

Αναλογικά και Ψηφιακά Φίλτρα (ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10)

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Ι. ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2018

Εισαγωγή στα αναλογικά φίλτρα

Τι είναι ένα αναλογικό φίλτρο

- Τα **αναλογικά φίλτρα** είναι **γραμμικά και χρονικώς αμετάβλητα συστήματα** που πραγματοποιούν επιλογή ή μορφοποίηση συχνοτήτων.
- Στην πρώτη περίπτωση επιτρέπουν τη διέλευση **μόνο μιας ζώνης** συχνοτήτων ενδιαφέροντος, αποκόπτοντας όλες τις υπόλοιπες ζώνες συχνότητας.
- Ανάλογα με τις τιμές των συχνοτήτων της ζώνη διέλευσης, τα φίλτρα διαχωρίζονται σε **χαμηλοπερατά, υψηλοπερατά, ζωνοπερατά και ζωνοφρακτικά**.
- Τα αναλογικά φίλτρα υλοποιούνται με τη μορφή **ηλεκτρικών κυκλωμάτων** με διαστάσεις ηλεκτρικών στοιχείων πολύ μικρές σε σχέση με το μήκος κύματος του ρεύματος που τα διαρρέει.
- Η λειτουργία των φίλτρων στηρίζεται στους δύο γνωστούς νόμους του Kirchhoff:
 - **Νόμος των εντάσεων**: σε ένα συγκεντρωμένο ηλεκτρικό κύκλωμα, το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων όλων των κλάδων που προσεγγίζουν ένα κόμβο του κυκλώματος ή απομακρύνονται από αυτόν, είναι σε κάθε χρονική στιγμή ίσο με το μηδέν.
 - **Νόμος των τάσεων**: σε ένα συγκεντρωμένο ηλεκτρικό κύκλωμα, το άθροισμα των τάσεων των κλάδων που σχηματίζουν βρόχους, είναι σε κάθε χρονική στιγμή ίσο με το μηδέν.

Στοιχεία θεωρίας κυκλωμάτων

Αντιστάτες, πυκνωτές, πηνία και πηγές τάσης και ρεύματος

- **Αντιστάτης** Σύστημα δύο ακροδεκτών που απλοποιείται στην ωμική αντίσταση εάν είναι γραμμικός και χρονικά αμετάβλητος.
- Η χαρακτηριστική $v - i$ της αντίστασης είναι η $i(t) = Gv(t)$, ενώ η αντίστροφη της διατυπώνεται ως $v(t) = Ri(t)$ με τις σταθερές αναλογίας G και $R = 1/G$ να εκφράζουν την **ηλεκτρική αγωγιμότητα** και την **ηλεκτρική αντίσταση**.
- **Πυκνωτής** Σύστημα δύο ακροδεκτών που επιτρέπει αποθήκευση ηλεκτρικών φορτίων (δηλαδή ηλεκτρικής ενέργειας) με τη μορφή ηλεκτρικού πεδίου.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Για συνεχή τάση είναι $\dot{v}(t) = 0$ και $i(t) = 0$. Επομένως, ένας πυκνωτής σε κύκλωμα συνεχούς ρεύματος συμπεριφέρεται ως ένα **ανοικτό κύκλωμα**.

- Εάν ο πυκνωτής είναι γραμμικός αλλά **χρονικά μεταβαλλόμενος**, θα είναι $C = C(t)$ οπότε θα είναι $q(t) = C(t)v(t)$ και

$$i(t) = C(t) \frac{dv(t)}{dt} + v(t) \frac{dC(t)}{dt}$$

- **Πηνίο** Σύστημα δύο ακροδεκτών που αποθηκεύει ενέργεια με τη μορφή μαγνητικού πεδίου και με χαρακτηριστική $\phi - i$ της μορφής $\phi(t) = f(i)$ όπου $\phi = \phi(t)$ η **μαγνητική ροή**. Σύμφωνα με το νόμο της επαγωγής του Faraday

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{df(i)}{dt}$$

Στοιχεία θεωρίας κυκλωμάτων

Αντιστάτες, πυκνωτές, πηνία και πηγές τάσης και ρεύματος

- Για **γραμμικό** και **χρονικώς αμετάβλητο** πηνίο θα είναι $\phi(t) = Li(t)$ όπου L η αυτεπαγωγή του πηνίου· επομένως,

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Για συνεχές ρεύμα είναι $i'(t) = 0$ και $v(t) = 0$ · επομένως, σε ένα κύκλωμα συνεχούς ρεύματος, το πηνίο συμπεριφέρεται ως ένα βραχυκύκλωμα. Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε

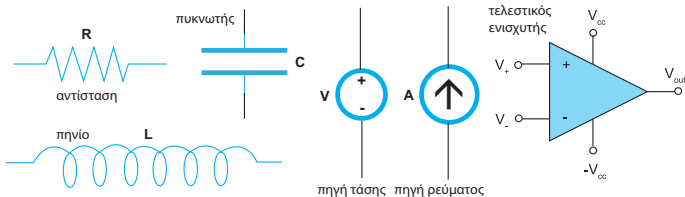
$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$$

- **Πηγές τάσης και ρεύματος** Στοιχεία δύο ακροδεκτών που προκαλούν τη διέγερση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων και αποτελούν τις εισόδους τους.
- **Πηγή τάσης** Χαρακτηρίζεται ως **ανεξάρτητη** εάν η τάση στα άκρα της είναι ανεξάρτητη από το ρεύμα που τη διαρρέει.
- **Πηγή ρεύματος** Χαρακτηρίζεται ως **ανεξάρτητη** εάν διαρρέεται από ρεύμα που είναι ανεξάρτητο της τάσης.
- Εάν αυτή η ανεξαρτησία δεν υφίσταται, τα εν λόγω στοιχεία χαρακτηρίζονται ως **εξαρτημένα**.

Στοιχεία θεωρίας κυκλωμάτων

Αντιστάτες, πυκνωτές, πηνία και πηγές τάσης και ρεύματος

- Οι **ανεξάρτητες** πηγές τάσης και ρεύματος είναι **μη γραμμικά στοιχεία**, αφού η χαρακτηριστική τους δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Μια **μηδενική πηγή τάσης** ισοδυναμεί με **βραχυκύκλωμα**.
- Μία **μηδενική πηγή έντασης** ισοδυναμεί με **ανοικτό κύκλωμα**.
- Αυτά τα στοιχεία είναι αδύνατο να υπάρξουν στην πραγματικότητα και για το λόγο αυτό χαρακτηρίζονται ως **ιδανικά στοιχεία**.
- Τα ηλεκτρικά στοιχεία δύο ακροδεκτών χαρακτηρίζονται από στιγμιαία ισχύ $p(t) = v(t)i(t)$ διάφορη του μηδενός και ονομάζονται **ενεργητικά στοιχεία**.
- Τα **μη ενεργητικά στοιχεία** όπως το βραχυκύκλωμα, το ανοικτό κύκλωμα, ο διακόπτης και ο ιδανικός μετασχηματιστής χαρακτηρίζονται από μηδενική στιγμιαία ισχύ και επομένως ούτε απορροφούν ούτε παρέχουν ενέργεια.



Σχήμα: Κυκλωματικά σύμβολα των βασικών κυκλωματικών στοιχείων.

Στοιχεία θεωρίας κυκλωμάτων

Παθητικά και ενεργά στοιχεία, τελεστικός ενισχυτής

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

- Τα **ενεργητικά στοιχεία** διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: στα **παθητικά στοιχεία** με θετική ενέργεια και στα **ενεργά στοιχεία** με θετική ή αρνητική ενέργεια.
- Τα **παθητικά στοιχεία** διαχωρίζονται σε εκείνα που **αναλώνουν** ενέργεια όπως είναι η **ωμική αντίσταση** και σε εκείνα που αποθηκεύουν ενέργεια όπως είναι ο πυκνωτής και το πηνίο.
- Η στιγμιαία ισχύς του γραμμικού και χρονικώς αμετάβλητου αντιστάτη, πυκνωτή και πηνίου, αντίστοιχα, ορίζεται ως

$$p_R(t) = i^2(t)R, \quad p_C(t) = Cv(t)\frac{dv(t)}{dt}, \quad p_L(t) = Li(t)\frac{di(t)}{dt}$$

- Ο **τελεστικός ενισχυτής** χαρακτηρίζεται από δύο εισόδους και μία έξοδο στοιχείο τριών ακροδεκτών.
- Η βασική του λειτουργία είναι η **ενίσχυση της οποιασδήποτε διαφοράς δυναμικού εμφανίζεται ανάμεσα στις δύο εισόδους του**.
- Ο λόγος των τάσεων εισόδου και εξόδου σχετίζεται με το **μέτρο κέρδους** μ που εξαρτάται από τη γωνιακή συχνότητα του σήματος εισόδου.
- Για τον **ιδανικό ενισχυτή** το κέρδος τάσης έχει **άπειρη τιμή** ενώ για τον πραγματικό ενισχυτή και για χαμηλές συχνότητες μικρότερες των 10 Hz, το κέρδος τάσης κυμαίνεται από $2 \cdot 10^5 - 10^6$.

Είδη αναλογικών φίλτρων

Παθητικά και ενεργά φίλτρα

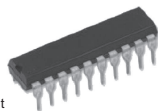
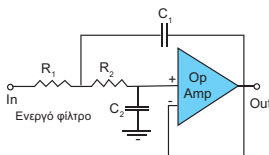
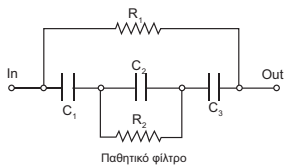
- Τα **παθητικά φίλτρα** στηρίζονται στο φαινόμενο του **ηλεκτρικού συντονισμού** που χαρακτηρίζει την εν σειρά ή παράλληλη σύνδεση ενός πυκνωτή με ένα πηνίο
- Χρησιμοποιούνται όταν απαιτείται διέλευση **ρεύματος** με ένταση $I > 1 \text{ mA}$ ή η ύπαρξη **θορύβου** σημαντικά μικρότερου από το επίπεδο του σήματος.
- Χαρακτηρίζονται από **μικρή κατανάλωση** ισχύος αλλά είναι αρκετά ογκώδη.
- Λειτουργούν το ίδιο καλά και στις περιοχές **υψηλών συχνοτήτων** αφού είναι απαλλαγμένα από τους περιορισμούς εύρους ζώνης των τελεστικών ενισχυτών.
- Μειονεκτούν στο ότι εάν απαιτείται μεγάλη ακρίβεια ή μικρό μέγεθος, το κόστος κατασκευής τους είναι **απαγορευτικό**.
- Τα **ενεργά αναλογικά φίλτρα** χρησιμοποιούν **τελεστικούς ενισχυτές** που συνδυάζονται με αντιστάτες και πυκνωτές.
- Έχουν **μικρό όγκο** γιατί δεν χρησιμοποιούνται πηνία, ενώ μπορούν να συρρικνωθούν ακόμη περισσότερο εάν κατασκευαστούν με τη μορφή **ολοκληρωμένων κυκλωμάτων**.
- Είναι κατάλληλα για εφαρμογές που επιτρέπουν την **ταχύτατη μεταβολή του πλάτους του σήματος**.
- Σχεδιάζονται **πιο εύκολα** από τα παθητικά φίλτρα και χαρακτηρίζονται από **μεγάλη** σύνθετη αντίσταση εισόδου, **χαμηλή** αντίσταση εξόδου.
- Πρακτικά μπορούν να δώσουν **οποιαδήποτε** τιμή κέρδους.
- Το μειονέκτημά τους είναι η **παραμόρφωση** του σήματος λόγω θορύβου.

Είδη αναλογικών φίλτρων

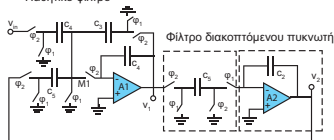
Παθητικά και ενεργά φίλτρα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Ενεργό φίλτρο με τη μορφή ολοκληρωμένου κυκλώματος



Μικροκυματικό φίλτρο



Σχήμα: Δομές και διατάξεις αναλογικών φίλτρων.

Είδη αναλογικών φίλτρων

Παθητικά και ενεργά φίλτρα

- Τα **ενεργά φίλτρα** χαρακτηρίζονται από **περιορισμούς** στο πλάτος του σήματος εξαιτίας του ρυθμού απόκρισης του ενισχυτή στην έξοδό του.
- Η **απόδοση** των ενεργών φίλτρων επηρεάζεται από περιορισμούς που χαρακτηρίζουν τη λειτουργία των τελεστικών ενισχυτών όσον αφορά στο **πλάτος** και στο **εύρος ζώνης**.
- Τα **ολοκληρωμένα ενεργά φίλτρα** είναι μικρότερα από τα συνήθη ενεργά φίλτρα και πολύ πιο μικρά από τα παθητικά αναλογικά φίλτρα.
- Τα **φίλτρα διακοπτόμενου πυκνωτή** που στηρίζονται στην ταχύτατη φόρτιση και αποφόρτιση πυκνωτών για την προσομοίωση υψηλών τιμών αντίστασης οι οποίες γενικά είναι δύσκολο να υλοποιηθούν σε μορφή ολοκληρωμένου κυκλώματος.
- Τα φίλτρα αυτού του τύπου επιτρέπουν τη δημιουργία σημάτων με συχνότητες ίση με τη συχνότητα εναλλαγής ενώ η συχνότητα αποκοπής τους εξαρτάται από τη συχνότητα λειτουργίας του ρολογιού.
- Τα **μικροκυματικά φίλτρα** κατασκευάζονται από την επαλληλία διατάξεων μικροκυματικής φύσεως όπως είναι **γραμμές μεταφοράς εγκάρσιων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, κυματοδηγοί, διηλεκτρικοί συντονιστές και συσκευές ακουστικών επιφανειακών κυμάτων** και χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές με συχνότητες από τα 0.5 GHz έως τα 500 GHz.

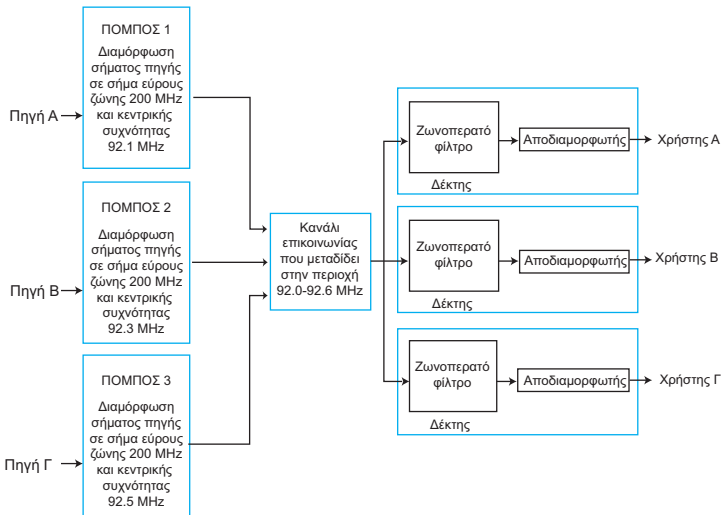
Εφαρμογές αναλογικών φίλτρων

Ραδιόφωνο, τηλεόραση, τηλεφωνία, δειγματοληψία και αναπαραγωγή ήχου

- **Ραδιόφωνο και τηλεόραση** Η επιλογή ραδιοφωνικού σταθμού ή τηλεοπτικού καναλιού, στηρίζεται στο συντονισμό του δέκτη του ραδιοφώνου ή της τηλεόρασης στην επιθυμητή τιμή συχνότητας με τη βοήθεια ζωνοπερατού φίλτρου που επιτρέπει τη διέλευση μόνο αυτής της συχνότητας ενδιαφέροντος.
- **Τηλεφωνία** Τα φίλτρα χρησιμοποιούνται στην **πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας** που επιτρέπει τη μετάδοση του περιεχομένου χιλιάδων τηλεφωνικών διαλέξεων μέσα από τον ίδιο δίαυλο επικοινωνίας.
- **Δειγματοληψία** Διασφαλίζουν την πραγματοποίηση της δειγματοληψίας έτσι ώστε η συχνότητά της να είναι το λιγότερο διπλάσια της μέγιστης συχνότητας του σήματος που δειγματοληπτείται.
- **Συστήματα αναπαραγωγής ήχου** Οι συσκευές αναπαραγωγής ήχου χρησιμοποιούν ισοσταθμιστές που λειτουργούν ως φίλτρα αποκαθιστώντας το φάσμα των ηχητικών σημάτων που αναπαράγονται και το οποίο παραμορφώνεται εξαιτίας των μηχανικών συντονισμών που οφείλονται στο περιβλήμα ή στα ερμάρια των συστημάτων ηχείων και οι οποίοι υπερτίθενται στο ηχητικό σήμα.

Εφαρμογές αναλογικών φίλτρων

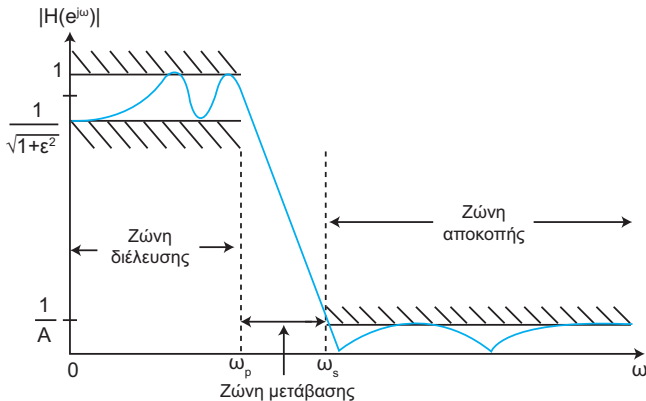
Η τεχνική της πολυπλεξίας διαίρεσης συχνότητας



Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Η μορφή της απόκρισης συχνότητας

Η **απόκριση συχνότητας** του επόμενου σχήματος χαρακτηρίζεται ως **κανονικοποιημένη**, επειδή η μέγιστη τιμή του μέτρου της συχνотικής απόκρισης στη ζώνη διέλευσης είναι ίση με τη **μονάδα**.



Σχήμα: Κανονικοποιημένη απόκριση συχνότητας χαμηλοπερατού αναλογικού φίλτρου

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας

Στην καμπύλη της απόκρισης συχνότητας:

- Η ελάχιστη τιμή της κυμάτωσης στη ζώνη διέλευσης, είναι $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ με τη σταθερά ε να εκφράζει την παράμετρο ταλαντώσεων σε αυτή τη ζώνη.
- Η μέγιστη τιμή της κυμάτωσης στη ζώνη αποκοπής, είναι $1/A$ όπου A η παράμετρος εξασθένησης της ζώνης αποκοπής.
- Οι συχνότητες ω_p και ω_s εκφράζουν τις συχνότητες στα όρια των ζωνών διέλευσης και αποκοπής αντίστοιχα, με το λόγο $k = \omega_p/\omega_s$ αυτών των συχνοτήτων να είναι γνωστός ως λόγος μετάβασης ή παράμετρος επιλεκτικότητας
- Είναι προφανές, πως για ένα χαμηλοπερατό φίλτρο θα είναι $k < 1$
- Η περιοχή τιμών του μέτρου της συχνοτικής απόκρισης είναι

$$\begin{aligned} 1/\sqrt{1+\varepsilon^2} \leq |H(j\omega)| \leq 1 & \quad \text{για τη ζώνη διέλευσης} \\ 0 \leq |H(j\omega)| \leq 1/A & \quad \text{για τη ζώνη αποκοπής} \end{aligned}$$

- Οι παράμετροι ε και A υπολογίζονται από τις εξισώσεις

$$\varepsilon = \frac{2\sqrt{\delta_p}}{1-\delta_p} \quad \text{και} \quad A = \frac{1+\delta_p}{\delta_s}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας

Στην πράξη τα χαρακτηριστικά ενός φίλτρου δεν δίνονται στην παραπάνω μορφή αλλά είναι εκπεφρασμένα σε **μονάδες dB** και ορίζονται ως

$$A_p = -20 \log \frac{1 - \delta_p}{1 + \delta_p} \quad \text{και} \quad A_s = -20 \log \frac{\delta_s}{1 + \delta_p}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των δ_p και δ_s συναρτήσεϊ των ε και A θα λάβουμε

$$A_p = -20 \log \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon^2}} = -10 \log \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad \text{και} \quad A_s = -20 \log \frac{1}{A}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\varepsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1} \quad \text{και} \quad A_s = 10^{A_s/20}$$

Η **παράμετρος διακριτότητας** ορίζεται ως $\alpha = \varepsilon / \sqrt{A^2 - 1}$ και παίρνει τιμές $\alpha \ll 1$.

Η λειτουργία ενός φίλτρου περιγράφεται από τη **γενική διαφορική εξίσωση**

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^M \beta_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

Οι συντελεστές α_i ($i = 1, 2, \dots, N$) και β_j ($j = 1, 2, \dots, M$) είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας

Η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου είναι ο **ο λόγος των μετασχηματισμών Laplace των σημάτων εισόδου και εξόδου** και εκπεφρασμένη στη μορφή

$$H(s) = \frac{\beta_M}{\alpha_N} \left\{ \frac{(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3) \dots (s - z_M)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \dots (s - p_N)} \right\}$$

επιτρέπει τον υπολογισμό των πόλων και των μηδενικών τιμών p και z .

Η απόκριση στο πεδίο του χρόνου υπολογίζεται είτε από την **εξίσωση της συνέλιξης** είτε δια του υπολογισμού του **αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace** της εξόδου που ορίζεται ως $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)\mathcal{X}(s)]$ όπου $H(s)$ και $\mathcal{X}(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς και ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος εισόδου.

Στην πράξη ενδιαφερόμαστε μόνο για **πραγματοποιησιμες** συναρτήσεις μεταφοράς που περιγράφουν **αιτιατά** και **ευσταθή** συστήματα LTI και πληρούν τις επόμενες ιδιότητες:

- Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ θα πρέπει να είναι **ρητή συνάρτηση** της μιγαδικής μεταβλητής s με **πραγματικούς** συντελεστές.
- Οι **πόλοι** της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ θα πρέπει να κείνται στο **αριστερό ημιεπίπεδο** του μιγαδικού επιπέδου.
- Ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή της ρητής συνάρτησης μεταφοράς θα πρέπει να είναι **μικρότερος ή ίσος** από το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή αυτής της συνάρτησης.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας

- Η **συνάρτηση απόκρισης συχνότητας** υπολογίζεται είτε **αλγεβρικά** εάν στη συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}(s)$ κάνουμε την αντικατάσταση $s = j\omega$, είτε **γεωμετρικά**, από τις θέσεις των πόλων και των μηδενικών τιμών της.
- Η επίδραση των πόλων και των μηδενικών τιμών στη συχνοτική απόκριση περιγράφεται με τη βοήθεια των **διαγραμμάτων Bode**.
- Η κατασκευή της συνάρτησης μεταφοράς στηρίζεται στη χρήση τεχνικών ανάλυσης κυκλωμάτων όπως ο **νόμος του Ohm** και οι **νόμοι τάσης και έντασης του Kirchhoff**, ενώ η μορφή της εξαρτάται από το κύκλωμα που υλοποιεί το φίλτρο.
- Η απόκριση ενός φίλτρου στο **στοιχειώδες τριγωνομετρικό σήμα**
 $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ έχει τη μορφή

$$y(t) = A|\mathcal{H}(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \angle\mathcal{H}(j\omega)) + \sum_{i=1}^N C_i e^{j\omega_i t}$$

και αποτελείται από έναν **παροδικό όρο** που εξασθενεί με την πάροδο του χρόνου και μηδενίζεται στο όριο $t \rightarrow \infty$ και από ένα **περιοδικό τριγωνομετρικό όρο** που αποτελεί την **απόκριση σταθεράς κατάστασης** και υφίσταται για πάντα.

- Το μέτρο της συνάρτησης απόκρισης συχνότητας υπολογισμένο στην επιθυμητή τιμή συχνότητας, είναι γνωστό ως **κέρδος του φίλτρου**.
- Η τιμή του **κέρδους** σε μονάδες dB είναι μικρότερη ή ίση με το μηδέν.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας

Η **εξασθένιση** του φίλτρου ορίζεται ως το **αντίστροφο κέρδος** και υπολογίζεται ως

$$\mathcal{A}(\omega) = 20 \log \frac{1}{|\mathcal{H}(j\omega)|} = 10 \log \frac{1}{|\mathcal{H}(j\omega)|^2} = 10 \log \frac{1}{\mathcal{H}(j\omega)\mathcal{H}(-j\omega)} = 10 \log L(\omega^2)$$

όπου

$$L(\omega^2) = \frac{1}{\mathcal{H}(j\omega)\mathcal{H}(-j\omega)}$$

Εάν στην παραπάνω σχέση θέσουμε $\omega = s/j$ προκύπτει ότι

$$L(-s^2) = \frac{1}{\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s)} = \frac{D(s)D(-s)}{N(s)N(-s)} = (-1)^{N-M} \times \left\{ \frac{\prod_{i=1}^N (s - p_i) \prod_{i=1}^N [s - (-p_i)]}{\prod_{i=1}^N (s - z_i) \prod_{i=1}^N [s - (-z_i)]} \right\}$$

Η συνάρτηση $L(-s^2)$ είναι γνωστή ως **συνάρτηση απώλειας** του φίλτρου. Οι πόλοι της είναι **οι μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς και τα αρνητικά τους**, ενώ οι μηδενικές τιμές της είναι **οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς και τα αρνητικά τους**.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας

- Η γραφική παράσταση της εξασθένησης $\mathcal{A}(\omega)$ συναρτήσει της συχνότητας ω , ονομάζεται **χαρακτηριστική απωλειών** του φίλτρου.
- Το πλήθος των στοιχείων κυκλώματος με **δυνατότητα αποθήκευσης ενέργειας** (δηλαδή των πηνίων και των πυκνωτών) που περιλαμβάνονται στο κύκλωμα που υλοποιεί ένα αναλογικό φίλτρο είναι γνωστό ως η **τάξη του φίλτρου**.
- Συνήθως η τιμή της τάξης του φίλτρου είναι ίση με τη **μεγαλύτερη** δύναμη του s που εμφανίζεται στο πολυώνυμο του **παρονομαστή** της συνάρτησης μεταφοράς.
- Η **τάξη** ενός φίλτρου επηρεάζει άμεσα το μέγεθός του, το κόστος του, καθώς και τη διαδικασία σχεδιάσής του.
- Όσο πιο **μεγάλη** είναι η τάξη ενός φίλτρου, τόσο πιο **μεγάλο** είναι το μέγεθός του (ειδικά αν αυτό περιέχει πηνία) και το κόστος κατασκευής του και τόσο πιο **πολύπλοκη** είναι η σχεδίασή του.
- Τα φίλτρα υψηλότερης τάξης είναι **πιο αποτελεσματικά** από τα φίλτρα χαμηλότερης τάξης.
- Ο χαρακτηρισμός ενός φίλτρου ως **χαμηλοπερατό, υψηλοπερατό, ζωνοπερατό ή ζωνοφρακτικό** υπαγορεύεται από τον τρόπο μεταβολής του μέτρου της συχνотικής απόκρισης του φίλτρου συναρτήσει της συχνότητας ω .

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας

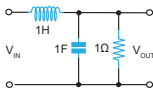
- Ανάλογα με τον τύπο και τα χαρακτηριστικά του φίλτρου, η καμπύλη μεταβολής του κέρδους στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής, μπορεί να είναι **σταθερή** για κάποια περιοχή συχνοτήτων, να μεταβάλλεται **μονοτονικά** ή να παρουσιάζει **διακυμάνσεις**.
- Συνήθως ενδιαφερόμαστε **μόνο για τις διακυμάνσεις στη ζώνη διέλευσης** αφού στη ζώνη αποκοπής το σήμα υποτίθεται πως έχει εξασθενήσει στον επιθυμητό βαθμό.
- Οι δύο **συχνότητες αποκοπής** ω_{c1} και ω_{c2} για τα ζωνοπερατά φίλτρα ορίζονται ως οι συχνότητες στις θέσεις των οποίων η τιμή του κέρδους είναι ίση **με το 0.7071 της μέγιστης τιμής του**, δηλαδή παρουσιάζει εξασθένιση **-3 dB**.
- Η **κεντρική συχνότητα** ω_c ορίζεται ως **ο γεωμετρικός μέσος των δύο συχνοτήτων αποκοπής** και η τιμή της είναι ίση με $\omega_c = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$.
- Ο **παράγοντας ποιότητας** Q υπολογίζεται από τη σχέση $Q = \omega_c / (\omega_{c2} - \omega_{c1})$ και αποτελεί ένα μέτρο του **βαθμού οξύτητας** της καμπύλης απόκρισης πλάτους.
- Σε ορισμένες περιπτώσεις αντί για τον παράγοντα Q ορίζονται και χρησιμοποιούνται οι παράμετροι $\alpha = 1/Q$ και $\xi = 1/2\alpha$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

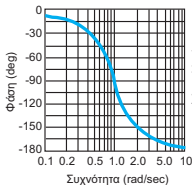
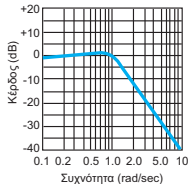
Απόκριση πλάτους και φάσης για τους τέσσερις βασικούς τύπους φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

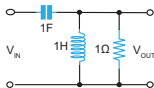
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ



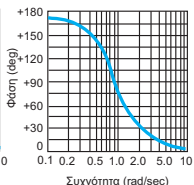
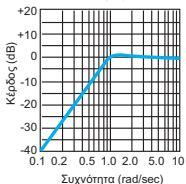
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$



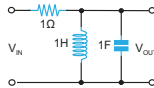
Χαμηλοπερατό



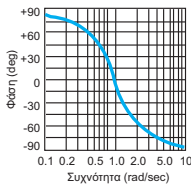
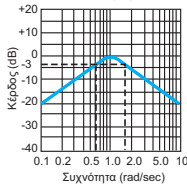
$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + s + 1}$$



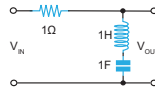
Υψηλοπερατό



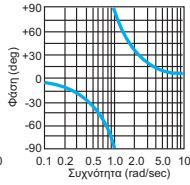
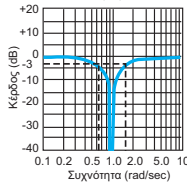
$$H(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$



Ζωνοπερατό



$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + s + 1}$$



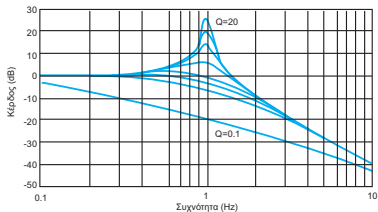
Ζωνοφρακτικό

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

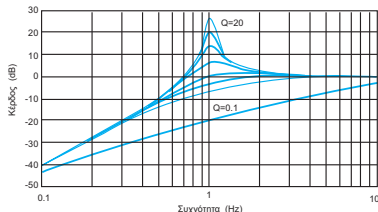
Μεταβολή του κέρδους με τη συχνότητα ω για διάφορες τιμές του Q

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

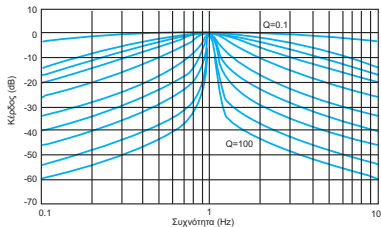
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



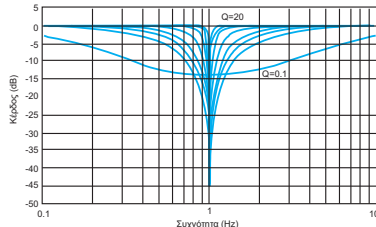
Χαμηλοπερατό φίλτρο



Υψηλοπερατό φίλτρο



Ζωνοπερατό φίλτρο



Ζωνοφρακτικό φίλτρο

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας

Η συνάρτηση μεταφοράς για το **χαμηλοπερατό**, **υψηλοπερατό**, **ζωνοπερατό** και **ζωνοφρακτικό** φίλτρο αντίστοιχα, υπολογίζεται ως

$$\mathcal{H}(s) = H_0 \frac{\omega_c^2}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q}s + \omega_c^2}, \quad \mathcal{H}(s) = H_0 \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q}s + \omega_c^2}$$

$$\mathcal{H}(s) = H_0 \frac{\frac{\omega_c}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q}s + \omega_c^2}, \quad \mathcal{H}(s) = H_0 \frac{s^2 + \omega_c^2}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q}s + \omega_c^2}$$

Η **συνάρτηση απόκρισης συχνότητας** προκύπτει πραγματοποιώντας στη συνάρτηση μεταφοράς την αντικατάσταση $s = j\omega$ και έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k (j\omega)^k} = \frac{\sum_{k \text{ άρτιο}} \beta_k (-1)^{\frac{k}{2}} \omega^k + j \sum_{k \text{ περιττό}} \beta_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^k}{\sum_{k \text{ άρτιο}} \alpha_k (-1)^{\frac{k}{2}} \omega^k + j \sum_{k \text{ περιττό}} \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^k}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας

Ορίζοντας τις **βοηθητικές συναρτήσεις**

$$R_n(\omega) = \sum_{k \text{ άρτιο}} \beta_k (-1)^{\frac{k}{2}} \omega^k, \quad I_n(\omega) = \sum_{k \text{ περιττό}} \beta_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^k$$

$$R_d(\omega) = \sum_{k \text{ άρτιο}} \alpha_k (-1)^{\frac{k}{2}} \omega^k, \quad I_d(\omega) = \sum_{k \text{ περιττό}} \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^k$$

η **συνάρτηση μεταφοράς** του συστήματος γράφεται με τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(j\omega) &= \frac{R_n(\omega) + jI_n(\omega)}{R_d(\omega) + jI_d(\omega)} = \frac{[R_n(\omega) + jI_n(\omega)][R_d(\omega) - jI_d(\omega)]}{[R_d(\omega) + jI_d(\omega)][R_d(\omega) - jI_d(\omega)]} \\ &= \frac{R_n(\omega)R_d(\omega) + I_n(\omega)I_d(\omega)}{R_d^2(\omega) + I_d^2(\omega)} + j \frac{R_d(\omega)I_n(\omega) - R_n(\omega)I_d(\omega)}{R_d^2(\omega) + I_d^2(\omega)} \end{aligned}$$

και επομένως η **φασική της απόκριση** θα υπολογίζεται από την εξίσωση

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = \tan^{-1} \frac{R_d(\omega)I_n(\omega) - R_n(\omega)I_d(\omega)}{R_n(\omega)R_d(\omega) + I_n(\omega)I_d(\omega)}$$

ή μετά από την αντικατάσταση των παραπάνω συναρτήσεων,

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = \frac{\sum_{k \text{ άρτιο}} \alpha_k (-1)^{\frac{k}{2}} \omega^k \sum_{k \text{ περιττό}} \beta_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^k - \sum_{k \text{ άρτιο}} \beta_k (-1)^{\frac{k}{2}} \omega^k \sum_{k \text{ περιττό}} \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^k}{\sum_{k \text{ άρτιο}} \beta_k (-1)^{\frac{k}{2}} \omega^k \sum_{k \text{ άρτιο}} \alpha_k (-1)^{\frac{k}{2}} \omega^k + \sum_{k \text{ περιττό}} \beta_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^k \sum_{k \text{ περιττό}} \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^k}$$

Επομένως, η **υστέρηση φάσης** και η **υστέρηση ομάδας** υπολογίζονται ως

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\angle \mathcal{H}(j\omega)}{\omega} \quad \text{και}$$
$$\tau_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \{ \angle \mathcal{H}(j\omega) \} = -\frac{d}{d\omega} \left\{ \tan^{-1} \frac{I(\omega)}{R(\omega)} \right\} = \frac{I(\omega) \frac{dR(\omega)}{d\omega} - R(\omega) \frac{dI(\omega)}{d\omega}}{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$$

με το **πραγματικό** και το **φανταστικό** μέρος της συχνотικής απόκρισης να είναι

$$R(\omega) = \frac{R_n(\omega)R_d(\omega) + I_n(\omega)I_d(\omega)}{R_d^2(\omega) + I_d^2(\omega)} \quad \text{και} \quad I(\omega) = \frac{R_d(\omega)I_n(\omega) - R_n(\omega)I_d(\omega)}{R_d^2(\omega) + I_d^2(\omega)}$$

Εάν το φίλτρο χαρακτηρίζεται από **ιδανική γραμμική φασική απόκριση**, θα είναι

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = -\tau_d \omega \quad \text{και} \quad \text{επομένως} \quad \tau_d(\omega) = \tau_g(\omega) = \tau_d.$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά παθητικών και ενεργών φίλτρων πρώτης τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τα φίλτρα πρώτης τάξεως υλοποιούνται τόσο με παθητικά όσο και με ενεργά κυκλώματα και ανάλογα με την περιοχή συχνοτήτων που αποκρίνουν λειτουργούν ως χαμηλοπερατά ή υψηλοπερατά αναλογικά φίλτρα.

Χρησιμοποιώντας κυκλώματα πρώτης τάξεως μπορούμε να κατασκευάσουμε και ολοπερατά φίλτρα, ενώ αντίθετα, δεν υπάρχουν ζωνοπερατά και ζωνοφρακτικά φίλτρα πρώτης τάξεως.

Υπάρχουν δύο τύποι παθητικών αναλογικών φίλτρων πρώτης τάξεως: τα φίλτρα τύπου RC που αποτελούνται από μία αντίσταση και ένα πυκνωτή και τα φίλτρα τύπου RL που αποτελούνται από μία αντίσταση και ένα πηνίο.

Τα φίλτρα αμφοτέρων των τύπων λειτουργούν είτε ως χαμηλοπερατά είτε ως υψηλοπερατά.

