\alpha\gamma = \frac{4\zeta^2}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = \frac{4}{\tau^2}\left(\zeta^2 - 1\right) \text{ και}$$

$$s_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = -\frac{\zeta}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$ Άρα

$$\boxed{Y(s) = \frac{K\alpha}{\tau^2}\frac{1}{s(s - s_1)(s - s_2)}}$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις

- Συστήματα μεγάλης απόσβεσης $(\zeta > 1)$

Πραγματικές ρίζες $s_1 \neq s_2$ (p. 233)

$$y(t) = K\alpha\left\{1 - \exp\left(-\frac{\zeta}{\tau}t\right)\left[\cosh\left(\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\tau}t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\sinh\left(\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\tau}t\right)\right]\right\}u(t)$$

- Συστήματα κρίσιμης απόσβεσης $(\zeta = 1)$ p. 234

$s_1 = s_2 = -\frac{\zeta}{\tau}$ και

$$y(t) = K\alpha\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]u(t)$$

Συστήματα μικρής απόσβεσης ($\zeta < 1$)

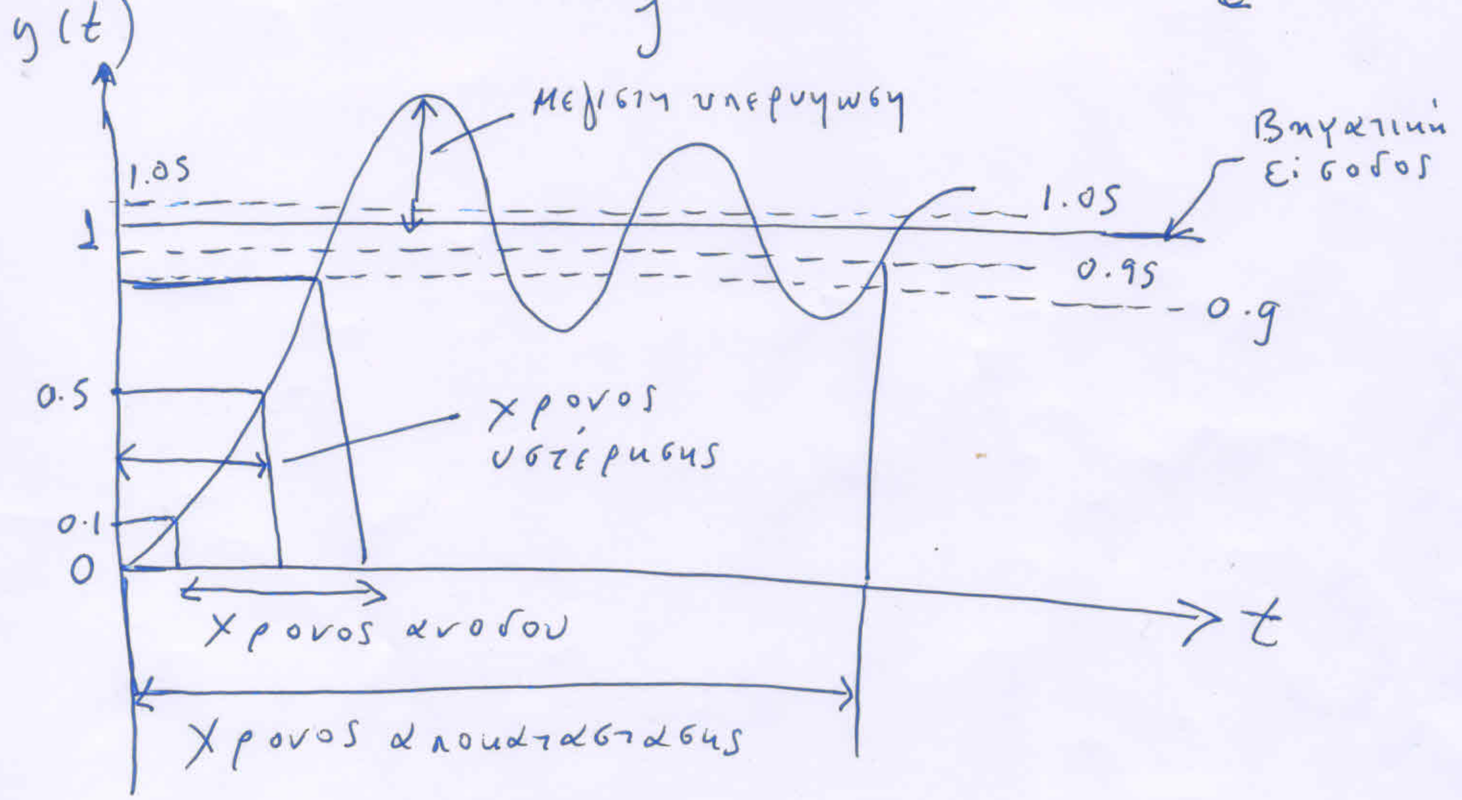
Συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$s_{1,2} = -\frac{\zeta}{\tau} \pm \frac{j}{\tau}\sqrt{1-\zeta^2}$$

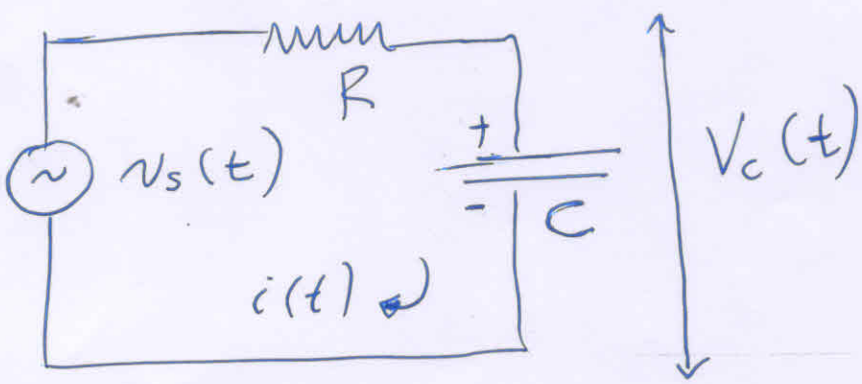
$$y(t) = K\alpha\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\exp\left(-\frac{\zeta}{\tau}t\right)\sin(\omega t+\varphi)\right]u(t)$$

όπου

$$\varphi = \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad \text{και} \quad \omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Κύκλωμα RC εν σειρά



(11) Από το νόμο του Kirchhoff έχουμε

$$Ri(t) + V_c(t) = RC\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_s(t)$$

Εάν

$$V_s(t) = x(t)$$
$$V_c(t) = y(t)$$

<u>ΤΟΤΕ</u>

$$y'(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + \frac{1}{RC}\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{RC}\mathcal{L}\{x(t)\} \Rightarrow$$

$$sY(s) + \frac{1}{RC}Y(s) = \frac{1}{RC}X(s) \Rightarrow$$

$$(RCs+1)Y(s) = X(s) \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1}{RC}\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$

<u>Άρα</u>

$$h(t) = \frac{1}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)u(t)$$

Παράδειγμα <u>4.8.6</u> p. 237

Παράδειγμα 4.8.7 p. 238