Η συνάρτηση μεταφοράς των παθητικών φίλτρων RC έχει τη μορφή

$$H(s) = \begin{cases} \frac{1}{1 + RCs} = \frac{1}{1 + \tau s} & \text{για το χαμηλοπερατό φίλτρο RC} \\ \frac{RCs}{1 + RCs} = \frac{\tau s}{1 + \tau s} & \text{για το υψηλοπερατό φίλτρο RC} \end{cases}$$

όπου $\tau = RC$ η επονομαζόμενη σταθερά χρόνου του κυκλώματος.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά παθητικών και ενεργών φίλτρων πρώτης τάξεως

Η **συχνοτική απόκριση** αυτών των φίλτρων, προκύπτει θέτοντας $s = j\omega$. Θα είναι τότε

$$\mathcal{H}(j\omega) = \begin{cases} 1 / \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_c} \right) & \text{για το χαμηλοπερατό φίλτρο RC} \\ 1 / \left(1 - j \frac{\omega_c}{\omega} \right) & \text{για το υψηλοπερατό φίλτρο RC} \end{cases}$$

με **μέτρο** και **φάση** της μορφής

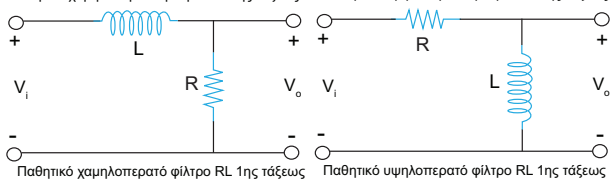
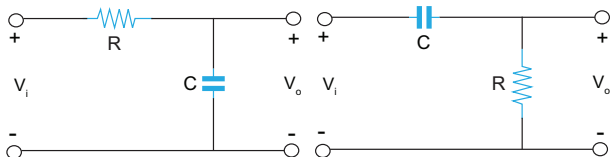
$$|\mathcal{H}(j\omega)| = \begin{cases} 1 / \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2} & \text{για το χαμηλοπερατό φίλτρο RC} \\ 1 / \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2} & \text{για το υψηλοπερατό φίλτρο RC} \end{cases}$$
$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = \begin{cases} -\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) & \text{για το χαμηλοπερατό φίλτρο RC} \\ +\tan^{-1} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right) & \text{για το υψηλοπερατό φίλτρο RC} \end{cases}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά παθητικών και ενεργών φίλτρων πρώτης τάξεως

Από την άλλη πλευρά, τα **φίλτρα RL**, χρησιμοποιούνται τόσο ως **χαμηλοπερατά** όσο και ως **υψηλοπερατά**. Η **συνάρτηση μεταφοράς** αυτών των φίλτρων είναι η

$$\mathcal{H}(s) = \begin{cases} \frac{R}{R + Ls} = \frac{1}{1 + (L/R)s} = \frac{1}{1 + \tau s} & \text{για το χαμηλοπερατό φίλτρο LC} \\ \frac{Ls}{R + Ls} = \frac{(L/R)s}{1 + (L/R)s} = \frac{\tau s}{1 + \tau s} & \text{για το υψηλοπερατό φίλτρο RC} \end{cases}$$

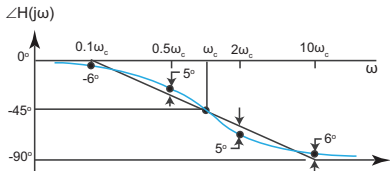
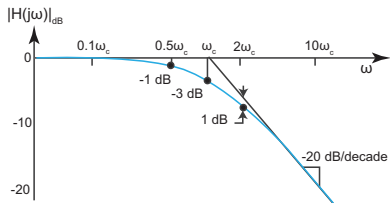


Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

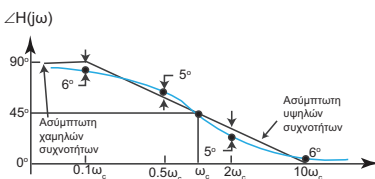
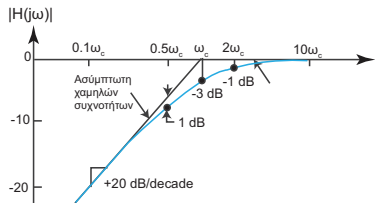
Χαρακτηριστικά παθητικών και ενεργών φίλτρων πρώτης τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Διάγραμμα Bode πλάτους και φάσης για το παθητικό χαμηλοπερατό φίλτρο RC 1ης τάξεως



Διάγραμμα Bode πλάτους και φάσης για το παθητικό υψηλοπερατό φίλτρο RC 1ης τάξεως

Σχήμα: Διαγράμματα Bode πλάτους και φάσης χαμηλοπερατού και υψηλοπερατού φίλτρου RC 1ης τάξεως.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά παθητικών και ενεργών φίλτρων πρώτης τάξεως

- Τα **ενεργά φίλτρα πρώτης τάξεως** δεν χρησιμοποιούν πηνία, αλλά αντίθετα αποτελούνται από ένα **κύκλωμα RC** ακολουθούμενο από ένα **τελεστικό ενισχυτή** ο οποίος συνδέεται στο κύκλωμα χρησιμοποιώντας τη **μη αναστρέφουσα** ή τη **αναστρέφουσα** συνδεσμολογία.
- Όπως και στην περίπτωση των **παθητικών φίλτρων RC**, το αντίστοιχο ενεργό φίλτρο λειτουργεί ως **χαμηλοπερατό** ή **υψηλοπερατό** ανάλογα με το ποια τάση στοιχείου κυκλώματος θεωρείται ως τάση εξόδου.
- Η **συνάρτηση μεταφοράς** για τη μη αναστρέφουσα και την αναστρέφουσα συνδεσμολογία έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(s) = \frac{1 + (R_2/R_3)}{1 + \omega_c R_1 C_1 s} \quad \text{και} \quad \mathcal{H}(s) = -\frac{R_2/R_1}{1 + \omega_c R_1 C_1 s}$$

οδηγώντας σε τιμές **κέρδους** $K = 1 + \frac{R_2}{R_3}$ και $K = -\frac{R_2}{R_1}$.

- Τα **ενεργά υψηλοπερατά φίλτρα πρώτης τάξεως** προκύπτουν **εναλλάσσοντας** τις θέσεις του πυκνωτή και της αντίστασης στο αντίστοιχο χαμηλοπερατό φίλτρο και έχουν **συναρτήσεις μεταφοράς** της μορφής

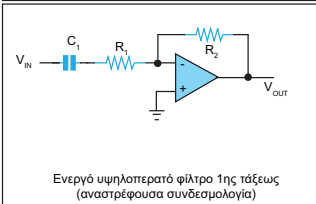
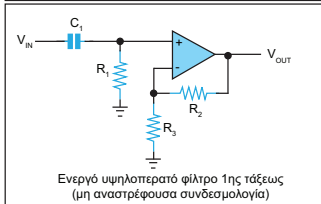
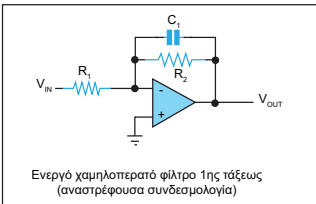
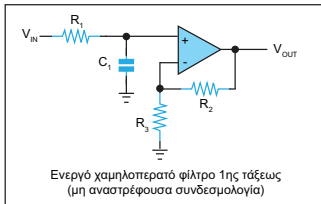
$$\mathcal{H}(s) = \frac{1 + (R_2/R_3)}{1 + \frac{1}{\omega_c R_1 C_1} \cdot \frac{1}{s}} \quad \text{και} \quad \mathcal{H}(s) = \frac{R_2/R_1}{1 + \frac{1}{\omega_c R_1 C_1} \cdot \frac{1}{s}}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά παθητικών και ενεργών φίλτρων πρώτης τάξεως

- Το κέρδος για την μη αναστρέφουσα και την αναστρέφουσα συνδεσμολογία είναι

$$K = 1 + \frac{R_2}{R_3} \quad \text{και} \quad K = -\frac{R_2}{R_1}$$



Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Σε αντίθεση με τα φίλτρα πρώτης τάξεως που είναι μόνο χαμηλοπερατά ή υψηλοπερατά, τα φίλτρα δευτέρας τάξεως μπορούν επιπλέον να είναι και ζωνοπερατά ή ζωνοφρακτικά, επιτρέποντας ή αποτρέποντας τη διέλευση συγκεκριμένης ζώνης συχνοτήτων.

Αυτά τα φίλτρα περιγράφονται από τη διτετράγωνη συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left\{ s^2 + \frac{\beta_1}{\beta_2} s + \frac{\beta_0}{\beta_2} \right\} / \left\{ s^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} s + \frac{\alpha_0}{\alpha_2} \right\}$$

Ορίζοντας τις παραμέτρους $K = \beta_2/\alpha_2$, $\omega_{0z}^2 = \beta_0/\beta_2$, $Q_z = \omega_{0z}/(\beta_1/\beta_2)$, $\omega_{0p}^2 = \alpha_0/\alpha_2$ και $Q_p = \omega_{0p}/(\alpha_1/\alpha_2)$, η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου διατυπώνεται ως

$$\mathcal{H}(s) = K \left\{ s^2 + \frac{\omega_{0z}}{Q_z} s + \omega_{0z}^2 \right\} / \left\{ s^2 + \frac{\omega_{0p}}{Q_p} s + \omega_{0p}^2 \right\} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

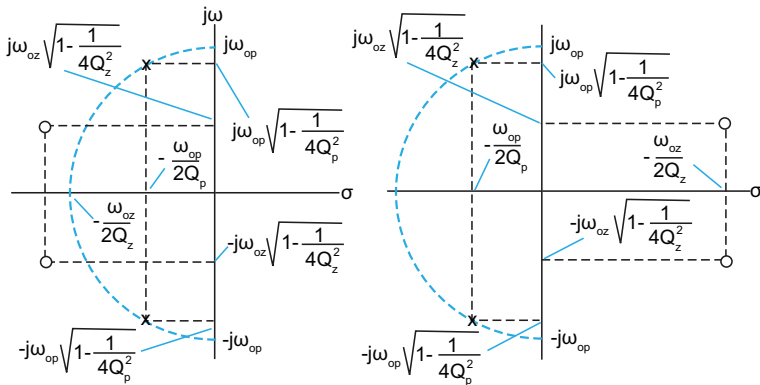
όπου z_1 , z_2 και p_1 , p_2 τα μηδενικά και οι πόλοι της συνάρτησης αντίστοιχα, με τις ποσότητες που σχετίζονται με αυτά να περιγράφονται από τους δείκτες z και p .

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Οι θέσεις των πόλων και των μηδενικών τιμών της διτετραγωνικής συνάρτησης μεταφοράς φίλτρων δευτέρας τάξεως για $Q_p > 0.5$ και $Q_z > 0.5$ στο αριστερό και στο δεξί ημιεπίπεδο.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Περιοριζόμενοι στην περίπτωση των **πόλων** που ασκούν και τη μεγαλύτερη επίδραση στα χαρακτηριστικά του φίλτρου, αυτοί αποτελούν ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$s^2 + (\omega_{0p}/Q_p) s + \omega_{0p}^2 = 0$$

και δίδονται από τη σχέση

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega_{0p}}{Q_p} \pm \sqrt{\frac{\omega_{0p}^2}{Q_p^2} - 4\omega_{0p}^2} \right) = \omega_{0p} \left(-\frac{1}{2Q_p} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2Q_p}\right)^2 - 1} \right)$$

όπως εύκολα μπορεί να επαληθευτεί. Όσον αφορά τις τιμές των **μηδενικών** της συνάρτησης μεταφοράς, αυτές δίνονται από μία παρόμοια έκφραση.

Οι παράμετροι Q_p και Q_z είναι γνωστοί ως **συντελεστές ποιότητας των πόλων και των μηδενικών τιμών** αντίστοιχα, με τις ποσότητες ω_{0p} και ω_{0z} να εκφράζουν τις αντίστοιχες **φυσικές συχνότητες**.

Η συνάρτηση μεταφοράς των **χαμηλοπερατών φίλτρων** έχει μόνο πόλους και καθόλου μηδενικά και περιγράφεται από την εξίσωση

$$H(s) = \frac{A}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

Για να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη **συχνοτική απόκριση** θέτουμε $s = j\omega$. Θα είναι τότε

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{A}{-\omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega + \omega_0^2} = \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2) - jA\frac{\omega_0}{Q}\omega}{\omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \omega_0^4}$$

Διατυπώνοντας την παραπάνω συνάρτηση στην **αναπαράσταση πλάτους φάσης** έχουμε

$$G(\omega) = \frac{A}{\sqrt{\omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \omega_0^4}} \quad \text{και} \quad \angle\mathcal{H}(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\frac{\omega_0}{Q}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

όπου $G(\omega) = |\mathcal{H}(j\omega)|$. Η συχνότητα ω_c για την οποία η τιμή του κέρδους είναι το $\sqrt{2}/2 = 0.707$ της μέγιστης τιμής της $G_0 = A/\omega_0^2$, ονομάζεται **συχνότητα αποκοπής**.

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}$$

Για τιμές $Q \gg 1$ είναι $\omega_c \approx \omega_0 \sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.544\omega_0 \approx 1.544$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

Η συνάρτηση μεταφοράς των **υψηλοπερατών φίλτρων** έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(s) = \frac{As^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

και περιέχει μία **μηδενική τιμή δευτέρας τάξεως** στη θέση $s = 0$. Ανάλογα με την τιμή του Q , υπάρχουν δύο **πραγματικοί πόλοι** ή ένα ζεύγος **συζυγών μιγαδικών** πόλων.

Η **συνάρτηση απόκρισης συχνότητας** προκύπτει από την παραπάνω συνάρτηση κάνοντας την αντικατάσταση $s = j\omega$ και έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{-A\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_0}{Q}\omega} = -\frac{A\omega^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2} + j\frac{A\frac{\omega_0}{Q}\omega^3}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}$$

Διατυπώνοντας την παραπάνω συνάρτηση στην **αναπαράσταση πλάτους φάσης** έχουμε

$$G(\omega) = \frac{A}{\sqrt{\omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \omega_0^4}} \quad \text{και} \quad \angle \mathcal{H}(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\frac{\omega_0}{Q}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

Η **συχνότητα αποκοπής** ω_c δίδεται από την εξίσωση

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{2Q^2} - 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς των **ζωνοπερατών φίλτρων** δίδεται από την έκφραση

$$\mathcal{H}(s) = \frac{As}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

και χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη μίας **απλής μηδενικής τιμής** στη θέση $s = 0$ και δύο **πραγματικών** πόλων ή ενός ζεύγους **συζυγών μιγαδικών πόλων**, ανάλογα με την τιμή Q .

Η **συχνοτική απόκριση** προκύπτει από την $\mathcal{H}(s)$ για $s = j\omega$ και είναι η

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{jA\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_0}{Q}\omega} = \frac{A\frac{\omega_0}{Q}\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2} + j\frac{A\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

Διατυπώνοντας την παραπάνω συνάρτηση στην **αναπαράσταση πλάτους φάσης** έχουμε

$$G(\omega) = \frac{A\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}} = \frac{A\omega}{\sqrt{\omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \omega_0^4}} \quad \text{και}$$
$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\frac{\omega_0}{Q}\omega} \quad \text{όπου όπως και πριν} \quad G(\omega) = |\mathcal{H}(j\omega)|$$

Η συνάρτηση $G(\omega)$ παρουσιάζει **μέγιστη τιμή** στη συχνότητα $\omega_{\max} = \omega_0$ που υπολογίζεται ως η λύση της αλγεβρικής εξίσωσης $\dot{G}(\omega) = 0$.

Αυτή η συχνότητα είναι **ανεξάρτητη** από τον παράγοντα ποιότητας Q και επομένως η **συνάρτηση κέρδους** παρουσιάζει **πάντοτε** κάποιο μέγιστο, **ανεξάρτητα** από την τιμή του παράγοντα Q σε αντίθεση από τις αντίστοιχες συναρτήσεις των χαμηλοπερατών και υψηλοπερατών φίλτρων που παρουσιάζουν αυτό το μέγιστο **μόνο** για τιμές $Q \geq 0.707$.

Αντικαθιστώντας την τιμή της ω_{\max} στην εξίσωση της συνάρτησης $G(\omega)$ βρίσκουμε

$$G_{\max} = G(\omega_0) = \frac{A\omega_0}{\sqrt{2\omega_0^4 - 2\omega_0^4\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}} = \frac{A\omega_0}{\sqrt{2\omega_0^4 \frac{1}{2Q^2}}} = \frac{AQ}{\omega_0} = G_0$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

Στα ζωνοπερατά φίλτρα, η **συχνότητα αποκοπής** ω_c ορίζεται ως η συχνότητα στη θέση της οποίας η τιμή της συνάρτησης $G(\omega)$ είναι ίση με $(\sqrt{2}/2) G_0$. Από τις εξισώσεις της $G(\omega)$ και της παραμέτρου G_0 , έχουμε

$$G(\omega_c) = \frac{A\omega_c}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_c^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega_c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{AQ}{\omega_0}$$

από όπου προκύπτει ότι $\omega_c^2 \pm \frac{\omega_0}{Q}\omega_c - \omega_0^2 = 0$.

Από τις παραπάνω δευτεροβάθμιες εξισώσεις, αυτή που αντιστοιχεί στο **θετικό πρόσημο** έχει διακρίνουσα $\Delta = (\omega_0^2/Q^2)(1 + 4Q^2)$ και ρίζες

$$\omega_{c1} = -\frac{\omega_0}{2Q}(1 - \sqrt{1 + 4Q^2}) \quad \text{και} \quad \omega_{c3} = -\frac{\omega_0}{2Q}(1 + \sqrt{1 + 4Q^2})$$

ενώ αυτή που αντιστοιχεί στο **αρνητικό πρόσημο** έχει την ίδια διακρίνουσα και ρίζες

$$\omega_{c2} = \frac{\omega_0}{2Q}(1 + \sqrt{1 + 4Q^2}) \quad \text{και} \quad \omega_{c4} = \frac{\omega_0}{2Q}(1 - \sqrt{1 + 4Q^2})$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Από τις τέσσερις αυτές ρίζες, οι ω_{c2} και ω_{c4} απορρίπτονται ούσες αρνητικές και επομένως, οι δύο **συχνότητες αποκοπής** του ζωνοπερατού φίλτρου, είναι οι

$$\omega_{c1} = -\frac{\omega_0}{2Q}(1 - \sqrt{1 + 4Q^2}) \quad \text{και} \quad \omega_{c2} = \frac{\omega_0}{2Q}(1 + \sqrt{1 + 4Q^2})$$

Από τις τελευταίες σχέσεις παρατηρούμε ότι

$$\omega_{c1}\omega_{c2} = \left[-\frac{\omega_0}{2Q}(1 - \sqrt{1 + 4Q^2}) \right] \left[\frac{\omega_0}{2Q}(1 + \sqrt{1 + 4Q^2}) \right] = \omega_0^2$$

$$\text{και } \Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Επομένως, το εύρος ζώνης ενός ζωνοπερατού φίλτρου είναι αντιστρόφως ανάλογο του παράγοντα ποιότητας Q .

Αυτό σημαίνει πως καθώς η τιμή του Q αυξάνεται, η τιμή του εύρους ζώνης μειώνεται και η καμπύλη της απόκρισης πλάτους γίνεται ολοένα και πιο οξεία.

Κατά συνέπεια, ο παράγοντας ποιότητας Q σε ένα ζωνοπερατό φίλτρο, αποτελεί ένα μέτρο της οξύτητας της καμπύλης του μέτρου της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

Τα **ζωνοφρακτικά φίλτρα** περιγράφονται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(s) = \frac{A(s^2 + \omega_z^2)}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q}s + \omega_p^2}$$

με δύο **συζυγείς φανταστικές μηδενικές τιμές** στις θέσεις $s = \pm j\omega_z$ και δύο **πραγματικούς πόλους** ή ένα ζεύγος **συζυγών μιγαδικών** πόλων (ανάλογα με την τιμή του Q).

Οι παράμετροι ω_p και ω_z εκφράζουν τις **συχρότητες** των πόλων και των μηδενικών τιμών αντίστοιχα, ενώ η συνάρτηση **απόκρισης συχρότητας** θα προκύψει από την παραπάνω συνάρτηση, θέτοντας $s = j\omega$. Θα είναι τότε

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{A(\omega_z^2 - \omega^2)}{(\omega_p^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_p}{Q}\omega} = \frac{A(\omega_z^2 - \omega^2)(\omega_p^2 - \omega^2)}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_p^2}{Q^2}\omega^2} - j\frac{A(\omega_z^2 - \omega^2)\frac{\omega_p}{Q}\omega}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_p^2}{Q^2}\omega^2}$$

Διατυπώνοντας την παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς στην **αναπαράσταση πλάτους - φάσης** θα λάβουμε

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

$$G(\omega) = | \mathcal{H}(j\omega) | = \frac{A | \omega_z^2 - \omega^2 |}{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_p^2}{Q^2} \omega^2}} \quad \text{και} \quad \angle \mathcal{H}(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\frac{\omega_p}{Q} \omega}{\omega_p^2 - \omega^2}$$

Εάν είναι $\omega_z > \omega_p$ το φίλτρο χαρακτηρίζεται ως **χαμηλοπερατό**, ενώ εάν είναι $\omega_z < \omega_0$ το φίλτρο χαρακτηρίζεται ως **υψηλοπερατό**.

Εάν αυτές οι συχνότητες είναι ίσες μεταξύ τους, το φίλτρο χαρακτηρίζεται ως **συμμετρικό** και τα χαρακτηριστικά του προκύπτουν από τις παραπάνω εξισώσεις θέτοντας $\omega_p = \omega_z = \omega_0$. Η **συχνοτική απόκριση** του φίλτρου τώρα έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_0}{Q}\omega} = \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2} - j \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2)\frac{\omega_0}{Q}\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}$$

με απόκριση **πλάτους** και **φάσης**

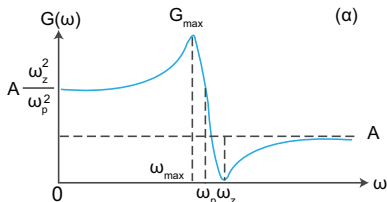
$$G(\omega) = \frac{A | \omega_0^2 - \omega^2 |}{\sqrt{\omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \omega_0^4}}, \quad \angle \mathcal{H}(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\frac{\omega_0}{Q}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

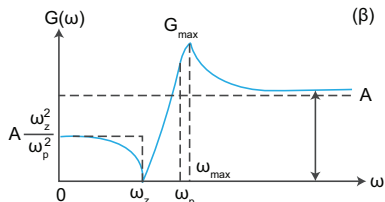
Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Κέρδος $G(\omega)$ ζωνοφρακτικού φίλτρου LP



Κέρδος $G(\omega)$ ζωνοφρακτικού φίλτρου HP

Σχήμα: Η μεταβολή του κέρδους $G(\omega)$ σε συνάρτηση με τη συχνότητα ω για τα χαμηλοπερατά και υψηλοπερατά ζωνοφρακτικά φίλτρα.

Η **συχνότητα αποκοπής** για τα ζωνοφρακτικά φίλτρα ορίζεται ως η τιμή συχνότητας ω_c για την οποία η τιμή $G(\omega_c)$ είναι ίση με το 0.707 της τιμής $G(0)$, ή σε μαθηματική γραφή,

$$G(\omega_c) = \frac{A |\omega_0^2 - \omega_c^2|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_c^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2} \omega_c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} A \quad \text{από όπου προκύπτει} \quad \omega_c^2 \pm \frac{\omega_0}{Q} \omega_c - \omega_0^2 = 0$$

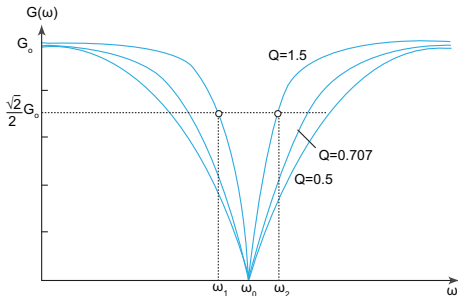
Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη ανάλυση, καταλήγουμε στα **ίδια αποτελέσματα** με τα ζωνοπερατά φίλτρα όσον αφορά στις εξισώσεις ορισμού των συχνοτήτων αποκοπής ω_{c1} και ω_{c2} και τις εκφράσεις που συσχετίζουν αυτές τις συχνότητες με την **κεντρική συχνότητα** ω_0 και τον **παράγοντα ποιότητας** Q .



Σχήμα: Η μεταβολή του κέρδους $G(\omega)$ σε συνάρτηση με τη συχνότητα ω για τα συμμετρικά φίλτρα εγκοπής.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

Τέλος, τα **ολοπερατά φίλτρα** περιγράφονται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(s) = \frac{s^2 - \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

που περιέχει **δύο πόλους** και **δύο μηδενικές τιμές** με την **ίδια** συχνότητα και τιμή για το Q αλλά σε διαφορετικά ημιεπίπεδα.

Ανάλογα με την τιμή της σταθεράς Q οι πόλοι (αλλά και οι **μηδενικές τιμές**) θα είναι **πραγματικές** ή **συζυγείς μιγαδικές** ποσότητες.

Η **συχνοτική απόκριση** προκύπτει από τη συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$ για $s = j\omega$ και είναι η

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\frac{\omega_0}{Q}\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_0}{Q}\omega} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2} - j\frac{2\frac{\omega_0}{Q}\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}$$

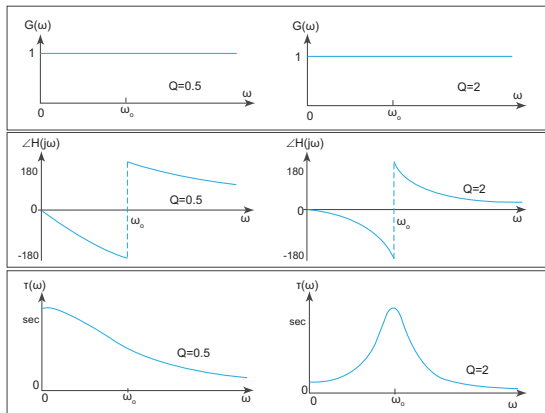
Από την **αναπαράσταση πλάτους φάσης** της συνάρτησης προκύπτει

$$G(\omega) = |\mathcal{H}(j\omega)| = 1 \quad \text{και} \quad \angle \mathcal{H}(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\frac{\omega_0}{Q}\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Χαρακτηριστικά φίλτρων δευτέρας τάξεως

Επομένως, τα **ολοπερατά φίλτρα** επιτρέπουν τη διέλευση **όλων** των συχνοτήτων, διατηρώντας **αναλλοίωτα** τα χαρακτηριστικά του πλάτους του σήματος στην έξοδό τους.



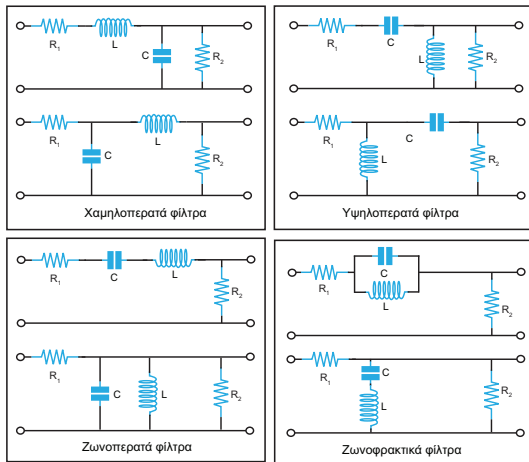
Σχήμα: Η απόκριση πλάτους και φάσης και η υστέρηση ομάδας ολοπερατού φίλτρου για διάφορες τιμές του παράγοντα Q .

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Παθητικά και ενεργά φίλτρα δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Παραδείγματα παθητικών χαμηλοπερατών, υψηλοπερατών, ζωνοπερατών και ζωνοφρακτικών φίλτρων δευτέρας τάξεως.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Παθητικά και ενεργά φίλτρα δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

- Υπάρχουν δύο βασικές τοπολογίες ενεργών φίλτρων δευτέρας τάξεως, η **τοπολογία Sallen-Key** και η **τοπολογία πολλαπλής ανάδρασης ή ανατροφοδότησης**.
- Η **τοπολογία Sallen-Key** που είναι γνωστή και ως τοπολογία **VCVS (Voltage Control Voltage Source)**, προτάθηκε το 1955 από τους R.P Sallen & E.L. Key των MIT Lincoln Labs.
- Το βασικό πλεονέκτημά της είναι πως η απόδοση του φίλτρου εξαρτάται στο **μικρότερο δυνατό βαθμό** από την απόδοση του τελεστικού ενισχυτή, ενώ οι τιμές των ω_0 και Q είναι σε κάποιο βαθμό ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά εξαρτώνται ισχυρά από το κέρδος του φίλτρου.
- Το βασικό μειονέκτημά της είναι πως αυτά τα φίλτρα **δεν μπορούν να προσαρμοστούν εύκολα** λόγω της αλληλεπίδρασης των τιμών των στοιχείων του κυκλώματος με τις τιμές των ω_0 και Q .
- Η **τοπολογία πολλαπλής ανατροφοδότησης** χρησιμοποιεί τον τελεστικό ενισχυτή ως **ολοκληρωτή** και για το λόγο αυτό η εξάρτηση της συνάρτησης μεταφοράς του φίλτρου από τα χαρακτηριστικά του τελεστικού ενισχυτή είναι πιο μεγάλη σε σχέση με τη μέθοδο Sallen-Key.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Παθητικά και ενεργά φίλτρα δευτέρας τάξεως

Ενεργό χαμηλοπερατό φίλτρο δευτέρας τάξεως - τοπολογία Sallen-Key Περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(s) = \left\{ \frac{1 + (R_4/R_3)}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right\} / \left\{ s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} - \frac{(R_4/R_3)}{R_2 C_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right\}$$

ενώ οι παράμετροι ω_0 και Q δίδονται από τις εξισώσεις

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad \text{και} \quad Q = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} / \left\{ \frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} - \frac{R_4/R_3}{R_2 C_1} \right\}$$

Ενεργό χαμηλοπερατό φίλτρο δευτέρας τάξεως - τοπολογία πολλαπλής ανατροφοδότησης Περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(s) = \left\{ \frac{1}{R_1 R_3 C_1 C_2} \right\} / \left\{ s^2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \frac{s}{C_2} + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \right\}$$

ενώ οι παράμετροι ω_0 και Q δίδονται από τις εξισώσεις

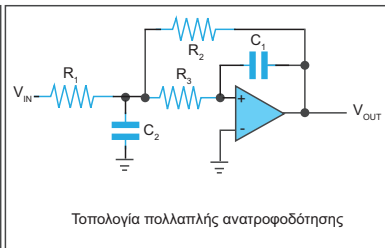
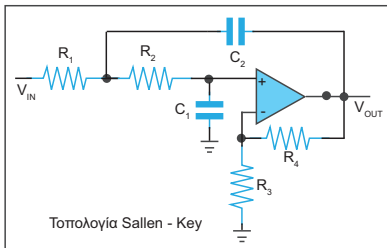
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_3 C_1 C_2}} \quad \text{και} \quad Q = \left\{ \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \right\} / \left\{ \sqrt{\frac{R_3}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_3}} + \frac{\sqrt{R_2 R_3}}{R_1} \right\}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Παθητικά και ενεργά φίλτρα δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Τοπολογίες **Sallen-Key** και **πολλαπλής ανατροφοδότησης** για χαμηλοπερατά φίλτρα 2ας τάξεως.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Παθητικά και ενεργά φίλτρα δευτέρας τάξεως

Ενεργό υψηλοπερατό φίλτρο δευτέρας τάξεως - τοπολογία Sallen-Key Περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \left\{ \left(1 + \frac{R_4}{R_3} \right) s^2 \right\} / \left\{ s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} - \frac{R_4/R_3}{R_1 C_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right\}$$

ενώ οι παράμετροι ω_0 και Q δίδονται από τις εξισώσεις

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad \text{και} \quad Q = \left\{ \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \right\} / \left\{ \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} - \frac{R_4/R_3}{R_1 C_1} \right\}$$

Ενεργό υψηλοπερατό φίλτρο δευτέρας τάξεως - τοπολογία πολλαπλής ανατροφοδότησης Περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \left\{ (C_1/C_2) s^2 \right\} / \left\{ s^2 + \left(\frac{C_1}{C_2 + C_3} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \frac{s}{R_1} + \frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_3} \right\}$$

ενώ οι παράμετροι ω_0 και Q δίδονται από τις εξισώσεις

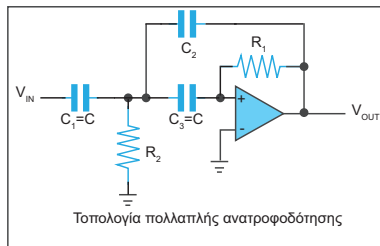
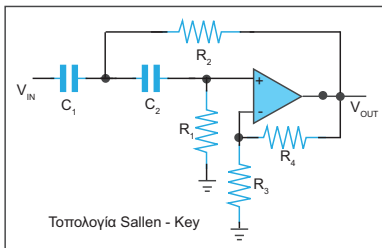
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_3}} \quad \text{και} \quad Q = \left\{ \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right\} / \left\{ \sqrt{\frac{C_3}{C_2}} + \sqrt{\frac{C_2}{C_3}} + \frac{C_1}{\sqrt{C_2 C_3}} \right\}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Παθητικά και ενεργά φίλτρα δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Τοπολογίες **Sallen-Key** και **πολλαπλής ανατροφοδότησης** για υψηλοπερατά φίλτρα 2ας τάξεως.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Παθητικά και ενεργά φίλτρα δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ενεργό ζωνοπερατό φίλτρο δευτέρας τάξεως - τοπολογία Sallen-Key Περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(s) = \left\{ \left(1 + \frac{R_4}{R_3} \right) \frac{s}{R_1 C_1} \right\} \% / \left\{ s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_3 C_1} - \frac{R_4/R_3}{R_2 C_1} \right) s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} \right\}$$

ενώ οι παράμετροι ω_0 και Q δίδονται από τις εξισώσεις

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad \text{και} \quad Q = \left\{ \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}} \right\} / \left\{ \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_3 C_1} - \frac{R_4/R_3}{R_2 C_1} \right\}$$

Ενεργό ζωνοπερατό φίλτρο δευτέρας τάξεως - τοπολογία πολλαπλής ανατροφοδότησης Περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(s) = - \left\{ \frac{s}{R_1 C_2} \right\} / \left\{ s^2 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{s}{R_3} + \frac{1}{R_3 C_1 C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right\}$$

ενώ οι παράμετροι ω_0 και Q δίδονται από τις εξισώσεις

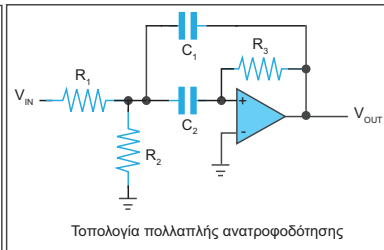
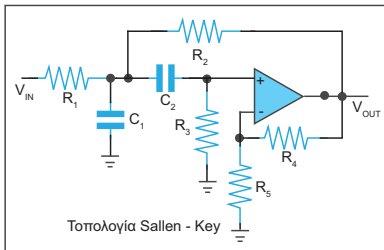
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad \text{και} \quad Q = \sqrt{\frac{R_1}{R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)} / \left\{ \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \right\}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Παθητικά και ενεργά φίλτρα δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Τοπολογίες Sallen-Key και πολλαπλής ανατροφοδότησης για ζωνοπερατά φίλτρα 2ας τάξεως.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Παθητικά και ενεργά φίλτρα δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ενεργό ζωνοφρακτικό φίλτρο δευτέρας τάξεως - τοπολογία Sallen-Key Το ηλεκτρικό κύκλωμα του ενεργού ζωνοφρακτικού φίλτρου δευτέρας τάξεως κατά **Sallen-Key** παρουσιάζεται στη συνέχεια· ωστόσο αυτή η τοπολογία δεν χρησιμοποιείται συχνά, γιατί χαρακτηρίζεται από πολλές ανεπιθύμητες ιδιότητες όπως είναι όπως είναι **ο μεγάλος βαθμός δυσκολίας που χαρακτηρίζει τη ρύθμιση της συχνότητας ω_0** .

Ενεργό ζωνοφρακτικό φίλτρο δευτέρας τάξεως - τοπολογία πολλαπλής ανατροφοδότησης
Περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(s) = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left\{ s^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} - \frac{R_3}{R_1 R_4 C_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right\} / \left\{ s^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right\}$$

ενώ οι παράμετροι ω_0 και Q δίδονται από τις εξισώσεις

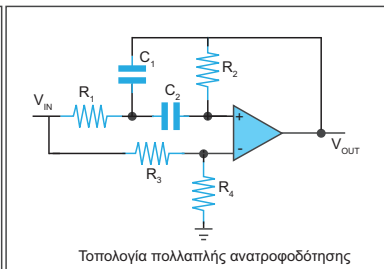
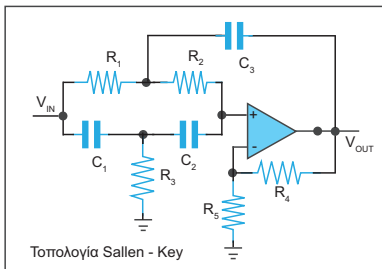
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad \text{και} \quad Q = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} / \left\{ \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} + \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \right\}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Παθητικά και ενεργά φίλτρα δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Τοπολογίες **Sallen-Key** και **πολλαπλής ανατροφοδότησης** για ζωνοφρακτικά φίλτρα 2ας τάξεως.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

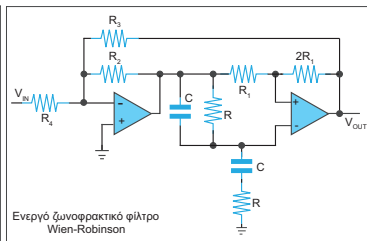
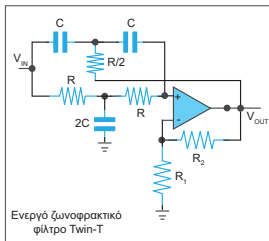
Παθητικά και ενεργά φίλτρα δευτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Δύο δημοφιλή ηλεκτρικά κυκλώματα που επιτρέπουν την κατασκευή ενεργών ζωνοφρακτικών φίλτρων, είναι το **κύκλωμα Twin-T** και το **κύκλωμα Wien-Robinson**.

- Το **κύκλωμα Twin-T** επιτρέπει τη μεταβολή του παράγοντα ποιότητας Q δια μέσου του εσωτερικού κέρδους $G = 1 + (R_2/R_1)$ **χωρίς την τροποποίηση** της κεντρικής συχνότητας ω_0 .
- Το **κύκλωμα Wien-Robinson** επιτρέπει την τροποποίηση του κέρδους στη ζώνη μετάβασης **χωρίς να επηρεάζεται** ο παράγοντας ποιότητας Q .



Σχήμα: Τα ενεργά ζωνοφρακτικά φίλτρα δευτέρας τάξεως που υλοποιούνται από τα κυκλώματα **Twin-T** και **Wien-Robinson**

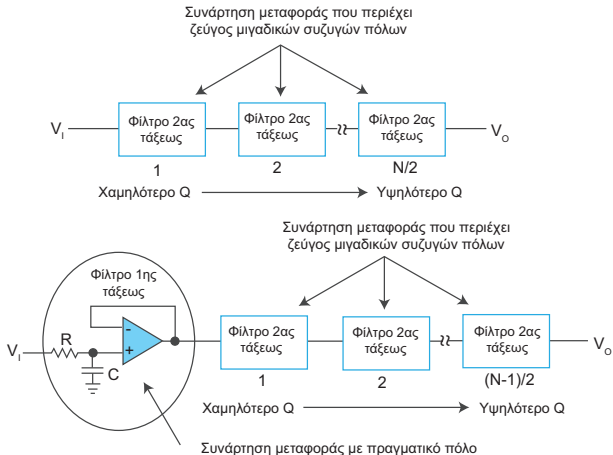
Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Φίλτρα ανωτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Χρησιμοποιώντας τα φίλτρα πρώτης και δευτέρας τάξεως ως τις **βασικές δομικές μονάδες**, μπορούμε να κατασκευάσουμε πιο πολύπλοκα φίλτρα ανωτέρας τάξεως από τη σύνδεση των παραπάνω απλών φίλτρων όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Φίλτρα ανωτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν η τάξη N του σύνθετου φίλτρου είναι **άρτιος αριθμός**, αυτό προκύπτει από την εν σειρά σύνδεση $N/2$ φίλτρων δευτέρας τάξεως, η συνάρτηση μεταφοράς των οποίων διαθέτει γενικά ένα ζεύγος μιγαδικών συζυγών πόλων.

Εάν η τάξη του φίλτρου είναι **περιττός αριθμός**, θα πρέπει στην παραπάνω συνδεσμολογία (η οποία όμως τώρα θα περιέχει $(N - 1)/2$ συνδεδεμένα εν σειρά φίλτρα δευτέρας τάξεως) να προσθέσουμε και ένα **φίλτρο πρώτης τάξεως**, η συνάρτηση μεταφοράς του οποίου διαθέτει *έναν πραγματικό πόλο*.

Η γενική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς ενός φίλτρου ανωτέρας τάξεως με N πόλους και M μηδενικές τιμές, μπορεί να προκύψει ως το **γινόμενο συναρτήσεων πρώτης και δευτέρας τάξεως** της μορφής $\mathcal{H}(s) = \mathcal{H}_1(s)\mathcal{H}_2(s) \dots \mathcal{H}_{N_1+N_2}(s)$, ή ισοδύναμα,

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k} \sim \left\{ \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (s + z_k)}{\prod_{k=1}^{N_1} (p + s_k)} \right\} \left\{ \frac{\prod_{k=1}^{M_2} (s^2 + \xi_k s + \zeta_k)}{\prod_{k=1}^{N_2} (s^2 + \mu_k s + \nu_k)} \right\}$$

όπου $M = M_1 + 2M_2$ και $N = N_1 + 2N_2$. Θα είναι λοιπόν

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = |\mathcal{H}_1(j\omega)| |\mathcal{H}_2(j\omega)| \dots |\mathcal{H}_{N_1+N_2}(j\omega)| \quad \text{και} \\ \angle \mathcal{H}(j\omega) = \angle \mathcal{H}_1(j\omega) + \angle \mathcal{H}_2(j\omega) + \dots + \angle \mathcal{H}_{N_1+N_2}(j\omega)$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Σχεδίαση αναλογικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

- Στην πράξη όλα τα αναλογικά φίλτρα σχεδιάζονται με τη βοήθεια ενός **κανονικοποιημένου χαμηλοπερατού φίλτρου** η συχνοτική απόκριση του οποίου χαρακτηρίζεται από μία ζώνη διέλευσης με άνω όριο την τιμή συχνότητας $\omega = 1 \text{ rad/sec}$.
- Ωστόσο, η διαδικασία είναι **διαφορετική** για τα παθητικά και τα ενεργά φίλτρα.
- Τα μοντέλα **παθητικών χαμηλοπερατών φίλτρων** χαρακτηρίζονται από τιμές παθητικών στοιχείων οι οποίες **κανονικοποιούνται** έτσι ώστε να αντιστοιχούν σε τιμή φορτίου ίση με 1Ω .
- Τα μοντέλα **παθητικών υψηλοπερατών φίλτρων** κατασκευάζονται εύκολα από τα χαμηλοπερατά ισοδυναμά τους, αφού η απόκριση συχνότητας του υψηλοπερατού φίλτρου είναι η **αντίστροφη** της απόκρισης συχνότητας του χαμηλοπερατού φίλτρου, ενώ τα παθητικά στοιχεία του υψηλοπερατού φίλτρου είναι τα **αντίστροφα** εκείνων του χαμηλοπερατού φίλτρου.
- Η διαδικασία σχεδίασης των **ενεργών αναλογικών φίλτρων** δεν στηρίζεται στη χρήση πινάκων με κανονικοποιημένες τιμές στοιχείων, αλλά **στις θέσεις των πόλων και των μηδενικών τιμών της συνάρτησης μεταφοράς του φίλτρου προς κατασκευή επί του μιγαδικού επιπέδου**.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Θεώρημα Paley - Wiener

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Θεώρημα

Θεωρώντας μια συνάρτηση απόκρισης πλάτους $|\mathcal{H}(j\omega)|$ η οποία είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμη, δηλαδή ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{H}(j\omega)|^2 d\omega < \infty$$

τότε, η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να αποτελεί αυτή η συνάρτηση την απόκριση πλάτους ενός αιτιατού φίλτρου με κρουστική απόκριση $h(t)$, δίδεται από την εξίσωση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |\mathcal{H}(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Θεώρημα Paley - Wiener - Μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις

- Τα υψηλοπερατά και τα ζωνοφρακτικά φίλτρα χαρακτηρίζονται από απόκριση πλάτους που **δεν είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμη** και επομένως **δεν ικανοποιούν** το θεώρημα των Paley-Wiener.
- Ωστόσο, εάν η συνάρτηση μεταφοράς διατυπωθεί με τη μορφή $\mathcal{H}(s) = K_0 + \mathcal{H}_k(s)$ όπου $\mathcal{H}_k(s)$ τετραγωνικώς ολοκληρώσιμη συνάρτηση, **είναι δυνατή** η εφαρμογή του θεωρήματος και για αυτά τα φίλτρα.
- Το θεώρημα Paley-Wiener **δεν εγγυάται** πως η συνάρτηση $\mathcal{H}(j\omega)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη του θεωρήματος διαθέτει μία **αιτιατή αντίστροφη συνάρτηση** $h(t)$.
- Εάν η συνάρτηση $|\mathcal{H}(j\omega)|$ **δεν είναι** τετραγωνικώς ολοκληρώσιμη, τότε η συνθήκη του θεωρήματος Paley-Wiener δεν είναι **ούτε** ικανή **ούτε** αναγκαία.
- Μία απαίτηση που θα πρέπει να ικανοποιείται προκειμένου να ισχύει η συνθήκη του θεωρήματος Paley-Wiener είναι **να μην υπάρχουν ζώνες συχνότητας** για τις οποίες η συνάρτηση $|\mathcal{H}(j\omega)|$ να είναι παντού μηδέν.
- Μία ενδιαφέρουσα συνέπεια του θεωρήματος Paley-Wiener είναι πως **δεν υπάρχει συνεχές σήμα πεπερασμένης ενέργειας** $h(t)$ που να **περιορίζεται ταυτόχρονα τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο χώρο της συχνότητας**, δηλαδή να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις $h(t) = 0$ για $|t| > t_{\max}$ και $\mathcal{H}(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = 0$ για $|\omega| > \omega_{\max}$ όπου t_{\max} και ω_{\max} συγκεκριμένες τιμές χρόνου και συχνότητας.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Η συσχέτιση των αποκρίσεων πλάτους και φάσης των αναλογικών φίλτρων

Μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα των αναλογικών φίλτρων που περιγράφονται από μία **πραγματική** και **αιτιατή** κρουστική απόκριση $h(t)$, είναι πως η συχνοτική τους απόκριση $\mathcal{H}(j\omega)$ μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως **μόνο από το πραγματικό μέρος της** για κάθε χρονική στιγμή t ή **μόνο από το φανταστικό μέρος της** αλλά μόνο για $t \neq 0$.

Πράγματι, παρατηρώντας πως η κρουστική απόκριση $h(t)$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0 \\ h_e(t) & \text{για } t = 0 \\ 2h_e(t) & \text{για } t > 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad h(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0 \\ \text{άγνωστη} & \text{για } t = 0 \\ 2h_o(t) & \text{για } t > 0 \end{cases}$$

όπου $h_e(t)$ και $h_o(t)$ η **άρτια** και η **περιττή** συνιστώσα της, οδηγούμαστε στο ζητούμενο λαμβάνοντας υπόψη πως **ο μετασχηματισμός Fourier της άρτιας και της περιττής συνιστώσας της κρουστικής απόκρισης μας δίνει το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συχνοτικής απόκρισης.**

Το ερώτημα που ανακύπτει σε αυτό το σημείο είναι το εξής:

Υπάρχει κάποια συσχέτιση ανάμεσα στο πραγματικό και στο φανταστικό μέρος της συχνοτικής απόκρισης ενός αιτιατού φίλτρου;

Η απάντηση είναι **καταφατική**

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Η συσχέτιση των αποκρίσεων πλάτους και φάσης των αναλογικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εφόσον η κρουστική απόκριση είναι **αιτιατό σήμα**, έχει τη μορφή $h(t) = h(t)u(t)$ όπου $u(t)$ η **βηματική συνάρτηση**.

Λαμβάνοντας το **μετασχηματισμό Fourier** των δύο μελών της παραπάνω σχέσης και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του **γινομένου** (ή πολλαπλασιασμού) του μετασχηματισμού Fourier θα λάβουμε

$$\mathcal{H}(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{h(t)u(t)\} = \frac{1}{2\pi} \left[\mathcal{H}(j\omega) * \mathcal{U}(j\omega) \right]$$

όπου $\mathcal{H}(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ και $\mathcal{U}(j\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ οι μετασχηματισμοί Fourier των συνεχών σημάτων $h(t)$ και $u(t)$. Γνωρίζουμε όμως πως ο μετασχηματισμός Fourier της **βηματικής συνάρτησης** έχει τη μορφή

$$\mathcal{U}(j\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

και αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην παραπάνω σχέση θα λάβουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \mathcal{H}(j\omega) * \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{H}(j\omega) * \delta(\omega) + \frac{1}{2\pi j} \left[\mathcal{H}(j\omega) * \frac{1}{\omega} \right] = \frac{1}{2} \mathcal{H}(j\omega) + \frac{1}{2\pi j} \left[\mathcal{H}(j\omega) * \frac{1}{\omega} \right] \end{aligned}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Η συσχέτιση των αποκρίσεων πλάτους και φάσης των αναλογικών φίλτρων

Ορίζοντας τη **βοηθητική συνάρτηση** $f(\omega) = 1/\omega$ και χρησιμοποιώντας την εξίσωση ορισμού της **συνέλιξης**, η τελευταία παράσταση γράφεται

$$\mathcal{H}(j\omega) * \frac{1}{\omega} = \mathcal{H}(j\omega) * f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(j\eta) f(\omega - \eta) d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{H}(j\eta)}{\omega - \eta} d\eta$$

Θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{H}(j\omega) + \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{H}(j\eta)}{\omega - \eta} d\eta \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \mathcal{H}(j\omega) = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{H}(j\eta)}{\omega - \eta} d\eta$$

Ωστόσο, η συνάρτηση $\mathcal{H}(j\omega)$ είναι **μγαδική συνάρτηση** της μορφής

$$\mathcal{H}(j\omega) = R(j\omega) + jI(j\omega)$$

όπου $R(j\omega) = \Re\{\mathcal{H}(j\omega)\}$ και $I(j\omega) = \Im\{\mathcal{H}(j\omega)\}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} R(j\omega) + jI(j\omega) &= \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(j\eta) + jI(j\eta)}{\omega - \eta} d\eta = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(j\eta)}{\omega - \eta} d\eta + j \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I(j\eta)}{\omega - \eta} d\eta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I(j\eta)}{\omega - \eta} d\eta - j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(j\eta)}{\omega - \eta} d\eta \end{aligned}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Η συσχέτιση των αποκρίσεων πλάτους και φάσης των αναλογικών φίλτρων

Συγκρίνοντας τα **πραγματικά** και τα **φανταστικά** μέρη στην αρχική και την τελική έκφραση βρίσκουμε ότι

$$R(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I(j\eta)}{\omega - \eta} d\eta = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I(j\eta)}{\eta - \omega} d\eta \quad \text{και}$$
$$I(j\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(j\eta)}{\omega - \eta} d\eta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(j\eta)}{\eta - \omega} d\eta$$

Τα ολοκληρώματα των δύο παραπάνω εξισώσεων ορίζουν έναν γενικευμένο ολοκληρωτικό μετασχηματισμό που είναι γνωστός ως **μετασχηματισμός Hilbert**.

Αυτός ο μετασχηματισμός συνοδεύεται από τον αντίστροφό του, με το ζεύγος εξισώσεων **ευθέως** και **αντίστροφου** μετασχηματισμού να ορίζεται ως

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\zeta)}{t - \zeta} d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = x(t) * \left(\frac{1}{\pi t} \right)$$
$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{t - \zeta} d\zeta = f(t) * \left(\frac{1}{\pi t} \right)$$

Επομένως, **το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συχνотικής απόκρισης ενός αιτιατού συστήματος σχετίζονται μεταξύ τους δια μέσου ενός μετασχηματισμού Hilbert**.

Κατά συνέπεια, η γνώση της μιας επιτρέπει τον υπολογισμό της άλλης.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Η συσχέτιση των αποκρίσεων πλάτους και φάσης των αναλογικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η παραπάνω συσχέτιση του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της συνάρτησης απόκρισης συχνότητας διά μέσου του **μετασχηματισμού Hilbert** ισχύει και όταν η εν λόγω συνάρτηση είναι εκπεφρασμένη στην **αναπαράσταση πλάτους - φάσης**.

Με άλλα λόγια, το πλάτος και η φάση της συνάρτησης απόκρισης συχνότητας ενός αιτιατού συνεχούς φίλτρου αποτελούν ζεύγος μετασχηματισμών Hilbert.

Ωστόσο, η συσχέτιση του πλάτους και της φάσης της συνάρτησης $\mathcal{H}(j\omega)$ είναι έγκυρη, μόνο όταν το σύστημα που υλοποιείται από τη συνάρτηση είναι ένα **σύστημα ελάχιστης φάσης**. Οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι οι

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{du} \left\{ \ln | \mathcal{H}(ju) | \right\} \ln \left(\coth \frac{|u|}{2} \right) du$$

και

$$\ln | \mathcal{H}(j\omega_0) | = \ln | \mathcal{H}(j\infty) | - \frac{1}{\pi\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{du} \left\{ \omega \angle \mathcal{H}(ju) \right\} \ln \left(\coth \frac{|u|}{2} \right) du \quad \text{ή}$$

$$\ln | \mathcal{H}(j\omega_0) | = \ln | \mathcal{H}(0) | - \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{du} \left\{ \frac{\angle \mathcal{H}(ju)}{\omega} \right\} \ln \left(\coth \frac{|u|}{2} \right) du$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι γνωστές ως **ολοκληρώματα του Bode**.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσεγγίσεις ιδανικών αναλογικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

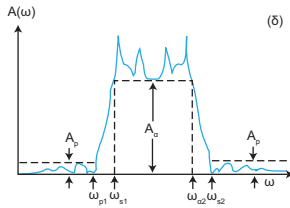
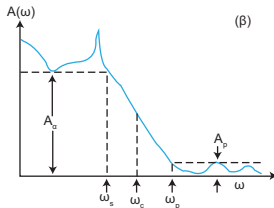
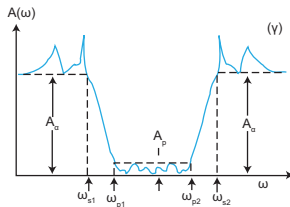
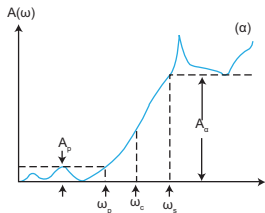
- Τα ιδανικά αναλογικά φίλτρα **δεν είναι αιτιατά** και δεν μπορούν να υλοποιηθούν στην πράξη.
- Ένα ιδανικό φίλτρο χαρακτηρίζεται από **μηδενική εξασθένηση** στις ζώνες διέλευσης και από **άπειρη εξασθένηση** στις ζώνες αποκοπής, ενώ η μετάπτωση από ζώνη διέλευσης σε ζώνη αποκοπής και αντίστροφα, θα γίνεται **ακαριαία**.
- Τα ιδανικά φίλτρα αποτελούν **εξιδανικευμένα μοντέλα κατασκευής πραγματικών φίλτρων** τα οποία σχεδιάζονται έτσι ώστε να προσεγγίζουν τη συμπεριφορά των αντίστοιχων ιδανικών φίλτρων στο μέγιστο δυνατό βαθμό.
- Σε ένα πραγματικό φίλτρο, η εξασθένηση στη ζώνη διέλευσης **δεν είναι μηδενική**, η εξασθένηση στη ζώνη αποκοπής **δεν είναι άπειρη**, ενώ η μετάβαση από μία ζώνη διέλευσης σε μία ζώνη αποκοπής **δεν είναι ακαριαία αλλά βαθμιαία**, ορίζοντας με τον τρόπο αυτό την επονομαζόμενη **ζώνη μετάβασης**.
- Στα ιδανικά φίλτρα η τιμή του κέρδους στις ζώνες διέλευσης είναι **σταθερή** για όλες τις συχνότητες. Στην πράξη κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει με αποτέλεσμα οι διάφορες συχνοτικές συνιστώσες του σήματος εισόδου με συχνότητες εντός των ζωνών διέλευσης του φίλτρου, να ενισχύονται **σε διαφορετικό βαθμό**.
- Η **φασική απόκριση** στα πραγματικά φίλτρα δεν είναι μηδενική ή γραμμική όπως στην ιδανική περίπτωση αλλά **μη γραμμική**, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα την παραμόρφωση του σήματος εισόδου σε κάποιο βαθμό.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσεγγίσεις ιδανικών αναλογικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



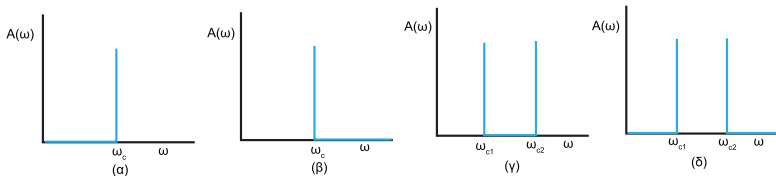
Σχήμα: Χαρακτηριστικές απωλειών των τεσσάρων ειδών πραγματικών αναλογικών φίλτρων: (α) χαμηλοπερατό, (β) υψηλοπερατό, (γ) ζωνοπερατό και (δ) ζωνοφρακτικό

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσεγγίσεις ιδανικών αναλογικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Χαρακτηριστικές απωλειών των τεσσάρων ειδών ιδανικών αναλογικών φίλτρων: (α) χαμηλοπερατό, (β) υψηλοπερατό, (γ) ζωνοπερατό και (δ) ζωνοφρακτικό

- Οι πιο σημαντικές από τις προσεγγίσεις χαμηλοπερατών ιδανικών φίλτρων όσον αφορά την απόκριση πλάτους $G(\omega)$ είναι οι προσεγγίσεις **Butterworth**, **Chebyshev I**, **Chebyshev II**, **Bessel** και **Cauer** (ή ελλειπτική προσέγγιση).
- Ο βασικός στόχος αυτών των προσεγγίσεων, είναι η **βελτιστοποίηση** της συμπεριφοράς του φίλτρου από την οπτική γωνία διαφόρων επιθυμητών χαρακτηριστικών, όπως είναι το **σταθερό κέρδος**, το **μικρό εύρος της ζώνης μετάβασης** και η **γραμμική φασική απόκριση**.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσεγγίσεις ιδανικών αναλογικών φίλτρων

- Η προσέγγιση **Butterworth** βελτιστοποιεί το φίλτρο όσον αφορά στο **σταθερό κέρδος** αφού προσφέρει **τη μέγιστη δυνατή επίπεδη συμπεριφορά στη ζώνη διέλευσης**.
- Η προσέγγιση **Chebyshev** βελτιστοποιεί το φίλτρο όσον αφορά στο **βαθμό εξασθένησης** προσφέροντας μία πιο **οξεία ζώνη μετάβασης** (χαρακτηριστικό που προσφέρεται επίσης και από την **προσέγγιση Cauer**).
- Η προσέγγιση **Bessel** αντιμετωπίζει το ζήτημα της **μη γραμμικής φασικής απόκρισης**, γραμμικοποιώντας τη φάση του φίλτρου για συχνότητες μέχρι τη συχνότητα αποκοπής ω_c .

Οι προσεγγίσεις των ιδανικών χαμηλοπερατών φίλτρων, μπορούν να ομαδοποιηθούν στις

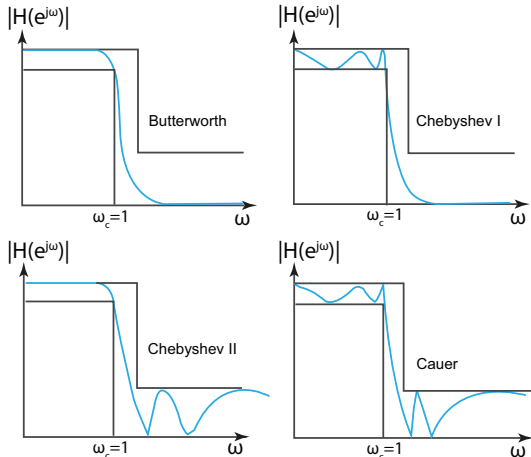
- **Πολυωνυμικές προσεγγίσεις** που οδηγούν σε συναρτήσεις μεταφοράς που διαθέτουν **μόνο πόλους και όχι μηδενικές τιμές**.
- **Ρητές προσεγγίσεις** που επιτρέπουν την κατασκευή συναρτήσεων μεταφοράς που περιέχουν **τόσο μηδενικές τιμές όσο και πόλους**

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσεγγίσεις ιδανικών αναλογικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Οι προσεγγίσεις **Butterworth**, **Chebyshev I**, **Chebyshev II** και **Cauer** (ή **ελλειπτική προσέγγιση**) για την κανονικοποιημένη περίπτωση $\omega_c \equiv 1$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Πολυωνυμικές προσεγγίσεις ιδανικών αναλογικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οι **πολυωνυμικές προσεγγίσεις** αναλογικών φίλτρων οδηγούν σε συναρτήσεις μεταφοράς

$$\mathcal{H}(s) = \frac{H_0}{D(s)} = \frac{H_0}{s^N + \alpha_{N-1}s^{N-1} + \alpha_{N-2}s^{N-2} + \dots + \alpha_2s^2 + \alpha_1s + \alpha_0}$$

όπου $D(s)$ πολυώνυμο βαθμού N η τιμή του οποίου προσδιορίζει την **τάξη του φίλτρου**.

Για να είναι το φίλτρο **ευσταθές** θεωρούμε μόνο τους πόλους που διαθέτουν **αρνητικά πραγματικά μέρη**, αφού οι πόλοι που ανήκουν στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο οδηγούν σε **ασταθή συστήματα**, ενώ οι πόλοι που κείνται επί του φανταστικού άξονα οδηγούν σε **οριακώς ευσταθή συστήματα**.

Εάν η τάξη του φίλτρου N είναι **άρτιος αριθμός**, υπάρχουν $N/2$ ζεύγη **μιγαδικών συζυγών** πόλων της μορφής $p_m = \sigma_m \pm j\omega_m$ ($m = 1, 2, \dots, N/2$) το κάθε ένα εκ των οποίων συνεισφέρει στον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς την παράσταση

$$(s - p_m)(s - p_m^*) = s^2 - (p_m + p_m^*)s + p_m p_m^* = s^2 - 2\sigma_m s + \sigma_m^2 + \omega_m^2$$

Επομένως, η **συνάρτηση μεταφοράς** του συστήματος δύναται να διατυπωθεί με τη μορφή

$$\mathcal{H}(s) = \frac{H_0}{D(s)} = \frac{H_0}{\prod_{m=1}^{N/2} \left[s^2 - 2\sigma_m s + \sigma_m^2 + \omega_m^2 \right]}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Πολυωνυμικές προσεγγίσεις ιδανικών αναλογικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν το φίλτρο περιγράφεται από **περιττή τιμή τάξης**, θα διαθέτει $N - 1$ ζεύγη **συζυγών μιγαδικών πόλων**, καθώς και έναν **αρνητικό πραγματικό πόλο** $p_0 = -\sigma_0$ ($\sigma_0 > 0$).

Αυτός ο πόλος συνεισφέρει στον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς τον όρο $s + \sigma_0$ που προέρχεται από το **στοιχειώδες φίλτρο 1ης τάξεως** που συνδέεται εν σειρά.

Επομένως, στην περίπτωση φίλτρων με **περιττή τιμή τάξης**, η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(s) = \frac{H_0}{D(s)} = \frac{H_0}{(s + \sigma_0) \prod_{m=1}^{(N-1)/2} [s^2 - 2\sigma_m s + \sigma_m^2 + \omega_m^2]}$$

Η σταθερά H_0 ορίζεται από τις προδιαγραφές του φίλτρου, οι οποίες σχεδόν πάντοτε αφορούν στη **συνάρτηση κέρδους**

$$G(\omega) = |\mathcal{H}(j\omega)| = \frac{|H_0|}{|D(\omega)|} = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + [|D(\omega)|^2 - 1]}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q(\omega)}} = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \gamma^2 P_N^2(\omega)}}$$

όπου $P_N(\omega)$ άρτιο ή περιττό πολυώνυμο βαθμού N και γ μία **παράμετρος σχεδίασης**.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ρητές προσεγγίσεις ιδανικών αναλογικών φίλτρων

Οι **ρητές προσεγγίσεις** αναλογικών φίλτρων περιγράφονται από τη **συνάρτηση κέρδους**

$$G(\omega) = | \mathcal{H}(j\omega) | = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \gamma^2 P^2(\omega)}}$$

στην οποία η συνάρτηση $P(\omega)$ **δεν είναι** πολυωνυμική αλλά **ρητή συνάρτηση**, δηλαδή **λόγος πολυωνυμικών συναρτήσεων** βαθμού N και M αντίστοιχα της μορφής

$$P(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{\alpha_N \omega^N + \alpha_{N-1} \omega^{N-1} + \alpha_{N-2} \omega^{N-2} + \dots + \alpha_2 \omega^2 + \alpha_1 \omega + \alpha_0}{\beta_M \omega^M + \beta_{M-1} \omega^{M-1} + \beta_{M-2} \omega^{M-2} + \dots + \beta_2 \omega^2 + \beta_1 \omega + \beta_0}$$

Επομένως η συνάρτηση κέρδους έχει τη μορφή

$$G(\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \gamma^2 \frac{N^2(\omega)}{D^2(\omega)}}} = \frac{H_0 D(\omega)}{\sqrt{D^2(\omega) + \gamma^2 N^2(\omega)}}$$

Το χαρακτηριστικό της ρητής προσέγγισης είναι η **εμφάνιση μηδενικών τιμών στη συνάρτηση κέρδους** στη θέση κάποιων συχνοτήτων της ζώνης αποκοπής.

Το πολυώνυμο $D(\omega)$ είναι **άρτια** συνάρτηση του ω , αφού διαφορετικά θα είναι $D(0) = 0$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Πόλοι και μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ο υπολογισμός των **πόλων** και των **μηδενικών τιμών** της συνάρτησης μεταφοράς των πραγματικών αναλογικών φίλτρων, στηρίζεται στην κατασκευή της συνάρτησης

$$\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s) = | \mathcal{H}(j\omega) |_{\omega=s/j}^2 = G^2(\omega)_{\omega^2=-s^2}$$

Για ένα φίλτρο τάξεως N αυτή η συνάρτηση διαθέτει $2N$ πόλους, οι οποίοι λόγω συμμετρίας ως προς την αρχή του μιγαδικού επιπέδου **ισοκατανέμονται στο αριστερό και στο δεξί ημιεπίπεδο**, με το κάθε ημιεπίπεδο να περιέχει N πόλους.

Ωστόσο, για λόγους **ευστάθειας**, για την κατασκευή της συνάρτησης μεταφοράς θα χρησιμοποιήσουμε **μόνο τους N πόλους του αριστερού ημιεπιπέδου**.

Η συνάρτηση μεταφοράς για τις **ρητές προσεγγίσεις** κατασκευάζεται από τη σχέση

$$\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s) = | \mathcal{H}(j\omega) |_{\omega=s/j}^2 = \frac{H_0^2 D^2(\omega)_{\omega^2=-s^2}}{D^2(\omega)_{\omega^2=-s^2} + \gamma^2 N^2(\omega)_{\omega^2=-s^2}}$$

με τη συνθήκη $N > M$ να διασφαλίζει πως η συνάρτηση μεταφοράς είναι **υλοποιήσιμη**.

Στην προκειμένη περίπτωση η συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$ θα διαθέτει και **μηδενικές τιμές**, οι οποίες αποτελούν ρίζες του πολυωνύμου $D(\omega)_{\omega=s/j} \cdot D^2(\omega)_{\omega^2=-s^2}$. Για τιμές $N \geq M$ (με το M να είναι **άρτιος** αριθμό), η συνάρτηση μεταφοράς έχει τη γενική μορφή

$$\mathcal{H}(s) = H_0 \left\{ \prod_{m=1}^N (s - z_m) \right\} / \left\{ \prod_{m=1}^N (s - p_m) \right\}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Πόλοι και μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στις **ρητές προσεγγίσεις**, οι μηδενικές τιμές του άρτιου πολυωνύμου $D(\omega)$ μπορεί να είναι είτε **αμιγώς πραγματικές** είτε **αμιγώς φανταστικές** αλλά **όχι** μιγαδικές μεταβλητές.

Στην πράξη όλες οι προσεγγίσεις αναλογικών ιδανικών φίλτρων οδηγούν σε **πραγματικές συχνότητες**, με το ζεύγος των ριζών $\omega_{1,2} = \pm\omega_m$ να οδηγεί στην εμφάνιση του όρου

$$(\omega - \omega_m)(\omega + \omega_m) = \omega^2 - \omega_m^2$$

στην **παραγοντοποιημένη** μορφή του πολυωνύμου $D(\omega)$, το οποίο διατυπώνεται ως

$$D(\omega) = \beta_M \prod_{m=1}^{M/2} (\omega^2 - \omega_m^2)$$

Η συνεισφορά των **ριζών** $\omega_{1,2} = \pm\omega_m$ στη συνάρτηση $\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s)$ για τιμή $s = j\omega$ είναι

$$(s - j\omega_m)(s + j\omega_m) = s^2 + \omega_m^2$$

Επομένως, η εν λόγω συνάρτηση ορίζεται ως

$$\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s) = \frac{H_0^2 D^2(\omega)_{\omega^2=-s^2}}{D^2(\omega)_{\omega^2=-s^2} + \gamma^2 N^2(\omega)_{\omega^2=-s^2}} = \frac{H_0^2 \beta_M^2 \prod_{m=1}^{M/2} (s^2 + \omega_m^2)^2}{D^2(\omega)_{\omega^2=-s^2} + \gamma^2 N^2(\omega)_{\omega^2=-s^2}}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Πόλοι και μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ο **αριθμητής** της συνάρτησης μεταφοράς θα έχει λοιπόν τη μορφή

$$\mathcal{Y}(s) = \mathcal{Y}(-s) = H_0 |\beta_M| \prod_{m=1}^{M/2} (s^2 + \omega_m^2)$$

ενώ η ίδια η συνάρτηση θα δίδεται από την έκφραση

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{H_0 |\beta_M|}{B} \times \left\{ \prod_{m=1}^{M/2} (s^2 + \omega_m^2) \right\} / \left\{ \prod_{m=1}^N (s - p_m) \right\}$$

ή ισοδύναμα, μετά από πράξεις και ορίζοντας κατάλληλα το B ,

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Επιλεκτικότητα και παράγοντας φασματικής απόδοσης

Η επιλεκτικότητα ενός φίλτρου ορίζεται ως η αρνητική κλίση της απόκρισης πλάτους του φίλτρου υπολογισμένη στη θέση της συχνότητας αποκοπής, ή σε μαθηματική γραφή,

$$F_s = -\frac{d}{d\omega} \left\{ | \mathcal{H}(j\omega) | \right\}_{\omega=\omega_c}$$

Η επιλεκτικότητα ορίζεται ως η κλίση της απόκρισης πλάτους στο όριο της ζώνης διέλευσης. Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή της, τόσο πιο καλή είναι η απόδοση του φίλτρου.

Για ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο, η τιμή αυτού του μεγέθους είναι άπειρη.

Ο παράγοντας φασματικής απόδοσης ορίζεται ως ο λόγος των τιμών του εύρους ζώνης σε συγκεκριμένα επίπεδα εξασθένησης και αποδίδεται από την εξίσωση

$$S_{\alpha}^{\beta} = \frac{BW_{\beta}}{BW_{\alpha}}$$

όπου β είναι η εξασθένηση σε dB στο ευρύτερο εύρος ζώνης και α είναι η εξασθένηση σε dB στο στενότερο εύρος ζώνης.

Όσο πιο μικρή είναι η τιμή αυτού του μεγέθους, τόσο πιο καλή θεωρείται η απόδοση του φίλτρου. Για ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο, είναι $S_{\alpha}^{\beta} = 1$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Butterworth

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το μέτρο της συχνотικής απόκρισης ενός **χαμηλοπερατού φίλτρου RC** ορίζεται ως

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}$$

όπου $\omega_c = 1/RC$ η **συχνότητα αποκοπής**. Αυτό το φίλτρο αποτελεί το απλούστερο μιας οικογένειας φίλτρων που είναι γνωστά ως **φίλτρα Butterworth** και θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως **φίλτρο Butterworth πρώτης τάξεως**.

Τα φίλτρα Butterworth ανωτέρας τάξεως κατασκευάζονται συνδέοντας εν σειρά **δομές πρώτης τάξεως**.

Αυτές οι δομές μπορεί να είναι τόσο **παθητικές** (για παράδειγμα, κυκλώματα LC που αποτελούνται από εναλλαγές πυκνωτών και πηνίων) όσο και **ενεργές** (δηλαδή δομές που περιέχουν πυκνωτές, αντιστάσεις και τελεστικούς ενισχυτές).

Στη γενική περίπτωση ενός **χαμηλοπερατού φίλτρου Butterworth** τάξεως N , το μέτρο της συχνотικής απόκρισης ορίζεται ως

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}} \quad \text{ή εναλλακτικά} \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\omega/\omega_p)^{2N}}}$$

όπου $\varepsilon = (\omega_p/\omega_c)^N$ η **παράμετρος ταλαντώσεων στη ζώνη διέλευσης**.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

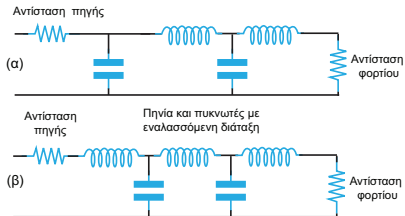
Παραδείγματα φίλτρων Butterworth ανωτέρας τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

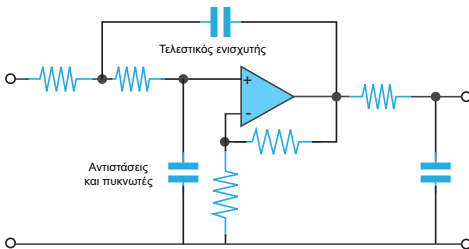
Παθητικό φίλτρο Butterworth

Περιέχει κυκλώματα LC που
αποτελούνται από εναλλαγές
πυκνωτών και πηνίων



Ενεργό φίλτρο Butterworth

Περιέχει αντιστάσεις και
τελεστικούς ενισχυτές

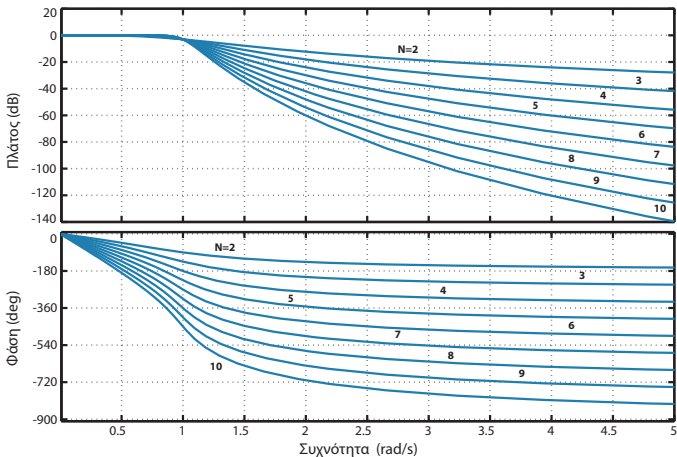


Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Αποκρίσεις πλάτους και φάσης φίλτρων Butterworth

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



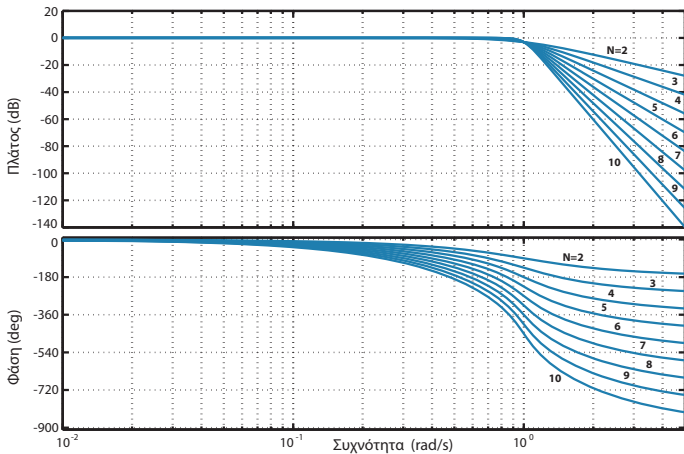
Σχήμα: Μεταβολή των αποκρίσεων πλάτους και φάσης χαμηλοπερατού φίλτρου Butterworth για γραμμικό άξονα συχνοτήτων και για τάξεις φίλτρου $N = 2, 3, \dots, 10$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Αποκρίσεις πλάτους και φάσης φίλτρων Butterworth

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Μεταβολή των αποκρίσεων πλάτους και φάσης χαμηλοπερατού φίλτρου Butterworth για **λογαριθμικό** άξονα συχνοτήτων και τάξεις φίλτρου $N = 2, 3, \dots, 10$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Butterworth

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση $\mathcal{H}(j\omega)$ στην εξίσωση ορισμού της συνάρτησης $L(\omega^2)$ προκύπτει αμέσως ότι

$$L(\omega^2) = \frac{1}{\mathcal{H}(i\omega)\mathcal{H}(-i\omega)} = \sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}} \sqrt{1 + (-\omega/\omega_c)^{2N}} = 1 + (\omega/\omega_c)^{2N}$$

και επομένως η **εξασθένηση** του φίλτρου θα υπολογίζεται ως

$$\mathcal{A}(\omega) = 10 \log L(\omega^2) = 10 \log \left[1 + (\omega/\omega_c)^{2N} \right]$$

Η προσέγγιση Butterworth συνιστά **την απλούστερη προσέγγιση** χαμηλοπερατού αναλογικού φίλτρου και οδηγεί σε μία **αυστηρώς γνήσια** συνάρτηση μεταφοράς με σταθερούς συντελεστές, με τη **μέγιστη δυνατή** επίπεδη συμπεριφορά στη ζώνη διέλευσης.

$$|\mathcal{H}(j\omega)|^2 = \frac{K^2}{\alpha_0} \times \frac{1}{1 + \beta_N \omega^{2N}}$$

Αυτή η ιδιότητα της **μέγιστης επίπεδης συμπεριφοράς στη ζώνη διέλευσης**, καθιστά τα φίλτρα Butterworth **ιδανικά** για την αποτροπή της εμφάνισης πλασματικών συχνοτήτων, αν και το τίμημα που πληρώνουμε είναι το **μεγάλο** εύρος της ζώνης μετάβασης.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Butterworth

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Από τη **συναρτησιακή μορφή** του μέτρου της συχνοτικής απόκρισης προκύπτει ότι:

- Για $\omega = \omega_c$ είναι $|\mathcal{H}(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$ **ανεξάρτητα** από την τάξη του φίλτρου N . Αυτή η τιμή εκπεφρασμένη σε dB είναι ίση με

$$|\mathcal{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |\mathcal{H}(j\omega)| = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -3.0103 \text{ dB} \approx -3 \text{ dB}$$

- Για $\omega = 0$ είναι $|\mathcal{H}(j\omega)| = 0$ **ανεξάρτητα** από την τάξη του φίλτρου N
- Η παράγωγος του μέτρου της συχνοτικής απόκρισης

$$\frac{d}{d\omega} (|\mathcal{H}(j\omega)|) = - \left(\frac{N}{\omega} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} \right]^{-\frac{3}{2}}$$

είναι **πάντοτε αρνητική** για θετικές τιμές του ω και επομένως το μέτρο της συχνοτικής απόκρισης του φίλτρου Butterworth θα **μειώνεται μονοτονικά** με την αύξηση της τιμής της συχνότητας.

- Επομένως, για δύο τιμές συχνότητας ω_1 και ω_2 τέτοιες ώστε $\omega_1 < \omega_2$ θα είναι $|\mathcal{H}(\omega_2)| < |\mathcal{H}(\omega_1)|$, ενώ στο όριο $\omega \rightarrow \infty$ θα είναι $|\mathcal{H}(j\omega)| \rightarrow 0$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Butterworth - Πόλοι και μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη μεθοδολογία, η συνάρτηση $\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s)$ έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s) = |\mathcal{H}(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1 + [s/(j\omega_c)]^{2N}} = \frac{(j\omega_c)^{2N}}{s^{2N} + (j\omega_c)^{2N}}$$

και επομένως, οι **πόλοι** της συνάρτησης $\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s)$ θα προκύψουν ως οι ρίζες της εξίσωσης $1 + (s/j\omega_c)^{2N} = 0$ η οποία διατυπώνεται ως

$$1 + \left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N} = 1 + (-j)^{2N} \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{2N} = 1 + (-1)^N \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{2N} = 0$$

Διακρίνουμε **δύο περιπτώσεις** όσον αφορά στην τιμή της τάξης του φίλτρου N :

N περιττό Στην περίπτωση αυτή θα είναι $(-1)^N = -1$ και η εξίσωση γράφεται

$$1 - \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{2N} = \left[1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^N\right] \left[1 + \left(-\frac{s}{\omega_c}\right)^N\right] = 0$$

με τις ρίζες της πρώτης παράστασης να αποτελούν τους N πόλους του **αριστερού** ημιεπιπέδου και τις ρίζες της δεύτερης παράστασης να αποτελούν τους N πόλους του **δεξιού** ημιεπιπέδου. Από την παραπάνω σχέση θα έχουμε

$$\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{2N} = 1 = e^{j2\pi m}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Butterworth - Πόλοι και μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Από την παραπάνω έκφραση προκύπτει εύκολα ότι

$$s \equiv p_m = \omega_c \exp\left(j \frac{\pi m}{N}\right) = \omega_c \cos\left(\frac{\pi m}{N}\right) + j\omega_c \sin\left(\frac{\pi m}{N}\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1$$

Οι πόλοι της συνάρτησης $\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s)$ είναι **ομοιόμορφα κατανεμημένοι** στην περιφέρεια ενός κύκλου του μιγαδικού επιπέδου (αυτός ο κύκλος είναι γνωστός ως **κύκλος Butterworth**) ακτίνας $\omega_c = \omega_p(1/\varepsilon)^{1/N}$ όπου N η τάξη του φίλτρου.

Θεωρώντας όπως αναφέραμε προηγουμένως **μόνο τους N πόλους του αριστερού ημιεπιπέδου** οι οποίοι διασφαλίζουν την **ευστάθεια** του φίλτρου, μπορούμε να διατυπώσουμε τη **συνάρτηση μεταφοράς** του χαμηλοπερατού φίλτρου Butterworth για **περιττή** τιμή τάξεως N με τη μορφή

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\omega_c^N}{(s + \omega_c) \prod_{k=1}^{(N-1)/2} (s - p_k)(s - p_k^*)} = \frac{\omega_c^N}{(s + \omega_c) \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \left[s^2 - 2 \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right) + \omega_c^2 \right]}$$

N άρτιο Στην περίπτωση αυτή θα είναι $(-1)^N = +1$ και η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{2N} = \left[1 + j \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^N\right] \left[1 - j \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^N\right] = 0$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Butterworth - Πόλοι και μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς

με τις ρίζες της πρώτης παράστασης να αποτελούν τους N **πόλους** του **αριστερού** ημιεπιπέδου και τις ρίζες της δεύτερης παράστασης να αποτελούν τους N **πόλους** του **δεξιού** ημιεπιπέδου. Από την παραπάνω σχέση θα έχουμε

$$\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{2N} = -1 = e^{j2\pi m + j\pi} \quad \text{ή ισοδύναμα}$$

$$s \equiv p_m = \omega_c \exp\left(j\pi \frac{2m+1}{2N}\right) = \omega_c \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{2N}\right) + j\omega_c \sin\left(\frac{\pi(2m+1)}{2N}\right)$$

για τις τιμές $m = 0, 1, 2, \dots, 2N-1$.

Στην προκειμένη περίπτωση, **δεν υπάρχουν πραγματικοί πόλοι αλλά $2N$ μιγαδικοί πόλοι που είναι ανά δύο συμμετρικοί ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.**

Στη συνάρτηση μεταφοράς θα χρησιμοποιηθούν **μόνο οι N πόλοι του αριστερού ημιεπιπέδου** οι οποίοι αντιστοιχούν σε τιμές δείκτη

$$m = \frac{N+2}{2}, \frac{N+4}{2}, \frac{N+6}{2}, \dots, \frac{3N-2}{2}, \frac{3N}{2}$$

και σχηματίζουν $N/2$ ζεύγη **συζυγών μιγαδικών πόλων** της μορφής (p_k, p_k^*) ($k = 1, 2, \dots, N$) με το κάθε ζεύγος να συνεισφέρει την παράσταση

$$(s - p_k)(s - p_k^*) = s^2 - 2\Re\{p_k\} + |p_k|^2 = s^2 - 2\cos\left(\frac{\pi k}{N}\right) + \omega_c^2$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Butterworth - Πόλοι και μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς

Η συνάρτηση μεταφοράς χαμηλοπερατού φίλτρου Butterworth άρτιας τάξης έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\omega_c^N}{\prod_{k=1}^{N/2} (s - p_k)(s - p_k^*)} = \frac{\omega_c^N}{\prod_{k=1}^{N/2} \left[s^2 - 2 \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right) + \omega_c^2 \right]}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα για τις άρτιες και περιττές τιμές τάξης μπορούν να συνδυαστούν στην έκφραση

$$s_k = \exp\left(j\pi \frac{2k + N - 1}{2N}\right) = \cos\left(\pi \frac{2k + N - 1}{2N}\right) + j \sin\left(\pi \frac{2k + N - 1}{2N}\right)$$

Στην περίπτωση αυτή, η κανονικοποιημένη συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}(s)$ για την τιμή $\omega_c = 1$ διατυπώνεται ως $\mathcal{H}(s) = 1/B_N(s)$, όπου $B_N(s)$ τα πολυώνυμα Butterworth

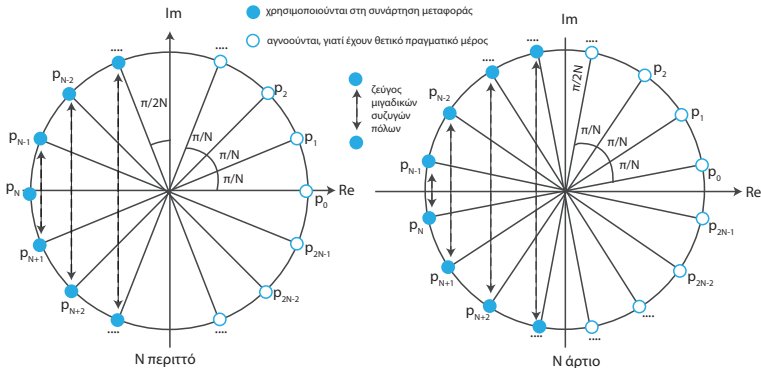
$$B_N(s) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{N/2} \left[s^2 - 2s \cos\left(\frac{2k + N - 1}{2N} \pi\right) + 1 \right] & N \text{ άρτιο} \\ (s + 1) \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \left[s^2 - 2s \cos\left(\frac{2k + N - 1}{2N} \pi\right) + 1 \right] & N \text{ περιττό} \end{cases}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Butterworth - Πόλοι και μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Οι $2N$ πόλοι της συνάρτησης $H(s)H(-s)$ **χαμηλοπερατού φίλτρου Butterworth** για άρτια και περιττή τάξη φίλτρου. Οι N πόλοι απεικονίζονται με γεμάτους κύκλους και εάν είναι **μιγαδικής φύσεως** εμφανίζονται σε ζεύγη **μιγαδικών συζυγών σημείων** του αριστερού ημιεπιπέδου έτσι ώστε το φίλτρο να είναι **ευσταθές**.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Butterworth - Απόκριση και φυσικά χαρακτηριστικά

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **φασική απόκριση** του **χαμηλοπερατού φίλτρου Butterworth** για τις άρτιες και περιττές τάξεις φίλτρου δίδεται από τις σχέσεις

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = - \sum_{k=1}^{N/2} \tan^{-1} \frac{-2\Re\{p_k\}\omega}{\omega_c^2 - \omega^2}$$
$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = - \tan^{-1} \omega - \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \tan^{-1} \frac{2\Re\{p_k\}\omega}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

Η **υστέρηση φάσης** υπολογίζεται ως $\tau_{ph} = -\angle \mathcal{H}(j\omega)/\omega$ ενώ η **υστέρηση ομάδας** υπολογίζεται από τις εξισώσεις για τις παραπάνω τιμές παραμέτρων.

Το αποτέλεσμα για τις **άρτιες** και τις **περιττές** τάξεις φίλτρου έχει τη μορφή

$$\tau(\omega) = - \sum_{k=1}^{N/2} \frac{2\Re\{s_k\}(\omega_c^2 + \omega^2)}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + 4\Re\{p_k\}^2\omega^2} \quad \& \quad \tau(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} - \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{2\Re\{s_k\}(\omega_c^2 + \omega^2)}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + 4\Re\{p_k\}^2\omega^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Butterworth - Απόκριση και φυσικά χαρακτηριστικά

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **κρουστική απόκριση** του χαμηλοπερατού φίλτρου Butterworth έχει τη μορφή

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{H}(s)\} = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k t}$$

με τις σταθερές αναλογίας A_k να υπολογίζονται ως

$$A_k = \left. \frac{(s - p_k)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_N)} \right|_{s=p_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Εάν η τάξη N του φίλτρου είναι **άρτιος αριθμός** η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$h(t) = \sum_{k=1}^{N/2} \left[2\Re\{A_k\} e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t) - 2\Im\{A_k\} e^{\sigma_k t} \sin(\omega_k t) \right]$$

όπου $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ ενώ οι ρίζες p_k απαριθμούνται έτσι ώστε για $k = 1, 2, \dots, N/2$, τα σημεία s_k να ανήκουν **στο ίδιο** τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου.

Εάν η τάξη N του φίλτρου είναι **περιττός αριθμός**, η κρουστική απόκριση $h(t)$ γίνεται

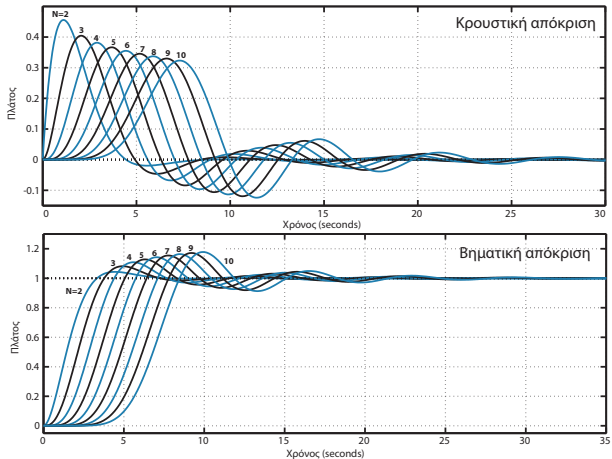
$$h(t) = K e^{-t} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left[2\Re\{A_k\} e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t) - 2\Im\{A_k\} e^{\sigma_k t} \sin(\omega_k t) \right]$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Butterworth - Απόκριση και φασικά χαρακτηριστικά

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Η μεταβολή της κρουστικής και της βηματικής απόκρισης **χαμηλοπερατού φίλτρου Butterworth** με τη συχνότητα για τιμές τάξης $N = 2, 3, \dots, 10$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Butterworth - Επιλεκτικότητα και παράγοντας φασματικής απόδοσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Μετά τον υπολογισμό της **κρουστικής απόκρισης** μπορούμε να προσδιορίσουμε και τη βηματική του απόκριση από την **ολοκλήρωση της κρουστικής απόκρισης**.

Από την εξίσωση ορισμού της **επιλεκτικότητας** προκύπτει ότι

$$F_s = -\frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_p)^{2N}}} \right\}_{\omega=\omega_c} = \left\{ \frac{N(\omega^{2N-1}/\omega_c^{2N})}{\sqrt[3]{[1 + (\omega/\omega_c)^{2N}]^2}} \right\}_{\omega=\omega_c} = \frac{N}{(2\sqrt{2}) \omega_c}$$

Στην περίπτωση αυτή, θεωρώντας δύο επίπεδα εξασθένησης α και β , η χρήση της εξίσωσης ορισμού του **παράγοντα φασματικής** απόδοσης θα μας οδηγήσει στην έκφραση

$$S_{\alpha}^{\beta} = \frac{BW_{\beta}}{BW_{\alpha}} = \sqrt{\frac{10^{\beta/10} - 1}{10^{\alpha/10} - 1}}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Σχεδίαση φίλτρων Butterworth

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η σχεδίαση ενός χαμηλοπερατού φίλτρου Butterworth, συνίσταται στον προσδιορισμό της τάξης N του φίλτρου και της συχνότητας αποκοπής ω_c , όταν είναι γνωστές οι τιμές ω_p και ω_s καθώς και η μέγιστη / ελάχιστη διακύμανση των ζωνών διέλευσης και αποκοπής

$$|\mathcal{H}(j\omega_p)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \quad \text{και} \quad |\mathcal{H}(j\omega_s)| = \frac{1}{A}$$

Στην περίπτωση αυτή, η τάξη N του φίλτρου υπολογίζεται ως

$$N = \frac{1}{2} \frac{\log\left(\frac{A^2-1}{\varepsilon^2}\right)}{\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} = \frac{\log\left(\frac{\sqrt{A^2-1}}{\varepsilon}\right)}{\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\log\left(\frac{10^{A_s/10}-1}{10^{A_p/10}-1}\right)}{\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)}$$

Οι συντελεστές του πολυωνύμου Butterworth $B_N(s)$ υπολογίζονται ως

$$d_k = \frac{\cos[(k-1)\pi/2]}{\sin(k\pi/2N)}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Ξεκινώντας από την τιμή $d_0 = 1$, ενώ η συνάρτηση μεταφοράς είναι $H(s) = 1/B_N(s)$. Τέλος, η συχνότητα αποκοπής μπορεί να υπολογιστεί ως

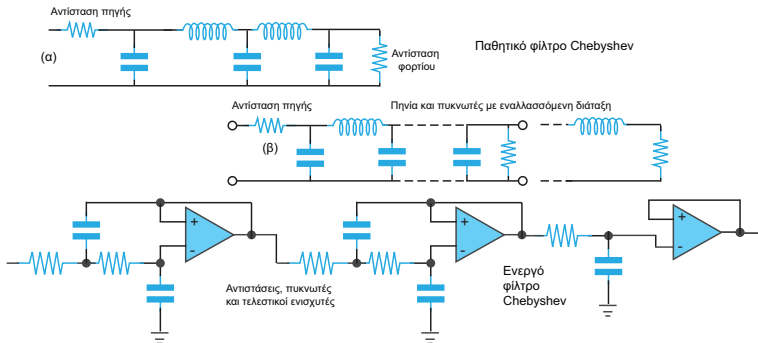
$$\omega_c = \frac{\omega_p}{\sqrt[N]{\varepsilon}} = \frac{\omega_p}{2N\sqrt{10^{A_p/10}-1}} \quad \text{ή ως} \quad \omega_c = \frac{\omega_s}{2N\sqrt{A^2-1}} = \frac{\omega_p}{2N\sqrt{10^{A_s/10}-1}}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev

Σε αντίθεση με τα φίλτρα Butterworth που διασφαλίζουν τη μέγιστη επίπεδη συμπεριφορά στη ζώνη διέλευσης, τα φίλτρα Chebyshev προσφέρουν ζώνη μετάβασης με μικρό σχετικά εύρος, που όμως συνοδεύεται από την εμφάνιση διακυμάνσεων ίσου πλάτους στη συνάρτηση απόκρισης πλάτους.

Τυπικά παραδείγματα παθητικών και ενεργών κυκλωμάτων που υλοποιούν φίλτρα Chebyshev παρουσιάζονται στη συνέχεια.



Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev I

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

- Τα **χαμηλοπερατά φίλτρα Chebyshev I** χαρακτηρίζονται (1) από συνάρτηση μεταφοράς που περιέχει **μόνο πόλους** και (2) από απόκριση πλάτους που χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη **διακυμάνσεων ίσου πλάτους** στη ζώνη διέλευσης και από **μονοτονική εξασθένηση** στη ζώνη αποκοπής.
- Τα **χαμηλοπερατά φίλτρα Chebyshev I** διασφαλίζουν τη **μέγιστη δυνατή** εξασθένηση στη ζώνη αποκοπής A_s ανάμεσα σε όλες τις πολυωνυμικές προσεγγίσεις ιδανικών φίλτρων που χαρακτηρίζονται από την **ίδια** τιμή του A_p και την **ίδια** τάξη φίλτρου.
- Η τιμή του **παράγοντα Q** για τα χαμηλοπερατά φίλτρα Chebyshev I είναι **μεγαλύτερη** από την τιμή $Q = 0.707$ που χαρακτηρίζει τα φίλτρα Butterworth.
- Η **απόκριση πλάτους** των χαμηλοπερατών φίλτρων Chebyshev I έχει τη μορφή

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)}}$$

όπου ω_p η **συχνότητα αποκοπής της ζώνης διέλευσης** και ε η **παράμετρος ταλαντώσεων στη ζώνη διέλευσης**.

- Εάν χρησιμοποιήσουμε την **κανονικοποιημένη** υλοποίηση ($\omega_p = 1$), η παραπάνω σχέση απλοποιείται στην έκφραση

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega)}}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev I

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Για τιμή συχνότητας $\omega = 0$ θα είναι

$$T_N(0) = \cos(N \cos^{-1} 0) = \cos\left[\frac{N(2k+1)\pi}{2}\right] = \begin{cases} \pm 1 & N \text{ άρτιος} \\ 0 & N \text{ περιττός} \end{cases}$$

και επομένως

$$|\mathcal{H}(0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_N^2(0)}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} & N \text{ άρτιος} \\ 1 & N \text{ περιττός} \end{cases}$$

• Για τιμή συχνότητας $\omega = 1$ rad/sec θα είναι

$$T_N(1) = \cos[N \cos^{-1}(1)] = \cos(2k\pi N) = 1$$

και επομένως $|\mathcal{H}(1)| = 1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$, **ανεξάρτητα** από την τάξη του φίλτρου N .

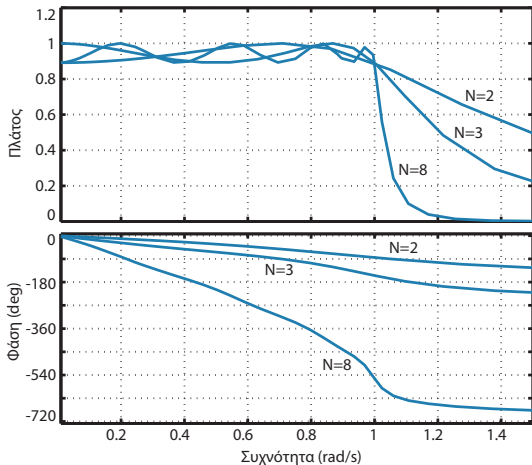
Καθώς μεγαλώνει η τάξη του φίλτρου N , η εξασθένιση στη ζώνη μετάβασης γίνεται **ολοένα και πιο απότομη**. Επομένως, το εύρος της ζώνης μετάβασης γίνεται **ολοένα και πιο μικρό**, αλλά με τίμημα **την αύξηση του πλάτους των διακυμάνσεων**.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev I

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Οι αποκρίσεις πλάτους και φάσης **χαμηλοπερατού φίλτρου Chebyshev I** για $\omega_p = 1$, πλάτος διακύμανσης 1 dB και τιμές τάξης φίλτρου $N = 2, 3, 8$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev I

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν η απόκριση πλάτους σχεδιαστεί **εκπεφρασμένη σε μονάδες dB**, το εύρος των διακυμάνσεων στη ζώνη διέλευσης θα είναι

$$20 \log \left[\frac{1}{1/\sqrt{1+\varepsilon^2}} \right] = 20 \log \sqrt{1+\varepsilon^2} = 20 \log(1+\varepsilon)^{1/2} = 10 \log(1+\varepsilon^2)$$

και στην πράξη μία τιμή γύρω στο 1 dB είναι συνήθως **αποδεκτή**.

Για την περιοχή τιμών $\omega > \omega_p$, η απόκριση πλάτους ελαττώνεται **μονοτονικά** με την αύξηση της συχνότητας, με τη συχνότητα ω_s να ορίζεται ως η συχνότητα για την οποία

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)}} < \frac{1}{A} \quad (\omega_p < \omega_s < \omega)$$

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης κέρδους και την εξίσωση ορισμού της, διαπιστώνουμε πως αυτή **μεγιστοποιείται** σε συχνότητες για τις οποίες είναι $T_N^2(\omega/\omega_p) = 0$ και **ελαχιστοποιείται** σε συχνότητες για τις οποίες είναι $T_N^2(\omega/\omega_p) = 1$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev I

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν συμβολίσουμε αυτές τις συχνότητες με $\omega = \omega_{\max}$ και $\omega = \omega_{\min}$ τότε αυτές θα προσδιοριστούν ως οι **ρίζες** των εξισώσεων

$$T_N^2\left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_p}\right) = \cos^2\left[N \cos^{-1}\left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_p}\right)\right] = 0 \quad \& \quad T_N^2\left(\frac{\omega_{\min}}{\omega_p}\right) = \cos^2\left[N \cos^{-1}\left(\frac{\omega_{\min}}{\omega_p}\right)\right] = 1$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της συνάρτησης του **συνημιτόνου**, βρίσκουμε ότι

$$\omega_{\max}^k = \omega_p \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right], \quad k = 1, 2, \dots, L$$
$$\omega_{\min}^k = \omega_p \cos\left[\frac{k\pi}{N}\right], \quad k = 1, 2, \dots, L$$
$$L = \begin{cases} (N+1)/2 & \text{για άρτια τάξη} \\ (N/2) & \text{για περιττή τάξη} \end{cases}$$

Παρατηρώντας πως η συνάρτηση $\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s)$ έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s) = |\mathcal{H}(j\omega)|_{\omega=s/j}^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2[s/(j\omega_p)]}$$

οι **πόλοι** της συνάρτησης μεταφοράς θα υπολογισθούν ως οι τιμές της μιγαδικής μεταβλητής $s = j\omega$ οι οποίες αποτελούν ρίζες της εξίσωσης

$$1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{s}{j\omega_p}\right) = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad T_N\left(\frac{s}{j\omega_p}\right) = \cos\left[N \cos^{-1}\left(\frac{s}{j\omega_p}\right)\right] = \pm \frac{j}{\varepsilon}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev I

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Πραγματοποιώντας τις αλγεβρικές πράξεις, οι **πόλοι** της συνάρτησης μεταφοράς του **χαμηλοπερατού φίλτρου Chebyshev I** τάξεως N είναι $p_k = j\omega_k = j\omega_p \cos \varphi_k$ ή

$$p_k = j\omega_p \cos \left[\frac{(2\kappa-1)\pi}{2N} \pm \frac{j}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] = \\ = \pm \sin \frac{(2\kappa-1)\pi}{2N} \sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \omega_p + j \left\{ \cos \frac{(2\kappa-1)\pi}{2N} \cosh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \right\} \omega_p$$

για τις τιμές $\kappa = 1, 2, \dots, N$. Διατυπώνοντάς τους στη μορφή $s_k = \sigma_k + j\omega_k$, το **πραγματικό** και το **φανταστικό** τους μέρος είναι

$$\sigma_k = \pm \sin \frac{(2\kappa-1)\pi}{2N} \sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \omega_p \quad \text{και} \\ \omega_k = \cos \frac{(2\kappa-1)\pi}{2N} \cosh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \omega_p$$

για τις τιμές $k = 1, 2, \dots, 2N$. Εάν η τάξη του φίλτρου N είναι **περιττός αριθμός** το φίλτρο διαθέτει **δύο πραγματικούς πόλους** με τιμή

$$\sigma = \pm \sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \omega_p$$

από τους οποίους κρατάμε μόνο τον **αρνητικό** πόλο, που ανήκει στο αριστερό ημιεπίπεδο.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev I

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Συνδυάζοντας κατάλληλα τις εξισώσεις των σ_k και ω_k , οδηγούμαστε στην έκφραση

$$\left(\frac{\sigma_k}{\sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \omega_p} \right)^2 + \left(\frac{\omega_k}{\cosh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \omega_p} \right)^2 = 1$$

η οποία αποτελεί **εξίσωση έλλειψης** με μήκη μικρού και μεγάλου ημιάξονα

$$\alpha = \sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \omega_p \quad \text{και} \quad \beta = \cosh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \omega_p$$

Επομένως, οι $2N$ πόλοι της συνάρτησης $\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s) = |\mathcal{H}(j\omega)|_{\omega=s/j}^2$ κείνται σε **περιφέρεια έλλειψης κείμενης επί του μιγαδικού επιπέδου**, σε αντίθεση με τους πόλους της αντίστοιχης συνάρτησης του χαμηλοπερατού φίλτρου Butterworth οι οποίοι κείνται σε **περιφέρεια κύκλου**.

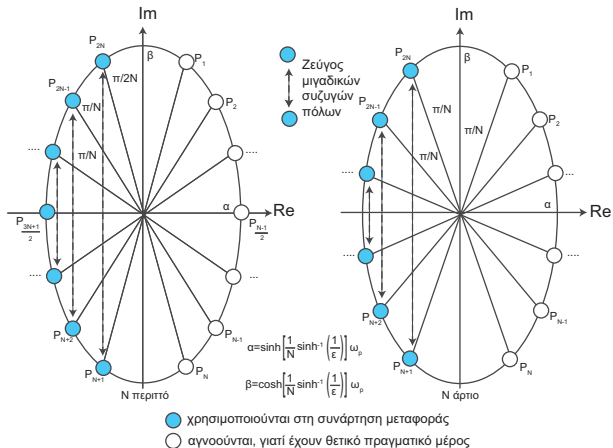
Αυτή η έλλειψη τέμνει τον **κατακόρυφο άξονα** στα σημεία με τεταγμένες $\pm\beta$ και τον **οριζόντιο άξονα** στα σημεία με τεταγμένες $\pm\alpha$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev I

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Οι $2N$ πόλοι της συνάρτησης $\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s)$ για χαμηλοπερατό φίλτρο Chebyshev I και για άρτια και περιττή τάξη φίλτρου.

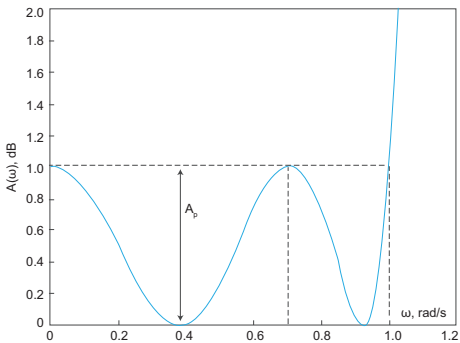
Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev I

Η **χαρακτηριστική απωλειών** των φίλτρων Chebyshev I υπολογίζεται από την εξίσωση

$$\mathcal{A}(\omega) = 10 \log L(\omega^2) = 10 \log \frac{1}{\mathcal{H}(j\omega)\mathcal{H}(-j\omega)} = 10 \log[1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega)]$$

(για $\omega_p = 1$) και για ένα κανονικοποιημένο φίλτρο Chebyshev τετάρτης τάξεως αναπαρίσταται στη συνέχεια.



Σχήμα: Χαρακτηριστική απωλειών **κανονικοποιημένου** φίλτρου Chebyshev I 4ης τάξεως.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev I

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Παρατηρούμε πως η απώλεια στη **ζώνη διέλευσης** ταλαντώνεται ανάμεσα στο μηδέν και στην τιμή της παραμέτρου A_p .

Η **φασική απόκριση** των φίλτρων Chebyshev I για άρτια και περιττή τάξη φίλτρου είναι

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = - \sum_{k=1}^{N/2} \tan^{-1} \frac{2\sigma_k \omega}{\omega^2 - \sigma_k^2 - \omega_k^2}$$

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = - \tan^{-1} \left\{ \frac{\omega}{\sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right]} \right\} - \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \tan^{-1} \frac{2\sigma_k \omega}{\omega^2 - \sigma_k^2 - \omega_k^2}$$

ενώ οι αντίστοιχες εξισώσεις για την **υστέρηση φάσης** είναι οι

$$\tau(\omega) = - \sum_{k=1}^{N/2} \frac{2\sigma_k(\sigma_k^2 + \omega_k^2 + \omega^2)}{(\sigma_k^2 + \omega_k^2 - \omega^2)^2}$$

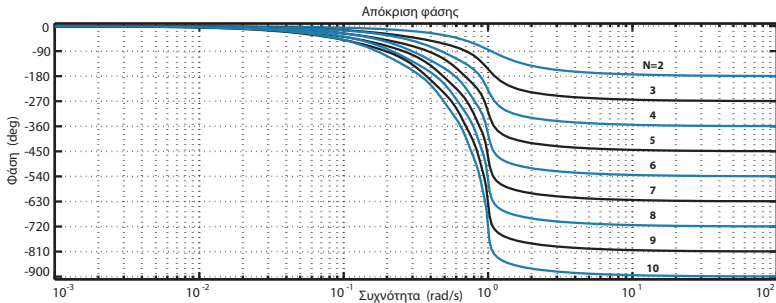
$$\tau(\omega) = - \frac{\sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right]}{\sinh^2 \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] + \omega^2} - \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{2\sigma_k(\sigma_k^2 + \omega_k^2 + \omega^2)}{(\sigma_k^2 + \omega_k^2 - \omega^2)^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev I

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



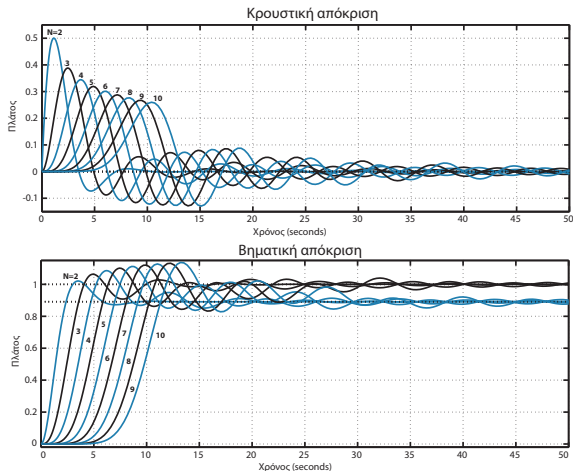
Σχήμα: Η φασική απόκριση του πρωτότυπου **χαμηλοπερατού φίλτρου Chebyshev I** για τιμές $\omega_p = 1$, $R_p = 1$ dB και για τιμές τάξης φίλτρου $N = 2 - 10$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev I

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Η κρουστική και η βηματική απόκριση πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου Chebyshev I για τιμή $A_p = 1$ dB και για τιμές τάξης φίλτρου $N = 2 - 10$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev I

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **ελάχιστη τάξη** του χαμηλοπερατού φίλτρου Chebyshev I που θα λειτουργεί σύμφωνα με τις προδιαγραφές που υπαγορεύονται από τις τιμές των παραμέτρων ω_p , ω_s , A_p και A_s δίδεται από την εξίσωση

$$N = \frac{\cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{A^2 - 1}{\epsilon^2}} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{\sqrt{10^{A_s/10} - 1}}{\sqrt{10^{A_p/10} - 1}} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)}$$

ενώ ένας ισοδύναμος αλλά **πιο απλός** ορισμός που δεν στηρίζεται στη χρήση υπερβολικών συναρτήσεων, έχει τη μορφή

$$N = \left\{ \ln \left(\sqrt{\frac{A^2 - 1}{\epsilon^2}} + \sqrt{\frac{A^2 - \epsilon^2 - 1}{\epsilon^2}} \right) \right\} / \left\{ \ln \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} + \sqrt{\frac{\omega_s^2 - \omega_p^2}{\omega_p^2}} \right) \right\}$$

Αυτή η εξίσωση προκύπτει από την προηγούμενη μετά από απλές αλγεβρικές πράξεις και χρησιμοποιώντας τη γνωστή ταυτότητα $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev I

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **επιλεκτικότητα** των φίλτρων Chebyshev I υπολογίζεται από την εξίσωση

$$F_s = -\frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)}} \right\}_{\omega=\omega_c} = \left\{ \frac{\varepsilon^2 T_N(\omega/\omega_p) \frac{d}{d\omega} \{ T_N(\omega/\omega_p) \}}{\sqrt{[1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)]^2}} \right\}_{\omega=\omega_c}$$

ή μετά από απλές πράξεις

$$F_s = \frac{N\varepsilon \cosh \left[\frac{1}{N} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \sinh \left[\cosh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right]}{(2\sqrt{2}\omega_c) \sinh \left[\frac{1}{N} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right]}$$

ενώ ο **παράγοντας φασματικής απόδοσης** ορίζεται ως

$$S_{\alpha}^{\beta} = \left\{ \cosh \left[\frac{1}{N} \cosh^{-1} \left(\frac{\sqrt{e^{\beta/10}} - 1}{\varepsilon} \right) \right] \right\} / \left\{ \cosh \left[\frac{1}{N} \cosh^{-1} \left(\frac{\sqrt{e^{\alpha/10}} - 1}{\varepsilon} \right) \right] \right\}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Η διαδικασία σχεδίασης των χαμηλοπερατών φίλτρων Chebyshev I

Προσδιορίζουμε τις τιμές των **παραμέτρων λειτουργίας** του φίλτρου ω_p , ω_s , A_p και A_s έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι υφιστάμενες σε κάθε περίπτωση απαιτήσεις.

Υπολογίζουμε τις τιμές των παραμέτρων $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$ και $A = 10^{A_s/20}$ και στη συνέχεια την τιμή της **ελάχιστης τάξης φίλτρου** από τις σχέσεις

$$N = \left\{ \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{A^2 - 1}{\varepsilon^2}} \right) \right\} / \left\{ \cosh^{-1} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right) \right\} \quad \text{ή}$$

$$N = \left\{ \ln \left(\sqrt{\frac{A^2 - 1}{\varepsilon^2}} + \sqrt{\frac{A^2 - \varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2}} \right) \right\} / \left\{ \ln \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} + \sqrt{\frac{\omega_s^2 - \omega_p^2}{\omega_p^2}} \right) \right\}$$

η οποία στρογγυλοποιείται στον **αμέσως μεγαλύτερο** ακέραιο.

Γνωρίζοντας τις τιμές των ε και N υπολογίζουμε τις τιμές του πραγματικού και του φανταστικού μέρους των πόλων $s_\kappa = \sigma_\kappa + j\omega_\kappa$ ($\kappa = 1, 2, \dots, 2N$) από τις εξισώσεις

$$\sigma_\kappa = -\sin \frac{(2\kappa + 1)\pi}{2N} \sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \quad \text{και}$$

$$\omega_\kappa = \cos \frac{(2\kappa + 1)\pi}{2N} \cosh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right]$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Η διαδικασία σχεδίασης των χαμηλοπερατών φίλτρων Chebyshev I

Από τους $2N$ πόλους θεωρούμε μόνο τους N που ανήκουν στο **αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο** και υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από τη σχέση

$$H(s) = H_0 \frac{(-1)^N s_1 s_2 \dots s_N}{[(s/\omega_p) - s_1][(s/\omega_p) - s_2] \dots [(s/\omega_p) - s_N]}$$

όπου H_0 η τιμή του **κέρδους**. Εάν το φίλτρο είναι **κανονικοποιημένο**, η **συνάρτηση μεταφοράς** $H(s)$ υπολογίζεται από τις σχέσεις

$$\frac{10^{-0.05A_p} \prod_{i=1}^{N/2} (\sigma_i^2 + \omega_i^2) \sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right] \prod_{i=1}^{(N-1)/2} |p_i|^2}{\prod_{i=1}^{N/2} (s^2 - 2\sigma_i s + \sigma_i^2 + \omega_i^2) \left\{ s + \sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right] \right\} \prod_{i=1}^{(N-1)/2} (s^2 - 2\Re\{p_i\}s + |p_i|^2)}$$

για **άρτιες** και **περιττές** τάξεις φίλτρων, αντίστοιχα.

Υπολογίζουμε τη **συχνотική απόκριση** και τις αποκρίσεις **πλάτους** και **φάσης**.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

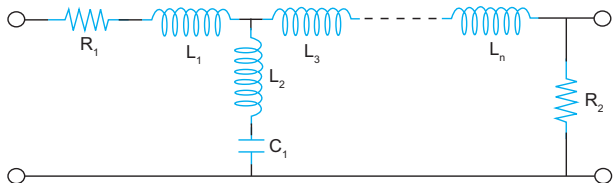
- Τα φίλτρα Chebyshev II σχετίζονται με την επονομαζόμενη προσέγγιση αντίστροφου Chebyshev.
- Αυτή η προσέγγιση οδηγεί σε απόκριση πλάτους που είναι η αντίστροφη εκείνης των φίλτρων Chebyshev I.
- Ενώ η απόκριση πλάτους των φίλτρων Chebyshev I παρουσιάζει διακυμάνσεις ίσου πλάτους στη ζώνη διέλευσης και μονοτονική συμπεριφορά στη ζώνη αποκοπής, τα φίλτρα Chebyshev II παρουσιάζουν μονοτονική συμπεριφορά στη ζώνη διέλευσης και διακυμάνσεις ίσου πλάτους στη ζώνη αποκοπής.
- Η συνάρτηση κέρδους των φίλτρων Chebyshev II μηδενίζεται στη ζώνη αποκοπής σε τιμές συχνότητας που είναι οι αντίστροφες των ριζών του αντίστοιχου πολυωνύμου Chebyshev, ενώ ανάμεσα σε αυτούς τους μηδενισμούς εμφανίζονται μέγιστα με τιμή ίση με $-A_s$ (dB).
- Στη ζώνη διέλευσης και στη θέση $\omega = 0$, η συνάρτηση κέρδους των φίλτρων Chebyshev II εμφανίζει τη μέγιστη δυνατή συμπεριφορά.
- Ως αποτέλεσμα, η φασική απόκριση των φίλτρων Chebyshev II χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερο βαθμό γραμμικότητας σε σχέση με αυτή των Chebyshev I, ενώ η μέγιστη τιμή του Q για τις ίδιες προδιαγραφές κέρδους είναι σημαντικά πιο μικρή σε σχέση με την αντίστοιχη τιμή των φίλτρων Chebyshev I.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Παθητική υλοποίηση φίλτρων Chebyshev II.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Θεωρώντας την **απόκριση ισχύος** των φίλτρων Chebyshev I

$$|\mathcal{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)}$$

η **απόκριση πλάτους** των φίλτρων Chebyshev II προκύπτει ως εξής: Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$|\mathcal{G}(j\omega)|^2 = 1 - |\mathcal{H}(j\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)} = \frac{\varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)}$$

και κάνουμε την αντικατάσταση $(\omega/\omega_p) \rightarrow (\omega_s/\omega)$. Συμβολίζοντας την **απόκριση πλάτους** των φίλτρων Chebyshev II με $|\mathcal{H}(j\omega)|$ θα έχουμε

$$|\mathcal{H}(j\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 T_N^2(\omega_s/\omega)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega_s/\omega)} = 1 / \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon^2 T_N^2(\omega_s/\omega)} \right\}$$

και επομένως θα είναι

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 T_N^2(\omega_s/\omega)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega_s/\omega)}} = \frac{\varepsilon |T_N(\omega_s/\omega)|}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega_s/\omega)}} = 1 / \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2 T_N^2(\omega_s/\omega)}}$$

όπου $T_N(\omega_s/\omega)$ τα **πολυώνυμα Chebyshev**.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τα **πολυώνυμα Chebyshev** περιέχουν τη **συχνότητα αποκοπής** ω_s και επομένως οι **ισοκυματικές διακυμάνσεις** τους **δεν** αφορούν τη ζώνη διέλευσης αλλά τη **ζώνη αποκοπής**, με τα χαρακτηριστικά τους να εξαρτώνται από την τιμή της **παραμέτρου διακύμανσης** ε .

Για $\omega_s = 1$ λαμβάνουμε το **κανονικοποιημένο** φίλτρο Chebyshev II με **απόκριση πλάτους**

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 T_N^2(1/\omega)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(1/\omega)}} = \frac{\varepsilon |T_N(1/\omega)|}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_N^2(1/\omega)}}$$

Αυτή η συνάρτηση κέρδους αποτελεί παράδειγμα **ρητής προσέγγισης** της μορφής

$$G(\omega) = |\mathcal{H}j\omega| = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2 F^2(\omega)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2 [N^2\omega/D^2(\omega)]}} = \frac{D(\omega)}{\sqrt{D^2(\omega) + \gamma^2 N^2(\omega)}}$$

για τιμή παραμέτρου $\gamma = 1/\varepsilon$ και για τη ρητή συνάρτηση

$$F(\omega) = \frac{1}{T_N(\omega/\omega_s)} = \frac{\omega^N}{\omega^N T_N(\omega/\omega_s)} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τα **πολυώνυμα Chebyshev** που χρησιμοποιούνται σε αυτή την περιγραφή ορίζονται ως

$$T_N \left(\frac{\omega_s}{\omega} \right) = 2^{N-1} \left(\frac{\omega_s}{\omega} \right)^N + 2^{N-3} \left(\frac{\omega_s}{\omega} \right)^{N-2} + \dots + N^n (-1)^{\frac{N+3n}{2}} \left(\frac{\omega_s}{\omega} \right)^n$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως οι ρίζες των πολυωνύμων Chebyshev που θα προκύψουν ως οι ρίζες της εξίσωσης $T_N(\omega/\omega_s) = \cos [N \cos^{-1}(\omega_s/\omega)] = 0$ έχουν τη μορφή

$$\omega_k^z = \pm \frac{\omega_s}{\cos [(2k-1)\pi/(2N)]} \quad \text{για τις τιμές } k = 1, 2, \dots, \frac{N-n}{2}$$

είναι προφανές, πως στις θέσεις αυτών των συχνοτήτων λαμβάνει χώρα **μηδενισμός της συνάρτησης κέρδους στη ζώνη αποκοπής**.

Εάν η τάξη του φίλτρου είναι **περιττός αριθμός**, υπάρχουν $N - 1$ **διακριτές πεπερασμένες τιμές συχνότητας** στις οποίες μηδενίζεται το κέρδος του φίλτρου και μία επιπλέον τέτοια συχνότητα στη θέση $\omega = \infty$. Αντίθετα, για φίλτρα άρτιας τάξης, ο μηδενισμός του κέρδους εμφανίζεται για $N/2$ πεπερασμένες τιμές συχνότητας.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Παρατηρώντας πως οι ρίζες του πολυωνύμου $T_N(\omega/\omega_s)$ είναι και ρίζες του **άρτιου** πολυωνύμου $D(\omega) = \omega^N T_N(\omega_s/\omega)$, θα έχουμε

$$D(\omega) = |c_n| \omega_s^n \prod_{k=1}^{(N-n)/2} [\omega^2 - (\omega_k^z)^2] = N^n (-1)^{(N+3n)/2} \omega_s^n \prod_{k=1}^{(N-n)/2} \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{\cos^2[(2k-1)\pi/(2N)]} \right)$$

Κατά συνέπεια, η ρητή συνάρτηση $F(\omega)$ διατυπώνεται ως

$$F(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \omega^N / \left\{ N^n (-1)^{(N+3n)/2} \omega_s^n \prod_{k=1}^{(N-n)/2} \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{\cos^2[(2k-1)\pi/(2N)]} \right) \right\}$$

ενώ η **συνάρτηση κέρδους** του χαμηλοπερατού φίλτρου Chebyshev II είναι

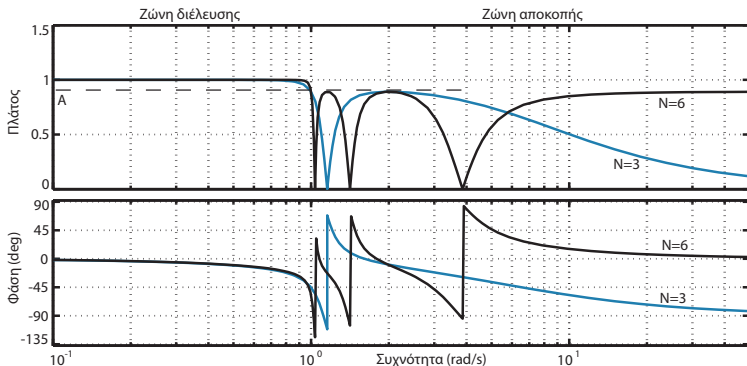
$$G(\omega) = |\mathcal{H}(j\omega)| = \frac{\varepsilon N^n (-1)^{(N+3n)/2} \omega_s^n \prod_{k=1}^{(N-n)/2} \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{\cos^2 \left[\frac{(2k-1)\pi}{2N} \right]} \right)}{\sqrt{\omega^{2N} + N^{2n} (-1)^{(N+3n)} \omega_s^{2n} \left\{ \prod_{k=1}^{(N-n)/2} \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{\cos^2[(2k-1)\pi/(2N)]} \right) \right\}^2}}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Οι αποκρίσεις πλάτους και φάσης του πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου Chebyshev II για άρτια και περιττή τιμή τάξης.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II - Πόλοι και μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ο προσδιορισμός των πόλων και των μηδενικών τιμών της συνάρτησης μεταφοράς των φίλτρων Chebyshev II στηρίζεται στην κατασκευή της συνάρτησης

$$\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s) = |\mathcal{H}(j\omega)|_{\omega=s/j}^2 = \frac{\varepsilon^2 T_N^2(j\omega_s/s)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(j\omega_s/s)} = \frac{\varepsilon^2 T_N^2(-\omega_s/js)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(-\omega_s/js)}$$

Ειδικότερα, τα **μηδενικά** είναι οι ρίζες της εξίσωσης $T_N(j\omega_s/s) = 0$ ενώ οι πόλοι είναι οι ρίζες της εξίσωσης $1 + \varepsilon^2 T_N^2(j\omega_s/s) = 0$.

Η εξίσωση των μηδενικών τιμών έχει τη μορφή

$$z_k = \pm \frac{j\omega_s}{\cos [(2k - 1)\pi/(2N)]} \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N - n}{2}$$

Τα φίλτρα με **άρτια** τιμή τάξης διαθέτουν $N/2$ ζεύγη **αμιγώς φανταστικών** συζυγών μηδενικών τιμών, ενώ στα φίλτρα περιττής τιμής τάξης, υπάρχουν $(N - 1)/2$ τέτοια πεπερασμένα ζεύγη και μία επιπλέον μηδενική τιμή στη θέση $\omega = \infty$.

Από την άλλη πλευρά, η εξίσωση των πόλων έχει τη μορφή

$$p_k = \frac{\omega_s}{-\sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \sin \frac{(2k - 1)\pi}{2N} + j \cosh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \cos \frac{(2k - 1)\pi}{2N}}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II - Πόλοι και μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Από τους $2N$ πόλους της συνάρτησης μεταφοράς θεωρούμε ξανά τους N πόλους του **αριστερού μιγαδικού ημιεπιπέδου** που χαρακτηρίζονται από **αρνητικά πραγματικά μέρη** και έχουν τη μορφή $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ όπου

$$\sigma_k = \frac{-\omega_s \sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right] \sin \frac{(2k-1)\pi}{2N}}{\sinh^2 \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right] \sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2N} + \cosh^2 \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right] \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{2N}}$$

$$\omega_k = \frac{-\omega_s \cosh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right] \cos \frac{(2k-1)\pi}{2N}}{\sinh^2 \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right] \sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2N} + \cosh^2 \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right] \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{2N}}$$

Συμβολίζοντας τον **κοινό παρονομαστή** των παραπάνω εκφράσεων με $D(k)$ και ορίζοντας

$$\vartheta_k = -\tan^{-1} \left\{ \frac{\cosh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right] \cos \frac{(2k-1)\pi}{2N}}{\sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right] \sin \frac{(2k-1)\pi}{2N}} \right\}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II - Πόλοι και μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

διαπιστώνουμε πως οι πόλοι των κανονικοποιημένων συναρτήσεων μεταφοράς τύπου **Chebyshev I** ($\omega_p = 1$) και τύπου **Chebyshev II** ($\omega_s = 1$) δίδονται από τις σχέσεις

$$p_k^I = \sqrt{D(k)} e^{j\vartheta_k} \quad \text{και} \quad p_k^{II} = \frac{1}{\sqrt{D(k)}} e^{-j\vartheta_k}$$

ή ισοδύναμα

$$p_k^I = \alpha_k + j\beta_k \quad \text{και} \quad p_k^{II} = \frac{1}{p_k^I} = \frac{\omega_s \alpha_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} - j \frac{\omega_s \beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$$

και επομένως, οι πόλοι p_k^{II} είναι οι κατοπτρικοί των πόλων p_k^I ως προς την περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου.

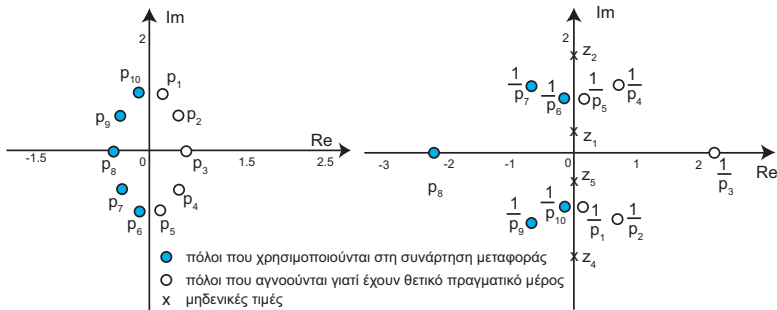
Το **διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών** του φίλτρου Chebyshev II και η συσχέτιση των πόλων του με τους πόλους του φίλτρου Chebyshev I από όπου αναδεικνύεται η σχέση **αντιστρόφου αναλογίας** που παρουσιάσαμε παραπάνω παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II - Πόλοι και μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Η συσχέτιση των πόλων των φίλτρων **Chebyshev I** [εικόνα (α)] και **Chebyshev II** [εικόνα (β)] καθώς και οι μηδενικές τιμές των φίλτρων **Chebyshev II** για περιττή τιμή τάξης ($N = 5$). Για τα φίλτρα άρτιας τάξης, η εικόνα είναι παρόμοια, με τη διαφορά πως εκεί δεν υπάρχουν πραγματικοί πόλοι αλλά μόνο ζεύγη μιγαδικών συζυγών πόλων.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II - Χαρακτηριστική απωλειών και φασική απόκριση

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **χαρακτηριστική απωλειών** του φίλτρου Chebyshev II δίδεται από τη σχέση

$$A(\omega) = 10 \log L(\omega^2) = 10 \log \left[1 + \frac{1}{\varepsilon^2 T_N^2(\omega_s/\omega)} \right]$$

Οι εκφράσεις της **φασικής απόκρισης** για άρτια και περιττή τάξη φίλτρου είναι οι

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = - \sum_{k=1}^{N/2} \frac{-2\sigma_k}{\sigma_k^2 + \omega_k^2 - \omega^2} \quad \text{και}$$

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = - \tan^{-1} \left\{ - \sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \right\} - \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{-2\sigma_k}{\sigma_k^2 + \omega_k^2 - \omega^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II - Ελάχιστη τάξη φίλτρου

ενώ οι αντίστοιχες εκφράσεις για την **υστέρηση ομάδας** διατυπώνονται ως

$$\tau(\omega) = - \sum_{N=1}^{N/2} \frac{2\sigma_k(\sigma_k^2 + \omega_k^2 + \omega^2)}{(\sigma_k^2 + \omega_k^2 - \omega^2)^2} \quad \text{και}$$
$$\tau(\omega) = - \frac{\sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right]}{1 + \sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \omega^2} - \sum_{N=1}^{(N-1)/2} \frac{2\sigma_k(\sigma_k^2 + \omega_k^2 + \omega^2)}{(\sigma_k^2 + \omega_k^2 - \omega^2)^2}$$

Η **ελάχιστη τάξη** N του φίλτρου μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση

$$N = \left\{ \cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{A_s/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1}} \right\} / \cosh^{-1}(\omega_s/\omega_p)$$

όταν είναι γνωστές οι τιμές των A_s , A_p , ω_s και ω_p . Επιλύοντας την παραπάνω σχέση ως προς ω_p θα λάβουμε

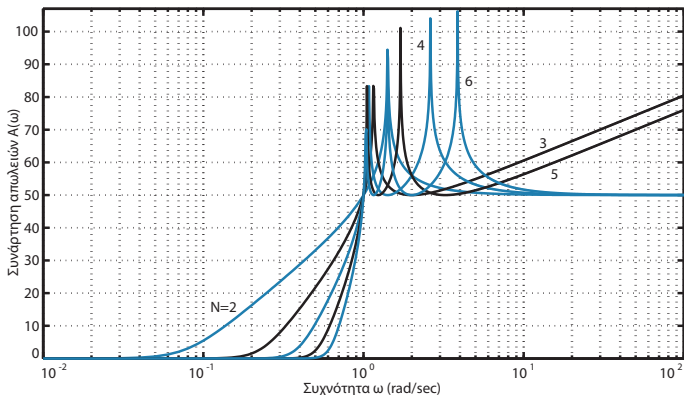
$$\omega_p = \frac{\omega_s}{\cosh \left[\frac{1}{N} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon \sqrt{10^{A_p/10} - 1}} \right) \right]}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II - Γράφημα χαρακτηριστικής απωλειών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



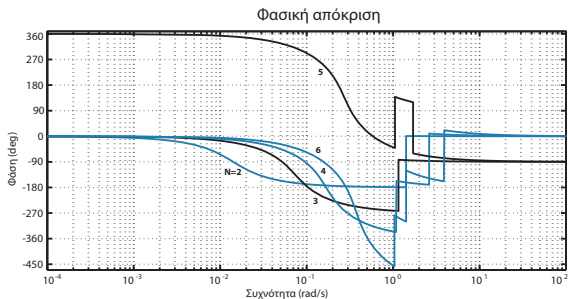
Σχήμα: Χαρακτηριστικές απωλειών του πρωτότυπου αναλογικού φίλτρου Chebyshev II και για τιμή παραμέτρου $A_s = 50$ dB και για τάξεις φίλτρου $N = 2, 3, 4, 5, 6$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II - Γράφημα φασικής απόκρισης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Η φασική απόκριση των φίλτρων Chebyshev II για τιμές παραμέτρων $\omega_c = 1$ και $A_s = 80$ dB και για τάξεις φίλτρων $N = 2, 3, 4, 5, 6$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II - Επιλεκτικότητα και φασματική απόδοση

Από την εξίσωση ορισμού της **επιλεκτικότητας** του φίλτρου προκύπτει ότι

$$F_s = -\frac{d}{d\omega} \{ | \mathcal{H}(j\omega) | \}_{\omega=\omega_c} = \frac{\varepsilon N \omega_s}{\omega_c \sqrt{\omega_s^2 - \omega_c^2}} \cdot \frac{\sinh[N \cosh^{-1}(\omega_s/\omega_c)]}{\sqrt[3]{\{1 + \varepsilon^2 \cosh^2[N \cosh^{-1}(\omega_s/\omega_c)]\}^2}}$$

ή ισοδύναμα

$$F_s = \frac{N\varepsilon \cosh \left[\frac{1}{N} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \sinh \left[\cosh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right]}{(2\sqrt{2}\omega_c) \sinh \left[\frac{1}{N} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right]}$$

που είναι η ίδια σχέση με εκείνη που χαρακτηρίζει τα φίλτρα Chebyshev I.

Ο **παράγοντας φασματικής απόδοσης** υπολογίζεται από την έκφραση

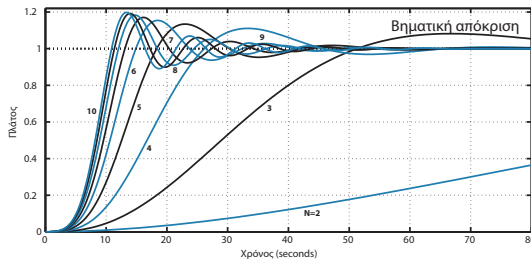
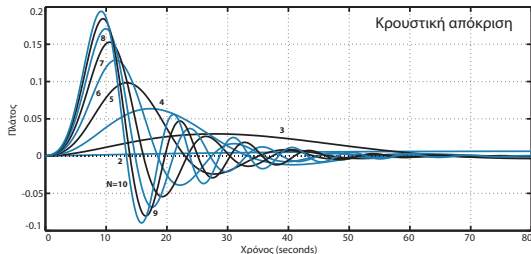
$$S_{\alpha}^{\beta} = \frac{BW_{\beta}}{BW_{\alpha}} = \frac{\cosh \left[\frac{1}{N} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon \sqrt{10^{\alpha/10} - 1}} \right) \right]}{\cosh \left[\frac{1}{N} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon \sqrt{10^{\beta/10} - 1}} \right) \right]}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II - Κρουστική και βηματική απόκριση

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Chebyshev II - Σχεδίαση χαμηλοπερατών φίλτρων Chebyshev II

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η σχεδίαση χαμηλοπερατών φίλτρων Chebyshev II περιλαμβάνει τα επόμενα στάδια:

- Τον καθορισμό των τιμών των **παραμέτρων** ω_s , ω_p , A_s και A_p που συνιστούν τις **προδιαγραφές** του φίλτρου.
- Τον υπολογισμό των τιμών της **παραμέτρου διακύμανσης** ε και της **ελάχιστης τάξης** του φίλτρου N ως

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{A_s/10} - 1}} \quad \text{και}$$

$$N = \cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{A_s/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1}} / \left\{ \cosh^{-1}(\omega_s/\omega_p) \right\}$$

- Τον προσδιορισμό των **μηδενικών τιμών** και των **πόλων** της συνάρτησης μεταφοράς και στη συνέχεια την κατασκευή της εν λόγω συνάρτησης.
- Την κατασκευή των επιθυμητών **αποκρίσεων πλάτους και φάσης** που θα πρέπει να ικανοποιούν τις προδιαγραφές του φίλτρου.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα (Προσέγγιση Cauer)

- Τα ελλειπτικά φίλτρα ή φίλτρα Cauer χαρακτηρίζονται από κυματισμούς ίσου πλάτους στη ζώνη διέλευσης (όπως τα φίλτρα Chebyshev I) και από κυματισμούς ίσου πλάτους στη ζώνη αποκοπής (όπως τα φίλτρα Chebyshev II).
- Προσφέρουν ζώνη μετάβασης με πολύ μικρό εύρος.
- Η ζώνη διέλευσης χαρακτηρίζεται από το μέγιστο βαθμό μη γραμμικότητας όσον αφορά την απόκριση φάσης τους.
- Τα πλάτη των διακυμάνσεων στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής μπορούν να ρυθμιστούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.
- Εάν κάποιο από τα δύο ή και τα δύο τείνουν στο μηδέν, το φίλτρο εκφυλίζεται σε φίλτρο Chebyshev I ή II ή φίλτρο Butterworth αντίστοιχα.
- Σε σύγκριση με τους άλλους τύπους φίλτρων και για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων A_p , A_s , ω_p και ω_s , τα ελλειπτικά φίλτρα οδηγούν στη μικρότερη δυνατή τάξη φίλτρου N . Η απόκριση πλάτους έχει τη μορφή

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2 R_N^2(\omega, \omega_s, \omega_p, \varepsilon_s, \varepsilon_p)}}$$

όπου $R_N(\omega, \omega_s, \omega_p, \varepsilon_s, \varepsilon_p)$ είναι η ελλειπτική συνάρτηση Jacobi τάξεως N

$$R_N(\omega, \omega_s, \omega_p, \varepsilon_s, \varepsilon_p) = \operatorname{sn} \left[\kappa \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + q \mathbf{K}_1, \varepsilon_p \varepsilon_s \right]$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα (Προσέγγιση Caue)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στην παραπάνω εξίσωση εμφανίζονται

- Το **ελλειπτικό ημίτονο του Jacobi** $\operatorname{sn}(x, k)$ της παραμέτρου x με ελλειπτικό μέτρο k .
- Τα **όρια των ζωνών διέλευσης και αποκοπής** ω_p και ω_s .
- Μία παράμετρος κ που εξαρτάται από την **τάξη** του φίλτρου N και από τις τιμές των **ελλειπτικών ολοκληρωμάτων** που σχετίζονται με το φίλτρο
- Τα **πλάτη των διακυμάνσεων στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής** ε_p και ε_s .
- Μία σταθερά q με τιμή 0 για **περιττή τάξη** φίλτρου και 1 για **άρτια** τάξη φίλτρου.
- Το **πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους** K_1 του ελλειπτικού μέτρου $\varepsilon_p \varepsilon_s$.

Ορίζοντας τα **ελλειπτικά μέτρα** $k_1 = \varepsilon_p \varepsilon_s$ και $k_2 = \omega_p / \omega_s$ και τις **παραμέτρους** $\xi = \kappa \operatorname{sn}^{-1}(\omega / \omega_p, \omega_p / \omega_s)$ και $\zeta = \omega / \omega_p$, η παραπάνω συνάρτηση γράφεται ως

$$R_N(\omega, \omega_s, \omega_p, \varepsilon_s, \varepsilon_p) = \operatorname{sn}[\kappa \operatorname{sn}^{-1}(\zeta, k_2) + qK_1, k_1] = \operatorname{sn}(\xi + qK_1, k_1)$$

Οι **παραμέτροι λειτουργίας** των ελλειπτικών φίλτρων ορίζονται ως

$$A_p = 10 \log(1 + \varepsilon_p^2) \quad \text{και} \quad \frac{1}{A_s} = \frac{\varepsilon_s}{\sqrt{1 + \varepsilon_s^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1/\varepsilon_s^2)}}$$

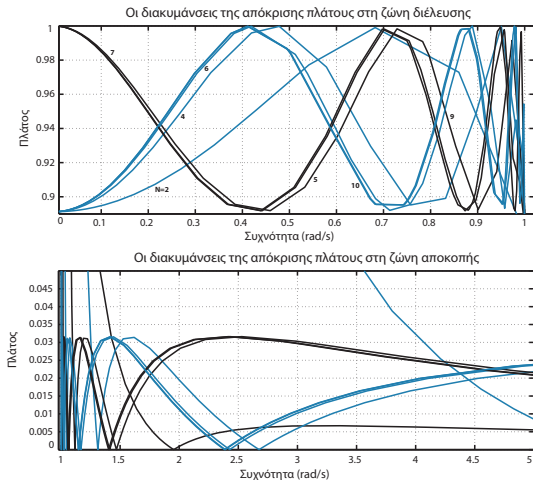
$$\text{από όπου προκύπτει ότι } \varepsilon_s = \frac{1}{\sqrt{10^{A_s/10} - 1}} \quad \text{και} \quad \varepsilon_p = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}.$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα (Προσέγγιση Causer)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Οι διακυμάνσεις της απόκρισης πλάτους του πρωτότυπου χαμηλοπερατού ελλειπτικού φίλτρου στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα (Προσέγγιση Cauer) - Η ελάχιστη τάξη φίλτρου

Το τετράγωνο του μέτρου της **συχνοτικής απόκρισης** στη θέση $\omega = \omega_p$ είναι

$$|\mathcal{H}(j\omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 R_N^2(\omega_p, \omega_s, \omega_p, \varepsilon_s, \varepsilon_p)} = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$R_N^2(\omega_p, \omega_s, \omega_p, \varepsilon_s, \varepsilon_p) = \operatorname{sn}^2(\xi_{\omega=\omega_p} + q\mathbf{K}_1, k_1) = 1 \quad \text{δηλαδή} \quad \operatorname{sn}(\xi_{\omega=\omega_p} + q\mathbf{K}_1, k_1) = \pm 1$$

Παρατηρώντας ότι $\operatorname{sn}[(2m+1)\mathbf{K}, k] = \pm 1$ θα έχουμε

$$\xi_{\omega=\omega_p} + q\mathbf{K}_1 = (2m+1)\mathbf{K}_1 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \kappa \operatorname{sn}^{-1}\left(\frac{\omega_p}{\omega_s}, \frac{\omega_p}{\omega_s}\right) = (2m+1-q)\mathbf{K}_1$$

και τελικά

$$\kappa = \frac{2m+1-q}{\operatorname{sn}^{-1}[1, (\omega_p/\omega_s)]} \mathbf{K}_1 = \frac{2m+1-q}{\operatorname{sn}^{-1}(1, k_2)} \mathbf{K}_1 = (2m+1-q) \frac{\mathbf{K}_1}{\mathbf{K}_2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα (Προσέγγιση Causer) - Η ελάχιστη τάξη φίλτρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στη θέση της **συχρότητας αποκοπής** $\omega = \omega_s$, η **απόκριση πλάτους** θα έχει τη μορφή

$$| \mathcal{H}(j\omega_s) | = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2 \operatorname{sn}^2 \left[\kappa \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + q \mathbf{K}_1, \varepsilon_p \varepsilon_s \right]}} = \frac{1}{A_s} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon_s^2}}}$$

Από τη σύγκριση των παραστάσεων στα υπόρριζα του παρονομαστή προκύπτει

$$\operatorname{sn} \left[\kappa \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + q \mathbf{K}_1, \varepsilon_p \varepsilon_s \right] = \frac{1}{\varepsilon_s \varepsilon_p} = \frac{1}{k_1}$$

και μετά από απλές πράξεις,

$$\kappa = (2m + 1 - q) \frac{\mathbf{K}_1}{\mathbf{K}_2} = \frac{\mathbf{K}'_1}{\mathbf{K}'_2} = N \frac{\mathbf{K}_1}{\mathbf{K}_2}$$

όπου $N = 2m + 1 - q$. Επομένως, η **ελάχιστη τάξη φίλτρου** που αντιστοιχεί στις τιμές των τεσσάρων παραπάνω παραμέτρων που έχουν δοθεί, υπολογίζεται ως

$$N = \frac{\mathbf{K}_2}{\mathbf{K}_1} \frac{\mathbf{K}'_1}{\mathbf{K}'_2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα (Προσέγγιση Cauer) - Η ελάχιστη τάξη φίλτρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εναλλακτικά, η **ελάχιστη τάξη** του φίλτρου N υπολογίζεται ως εξής:

Ξεκινώντας από τη διατύπωση της συνάρτησης του **ελλειπτικού ημίτονου του Jacobi** με τη βοήθεια των **συναρτήσεων $\vartheta(u, q)$**

$$\operatorname{sn}[u, k] = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1\left[\frac{u}{2K}, q(k)\right]}{\vartheta_4\left[\frac{u}{2K}, q(k)\right]} = \frac{2\sqrt[4]{q(k)}}{\sqrt{k}} \left\{ \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)}(k) \sin\left[(2n+1)\frac{\pi u}{2K}\right]}{1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}(k) \cos\left(2m\frac{\pi u}{2K}\right)} \right\}$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν πως για $u = K_1$ είναι $\operatorname{sn}(K_1, k_1) = 1$ καθώς και ότι

$$\sin\left[(2n+1)\frac{\pi u}{2K_1}\right]_{u=K_1} = \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = \cos\left(2n\frac{\pi u}{2K_1}\right)_{u=K_1} = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\frac{2\sqrt[4]{q(k_1)}}{\sqrt{k_1}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q_1^{n(n+1)}(k_1) \right\} / \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q_1^{n^2}(k_1) \right\} = 1$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα (Προσέγγιση Cauer) - Η ελάχιστη τάξη φίλτρου

Αυτή η έκφραση σε μία ισοδύναμη γραφή, διατυπώνεται ως

$$k_1 = 4\sqrt{q(k_1)} \times \left[\frac{\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)}(k_1) \right\}}{\left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(k_2) \right\}} \right]^2$$
$$= 4\sqrt{q(k_1)} \times \left[\frac{1 + q^2(k_1) + q^6(k_1) + q^{12}(k_1) + \dots}{1 + 2q(k_1) + 2q^4(k_1) + 2q^9(k_1) + \dots} \right]^2 \quad \text{όπου } q(k_1) = \exp(-\pi K'_1/K_1)$$

Καταφεύγοντας στις **απλοποιητικές παραδοχές** $k_1 \approx 0$ και $k'_1 \approx 1$ θα είναι $K'_1/K_1 \gg 1$ και $q(k_1) \ll 1$ από όπου προκύπτει ότι $k_1^2 \approx 4\sqrt{q(k_1)}$. Θα είναι λοιπόν,

$$k_1^2 \approx 16q(k_1) = 16 \exp(-\pi K'_1/K_1) = 16 \exp(-\pi N K'_2/K_2) = 16 [\exp(-\pi K'_2/K_2)]^N = 16q^N(k_2)$$

Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση στην εξίσωση

$$k_1 = \varepsilon_p \varepsilon_s = \sqrt{\frac{10^{A_p/10} - 1}{10^{A_s/10} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{D}} \quad \text{θα λάβουμε} \quad k_1^2 = \frac{10^{A_p/10} - 1}{10^{A_s/10} - 1} = \frac{1}{D} = 16q^N(k_2)$$

Επιλύοντας λοιπόν ως προς N καταλήγουμε στην έκφραση $N = \log(16D) / \log[1/q(k_2)]$
όπου $D = (10^{A_s/10} - 1) / (10^{A_p/10} - 1)$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα (Προσέγγιση Causer) - Συχνότητες μεγίστου και ελαχίστου

Οι τιμές συχνότητας στις οποίες η συνάρτηση $|\mathcal{H}(j\omega)|^2$ παρουσιάζει **μέγιστα**, είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\operatorname{sn} \left[\kappa \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + q\mathbf{K}_1, \varepsilon_p \varepsilon_s \right] = 0$$

Το αποτέλεσμα είναι

$$\omega_m^{\max} = \omega_p \operatorname{sn} \left[\frac{(2m - q)\mathbf{K}_2}{N}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right]$$

όπου $m = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)/2$ (N περιττό) και $m = 0, 1, 2, \dots, N/2$ (N άρτιο).

Οι τιμές συχνότητας που αντιστοιχούν στα **σημεία ελαχίστου**, είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\operatorname{sn}^2 \left[\kappa \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + q\mathbf{K}_1, \varepsilon_p \varepsilon_s \right] = 1 \quad \text{ή} \quad \operatorname{sn} \left[\kappa \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + q\mathbf{K}_1, \varepsilon_p \varepsilon_s \right] = \pm 1$$

Εργαζόμενοι όπως και πριν θα λάβουμε

$$\omega_m^{\min} = \omega_p \operatorname{sn} \left[\frac{(2m + 1 - q)\mathbf{K}_2}{N}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right]$$

όπου $m = 0, 1, 2, \dots, (N - 3)/2$ (N περιττό) και $m = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)/2$ (N άρτιο).

Αυτή η σχέση μας δίνει τις συχνότητες για τις οποίες **το τετράγωνο του μέτρου** της συνάρτησης απόκρισης συχνότητας **ελαχιστοποιείται** στη ζώνη διέλευσης.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα (Προσέγγιση Causer) - Συχνότητα αποκοπής & πόλοι της R_N

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **συχνότητας αποκοπής** αντιστοιχεί σε εξασθένηση $A_p = 3$ dB, ιδιότητα που σε μαθηματική γραφή διατυπώνεται ως

$$|\mathcal{H}(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathcal{H}(j\omega_c)|_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ή ισοδύναμα}$$
$$|\mathcal{H}(j\omega_c)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 \operatorname{sn}^2 \left[\kappa \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega_c}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + qK_1, \varepsilon_p \varepsilon_s \right]} = \frac{1}{2}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega_c}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) = \left[\frac{\operatorname{sn}^{-1}(1/\varepsilon_p, \varepsilon_p \varepsilon_s) - qK_1}{NK_1} \right] K_2$$

Για τιμή συχνότητας $z = \omega_c/\omega_p$, η συνάρτηση $\operatorname{sn}^{-1}(z, k_2)$ (όπου $k_2 = \omega_p/\omega_s$) είναι **μγαδική** με φανταστικό μέρος

$$\Im \left\{ \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega_c}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) \right\} = \Im \left\{ \left[\frac{\operatorname{sn}^{-1}(1/\varepsilon_p, \varepsilon_p \varepsilon_s)}{NK_1} \right] K_2 \right\}$$

το οποίο μηδενίζεται για $\omega_c = \omega_p$ (δηλαδή για $z = 1$). Το πραγματικό μέρος της συνάρτησης είναι ίσο με K_2 , και επομένως

$$\operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega_c}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) = K_2 + j \Im \left\{ \left[\frac{\operatorname{sn}^{-1}(1/\varepsilon_p, \varepsilon_p \varepsilon_s) - qK_1}{NK_1} \right] K_2 \right\}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα (Προσέγγιση Causer) - Συχνότητα αποκοπής & πόλοι της R_N

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Επιλύοντας ως προς τη **συχνότητα αποκοπής** ω_c καταλήγουμε στην έκφραση

$$\omega_c = \omega_p \operatorname{sn} \left\{ \mathbf{K}_2 + j\Im \left[\frac{\operatorname{sn}^{-1}(1/\varepsilon_p, \varepsilon_p \varepsilon_s) - q\mathbf{K}_1}{N\mathbf{K}_1} \right] \right\}$$

Για τον υπολογισμό των **πόλων** της συνάρτησης $R_N(\omega, \omega_s, \omega_p, \varepsilon_s, \varepsilon_p)$ λαμβάνουμε υπόψη πως η συνάρτηση του **ελλειπτικού ημίτονου** μηδενίζεται κάθε $2\mathbf{K}$. Θα είναι, λοιπόν, $\operatorname{sn}(2m\mathbf{K} + j\mathbf{K}', k) = \pm\infty$ και επομένως

$$k \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + q\mathbf{K}_1 = 2m\mathbf{K}_1 + j\mathbf{K}'_1$$

Θεωρώντας τώρα τη σχέση

$$\operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{1}{k_2}, k_2 \right) = \mathbf{K}_2 + j\mathbf{K}'_2$$

όπου $k_2 = \omega_p/\omega_s$, αυτή ικανοποιείται **επακριβώς** για τη συχνότητα $\omega_0 = \omega_s/\omega_p$, ενώ για συχνότητες $\omega > \omega_0$ η τιμή αυτής της αντίστροφης ελλειπτικής συνάρτησης θα είναι $x + j\mathbf{K}'_2$ όπου $x < \mathbf{K}_2$.

Επομένως, για συχνότητες $\omega > \omega_0$ θα είναι $k(x + j\mathbf{K}'_2) + q\mathbf{K}_1 = 2m\mathbf{K}_1 + j\mathbf{K}'_1$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα (Προσέγγιση Cauer) - Συχνότητα αποκοπής & πόλοι της R_N

Αντικαθιστώντας την τιμή του k και επιλύοντας ως προς x , προκύπτει ότι

$$x = \frac{(2m - q)K_2}{N} \quad \text{και κατά συνέπεια} \quad \operatorname{sn}^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s}\right) = \frac{(2m - q)K_2}{N} + jK'_2$$

Επιλύοντας, λοιπόν, ως προς ω θα λάβουμε

$$\omega_m^\infty = \omega_p \operatorname{sn}\left[\frac{(2m - q)K_2}{N} + jK'_2, \frac{\omega_p}{\omega_s}\right] = \frac{\omega_s}{\operatorname{sn}[(2m - q)K_2/N, \omega_p/\omega_s]} = \frac{\omega_p \omega_s}{\omega_m^{\max}}$$

Η παράμετρος m παίρνει τις τιμές $m = 1, 2, \dots, (N - 1)/2$ για **περιττή** τάξη φίλτρου και $m = 1, 2, \dots, N/2$ για **άρτια** τάξη φίλτρου. Τα **φίλτρα περιττής τάξης** διαθέτουν μία ακόμη τέτοια συχνότητα στη θέση $\omega = \infty$.

Παρατηρούμε πως οι πόλοι και οι μηδενικές τιμές της ελλειπτικής συνάρτησης του Jacobi σχετίζονται μεταξύ τους με σχέση **αντιστρόφου αναλογίας**.

Επομένως, εάν μπορούν να βρεθούν μηδενικές τιμές για τις οποίες η συνάρτηση R_N να χαρακτηρίζεται από **διακυμάνσεις ίσου πλάτους στη ζώνη διέλευσης**, τότε **αυτόματα** θα χαρακτηρίζεται και από **διακυμάνσεις ίσου πλάτους στη ζώνη αποκοπής**.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα (Προσέγγιση Causer) - Συχνότητα αποκοπής & πόλοι της R_N

Έχοντας υπολογίσει τους πόλους $\omega_p^m = \omega_m^\infty$ και τα μηδενικά $\omega_z^m = \omega_m^{\max}$ της ρητής συνάρτησης Chebyshev R_N , αυτή γράφεται ως

$$\begin{aligned} R_N &= D\omega^{1-q} \times \left\{ \prod_{m=1}^L [\omega^2 - (\omega_z^m)^2] \right\} / \left\{ \prod_{m=1}^L [\omega^2 - (\omega_p^m)^2] \right\} \\ &= D\omega^{1-q} \times \left\{ \prod_{m=1}^L [\omega^2 - (\omega_z^m)^2] \right\} / \left\{ \prod_{m=1}^L \left[\omega^2 - \frac{\omega_p^2 \omega_s^2}{(\omega_z^m)^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

όπου $L = N/2$ για άρτιο N και $L = (N - 1)/2$ για περιττό N και

$$D = \begin{cases} \prod_{m=1}^{N/2} \left(\frac{\omega_p^m}{\omega_z^m} \right)^2 = \prod_{m=1}^{N/2} \left[\frac{\omega_p^2 \omega_s^2}{(\omega_z^m)^4} \right] \\ \omega_p \left\{ \prod_{m=1}^{(N-1)/2} [\omega_s^2 - (\omega_z^m)^2] \right\} / \left\{ \prod_{m=1}^{(N-1)/2} (\omega_z^m)^2 [\omega_p^2 - (\omega_z^m)^2] \right\} \end{cases}$$

για άρτια και περιττή τάξη φίλτρου αντίστοιχα.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα (Προσέγγιση Cauer) - Πόλοι και μηδενικές τιμές της R_N

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στην πράξη οι πόλοι και οι μηδενικές τιμές της ελλειπτικής συνάρτησης δεν υπολογίζονται από τις παραπάνω σχέσεις αλλά από τις επόμενες εξισώσεις, στις οποίες η συνάρτηση του **ελλειπτικού ημίτονου** εκφράζεται με τη βοήθεια των συναρτήσεων $\vartheta_1(u, q)$, $\vartheta_4(u, q)$ και $q(k)$

$$\omega_z^m = \frac{2\omega_p^4 \sqrt{\exp(\alpha)}}{\sqrt{k}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n \left[\exp(\alpha) \right]^{n(n+1)} \sin \left[(2n+1)\pi \frac{2m-q}{2N} \right] \right\}}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \left[\exp(\alpha) \right]^{n^2} \cos \left[2n\pi \frac{2m-q}{2N} \right] \right\}}$$
$$\omega_p^m = \frac{2\omega_p^4 \sqrt{\exp(\alpha)}}{\sqrt{k}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n \left[\exp(\alpha) \right]^{n(n+1)} \sin \left[(2n+1)\pi \left(\frac{2m-q}{2N} + j \frac{K'_2}{2K_2} \right) \right] \right\}}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \left[\exp(\alpha) \right]^{n^2} \cos \left[2n\pi \left(\frac{2m-q}{2N} + j \frac{K'_2}{2K_2} \right) \right] \right\}}$$

όπου $\alpha = -\pi \frac{M(1, \sqrt{1-k^2})}{M(1, k)}$. Αυτές οι σχέσεις **δεν περιλαμβάνουν ελλειπτικές συναρτήσεις** και επιτρέπουν τον εύκολο υπολογισμό των πόλων και των ριζών της συνάρτησης R_N .

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Πόλοι και μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς

Η συνάρτηση $\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s)$ έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s) &= \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 R_N^2(s/j, \omega_s, \omega_p, \varepsilon_s, \varepsilon_p)} = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 D^2(-1)^{q+1} s^{2(1-q)} \left\{ \prod_{m=1}^L \frac{s^2 + (\omega_z^m)^2}{s^2 + (\omega_p^m)^2} \right\}} \\ &= \frac{\prod_{m=1}^L [s^2 + (\omega_p^m)^2]^2}{\prod_{m=1}^L [s^2 + (\omega_p^m)^2]^2 + \varepsilon_p^2 D^2(-1)^{q+1} s^{2(1-q)} \prod_{m=1}^L [s^2 + (\omega_p^z)^2]^2}\end{aligned}$$

Επομένως, οι **μηδενικές τιμές** της συνάρτησης μεταφοράς προσδιορίζονται ως οι ρίζες της **αλγεβρικής εξίσωσης** $s^2 + (\omega_p^m)^2 = 0$ από όπου προκύπτει αμέσως ότι

$$\begin{aligned}z_m &= \pm j \omega_p^m j \omega_p \operatorname{sn} \left[\frac{(2m - q)K_2}{N} + jK_2', \frac{\omega_p}{\omega_s} \right] \\ &= \pm j \omega_p \frac{\omega_s}{\omega_p \operatorname{sn} \left[\frac{(2m - q)K_2}{N}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right]} = \pm j \frac{\omega_s \omega_p}{\omega_z^m} = \pm \frac{j \omega_p}{\Omega_m}\end{aligned}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Πόλοι και μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στην παραπάνω σχέση, η παράμετρος Ω_m ορίζεται ως

$$\Omega_m = \frac{1}{\omega_s} \operatorname{sn} \left[\frac{(2m - q)K_2}{N}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right]$$

Αυτή η εξίσωση ισχύει για κάθε τιμή τάξης και για τις τιμές $q = 1$ και $q = 0$ αντίστοιχα.

Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$1 + \varepsilon_p^2 R_N^2(s/j, \omega_s, \omega_p, \varepsilon_s, \varepsilon_p) = 0$$

η οποία μπορεί να λάβει την ισοδύναμη μορφή

$$\operatorname{sn} \left[\kappa \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{s}{j\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + qK_1, \varepsilon_p \varepsilon_s \right] = \frac{j}{\varepsilon_p}$$

Παρατηρώντας πως η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$\operatorname{sn} \left[\kappa \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{s}{j\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + (q + 4m)K_1, \varepsilon_p \varepsilon_s \right] = \frac{j}{\varepsilon_p}$$

οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς δίδονται από τη σχέση

$$p_m = j\omega_p \operatorname{sn} \left[\frac{\operatorname{sn}(j/\varepsilon_p, \varepsilon_p \varepsilon_s) - (q + 4m)K_1}{k}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right], \quad m = 1, 2, \dots, N$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Πόλοι και μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Καταφεύγοντας στην προσέγγιση $k_1 = \varepsilon_p \varepsilon_s \approx 0$ και παρατηρώντας ότι $\operatorname{sn}(u, 0) = \sin u$ και $K_1(0) = \pi/2$, θα έχουμε

$$\kappa(k_1 = 0) = \frac{N}{K_2} K_1(0) = \frac{\pi N}{2K_2}$$

και η εξίσωση υπολογισμού των πόλων λαμβάνει την **προσεγγιστική μορφή**

$$\operatorname{sn} \left[\frac{\pi N}{2K_2} \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{s}{j\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + q \frac{\pi}{2}, 0 \right] = \sin \left[\frac{\pi N}{2K_2} \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{s}{j\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + q \frac{\pi}{2} \right] = \frac{j}{\varepsilon_p}$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

N περιπτώσεις Στην περίπτωση αυτή θα είναι $q = 0$ και η τελευταία σχέση γράφεται

$$\sin \left[\frac{\pi N}{2K_2} \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{s}{j\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) \right] = \frac{j}{\varepsilon_p}$$

ή ισοδύναμα

$$-j \sin \left[\frac{\pi N}{2K_2} \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{s}{j\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) \right] = \frac{1}{\varepsilon_p}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Πόλοι και μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς

Μετά απο πράξεις και επιλύοντας ως προς s καταλήγουμε στην έκφραση

$$\begin{aligned} s &= j\omega_p \operatorname{sn} \left[j \frac{K_2}{N\pi} \ln \frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right] \\ &= j\omega_p \sqrt{\frac{\omega_s}{\omega_p}} \frac{2 \sqrt[4]{q(k_2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)}(k_2) \sin \left[j(2n+1) \frac{K_2}{N\pi} \pi \ln \frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1} \right]}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}(k_2) \cos \left[2\pi n j \frac{K_2}{N\pi} \ln \frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1} \right]} = \\ &= -\sqrt{\omega_s \omega_p} \frac{2 \sqrt[4]{q(k_2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)}(k_2) \sinh \left[(2n+1) \frac{K_2}{N} \ln \frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1} \right]}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}(k_2) \cosh \left[2n \frac{K_2}{N} \ln \frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1} \right]} = p_0 \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες $\sin ju = j \sinh u$ και $\cos(ju) = \cosh u$.

Η παραπάνω τιμή της σταθεράς s είναι **πραγματικός αριθμός**

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Πόλοι και μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς

Για τον υπολογισμό των υπόλοιπων πόλων θα χρησιμοποιήσουμε την **ιδιότητα της περιοδικότητας** του ελλειπτικού ημίτονου $\operatorname{sn}(u + 4K, k) = \operatorname{sn}(u, k)$, από την οποία προκύπτει πως η **θεμελιώδης περίοδος** της συνάρτησης $\operatorname{sn}(\alpha u, k)$ είναι η $T = 4K/\alpha$.

Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned} \rho_m &= \sigma_m + j\omega_m = j\omega_p \operatorname{sn} \left(j \frac{K_2}{N\pi} \ln \frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1} + 4 \frac{K_2}{N} m, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) \\ &= j\omega_p (-1)^m \operatorname{sn} \left(j \frac{K_2}{N\pi} \ln \frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1} \pm 2 \frac{K_2}{N} m, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) \end{aligned}$$

Ορίζοντας τις εκφράσεις ($m = 1, 2, \dots, (N-1)/2$)

$$\Omega_m = \frac{1}{\omega_s} \operatorname{sn} \left[\frac{2K_2}{N} m, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right] = \frac{1}{\sqrt{\omega_s \omega_p}} \frac{2^4 \sqrt{q(k_2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)}(k_2) \sin \left[(2n+1) \frac{\pi m}{N} \right]}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}(k_2) \cos \left(\frac{2n\pi m}{N} \right)}$$

$$V_m = \sqrt{(1 - \omega_p^2 \Omega_m^2)(1 - \omega_s^2 \Omega_m^2)} \quad \text{και} \quad W = \sqrt{\left(1 + \frac{p_0^2}{\omega_p^2}\right) \left(1 + \frac{p_0^2}{\omega_s^2}\right)}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Πόλοι και μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς

η έκφραση των πόλων p_m λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} p_m = \sigma_m + j\omega_m &= j\omega_p(-1)^m \frac{(\rho_0/j\omega_p)V_m \pm \omega_s\Omega_m W}{1 + \rho_0^2\Omega_m^2} = \\ &= \frac{(-1)^m \rho_0 V_m \pm j\omega_p\omega_s(-1)^m\Omega_m W}{1 + \rho_0^2\Omega_m^2} = \frac{(-1)^m \rho_0 V_m \pm j\omega_p\omega_s\Omega_m W}{1 + \rho_0^2\Omega_m^2} \end{aligned}$$

($m = 1, 2, \dots, N/2$). Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς διαθέτει έναν **αρνητικό πραγματικό πόλο** στη θέση $s = \rho_0$ που συνεισφέρει στον παρονομαστή της τον όρο $s + \rho_0$ και $(N - 1)/2$ **ζεύγη συζυγών μιγαδικών πόλων** $p_m = \sigma_m + j\omega_m$ και $p_m^* = \sigma_m - j\omega_m$ το καθένα των οποίων συνεισφέρει στη συνάρτηση μεταφοράς τον όρο

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s - p_m)(s - p_m^*)} &= \frac{1}{s^2 - (p_m + p_m^*)s + p_m p_m^*} = \frac{1}{s^2 - 2\sigma_m s + \sigma_m^2 + \omega_m^2} \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{2\rho_0 V_m}{1 + \rho_0^2\Omega_m^2}s + \frac{(\rho_0 V_m)^2 + (\omega_p\omega_s\Omega_m W)^2}{(1 + \rho_0^2\Omega_m^2)^2}} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς διαθέτει επίσης **φανταστικές συζυγείς μηδενικές τιμές** στις θέσεις $z_m = \pm j\omega_p/\Omega_m$ ($m = 1, 2, \dots, (N - 1)/2$) με το κάθε ζεύγος να συνεισφέρει τον όρο

$$(s - z_m)(s - z_m^*) = \left(1 - \frac{j\omega_p}{\omega_m}\right) \left(1 + \frac{j\omega_p}{\omega_m}\right) = s^2 + \frac{\omega_p^2}{\Omega_m^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Πόλοι και μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, η συνάρτηση μεταφοράς του **χαμηλοπερατού ελλειπτικού φίλτρου περιττής τάξεως** διατυπώνεται ως

$$\mathcal{H}(s) = \frac{H_0}{s + \rho_0} \prod_{m=1}^{(N-1)/2} \left\{ \left[s^2 + \frac{\omega_p^2}{\Omega_m^2} \right] / \left[s^2 + \frac{2\rho_0 V_m}{1 + \rho_0^2 \Omega_m^2} s + \frac{(\rho_0 V_m)^2 + (\omega_p \omega_s \Omega_m W)^2}{(1 + \rho_0^2 \Omega_m^2)^2} \right] \right\}$$

Η **σταθερά** H_0 θα προκύψει από την απαίτηση $R_N(\omega, \omega_p, \omega_s, \varepsilon_p, \varepsilon_s) = 1$ για περιττό N , από όπου προκύπτει $\mathcal{H}(0) = 1$. Θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{H}(0) = \frac{H_0}{\rho_0} \prod_{m=1}^{(N-1)/2} \left\{ \frac{\frac{\omega_p^2}{\Omega_m^2}}{\frac{(\rho_0 V_m)^2 + (\omega_p \omega_s \Omega_m W)^2}{(1 + \rho_0^2 \Omega_m^2)^2}} \right\} = 1 \quad \text{και επομένως}$$
$$H_0 = \rho_0 \prod_{m=1}^{(N-1)/2} \left\{ \frac{(\rho_0 V_m)^2 + (\omega_p \omega_s \Omega_m W)^2}{(1 + \rho_0^2 \Omega_m^2)^2} \frac{\Omega_m^2}{\omega_p^2} \right\}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Πόλοι και μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

N άρτιο Στην περίπτωση αυτή, θα έχουμε $q = 1$ και επομένως θα είναι

$$\sin \left[\frac{\pi N}{2K_2} \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{s}{j\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{j}{\varepsilon_p}$$

Οι **πόλοι** της συνάρτησης μεταφοράς θα έχουν τώρα τη μορφή

$$p_m = \sigma_m + j\omega_m = j\omega_p (-1)^m \operatorname{sn} \left(j \frac{K_2}{N\pi} \ln \frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1} \pm \frac{2m-1}{N} K_2, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right)$$

Αναπτύσσοντας τη συνάρτηση του **ελλειπτικού ημίτονου** όπως πριν, τελικά βρίσκουμε

$$p_m = \pm(\sigma_m + j\omega_m) \quad \text{όπου} \quad \sigma_m + j\omega_m = \frac{\pm[p_0 V_m + j\omega_p \omega_s (-1)^m \Omega_m W]}{1 + p_0^2 \Omega_m^2}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους V_m και W και ορίζοντας την παράμετρο Ω_m ως

$$\Omega_m = \frac{1}{\omega_s} \operatorname{sn} \left[\frac{2m-1}{N} K_2, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right]$$

η συνάρτηση μεταφοράς για **φίλτρα άρτιας τάξης** θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(s) = H_0 \prod_{m=1}^{N/2} \left\{ \left[s^2 + \frac{\omega_p^2}{\Omega_m^2} \right] / \left[s^2 + \frac{2p_0 V_m}{1 + p_0^2 \Omega_m^2} s + \frac{(p_0 V_m)^2 + (\omega_p \omega_s \Omega_m W)^2}{(1 + p_0^2 \Omega_m^2)^2} \right] \right\}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Πόλοι και μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς

Η **σταθερά αναλογίας** H_0 προκύπτει από την απαίτηση να είναι $G(0) = 10^{-A_p/20}$.

Θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{H}(0) = H_0 \prod_{m=1}^{(N-1)/2} \left\{ \frac{\frac{\omega_p^2}{\Omega_m^2}}{\frac{(\rho_0 V_m)^2 + (\omega_p \omega_s \Omega_m W)^2}{(1 + \rho_0^2 \Omega_m^2)^2}} \right\} = 10^{-0.05A_p} \quad \text{και επομένως}$$
$$H_0 = 10^{-0.05A_p} \prod_{m=1}^{(N-1)/2} \left\{ \frac{(\rho_0 V_m)^2 + (\omega_p \omega_s \Omega_m W)^2}{\frac{\omega_p^2}{\Omega_m^2}} \right\}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, η **συχνότητα αποκοπής** και ο **παράγοντας ποιότητας**, αποδεικνύεται πως έχουν τη μορφή

$$\omega_c^m = \frac{\sqrt{(\rho_0 V_m)^2 + (\omega_p \omega_s \Omega_m W)^2}}{1 + \rho_0^2 \Omega_m^2} \quad \text{και} \quad Q_m = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_p \omega_s \Omega_m W}{\rho_0 V_m} \right)^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Επιλεκτικότητα και παράγοντας φασματικής απόδοσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Από την εξίσωση ορισμού της **επιλεκτικότητας**, αυτό το μέγεθος για ένα χαμηλοπερατό ελλειπτικό φίλτρο υπολογίζεται από την εξίσωση

$$F_s = \frac{j\varepsilon_p k \operatorname{cn} \left[\kappa \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega_c}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + qK_1, \varepsilon_p \varepsilon_s \right] \sqrt{1 - \varepsilon_p^2 \varepsilon_s^2 \operatorname{sn}^2 \left[\kappa \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega_c}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + qK_1, \varepsilon_p \varepsilon_s \right]}}{2\sqrt{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_s} \right)^2} \cosh^2 \left\{ \Im \left[\operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega_c}{\omega_p} \right) \right] \right\} \sqrt{\omega_c^2 - \omega_p^2}}$$

Για τον υπολογισμό του **παράγοντα φασματικής απόδοσης**, έστω επίπεδο εξασθένησης A το οποίο εκπεφρασμένο σε dB ορίζεται ως

$$A = 10 \log \left\{ 1 + \varepsilon_p^2 \operatorname{sn}^2 \left[\kappa \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + qK_1, \varepsilon_p \varepsilon_s \right] \right\}$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις $\varepsilon_p = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$ και $k = NK_1/K_2$, διαπιστώνουμε ότι

$$\omega = \omega_p \operatorname{sn} \frac{\left[\operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\sqrt{10^{A/10} - 1}}{\sqrt{10^{A_p/10} - 1}}, \varepsilon_p \varepsilon_s \right) - qK_1 \right] K_2}{NK_1}, \frac{\omega_p}{\omega_s}$$

Θεωρώντας πως η παραπάνω σχέση μας δίνει το εύρος ζώνης BW, ο **παράγοντας φασματικής απόδοσης** θα υπολογιστεί ως $S_\alpha^\beta = BW_\beta/BW_\alpha$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Χαρακτηριστική απωλειών και φυσικά χαρακτηριστικά

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η χαρακτηριστική απωλειών ενός **χαμηλοπερατού ελλειπτικού φίλτρου** έχει τη μορφή

$$A(\omega) = 10 \log \left[1 + \varepsilon_p^2 R_N^2(s/j, \omega_s, \omega_p, \varepsilon_s, \varepsilon_p) \right] = 10 \log \left\{ 1 + \varepsilon_p^2 \operatorname{sn}^2 \left[\operatorname{ksn}^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_p}, \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) + q\mathbf{K}_1, \varepsilon_p \varepsilon_s \right] \right\}$$

Η **φασική απόκριση** του πρωτότυπου χαμηλοπερατού ελλειπτικού φίλτρου για συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 1$, τιμές παραμέτρων $A_p = 1$ dB, $A_s = 30$ dB και τιμές τάξης $N = 1$ έως 10 παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.

Η εξίσωση ορισμού αυτού του μεγέθους καθώς και οι εξισώσεις υπολογισμού της **υστέρησης φάσης** και της **υστέρησης ομάδας** προκύπτουν από τις γενικές εξισώσεις για τιμές $\alpha_0 = \rho_0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\alpha_{2k} = \beta_{2k} = 1$, $\beta_{1k} = 0$ και

$$\beta_{0k} = \frac{\omega_p^2}{\Omega_k^2}, \quad \alpha_{0k} = \frac{(\rho_0 V_k)^2 + (\omega_p \omega_s \Omega_k W)^2}{(1 + \rho_0^2 \Omega_k^2)}, \quad \alpha_{1k} = \frac{2\rho_0 V_k}{1 + \rho_0^2 \Omega_k^2}$$

Η **φασική απόκριση** των ελλειπτικών χαμηλοπερατών φίλτρων θα έχει λοιπόν τη μορφή

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = - \sum_{k=1}^{N/2} \frac{2\rho_0 V_k (1 + \rho_0^2 \Omega_k^2) \omega}{(\rho_0 V_k)^2 + (\omega_p \omega_s \Omega_k W)^2 - (1 + \rho_0^2 \Omega_k^2) \omega^2} \quad (\text{N άρτιο})$$

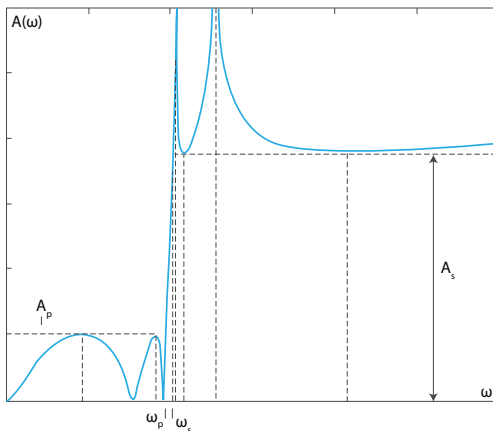
$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\rho_0} \right) - \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{2\rho_0 V_k (1 + \rho_0^2 \Omega_k^2) \omega}{(\rho_0 V_k)^2 + (\omega_p \omega_s \Omega_k W)^2 - (1 + \rho_0^2 \Omega_k^2) \omega^2} \quad (\text{N περιττό})$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Χαρακτηριστική απωλειών και φυσικά χαρακτηριστικά

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



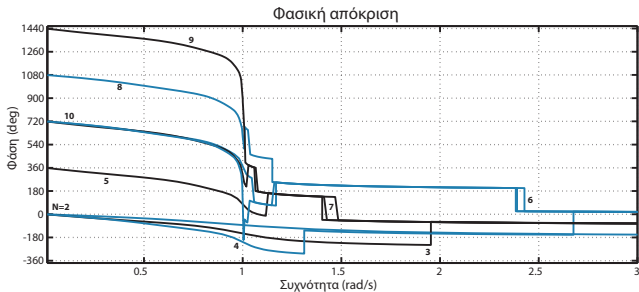
Σχήμα: Χαρακτηριστική απωλειών για ελλειπτικό χαμηλοπερατό φίλτρο 5ης τάξεως.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Χαρακτηριστική απωλειών και φασικά χαρακτηριστικά

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Η φασική απόκριση του **πρωτότυπου χαμηλοπερατού ελλειπτικού φίλτρου** για **συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 1$** , τιμές $A_p = 1$ dB, $A_s = 30$ dB και τάξεις $N = 1 - 10$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Χαρακτηριστική απωλειών και φυσικά χαρακτηριστικά

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οι αντίστοιχες εκφράσεις για την **υστέρηση ομάδας** διατυπώνονται ως

$$\tau(\omega) = \sum_{k=1}^{N/2} \frac{2\rho_0 V_k}{1 + \rho_0^2 \Omega_k^2} \frac{\left[\frac{(\rho_0 V_k)^2 + (\omega_p \omega_s \Omega_k W)^2}{(1 + \rho_0^2 \Omega_k^2)^2} + \omega^2 \right]}{\left[\frac{(\rho_0 V_k)^2 + (\omega_p \omega_s \Omega_k W)^2}{(1 + \rho_0^2 \Omega_k^2)^2} - \omega^2 \right]^2}$$

για **άρτια** τάξη φίλτρου και

$$\tau(\omega) = \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{2\rho_0 V_k}{1 + \rho_0^2 \Omega_k^2} \frac{\left[\frac{(\rho_0 V_k)^2 + (\omega_p \omega_s \Omega_k W)^2}{(1 + \rho_0^2 \Omega_k^2)^2} + \omega^2 \right]}{\left[\frac{(\rho_0 V_k)^2 + (\omega_p \omega_s \Omega_k W)^2}{(1 + \rho_0^2 \Omega_k^2)^2} - \omega^2 \right]^2} + \frac{\rho_0}{\rho_0^2 + \omega^2}$$

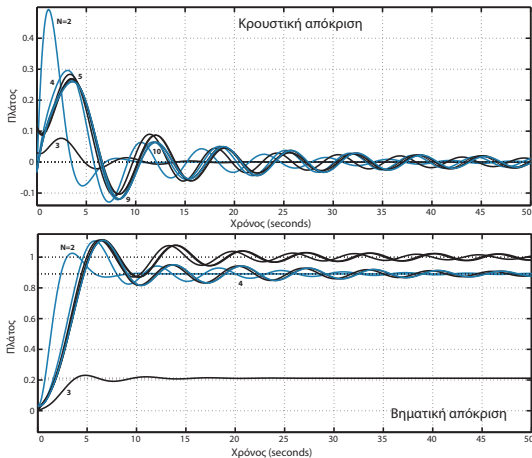
για **περιττή** τάξη φίλτρου.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Κρουστική και βηματική απόκριση

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Κρουστική και βηματική απόκριση χαμηλοπερατού ελλειπτικού φίλτρου για συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 1$, τιμές $A_p = 1$ dB, $A_s = 30$ dB και τάξεις $N = 1 - 10$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Τα βήματα της διαδικασίας σχεδίασης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Προσδιορίζουμε τις τιμές της **μέγιστης εξασθένησης στη ζώνη διέλευσης** A_p , της **ελάχιστης εξασθένησης στη ζώνη αποκοπής** A_s καθώς και των **συχνοτήτων διέλευσης και αποκοπής** ω_p και ω_s .

Υπολογίζουμε το **ελλειπτικό μέτρο**

$$k_1 = \varepsilon_p \varepsilon_s = \sqrt{\frac{10^{A_p/10} - 1}{10^{A_s/10} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{D}} \quad \text{όπου} \quad D = \frac{10^{A_s/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1}$$

Υπολογίζουμε το **ελλειπτικό μέτρο** $k_2 = \omega_p/\omega_s$ που εκφράζει την **παράμετρο επιλεκτικότητας** του φίλτρου.

Υπολογίζουμε τα **συμπληρωματικά ελλειπτικά μέτρα** $k'_1 = \sqrt{1 - k_1^2}$ και $k'_2 = \sqrt{1 - k_2^2}$ και τα **ελλειπτικά ολοκληρώματα** K_1 , K'_1 , K_2 και K'_2 με τη βοήθεια του **αριθμητικού γεωμετρικού μέσου**.

Υπολογίζουμε την **ελάχιστη τάξη φίλτρου** από τη σχέση

$$N = \frac{\log(16D)}{\log(1/q(k_2))} \quad \text{ή εναλλακτικά από τη σχέση} \quad N = \frac{K'_1 K_2}{K_1 K'_2}$$

και στρογγυλοποιούμε το αποτέλεσμα στον **αμέσως μεγαλύτερο** ακέραιο.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Τα βήματα της διαδικασίας σχεδίασης

Υπολογίζουμε τις **παραμέτρους**

$$\rho_0 = -\sqrt{\omega_s \omega_p} \frac{2 \sqrt{q(k_2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)}(k_2) \sinh \left[(2n+1) \frac{K_2}{N} \ln \frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1} \right]}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}(k_2) \cosh \left[2n \frac{K_2}{N} \ln \frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1} \right]}$$

$$W = \sqrt{\left(1 + \frac{\rho_0^2}{\omega_p^2}\right) \left(1 + \frac{\rho_0^2}{\omega_s^2}\right)}$$

Υπολογίζουμε τις **παραμέτρους**

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\omega_s \omega_p}} \frac{2 \sqrt{q(k_2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)}(k_2) \sin \left[(2n+1) \frac{\pi \mu}{N} \right]}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}(k_2) \cos \left(\frac{2n\pi \mu}{N} \right)}$$

για τις τιμές

$$\mu = \begin{cases} m & N \text{ περιττό} \\ m - (1/2) & N \text{ άρτιο} \end{cases} \quad \text{όπου} \quad m = \begin{cases} 1, 2, \dots, (N-1)/2 & N \text{ περιττό} \\ 1, 2, \dots, (N/2) & N \text{ άρτιο} \end{cases}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Ελλειπτικά φίλτρα - Τα βήματα της διαδικασίας σχεδίασης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Για τις παραπάνω τιμές του m υπολογίζουμε την τιμή των παραμέτρων

$$V_m = \sqrt{(1 - \omega_p^2 \Omega_m^2)(1 - \omega_s^2 \Omega_m^2)}, \quad \alpha_m = \frac{\omega_p^2}{\Omega_m^2}, \quad \beta_m = \frac{2\sigma_0 V_m}{1 + \sigma_0^2 \Omega_m^2}, \quad \gamma_m = \frac{(\rho_0 V_m)^2 + (\Omega_m W)^2}{(1 + \rho_0^2 \Omega_m^2)^2}$$

Υπολογίζουμε τη **συνάρτηση μεταφοράς** του φίλτρου ως

$$\mathcal{H}(s) = \frac{H_0}{D(s)} \prod_{m=1}^L \frac{s^2 + \alpha_m}{s^2 + \beta_m s + \gamma_m}, \quad L = \begin{cases} (N-1)/2 & N \text{ περιττό} \\ N/2 & N \text{ άρτιο} \end{cases}$$
$$D(s) = \begin{cases} s + \rho_0 & N \text{ περιττό} \\ 1 & N \text{ άρτιο} \end{cases}, \quad H_0 = \begin{cases} \rho_0 \prod_{m=1}^L \frac{\gamma_m}{\alpha_m} & N \text{ περιττό} \\ 10^{-A_p/20} \prod_{m=1}^L \frac{\gamma_m}{\alpha_m} & N \text{ άρτιο} \end{cases}$$

Διατυπώνουμε τη συνάρτηση μεταφοράς στην **αναπαράσταση πλάτους / φάσης** και κατασκευάζουμε τα διαγράμματα για την **απόκριση πλάτους** και την **απόκριση φάσης**.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Bessel-Thomson

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **προσέγγιση Bessel-Thomson** επινοήθηκε από τον Kiyasu το 1943 και από τον Thomson το 1952 και επιτρέπει την κατασκευή φίλτρων με **γραμμική φάση** και **μέγιστη επίπεδη συμπεριφορά της υστέρησης ομάδας στη θέση $\omega = 0$** , που διασφαλίζει πως όλες οι συχνότητες του σήματος που διέρχονται από το φίλτρο υφίστανται την ίδια υστέρηση.

Τα **φίλτρα Bessel-Thomson** διαθέτουν **μόνο** πόλους που χαρακτηρίζονται από **πολύ μικρή** τιμή του παράγοντα ποιότητας Q , χαρακτηριστικό, που σε συνδυασμό με την προηγούμενη ιδιότητα, οδηγεί στην **ελαχιστοποίηση της υπερύψωσης** που γενικά χαρακτηρίζει τη μεταβατική βηματική απόκριση των φίλτρων.

Σε αντίθεση με τις προηγούμενες προσεγγίσεις που στηρίζονται στην κατασκευή μιας **απόκρισης πλάτους** με τα επιθυμητά σε κάθε περίπτωση χαρακτηριστικά, τα φίλτρα τύπου Bessel σχεδιάζονται έτσι ώστε να προσφέρουν μία **σταθερή χρονική υστέρηση** για κάποια συγκεκριμένη περιοχή συχνοτήτων.

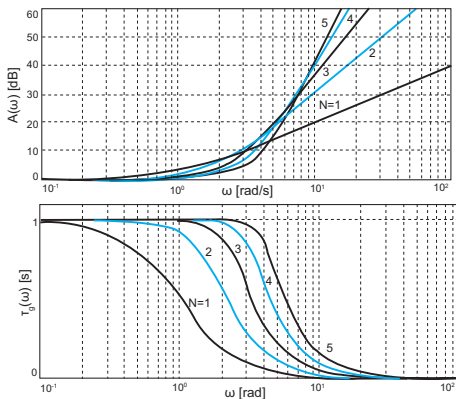
Υπό αυτή την έννοια, ένα φίλτρο Bessel μπορεί να θεωρηθεί ως ένα κύκλωμα που προκαλεί **χρονική υστέρηση**, αν και στην πραγματικότητα αυτά συμπεριφέρονται ως **χαμηλοπερατά φίλτρα**, η ζώνη διέλευσης των οποίων επιλέγεται σύμφωνα με το εύρος ζώνης του σήματος εισόδου.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Bessel-Thomson

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Η μεταβολή της **εξασθένισης** και της **υστέρησης ομάδας** σε συνάρτηση με τη συχνότητα για ένα φίλτρο Bessel-Thomson.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Bessel-Thomson - Συνάρτηση μεταφοράς και συχνοτική απόκριση

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **συνάρτηση μεταφοράς** των φίλτρων Bessel-Thomson κατασκευάζεται έτσι ώστε στο όριο της $N \rightarrow \infty$ να **προσεγγίζει** τη συνάρτηση μεταφοράς του ιδανικού φίλτρου.

Αυτή η συνάρτηση έχει τη μορφή $\mathcal{H}(j\omega) = Ge^{-j\tau_d\omega}$ όπου $|\mathcal{H}(j\omega)| = G$ το **σταθερό κέρδος** του φίλτρου που μπορεί να είναι ίσο με τη μονάδα και $\angle\mathcal{H}(j\omega) = -\tau_d\omega$ η **γραμμική φασική απόκριση** η οποία οδηγεί σε σταθερή **υστέρηση ομάδας** $\tau(\omega) = -\angle\mathcal{H}'(j\omega) = \tau_d$.

Για να κατασκευάσουμε αυτή τη συνάρτηση, έστω πως αυτή έχει τη γενική μορφή

$$\mathcal{H}(s) = 1 / \left\{ \sum_{k=0}^N \alpha_k s^k \right\} = \frac{1}{1 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots + \alpha_N s^N}$$

Θέτοντας $s = j\omega$, κατασκευάζουμε τη **συνάρτηση απόκρισης συχνότητας**

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{1}{\sum_{k \text{ άρτιο}} \alpha_k (-1)^{\frac{k}{2}} \omega^k + j \sum_{k \text{ περιττό}} \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^k}$$

που οδηγεί σε **φασική απόκριση**

$$\angle\mathcal{H}(j\omega) = -\tan^{-1} \left\{ \left[\sum_{k \text{ περιττό}} \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^k \right] / \left[\sum_{k \text{ άρτιο}} \alpha_k (-1)^{\frac{k}{2}} \omega^k \right] \right\} = -\tan^{-1} \frac{\xi(\omega)}{\zeta(\omega)}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Bessel-Thomson - Συνάρτηση μεταφοράς και συχνοτική απόκριση

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

και σε **υστέρηση ομάδας**

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \left\{ \angle \mathcal{H}(j\omega) \right\} = \frac{d}{d\omega} \left\{ \tan^{-1} \frac{\xi(\omega)}{\zeta(\omega)} \right\} = \frac{1}{\xi^2(\omega) + \zeta^2(\omega)} \left[\frac{d\xi(\omega)}{d\omega} - \xi(\omega) \frac{d\zeta(\omega)}{d\omega} \right]$$

$$\text{όπου } \xi(\omega) = \sum_{k \text{ περιττό}}^N \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^k, \quad \frac{d\xi(\omega)}{d\omega} = \sum_{k \text{ περιττό}}^N k \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^{k-1}$$

$$\zeta(\omega) = \sum_{k \text{ άρτιο}}^N \alpha_k (-1)^{\frac{k}{2}} \omega^k, \quad \frac{d\zeta(\omega)}{d\omega} = \sum_{k \text{ άρτιο}}^N k \alpha_k (-1)^{\frac{k}{2}} \omega^{k-1}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ορισμού της **υστέρησης ομάδας**, θα λάβουμε

$$\tau(\omega) = \frac{\sum_{k \text{ περιττό}}^N k \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^{k-1} \sum_{m \text{ άρτιο}}^N \alpha_m (-1)^{\frac{m}{2}} \omega^m - \sum_{k \text{ περιττό}}^N \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^k \sum_{m \text{ άρτιο}}^N m \alpha_m (-1)^{\frac{m}{2}} \omega^{m-1}}{\left(\sum_{k \text{ περιττό}}^N \alpha_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega^k \right)^2 + \left(\sum_{k \text{ άρτιο}}^N \alpha_k (-1)^{\frac{k}{2}} \omega^k \right)^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Bessel-Thomson - Συνάρτηση μεταφοράς και συχνοτική απόκριση

Αναπτύσσοντας τα αθροίσματα και **εξισώνοντας** τον αριθμητή με τον παρονομαστή έτσι ώστε για $\alpha_1 = 1$ να είναι $\tau(0) = 1$, καταλήγουμε τελικά στην **αναδρομική** έκφραση

$$\alpha_k = \frac{(k+1)(k+2)\dots(2N-k)}{2^{N-k}k!(N-k)!} = \frac{(2N-k)!}{2^{N-k}k!(N-k)!}$$

Επομένως, η **συνάρτηση μεταφοράς** λαμβάνει τη μορφή

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\beta_0}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k} = \frac{\beta_0}{\sum_{k=0}^N \frac{(2N-k)!}{2^{N-k}k!(N-k)!} s^k} = \frac{\beta_0}{s^N B_N\left(\frac{1}{s}\right)}$$

όπου $B_N(s)$ τα **πολυώνυμα Bessel** τα οποία ορίζονται ως

$$B_N(s) = \sum_{k=0}^N \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!} \left(\frac{s}{2}\right)^k = 1 + N(N+1)\frac{s}{2} + \dots + \frac{(2N-1)!}{(N-1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{N-1} + \frac{(2N)!}{N!} \left(\frac{s}{2}\right)^N$$

Αυτά τα πολυώνυμα σχετίζονται με τις **συναρτήσεις Bessel** διά μέσου της σχέσεως

$$B_N\left(\frac{1}{ir}\right) = \frac{1}{j^N} \sqrt{\frac{\pi r}{2}} \times \left[(-1)^N J_{-N-\frac{1}{2}}(r) - j J_{N+\frac{1}{2}}(r) \right] e^{ir}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Bessel-Thomson - Συνάρτηση μεταφοράς και συχνοτική απόκριση

με την τελευταία ομάδα συναρτήσεων να περιγράφεται από την εξίσωση

$$J_{N+\frac{1}{2}}(r) = r^{N+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{2k}}{2^{2k+N+\frac{1}{2}} k! \Gamma\left(N+k+\frac{3}{2}\right)} \quad \text{όπου} \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

η **συνάρτηση Γ**. Θέτοντας $s = j\omega$, προκύπτει η **συχνοτική απόκριση** των φίλτρων Bessel

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(j\omega) &= \frac{\beta_0}{(j\omega)^n B\left(\frac{1}{j\omega}\right)} = \frac{\beta_0 \sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \omega^{N+\frac{1}{2}} \left[(-1)^N J_{-N-\frac{1}{2}}(\omega) - j J_{N+\frac{1}{2}}(\omega) \right]} e^{-i\omega} \\ &= \beta_0 \sqrt{\frac{2}{\pi \omega^{2N+1}}} \frac{(-1)^N J_{-N-\frac{1}{2}}(\omega) + j J_{N+\frac{1}{2}}(\omega)}{J_{-N-\frac{1}{2}}^2(\omega) + J_{N+\frac{1}{2}}^2(\omega)} e^{-i\omega} \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα, μετά από απλές μαθηματικές πράξεις,

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{\beta_0 \sqrt{\frac{2}{\pi \omega^{2N+1}}}}{\sqrt{J_{-N-\frac{1}{2}}^2(\omega) + J_{N+\frac{1}{2}}^2(\omega)}} \exp \left[j \left(-\omega + \tan^{-1} \frac{(-1)^N J_{N+\frac{1}{2}}(\omega)}{J_{-N-\frac{1}{2}}(\omega)} \right) \right]$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Bessel-Thomson - Συνάρτηση μεταφοράς και συχνοτική απόκριση

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Επομένως, το **πλάτος** και η **φάση** της συχνοτικής απόκρισης των **φίλτρων Bessel** είναι

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = \frac{\beta_0 \sqrt{\frac{2}{\pi\omega^{2N+1}}}}{\sqrt{J_{-N-\frac{1}{2}}^2(\omega) + J_{N+\frac{1}{2}}^2(\omega)}} \quad \text{και} \quad \angle\mathcal{H}(j\omega) = -\omega + \tan^{-1} \frac{(-1)^N J_{N+\frac{1}{2}}(\omega)}{J_{-N-\frac{1}{2}}(\omega)}$$

Η **υστέρηση ομάδας** του φίλτρου Bessel θα προκύψει ως η **αρνητική παράγωγος της φασικής απόκρισης**. Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση θα λάβουμε

$$\tau(\omega) = -\frac{d\angle\mathcal{H}(j\omega)}{d\omega} = 1 - \frac{(-1)^N \left[\frac{dJ_{N+\frac{1}{2}}(\omega)}{d\omega} J_{-N-\frac{1}{2}}(\omega) - J_{N+\frac{1}{2}}(\omega) \frac{dJ_{-N-\frac{1}{2}}(\omega)}{d\omega} \right]}{J_{-N-\frac{1}{2}}^2(\omega) + J_{N+\frac{1}{2}}^2(\omega)}$$

Αλλά η παράσταση εντός των αγκυλών στον αριθμητή είναι η **οριζούσα Wronski** των συναρτήσεων $J_{-N-\frac{1}{2}}(\omega)$ και $J_{N+\frac{1}{2}}(\omega)$ που ορίζεται ως

$$J_{-m}(\omega) \frac{dJ_m(\omega)}{d\omega} - J_m(\omega) \frac{dJ_{-m}(\omega)}{d\omega} = \frac{2 \sin(m\pi)}{\pi\omega}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Bessel-Thomson - Συνάρτηση μεταφοράς και συχνοτική απόκριση

Η παραπάνω σχέση για $m = N + \frac{1}{2}$ λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{dJ_{N+\frac{1}{2}}(\omega)}{d\omega} J_{-N-\frac{1}{2}}(\omega) - J_{N+\frac{1}{2}}(\omega) \frac{dJ_{-N-\frac{1}{2}}(\omega)}{d\omega} = \frac{2}{\pi\omega} \sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \pi \right] = \frac{2}{\pi\omega} (-1)^N$$

ή ισοδύναμα

$$(-1)^N \left[\frac{dJ_{N+\frac{1}{2}}(\omega)}{d\omega} J_{-N-\frac{1}{2}}(\omega) - J_{N+\frac{1}{2}}(\omega) \frac{dJ_{-N-\frac{1}{2}}(\omega)}{d\omega} \right] = \frac{2}{\pi\omega}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της **υστέρησης ομάδας**, οδηγούμαστε στο ζητούμενο αποτέλεσμα που έχει τη μορφή

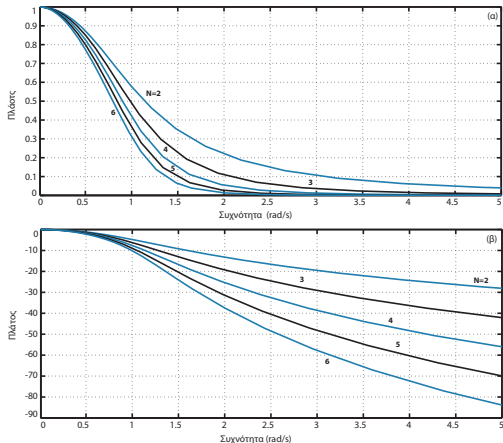
$$\begin{aligned} \tau(\omega) &= 1 - \frac{2}{\pi\omega} \frac{1}{J_{-N-\frac{1}{2}}^2(\omega) + J_{N+\frac{1}{2}}^2(\omega)} \\ &= 1 - \frac{\omega^{2N}}{\beta_0^2} \frac{2\beta_0^2}{\pi\omega^{2N+1} \left[J_{-N-\frac{1}{2}}^2(\omega) + J_{N+\frac{1}{2}}^2(\omega) \right]} = 1 - \frac{\omega^{2N}}{\beta_0^2} |Hj\omega|^2 \end{aligned}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Bessel-Thomson - Απόκριση πλάτους

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



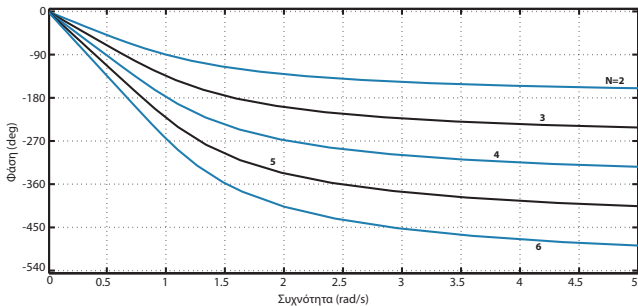
Σχήμα: Η απόκριση πλάτους του πρωτότυπου φίλτρου Bessel για τιμές $N = 2, 3, 4, 5, 6$ σχεδιασμένη στη γραμμική και στη λογαριθμική κλίμακα.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Bessel-Thomson - Φασική απόκριση

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Η φασική απόκριση του **πρωτότυπου φίλτρου Bessel** για τιμές $N = 1$ έως 6.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Bessel-Thomson - Πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οι **μηδενικές τιμές** της παράστασης $s^N B(1/s)$ βρίσκονται όλες στο **αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο**, γεγονός που διασφαλίζει την **ευστάθεια** των φίλτρων Bessel αφού αυτές ταυτίζονται με τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς του.

Σε αντίθεση με τους προηγούμενους τύπους φίλτρων, για τα **φίλτρα Bessel** είναι **δύσκολο** να βρεθούν εξισώσεις υπολογισμού των πόλων σε **κλειστή** μορφή και για το λόγο αυτό αυτοί υπολογίζονται με τη βοήθεια εφαρμογών λογισμικού.

Αποδεικνύεται πως για την περίπτωση της **κανονικοποιημένης υστέρησης ομάδας** οι πόλοι των φίλτρων Bessel κείνται επί της περιφέρειας του **μοναδιαίου κύκλου**· ωστόσο, **δεν απέχουν** ίσες γωνιακές αποστάσεις μεταξύ τους, αλλά οι τεταγμένες τους ισαπέχουν κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα.

Η **χαρακτηριστική απωλειών** των φίλτρων Bessel θα προκύψει από τη σχέση

$$A(\omega) = 10 \log L(\omega^2) = 10 \log \left. \frac{1}{\mathcal{H}'(s)\mathcal{H}'(-s)} \right|_{s=j\omega} = 10 \log [\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s)]_{s=j\omega}$$

ή μετά από πράξεις

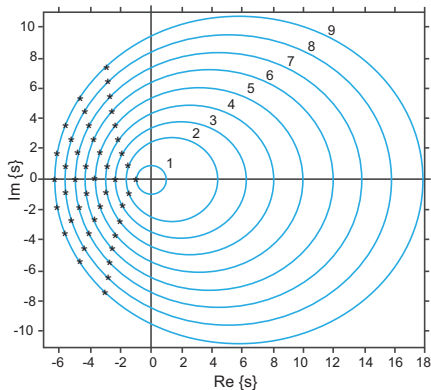
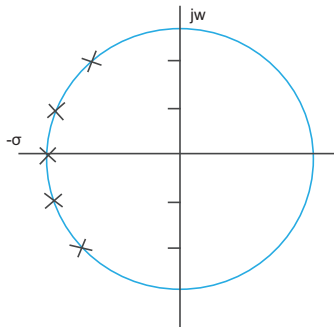
$$A(\omega) = 10 \log \left[\alpha_0^2 \exp\left(\frac{\omega^2}{2N-1}\right) \right] = 20 \log \alpha_0 + 10 \log \left[\exp\left(\frac{\omega^2}{2N-1}\right) \right] = 20 \log \alpha_0 + \frac{10 \log e}{2N-1} \omega^2$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Bessel-Thomson - Πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



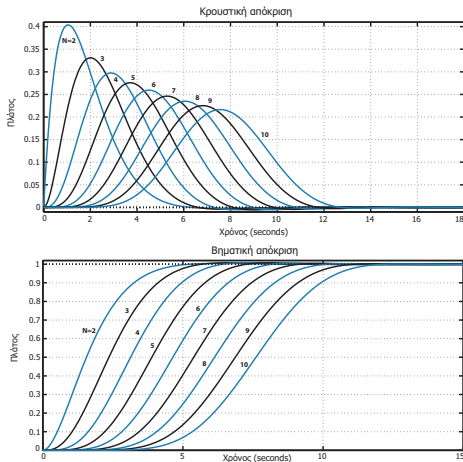
Σχήμα: Πόλοι φίλτρου Bessel για την κανονικοποιημένη και μη κανονικοποιημένη περίπτωση. Τα φίλτρα **άρτιας** τάξης διαθέτουν $N/2$ ζεύγη **συζυγών μιγαδικών** πόλων ενώ τα φίλτρα **περιττής** τάξης έναν **πραγματικό αρνητικό** πόλο και $(N - 1)/2$ ζεύγη **συζυγών μιγαδικών** πόλων.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Προσέγγιση Bessel-Thomson - Κρουστική και βηματική απόκριση

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Η **κρουστική** και η **βηματική** απόκριση του πρωτότυπου φίλτρου Bessel για τάξεις φίλτρου $N = 1$ έως 10.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Σύγκριση των προσεγγίσεων ιδανικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τα φίλτρα Butterworth είναι τα πιο απλά από όλα αφού προσφέρουν επίπεδη συμπεριφορά στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής.

Η τάξη των φίλτρων Chebyshev I **δεν θα είναι ποτέ μεγαλύτερη** από την τάξη του φίλτρου Butterworth για τις ίδιες προδιαγραφές, ενώ για όλες τις πρακτικές τιμές του εύρους διακύμανσης ϵ , ο **παράγοντας φασματικής απόδοσης** είναι πάντα **μικρότερος** από αυτόν του φίλτρου Butterworth για την ίδια τάξη φίλτρου.

Ωστόσο, η τιμή της **επιλεκτικότητας** είναι **μεγαλύτερη** στα φίλτρα Chebyshev I.

Η **κρουστική** και η **βηματική** απόκριση των φίλτρων Butterworth είναι **πιο καλή** σε σχέση με αυτή των φίλτρων Chebyshev I αφού η τελευταία παρουσιάζει **διακυμάνσεις** που ελαττώνονται με πιο αργό ρυθμό σε σχέση με τις αντίστοιχες αποκρίσεις των φίλτρων Butterworth.

Η **ελάχιστη τάξη** των φίλτρων Chebyshev II για συγκεκριμένες προδιαγραφές λειτουργίας, είναι **η ίδια** με εκείνη των φίλτρων Chebyshev I η οποία **δεν θα είναι ποτέ** μεγαλύτερη από την τάξη των φίλτρων Butterworth για τις ίδιες προδιαγραφές.

Τα φίλτρα Butterworth προσφέρουν φασική απόκριση με **μεγαλύτερο βαθμό γραμμικότητας**, χωρίς όμως τη διαφορά ανάμεσα στις διάφορες αποκρίσεις να είναι ιδιαίτερα σημαντική.

Για το **ίδιο** σύνολο προδιαγραφών, ένα φίλτρο Chebyshev II έχει **πιο σταθερή απόκριση πλάτους** σε σχέση με ένα φίλτρο Chebyshev I της ίδιας τάξης, μια **πιο γραμμική** φασική απόκριση, μια **πιο σταθερή** υστέρηση φάσης και υστέρηση ομάδας και ένα **πιο μικρό** πλάτος διακυμάνσεων.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Σύγκριση των προσεγγίσεων ιδανικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η τιμή του πλάτους διακύμανσης ϵ για τα φίλτρα Chebyshev II είναι **σημαντικά μικρότερη** από την αντίστοιχη παράμετρο των φίλτρων Chebyshev I, με αποτέλεσμα η επιλεκτικότητα F_s των τελευταίων να είναι πολύ καλύτερη.

Τα **ελλειπτικά φίλτρα** πως προσφέρουν την **ελάχιστη τάξη φίλτρου** για τις ίδιες προδιαγραφές σε σχέση με τις υπόλοιπες προσεγγίσεις ιδανικών φίλτρων. Ωστόσο, η υλοποίησή τους χαρακτηρίζεται από **μεγάλο βαθμό δυσκολίας** και **μέγιστο κόστος**, ιδιαίτερα για τις συνιστώσες του φίλτρου με **μεγάλο** παράγοντα ποιότητας Q .

Τα **ελλειπτικά φίλτρα** διαθέτουν απόκριση με **το μεγαλύτερο βαθμό μη γραμμικότητας**.

Τα **φίλτρα Bessel** υπερέχουν ως προς τη **φασική απόκριση**, την **υστέρηση ομάδας** καθώς επίσης ως προς την **κρουστική** και **βηματική απόκριση** σε σχέση με **οποιοδήποτε άλλη** προσέγγιση.

Τα **φίλτρα Bessel** αποτελούν μαζί με τα **ελλειπτικά φίλτρα** τα δύο αντίθετα άκρα της οικογένειας των προσεγγίσεων ιδανικών φίλτρων, αφού τα ελλειπτικά φίλτρα οδηγούν **στην ελάχιστη τάξη φίλτρου αλλά και στη χειρότερη δυνατή φασική απόκριση και υστέρηση φάσης και ομάδας**, ενώ τα φίλτρα Bessel οδηγούν **στη μέγιστη τάξη φίλτρου αλλά δίνουν τη βέλτιστη φασική απόκριση, υστέρηση φάσης και υστέρηση ομάδας**, ενώ ταυτόχρονα η κρουστική και η βηματική τους απόκριση είναι η **καλύτερη από όλες**.

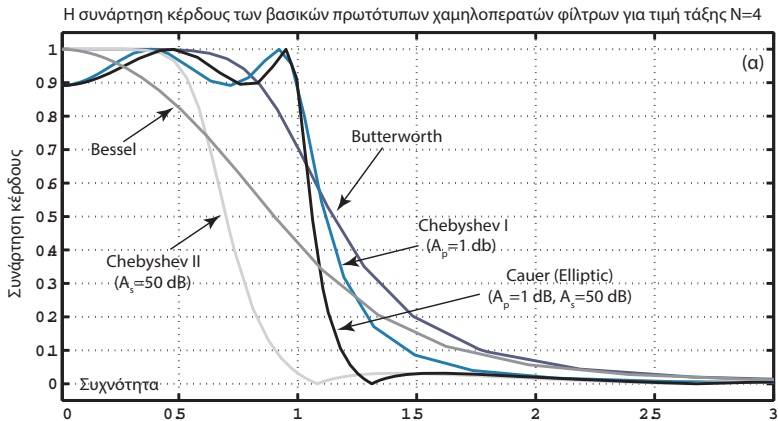
Ανάμεσα στα δύο αυτά άκρα βρίσκονται τα φίλτρα **Butterworth** και **Chebyshev**.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Σύγκριση των προσεγγίσεων ιδανικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



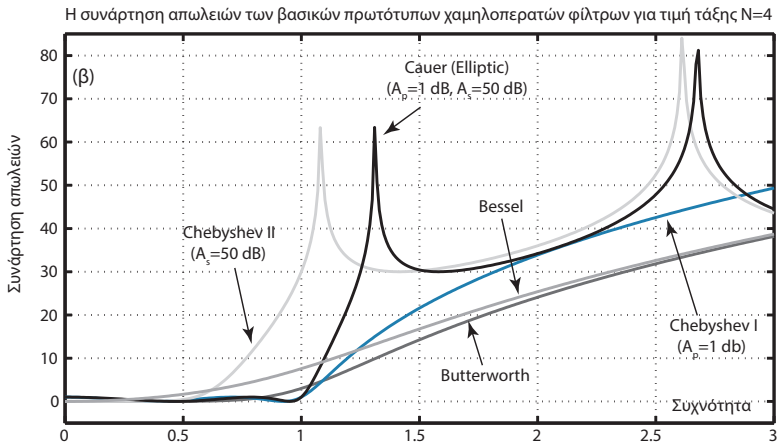
Σχήμα: Οι **συναρτήσεις κέρδους** των πρωτότυπων φίλτρων Butterworth, Chebyshev I, Chebyshev II και Cauer για τιμή τάξης φίλτρου $N = 4$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Σύγκριση των προσεγγίσεων ιδανικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



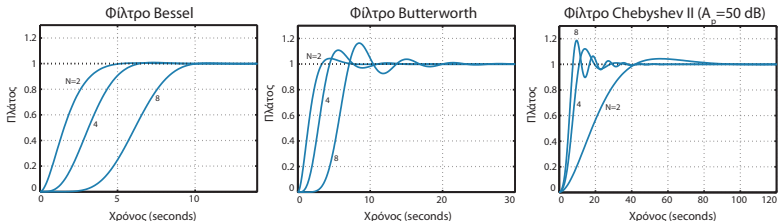
Σχήμα: Οι **συναρτήσεις απωλειών** των πρωτότυπων φίλτρων Butterworth, Chebyshev I, Chebyshev II και Cauer για τιμή τάξης φίλτρου $N = 4$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Σύγκριση των προσεγγίσεων ιδανικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Η βηματική απόκριση των πρωτότυπων φίλτρων Bessel, Butterworth και Chebyshev II με 2, 4 και 8 πόλους.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Άλλες προσεγγίσεις ιδανικών φίλτρων

Μεταβατικά φίλτρα Παρουσιάζουν μια **ενδιάμεση συμπεριφορά** σε σχέση με αυτήν δύο προσεγγίσεων (1) και (2). Εάν $p_k^{(1)}$ και $p_k^{(2)}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) είναι οι πόλοι των προσεγγίσεων (1) και (2), οι πόλοι της **μεταβατικής προσέγγισης** ορίζονται ως

$$p_k = [p_k^{(2)}]^m \times [p_k^{(1)}]^{1-m} \quad (0 \leq m \leq 1)$$

Παρατηρούμε πως για $m = 0$ οι πόλοι ανάγονται στους πόλους της **προσέγγισης (1)**, ενώ για $m = 1$ καταλήγουμε στους πόλους της **προσέγγισης (2)**. Εάν η παράμετρος m λάβει κάποια **ενδιάμεση τιμή** στο διάστημα $[0, 1]$, τότε το φίλτρο που θα προκύψει θα χαρακτηρίζεται από κάποια **ενδιάμεση συμπεριφορά**.

Χρησιμοποιώντας αυτήν την προσέγγιση των **μεταβατικών φίλτρων**, μπορούμε να κατασκευάσουμε φίλτρα που να παρουσιάζουν τα **πλεονεκτήματα** της μίας προσέγγισης, μετρίζοντας ταυτόχρονα τις **αδυναμίες** της άλλης.

Ιδανικό φίλτρο Gauss Χαρακτηρίζεται από **απόκριση ισχύος** της μορφής

$$|H(j\omega)|^2 = \exp(-\gamma\omega^2) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N (\gamma^k / k!) \omega^{2k}}, \quad \gamma = \frac{\ln 2}{\omega_c^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Άλλες προσεγγίσεις ιδανικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Φίλτρο Legendre. Η απόκριση ισχύος δίδεται από την εξίσωση

$$|\mathcal{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [P_N^{(m)}(\omega/\omega_p)]^2}$$

Υπερσφαιρικά φίλτρα Χαρακτηρίζονται από απόκριση ισχύος της μορφής

$$|\mathcal{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [F_N^{(\alpha)}(\omega/\omega_p)]^2}$$

Φίλτρα Paroulis. Η απόκριση ισχύος αυτών των φίλτρων δίδεται από την εξίσωση

$$|\mathcal{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [L_N^2(\omega/\omega_p)]^2}$$

Φίλτρα Halpern Σχετίζονται σε μεγάλο βαθμό με τα **φίλτρα Paroulis** και η απόκριση ισχύος τους διατυπώνεται ως

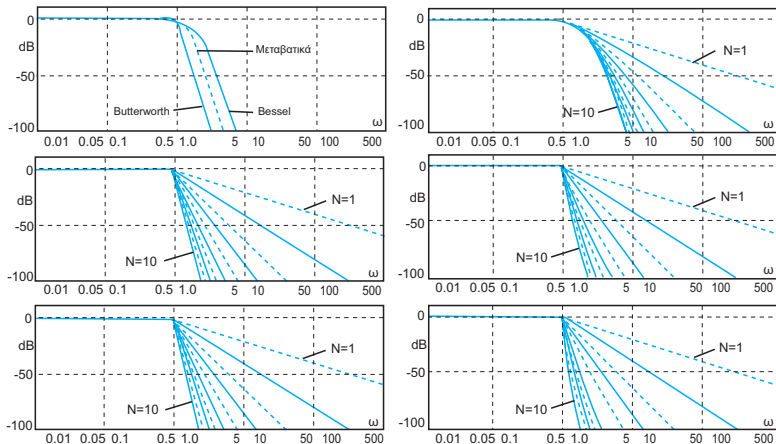
$$|\mathcal{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [T_N^2(\omega/\omega_p)]^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Άλλες προσεγγίσεις ιδανικών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Τυπικές καμπύλες απόκρισης πλάτους για **μεταβατικά** φίλτρα [(α)], φίλτρα **Gauss** [(β)], φίλτρα **Legendre** [(γ)], **υπερσφαιρικά** φίλτρα [(δ)], φίλτρα **Papoulis** [(ε)] και φίλτρα **Halpern** [(στ)] και για διάφορες προδιαγραφές λειτουργίας.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η κατασκευή προσεγγίσεων ιδανικών φίλτρων αφορά τα **πρωτότυπα χαμηλοπερατά φίλτρα**, ενώ όλες οι υπόλοιπες κατηγορίες φίλτρων μπορούν να προκύψουν από αυτά δια της εφαρμογής των κατάλληλων **μετασχηματισμών**.

Τα **πρωτότυπα χαμηλοπερατά φίλτρα** χαρακτηρίζονται από **κανονικοποιημένη** συχνότητα $\Omega_p = 1$ rad/sec που εκφράζει **το όριο της ζώνης διέλευσης** και από τις τιμές των παραμέτρων A_p και A_s που είναι εκπεφρασμένες σε dB και περιγράφουν **τη μέγιστη διακύμανση στη ζώνη διέλευσης** και **την ελάχιστη εξασθένηση στη ζώνη αποκοπής**.

Για **δεδομένο σύνολο** προδιαγραφών λειτουργίας του φίλτρου

- Προσδιορίζουμε τη συχνότητα Ω_s (ή τον **παράγοντα επιλεκτικότητας** του φίλτρου, θεωρώντας ότι $\Omega_p = 1$ rad/sec).
- Κατασκευάζουμε τη συνάρτηση $\mathcal{H}(p)$ δια της εφαρμογής κάποιας μεθόδου προσέγγισης.
- *Μετασχηματίζουμε* αυτή τη συνάρτηση στη συνάρτηση μεταφοράς του **επιθυμητού** τύπου φίλτρου δια της εφαρμογής ενός **μετασχηματισμού** της μορφής $s = f(p)$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε χαμηλοπερατό

Η μετατροπή πρωτότυπου **χαμηλοπερατού** φίλτρου συχνότητας $\Omega_p = 1$ rad/sec σε **χαμηλοπερατό** φίλτρο συχνότητας $\omega_p = \omega_0$ rad/sec είναι γνωστή ως **κλιμάκωση συχνότητας** και πραγματοποιείται με την αντικατάσταση $s = p/\omega_0$.

Ως αποτέλεσμα, η συνάρτηση μεταφοράς του **πρωτότυπου** χαμηλοπερατού φίλτρου

$$\mathcal{H}_{\text{LPP}}(s) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k}$$

θα μετασχηματιστεί στη συνάρτηση του **επιθυμητού** χαμηλοπερατού φίλτρου

$$\mathcal{H}_{\text{LP}}(p) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^k} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k p^k \omega_0^{-k}}{\sum_{k=0}^N \alpha_k p^k \omega_0^{-k}} = \frac{\omega_0^{-M} \sum_{k=0}^M \beta_k p^k \omega_0^{M-k}}{\omega_0^{-N} \sum_{k=0}^N \alpha_k p^k \omega_0^{N-k}} = \omega_0^{N-M} \frac{\sum_{k=0}^M \xi_k p^k}{\sum_{k=0}^N \zeta_k p^k}$$

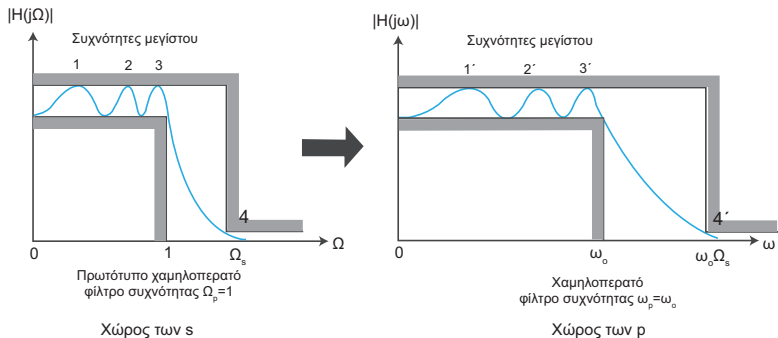
όπου $\xi_k = \beta_k \omega_0^{M-k}$ ($k = 1, 2, \dots, M$) και $\zeta_k = \alpha_k \omega_0^{N-k}$ ($k = 1, 2, \dots, N$).

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε χαμηλοπερατό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Κατασκευή χαμηλοπερατού φίλτρου από πρωτότυπο χαμηλοπερατό φίλτρο.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε χαμηλοπερατό

- Η περιοχή τιμών $[0, \infty)$ του άξονα των Ω απεικονίζεται στην περιοχή τιμών $[0, \infty)$ του άξονα των ω .
- Μία συχνότητα με τιμή Ω απεικονίζεται στη συχνότητα με τιμή $\omega_0\Omega$ με την αντίστοιχη τιμή της απόκρισης πλάτους να παραμένει η ίδια.
- Τα όρια των ζωνών διέλευσης και αποκοπής $\Omega_p = 1$ rad/sec και Ω_s απεικονίζονται στις τιμές $\omega_p = \omega_0$ και $\omega_s = \omega_0\Omega_s$ αντίστοιχα.

Διατυπώνοντας τη συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}_{LPP}(s)$ στην **παραγοντοποιημένη** της μορφή

$$\mathcal{H}_{LPP}(s) = K_{LPP} \left\{ \prod_{k=0}^M (s - s_{z_k}) \right\} / \left\{ \prod_{k=0}^N (s - s_{p_k}) \right\}$$

όπου s_{z_k} ($k = 1, 2, \dots, M$) και s_{p_k} ($k = 1, 2, \dots, N$) οι **μηδενικές τιμές** και οι **πόλοι** της συνάρτησης $\mathcal{H}_{LPP}(s)$, η αντικατάσταση $s = p/\omega_0$ θα οδηγήσει στην **παραγοντοποιημένη** συνάρτηση του χαμηλοπερατού φίλτρου

$$\mathcal{H}_{LP}(p) = K_{LPP} \frac{\prod_{k=0}^M \left(\frac{p}{\omega_0} - s_{z_k} \right)}{\prod_{k=0}^N \left(\frac{p}{\omega_0} - s_{p_k} \right)} = K_{LPP} \omega_0^{N-M} \frac{\prod_{k=0}^M (p - \omega_0 s_{z_k})}{\prod_{k=0}^N (p - \omega_0 s_{p_k})} = K_{LP} \frac{\prod_{k=0}^M (p - p_{z_k})}{\prod_{k=0}^N (p - p_{p_k})}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε χαμηλοπερατό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

όπου $K_{LP} = K_{LPP}\omega_0^{N-M}$ και $p_{z_k} = \omega_0 s_{z_k}$ ($k = 1, 2, \dots, M$), $p_{p_k} = \omega_0 s_{p_k}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) οι **μηδενικές τιμές** και οι **πόλοι** της συνάρτησης μεταφοράς $\mathcal{H}_{LP}(p)$.

Επομένως, οι **πόλοι** και οι **μηδενικές τιμές** της συνάρτησης μεταφοράς του προς κατασκευή χαμηλοπερατού φίλτρου, προκύπτουν από τον **πολλαπλασιασμό** των αντίστοιχων **μηδενικών τιμών** και **πόλων** της συνάρτησης μεταφοράς του πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου επί τον παράγοντα κλιμάκωσης ω_0 .

Η **επιλεκτικότητα** και ο **παράγοντας φασματικής απόδοσης** του μετασχηματισμένου χαμηλοπερατού φίλτρου υπολογίζονται από τις εξισώσεις ορισμού τους.

Οι **φασικές αποκρίσεις** του πρωτότυπου και του μετασχηματισμένου χαμηλοπερατού φίλτρου σχετίζονται ως

$$\angle \mathcal{H}_{LP}(j\omega) = \angle \mathcal{H}_{LPP}(j\Omega) = \angle \mathcal{H}_{LPP}\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Επομένως, οι **υστερήσεις φάσης** των δύο φίλτρων σχετίζονται ως

$$\tau_{LP}^{\varphi}(\omega) = -\frac{\angle \mathcal{H}_{LP}(j\omega)}{\omega} = -\frac{1}{\omega} \left[\angle \mathcal{H}_{LPP}\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right] = \frac{1}{\omega_0} \left[-\frac{\omega_0}{\omega} \angle \mathcal{H}_{LPP}\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right] = \frac{1}{\omega_0} \tau_{LPP}^{\varphi}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

ενώ για τις αντίστοιχες **υστερήσεις ομάδας** θα έχουμε

$$\tau_{LP}^g(\omega) = -\frac{d\angle \mathcal{H}_{LP}(j\omega)}{d\omega} = -\frac{d}{\omega} \left[\angle \mathcal{H}_{LPP}\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right] = \frac{1}{\omega_0} \tau_{LPP}^g\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε χαμηλοπερατό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Λαμβάνοντας υπόψη πως οι **συναρτήσεις μεταφοράς** των δύο φίλτρων σχετίζονται ως $\mathcal{H}_{LP}(p) = \mathcal{H}_{LPP}(\omega_0 s)$, η εφαρμογή του **αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace** μας δίνει

$$h_{LP}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{H}_{LP}(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{H}_{LPP}(\omega_0 s)\} = \omega_0 h_{LPP}(\omega_0 t)$$

Επομένως, η **κρουστική απόκριση** του μετασχηματισμένου χαμηλοπερατού φίλτρου αποτελεί μία έκδοση της αντίστοιχης απόκρισης του πρωτότυπου φίλτρου που είναι **κλιμακωμένη** τόσο ως προς το **χρόνο** όσο και ως προς το **πλάτος**.

Εάν είναι $\omega_0 > 1$, η απόκριση $h_{LP}(t)$ θα έχει **μεγαλύτερο πλάτος** από την $h_{LPP}(t)$ και θα είναι **συμπεσμένη** στο χρόνο, ενώ στην αντίθετη περίπτωση θα έχει **μικρότερο πλάτος** και θα είναι **εκτεταμένη** στο χρόνο.

Η **βηματική απόκριση** του **μετασχηματισμένου** φίλτρου, προκύπτει από την **ολοκλήρωση** της κρουστικής του απόκρισης - το αποτέλεσμα είναι $s_{LP}(t) = h_{LPP}(\omega_0 t)$.

Αυτή η απόκριση είναι **κλιμακωμένη ως προς το χρόνο** σε σχέση με την απόκριση του πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου, **όχι όμως** και ως προς το πλάτος.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε υψηλοπερατό

Ο μετασχηματισμός **πρωτότυπου χαμηλοπερατού σε υψηλοπερατό φίλτρο**, θέτοντας $s = \omega_0^2/p$. Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση

$$\mathcal{H}_{LPP}(s) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k}$$

του αρχικού **χαμηλοπερατού** φίλτρου, μετασχηματίζεται στη συνάρτηση μεταφοράς του **υψηλοπερατού** φίλτρου

$$\mathcal{H}_{HP}(p) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k \left(\frac{\omega_0^2}{p}\right)^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k \left(\frac{\omega_0^2}{p}\right)^k} = \frac{\left(\frac{p}{\omega_0^2}\right)^{-M} \sum_{k=0}^M \beta_k \left(\frac{p}{\omega_0^2}\right)^{M-k}}{\left(\frac{p}{\omega_0^2}\right)^{-N} \sum_{k=0}^N \alpha_k \left(\frac{p}{\omega_0^2}\right)^{N-k}} = \left(\frac{p}{\omega_0^2}\right)^{N-M} \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k \left(\frac{p}{\omega_0^2}\right)^{M-k}}{\sum_{k=0}^N \alpha_k \left(\frac{p}{\omega_0^2}\right)^{N-k}}$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις $s = j\Omega$ και $p = j\omega$ προκύπτει $\omega = -\omega_0^2/\Omega$. Επομένως, **οι θετικές συχνότητες του πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου απεικονίζονται στις αντίστροφες κλιμακούμενες συχνότητες του υψηλοπερατού φίλτρου.**

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε υψηλοπερατό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Κάτω από την εφαρμογή αυτού του μετασχηματισμού

- η περιοχή τιμών $[0, \infty)$ του άξονα των Ω **απεικονίζεται** στην περιοχή τιμών $(-\infty, 0]$ του άξονα των ω .
- η περιοχή τιμών $(-\infty, 0]$ του άξονα των Ω **απεικονίζεται** στην περιοχή τιμών $[0, \infty)$ του άξονα των ω .
- το όριο της ζώνης διέλευσης $\Omega_p = \pm 1$ rad/sec και το όριο της ζώνης αποκοπής $\pm \Omega_s$ του πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου, **απεικονίζονται** στις συχνότητες $\omega_p = \pm \omega_0^2$ και $\omega_s = \pm \omega_0^2 / \Omega_s$ του υψηλοπερατού φίλτρου.

Οι **συχνοτικές αποκρίσεις** των δύο φίλτρων συνδέονται με τη σχέση

$$\mathcal{H}_{\text{HP}}(j\omega) = \mathcal{H}_{\text{LPP}}(\omega_0^2/j\Omega)$$

ενώ ακόμη θα είναι $\mathcal{H}_{\text{HP}}(\infty) = \mathcal{H}_{\text{LPP}}(0)$ και $\mathcal{H}_{\text{HP}}(j\omega_0^2) = \mathcal{H}_{\text{LPP}}(j)$.

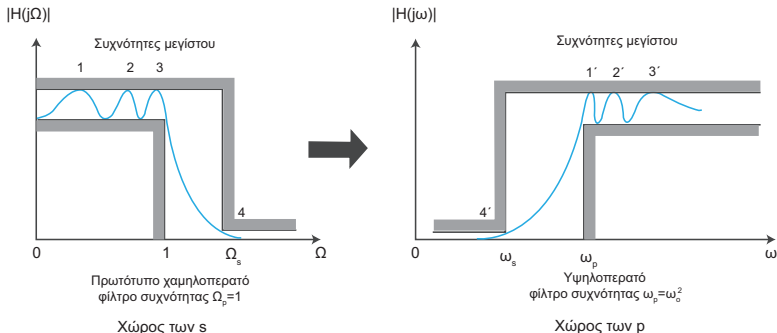
Για να απεικονίσουμε ένα **υψηλοπερατό** φίλτρο με συχνότητες λειτουργίας ω_p και ω_s στο **ισοδύναμο πρωτότυπο χαμηλοπερατό φίλτρο**, ορίζουμε τη **συχνότητα αποκοπής** του πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου ως $\Omega_s = \omega_p / \omega_s$ και κατασκευάζουμε τη **συνάρτηση μεταφοράς** του έτσι ώστε αυτή να ικανοποιεί και τις τιμές των A_p και A_s .

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε υψηλοπερατό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Κατασκευή **υψηλοπερατού** φίλτρου από πρωτότυπο χαμηλοπερατό φίλτρο.

Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας, το **υψηλοπερατό** φίλτρο κατασκευάζεται δια της εφαρμογής του μετασχηματισμού $p = \omega_0^2/s$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε υψηλοπερατό

Διατυπώνοντας τη συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}_{LPP}(s)$ στην **παράγοντοποιημένη** της μορφή

$$\mathcal{H}_{LPP}(s) = K_{LPP} \left\{ \prod_{k=0}^M (s - s_{z_k}) \right\} / \left\{ \prod_{k=0}^N (s - s_{p_k}) \right\}$$

όπου s_{z_k} ($k = 1, 2, \dots, M$) και s_{p_k} ($k = 1, 2, \dots, N$) οι **μηδενικές τιμές** και οι **πόλοι** της συνάρτησης $\mathcal{H}_{LPP}(s)$, η αντικατάσταση $s = \omega_0^2/p$ μας δίνει

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{HP}(p) &= K_{LPP} \frac{\prod_{k=0}^M \left(\frac{\omega_0^2}{p} - s_{z_k} \right)}{\prod_{k=0}^N \left(\frac{\omega_0^2}{p} - s_{p_k} \right)} = K_{LPP} \frac{\prod_{k=1}^M \left[\frac{1}{p} (\omega_0^2 - p s_{z_k}) \right]}{\prod_{k=1}^N \left[\frac{1}{p} (\omega_0^2 - p s_{p_k}) \right]} = K_{LPP} \frac{\prod_{k=1}^M \left[\frac{s_{z_k}}{p} \left(\frac{\omega_0^2}{s_{z_k}} - p \right) \right]}{\prod_{k=1}^N \left[\frac{s_{p_k}}{p} \left(\frac{\omega_0^2}{s_{p_k}} - p \right) \right]} \\ &= \left\{ K_{LPP} (-1)^{M-N} \frac{\prod_{k=1}^M (s_{z_k})}{\prod_{k=1}^N (s_{p_k})} \right\} p^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M \left(p - \frac{\omega_0^2}{s_{z_k}} \right)}{\prod_{k=1}^N \left(p - \frac{\omega_0^2}{s_{p_k}} \right)} = K_{HP} p^{N-M} \frac{\prod_{k=0}^M (p - p_{z_k})}{\prod_{k=0}^N (p - p_{p_k})} \end{aligned}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε υψηλοπερατό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στην παραπάνω εξίσωση η σταθερά K_{HP} ορίζεται ως

$$K_{HP} = K_{LPP}(-1)^{M-N} \left\{ \prod_{k=1}^M (s_{z_k}) \right\} / \left\{ \prod_{k=1}^N (s_{p_k}), \quad p_{z_k} = \frac{\omega_0^2}{s_{z_k}}, \quad p_{p_k} = \frac{\omega_0^2}{s_{p_k}} \right\}$$

όπου p_{z_k} και p_{p_k} οι πόλοι και οι μηδενικές τιμές της συνάρτησης $\mathcal{H}_{HP}(p)$ του υψηλοπερατού φίλτρου.

Επομένως, οι πόλοι και οι μηδενικές τιμές της συνάρτησης $\mathcal{H}_{HP}(p)$ είναι οι αντίστροφοι των πόλων και των μηδενικών τιμών της συνάρτησης $\mathcal{H}_{LPP}(s)$, έχοντας υποστεί επιπλέον κλιμάκωση κατά τον παράγοντα ω_0^2 .

Η επιλεκτικότητα ενός υψηλοπερατού φίλτρου χαρακτηρίζεται από θετικό πρόσημο έτσι ώστε να είναι θετικός αριθμός και μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της επιλεκτικότητας του αντίστοιχου πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου από την εξίσωση

$$F_s^{HP} = \frac{d | \mathcal{H}_{HP}(j\omega) |}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_c} = \left\{ \frac{d}{d\omega} | \mathcal{H}_{LPP} \left(-j \frac{\omega_0}{\omega^2} \right) | \right\}_{\omega=\omega_c} = \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} F_s^{LPP}$$

με την επιλεκτικότητα F_s^{LPP} να υπολογίζεται στη θέση της συχνότητας Ω_c .

Οι παράγοντες φασματικής απόδοσης είναι ίσοι μεταξύ τους, δηλαδή, $S_{HP} = S_{LPP}$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε υψηλοπερατό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οι **φασικές αποκρίσεις** του πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου και του μετασχηματισμένου υψηλοπερατού φίλτρου σχετίζονται μεταξύ τους ως

$$\angle \mathcal{H}_{\text{HP}}(j\omega) = \angle \mathcal{H}_{\text{LPP}}(j\Omega) = \angle \mathcal{H}_{\text{LPP}}\left(-j\frac{\omega_0^2}{\omega}\right)$$

Οι **υστερήσεις φάσης** των δύο φίλτρων σχετίζονται μεταξύ τους ως

$$\tau_{\text{HP}}^{\varphi}(\omega) = -\frac{\angle \mathcal{H}_{\text{HP}}(j\omega)}{\omega} = -\frac{1}{\omega} \left[\angle \mathcal{H}_{\text{LPP}}\left(-j\frac{\omega_0^2}{\omega}\right) + 2\pi m \right]$$

Η **υστέρηση ομάδας** του υψηλοπερατού φίλτρου έχει τη μορφή

$$\tau_{\text{HP}}^g(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle \mathcal{H}_{\text{LPP}}\left(-j\frac{\omega_0^2}{\omega}\right) = -\frac{d}{d\omega} \left(-\frac{\omega_0^2}{\omega}\right) \tau_{\text{LPP}}^g\left(-\frac{\omega_0^2}{\omega}\right) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \tau_{\text{LPP}}^g\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}\right)$$

Προκειμένου να περιγράψουμε την **κρουστική** και τη **βηματική απόκριση** του υψηλοπερατού φίλτρου, ας διατυπώσουμε τη συνάρτησή μεταφοράς του με τη μορφή

$$\mathcal{H}_{\text{HP}}(p) = K_{\text{HP}} p^{N-m} \frac{\prod_{k=1}^M \left(p - \frac{\omega_0^2}{s_{zk}}\right)}{\prod_{k=1}^N \left(p - \frac{\omega_0^2}{s_{pk}}\right)} = K_{\text{HP}} - \frac{K_{\text{HP}} \left[\prod_{k=1}^N \left(p - \frac{\omega_0^2}{s_{pk}}\right) - p^{N-M} \prod_{k=1}^M \left(p - \frac{\omega_0^2}{s_{zk}}\right) \right]}{\prod_{k=1}^N \left(p - \frac{\omega_0^2}{s_{pk}}\right)}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε υψηλοπερατό

Τα **γινόμενα πρωτοβάθμιων όρων** του αριθμητή και του παρονομαστή αποτελούν την **παραγοντοποιημένη** μορφή των πολυωνύμων $N(s) = \beta_0 + \beta_1 p + \dots + \beta_M p^M$ και $D(s) = \alpha_0 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_M p^M$ της **ρητής** συνάρτησης μεταφοράς.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

$M = 0$ Η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\mathcal{H}_{\text{HP}}(p) = K_{\text{HP}} - \left\{ K_{\text{HP}} \left[\prod_{k=1}^N \left(p - \frac{\omega_0^2}{s_{pk}} \right) - p^N \right] / \prod_{k=1}^N \left(p - \frac{\omega_0^2}{s_{pk}} \right) \right\}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathcal{H}_{\text{HP}}(p) = K_{\text{HP}} - \left\{ K_{\text{HP}} \alpha_{N-1} \prod_{k=1}^{N-1} \left(p - \frac{\omega_0^2}{s_{pk}} \right) / \prod_{k=1}^N \left(p - \frac{\omega_0^2}{s_{pk}} \right) \right\}$$

$M > 0$ Ο πολλαπλασιασμός του δεύτερου γινομένου που εκφράζει **παραγοντοποιημένο** πολυώνυμο βαθμού M επί p^{N-M} το καθιστά πολυώνυμο βαθμού N . Επομένως,

$$\mathcal{H}_{\text{HP}}(p) = K_{\text{HP}} - \left\{ K_{\text{HP}} \prod_{k=1}^N (p - \beta_k) / \prod_{k=1}^N \left(p - \frac{\omega_0^2}{s_{pk}} \right) \right\}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε υψηλοπερατό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

όπου β_k κατάλληλα υπολογιζόμενοι συντελεστές. Αλλά ο δεύτερος όρος σε αμφότερες τις παραπάνω περιπτώσεις αναγνωρίζεται ως **συνάρτηση μεταφοράς χαμηλοπερατού φίλτρου** $\mathcal{H}_{LP}(s)$ έτσι ώστε να μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{H}_{HP}(p) = K_{HP} - \mathcal{H}_{LP}(p)$$

Λαμβάνοντας τον **αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace** της παραπάνω σχέσης και χρησιμοποιώντας τη σχέση $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{H}(p)\}$, η **κρουστική απόκριση** του υψηλοπερατού φίλτρου υπολογίζεται ως

$$h_{HP}(t) = K_{HP}\delta(t) - h_{LP}(t)$$

Τέλος, η **βηματική απόκριση** του υψηλοπερατού φίλτρου θα υπολογιστεί από το **ολοκλήρωμα της κρουστικής απόκρισης**, οδηγώντας σε ένα αποτέλεσμα της μορφής

$$s_{HP}(t) = \int_0^t h_{HP}(\tau)d\tau = K_{HP} \int_0^t \delta(\tau)d\tau - \int_0^t h_{LP}(\tau)d\tau = K_{HP} - s_{LP}(t)$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοπερατό

Ο μετασχηματισμός ενός πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου σε ένα ζωνοπερατό φίλτρο με **κεντρική συχνότητα** ω_0 και **εύρος ζώνης** $B = \omega_{p2} - \omega_{p1}$ όπου ω_{p1} και ω_{p2} το **κατώτερο** και το **ανώτερο** όριο της ζώνης διέλευσης, πραγματοποιείται εφαρμόζοντας στη **συνάρτηση μεταφοράς** του πρωτότυπου φίλτρου

$$\mathcal{H}_{LPP}(s) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k}$$

το μετασχηματισμό

$$s = \frac{p^2 + \omega_0^2}{p(\omega_{p2} - \omega_{p1})} = \frac{p^2 + \omega_0^2}{pB}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του **ζωνοπερατού φίλτρου** που κατασκευάζεται με αυτό τον τρόπο έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}_{BP}(p) = \left\{ \sum_{k=0}^M \beta_k \left(\frac{p^2 + \omega_0^2}{pB} \right)^k \right\} / \left\{ \sum_{k=0}^N \alpha_k \left(\frac{p^2 + \omega_0^2}{pB} \right)^k \right\}$$

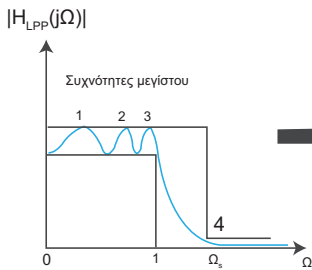
Η τάξη της συνάρτησης μεταφοράς του ζωνοπερατού φίλτρου $\mathcal{H}_{BP}(p)$ είναι **διπλάσια** από την τάξη της συνάρτησης μεταφοράς του πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου $\mathcal{H}(s)$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε υψηλοπερατό

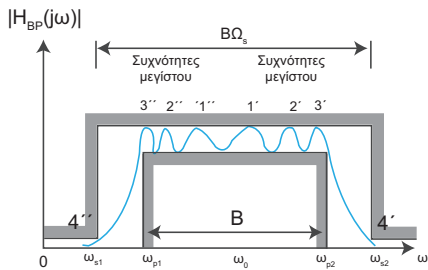
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Πρωτότυπο χαμηλοπερατό
φίλτρο συχνότητας $\Omega_p=1$

Χώρος των s



Ζωνοπερατό φίλτρο
με συχνότητες ω_{p1} και ω_{p2}

Χώρος των p

Σχήμα: Κατασκευή ζωνοπερατού φίλτρου από πρωτότυπο χαμηλοπερατό φίλτρο.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοπερατό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$ μπορεί να διατυπωθεί **πάντοτε** ως το **γινόμενο** μιας συνάρτησης μεταφοράς **χαμηλοπερατού φίλτρου** επί μια συνάρτησης μεταφοράς **υψηλοπερατού φίλτρου**.

Πραγματοποιώντας τις αντικαταστάσεις $s = j\Omega$ και $p = j\omega$ θα λάβουμε

$$j\Omega = \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{j\omega B} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \omega^2 - (\Omega B)\omega - \omega_0^2 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι **δευτεροβάθμια εξίσωση** ως προς ω με **διακρίνουσα** $\Delta = B^2\Omega^2 + 4\omega_0^2$ και **ρίζες**

$$\omega_{1,2} = \frac{B\Omega \pm \sqrt{B^2\Omega^2 + 4\omega_0^2}}{2} = \frac{B\Omega}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B\Omega}{2}\right)^2}$$

Επομένως, **ο μετασχηματισμός του πρωτότυπου χαμηλοπερατού στο ζωνοπερατό φίλτρο απεικονίζει κάθε συχνότητα Ω του χώρου των s σε δύο συχνότητες του χώρου των p .**

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία για την **κατοπτρική συχνότητα** $s^* = -j\Omega$ οδηγούμαστε στις ρίζες

$$\omega_{3,4} = \frac{-B\Omega \pm \sqrt{B^2\Omega^2 + 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{B\Omega}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B\Omega}{2}\right)^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοπερατό

Επομένως, δύο **οποιοσδήποτε** τιμές συχνότητας $\pm j\Omega$ του χώρου των s απεικονίζονται στις τέσσερις συχνότητες $\pm\omega_\alpha$ και $\pm\omega_\beta$ όπου

$$\omega_\alpha = \frac{B\Omega}{2} + \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B\Omega}{2}\right)^2} \quad \text{και} \quad \omega_\beta = -\frac{B\Omega}{2} + \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B\Omega}{2}\right)^2}$$

Οι συχνότητες ω_α και ω_β ικανοποιούν τις σχέσεις $\omega_\alpha - \omega_\beta = B\Omega$ και $\omega_\alpha\omega_\beta = \omega_0^2$.

Από την παραπάνω ανάλυση διαπιστώνεται ότι:

- Ο μετασχηματισμός του **πρωτότυπου χαμηλοπερατού** σε **ζωνοπερατό** φίλτρο, απεικονίζει τις τιμές συχνότητας Ω σε διαστήματα συχνοτήτων ω .
- Θεωρώντας μια συχνότητα Ω και την κατοπτρική της $-\Omega$, αυτές απεικονίζονται σε **δύο ζεύγη συχνοτήτων** που έχουν ως κέντρο της γεωμετρίας τη συχνότητα ω_0 .
- Η περιοχή τιμών $[0, \infty)$ του θετικού ημιάξονα των Ω **απεικονίζεται** στο διάστημα $[\omega_0, \infty)$ του θετικού ημιάξονα και στο διάστημα $[-\omega_0, 0]$ του αρνητικού ημιάξονα.
- Το διάστημα $(-\infty, 0]$ του αρνητικού ημιάξονα των Ω **απεικονίζεται** στο διάστημα $(-\infty, -\omega]$ του αρνητικού ημιάξονα των ω και στο διάστημα $[0, \omega_0]$ του θετικού ημιάξονα των ω .

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοπερατό

- Οι συχνότητες $\Omega_p = \pm 1$ rad/sec και $+\Omega_s$, απεικονίζονται στις συχνότητες

$$\omega_{p1} = -\frac{B}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 + B^2} \quad \text{και} \quad \omega_{p2} = +\frac{B}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 + B^2}$$

που ορίζουν τα όρια της ζώνης διέλευσης του ζωνοπερατού φίλτρου και στις

$$\omega_{s1} = -\frac{B\Omega_s}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_s B}{2}\right)^2} \quad \text{και} \quad \omega_{s2} = +\frac{B\Omega_s}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_s B}{2}\right)^2}$$

που ορίζουν το κάτω και το άνω όριο των δύο ζωνών αποκοπής και ικανοποιούν τις σχέσεις $\omega_{p2} - \omega_{p1} = B$, $\omega_{s2} - \omega_{s1} = B\Omega_s$ και $\omega_{p1}\omega_{p2} = \omega_{s1}\omega_{s2} = \omega_0^2$.

Εάν οι προδιαγραφές του ζωνοπερατού φίλτρου δεν ικανοποιούν την εξίσωση $\omega_{p1}\omega_{p2} = \omega_{s1}\omega_{s2} = \omega_0^2$ απαιτείται επανακαθορισμός των παραπάνω συχνοτήτων.

Επανακαθορίζουμε την τιμή της συχνότητας ω_{s2} από τη σχέση $\omega_{s2} = \omega_{p1}\omega_{p2}/\omega_{s1}$.

Υπολογίζουμε την παράμετρο $\Omega_s^{(1)} = (\omega_{s2} - \omega_{s1})/(\omega_{p2} - \omega_{p1})$.

Επανακαθορίζουμε τη συχνότητα ω_{s1} ως $\omega_{s1} = \omega_{p1}\omega_{p2}/\omega_{s2}$.

Υπολογίζουμε την παράμετρο $\Omega_s^{(2)} = (\omega_{s2} - \omega_{s1})/(\omega_{p2} - \omega_{p1})$.

Επιλέγουμε την τιμή της παραμέτρου Ω_s ως $\Omega_s = \max(\Omega_s^{(1)}, \Omega_s^{(2)})$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοπερατό

Διατυπώνοντας τη **συνάρτηση μεταφοράς** του **πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου** $\mathcal{H}_{LPP}(s)$ στη μορφή

$$\mathcal{H}_{LPP}(s) = K \left\{ \prod_{k=1}^M (s - s_{z_k}) \right\} / \left\{ \prod_{k=1}^M (s - s_{p_k}) \right\}$$

η αντικατάσταση $s = (p^2 + \omega_0^2)/\rho B$ θα οδηγήσει στη συνάρτηση

$$\mathcal{H}_{BP}(p) = K \left\{ \prod_{k=1}^M \left(\frac{p^2 + \omega_0^2}{\rho B} - s_{z_k} \right) \right\} / \left\{ \prod_{k=1}^M \left(\frac{p^2 + \omega_0^2}{\rho B} - s_{p_k} \right) \right\}$$

Επομένως, οι πόλοι της συνάρτησης $\mathcal{H}_{BP}(s)$ θα προκύψουν ως οι ρίζες της εξίσωσης

$$\frac{p^2 + \omega_0^2}{\rho B} - s_{p_k} = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad p^2 - (Bs_{p_k})p + \omega_0^2 = 0$$

με **διακρίνουσα** $\Delta = B^2 s_{p_k}^2 - 4\omega_0^2$ και ρίζες

$$p_{1,2} = \frac{Bs_{p_k} \pm \sqrt{B^2 s_{p_k}^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοπερατό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στο σημείο αυτό διακρίνουμε **δύο περιπτώσεις** όσον αφορά τη φύση του πόλου s_{p_k} .

(1) Ο πόλος s_{p_k} είναι **πραγματικός αριθμός**. Στην περίπτωση αυτή, οι πόλοι $p_{1,2}$ της συνάρτησης μεταφοράς $\mathcal{H}_{BP}(p)$ θα είναι **είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί**, ανάλογα με το πρόσημο του υπόρριζου της παραπάνω εξίσωσης.

Σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις, οι πόλοι είναι **μιγαδικοί** και έχουν τη μορφή

$$p_{1,2} = \frac{Bs_{p_k}}{2} \pm \frac{j}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - B^2s_{p_k}^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{4Q^2 - 1} \right)$$

όπου $Q = \omega_0/Bs_{p_k}$ ο **παράγοντας ποιότητας**. Επομένως, ο πόλος s_{p_k} του **πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου** οδηγεί στη δημιουργία δύο **μιγαδικών συζυγών πόλων** στη συνάρτηση μεταφοράς του ζωνοπερατού φίλτρου με συχνότητα ω_0 και παράγοντα ποιότητας $Q = \omega_0/Bs_{p_k}$.

(2) Ο πόλος s_{p_k} είναι **μιγαδικός αριθμός** της μορφής $s_{p_k} = \xi_k + j\zeta_k$. Θα είναι τότε

$$s_{p_k}^2 = (\xi_k + j\zeta_k)^2 = (\xi_k^2 - \zeta_k^2) + j(2\xi_k\zeta_k)$$

και η εξίσωση ορισμού των πόλων $p_{1,2}$ λαμβάνει τη μορφή

$$p_{1,2} = \frac{Bs_{p_k}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{B^2s_{p_k}^2 - 4\omega_0^2} = \frac{B}{2} (\xi_k + j\zeta_k) \pm \sqrt{[B^2(\xi_k^2 - \zeta_k^2) - 4\omega_0^2] + jB^2(2\xi_k\zeta_k)}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοπερατό

Παρατηρώντας πως το υπόρριζο της τελευταίας σχέσης είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$C_k = [B^2(\xi_k^2 - \zeta_k^2) - 4\omega_0^2] + jB^2(2\xi_k\zeta_k)$$

αυτή μπορεί να διατυπωθεί στην **εκθετική** της μορφής $C_k = |C_k|e^{j\varphi_k}$ όπου

$$|C_k| = \sqrt{[B^2(\xi_k^2 - \zeta_k^2) - 4\omega_0^2]^2 + 4B^4\xi_k^2\zeta_k^2} \quad \text{και} \quad \varphi_k = \tan^{-1} \frac{2B^2\xi_k\zeta_k}{B^2(\xi_k^2 - \zeta_k^2) - 4\omega_0^2}$$

Οι πόλοι $p_{1,2}$ της συνάρτησης $\mathcal{H}_{BP}(s)$ θα είναι λοιπόν οι

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{B}{2}\xi_k + j\frac{B}{2}\zeta_k \pm \frac{1}{2}\sqrt{|C_k|e^{j\varphi_k}} \\ &= \frac{1}{2}\left(B\xi_k \pm \sqrt{|C_k|} \cos \frac{\varphi_k}{2}\right) + \frac{j}{2}\left(B\zeta_k \pm \sqrt{|C_k|} \sin \frac{\varphi_k}{2}\right) \end{aligned}$$

όπως προκύπτει μετά από απλές πράξεις και επομένως,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}\left(B\xi_k + \sqrt{|C_k|} \cos \frac{\varphi_k}{2}\right) + \frac{j}{2}\left(B\zeta_k + \sqrt{|C_k|} \sin \frac{\varphi_k}{2}\right) \\ p_2 &= \frac{1}{2}\left(B\xi_k - \sqrt{|C_k|} \cos \frac{\varphi_k}{2}\right) + \frac{j}{2}\left(B\zeta_k - \sqrt{|C_k|} \sin \frac{\varphi_k}{2}\right) \end{aligned}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοπερατό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Κατά συνέπεια, **για κάθε** ζεύγος μιγαδικών συζυγών πόλων στη συνάρτηση μεταφοράς του πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου, θα εμφανίζονται στη συνάρτηση μεταφοράς του μετασχηματισμένου ζωνοπερατού φίλτρου **δύο ζεύγη μιγαδικών συζυγών πόλων** καθώς επίσης και **δύο μηδενικών τιμών** στη θέση $p = 0$.

Εάν η συνάρτηση μεταφοράς του πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου διαθέτει **μηδενικές τιμές**, αυτές θα είναι **αμιγώς φανταστικοί αριθμοί** της μορφής $s_{z_k} = j\nu_k$ όπου ν_k πραγματική μεταβλητή.

Κατά συνέπεια, οι **μηδενικές τιμές** της συνάρτησης μεταφοράς $\mathcal{H}_{BP}(p)$ του ζωνοπερατού φίλτρου, είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\frac{p^2 + \omega_0^2}{Bp} - j\nu_k = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad p^2 - j(B\nu_k)p + \omega_0^2 = 0$$

οι οποίες δίδονται από τη σχέση

$$p_{1,2} = \frac{jB\nu_k}{2} \pm \frac{j}{2} \sqrt{4\omega_0^2 + B^2\nu_k^2}$$

Επομένως, **για κάθε** μηδενική τιμή της συνάρτησης $\mathcal{H}_{LPP}(s)$ του **πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου**, δημιουργούνται **δύο αμιγώς φανταστικές μηδενικές τιμές** στη συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}_{BP}(s)$ του μετασχηματισμένου ζωνοπερατού φίλτρου.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοπερατό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ωστόσο, αυτές **δεν έχουν το ίδιο μέτρο** και δεν σχετίζονται με την ιδιότητα της **μγαδικής συζυγίας**. Σημειώστε πως εκτός από τη μηδενική τιμή $s_{z_k} = j\nu_k$ θα υπάρχει επίσης και η **μγαδικώς συζυγή τιμή** $s_{z_k}^* = -j\nu_k$, η οποία θα οδηγήσει στο ζεύγος μηδενικών τιμών

$$p_{3,4} = -\frac{jB\nu_k}{2} \pm \frac{j}{2} \sqrt{4\omega_0^2 + B^2\nu_k^2}$$

Παρατηρώντας πως η παράσταση $(s^2 + \omega_0^2)/(B\rho) \pm j\nu_k$ **απειρίζεται** στη θέση $\rho = 0$, οι μηδενικές τιμές $\pm j\nu_k$ προκαλούν την εμφάνιση και δύο **πόλων** στη θέση $\rho = 0$. Εάν είναι $4\omega_0^2 \gg B^2\nu_k^2$, μπορούμε να κάνουμε τις προσεγγίσεις $p_{1,2} = j\omega_0 \pm B\nu_k/2$ και $p_{3,4} = -j\omega_0 \pm jB\nu_k/2$.

Η **επιλεκτικότητα** ενός ζωνοπερατού φίλτρου συναρτήσει της επιλεκτικότητας του αντίστοιχου **πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου** υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} F_s^{BP} &= \left. \frac{d | \mathcal{H}_{BP}(j\omega) |}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} = \left\{ \left. \frac{d}{d\omega} | \mathcal{H}_{LPP} \left(-j \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{B\omega} \right) | \right\}_{\omega=\omega_c} \\ &= \left. \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{B\omega} \right) \right|_{\omega=\omega_c} F_s^{LPP} = \frac{\omega_c^2 + \omega_0^2}{B^2\omega_c^2} F_s^{LPP} \end{aligned}$$

με την επιλεκτικότητα F_s^{LPP} να υπολογίζεται στη θέση $\Omega_c = (\omega_c^2 + \omega_0^2)/(B\omega_c)$ όπου συχνότητα $\omega_c = \omega_{c1}$ ή $\omega_c = \omega_{c2}$. Οι **παράγοντες φασματικής απόδοσης** των δύο φίλτρων είναι ίσοι μεταξύ τους.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοπερατό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **υστέρηση φάσης** του ζωνοπερατού φίλτρου έχει τη μορφή

$$\tau_{\text{BP}}^{\varphi}(\omega) = -\frac{1}{\omega} \angle \mathcal{H}_{\text{BP}}(\omega) = -\frac{1}{\omega} \angle \mathcal{H}_{\text{LPP}}\left(\frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{jB\omega}\right) = -\frac{1}{\omega} \angle \mathcal{H}_{\text{LPP}}\left(j\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{B\omega}\right)$$

ενώ η αντίστοιχη **υστέρηση ομάδας** διατυπώνεται ως

$$\begin{aligned}\tau_{\text{BP}}^g(\omega) &= -\frac{d}{d\omega} \angle \mathcal{H}_{\text{BP}}(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle \mathcal{H}_{\text{LPP}}\left(j\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{B\omega}\right) \\ &= \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{B\omega}\right) \tau_{\text{LPP}}^g\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{B\omega}\right) = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{B\omega^2} \tau_{\text{LPP}}^g\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{B\omega}\right)\end{aligned}$$

Η **κρουστική απόκριση** του ζωνοπερατού φίλτρου θα προκύψει από τον **αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace** της συνάρτησης μεταφοράς $\mathcal{H}_{\text{BP}}(p)$.

Παρατηρώντας ότι $\mathcal{H}_{\text{BP}}(p) = \mathcal{H}_{\text{LP}}(p)\mathcal{H}_{\text{HP}}(p)$, το **θεώρημα της συνέλιξης** μας δίνει

$$h_{\text{BP}}(t) = h_{\text{LP}}(t) * h_{\text{HP}}(t)$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοφρακτικό

Ο μετασχηματισμός **πρωτότυπου χαμηλοπερατού σε ζωνοφρακτικό** φίλτρο με κεντρική συχνότητα ω_0 και εύρος ζώνης $B = \omega_{p2} - \omega_{p1}$ όπου ω_{p1} και ω_{p2} το **κατώτερο** και το **ανώτερο** όριο της ζώνης αποκοπής, πραγματοποιείται εφαρμόζοντας στη **συνάρτηση μεταφοράς** του πρωτότυπου φίλτρου

$$\mathcal{H}_{LPP}(s) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k}$$

το μετασχηματισμό

$$s = \frac{p(\omega_{p2} - \omega_{p1})}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{pB}{p^2 + \omega_0^2}$$

Αυτός μπορεί να θεωρηθεί ως ένας **μετασχηματισμός χαμηλοπερατού σε υψηλοπερατό φίλτρο** της μορφής $s = 1/p'$ ακολουθούμενος από ένα **μετασχηματισμό σε ζωνοπερατό φίλτρο** της μορφής $p' = (p^2 + \omega_0^2)/Bp$. Η συνάρτηση μεταφοράς του **ζωνοφρακτικού φίλτρου** που προκύπτει διατυπώνεται ως

$$\mathcal{H}_{BS}(p) = \left\{ \sum_{k=0}^M \beta_k \left(\frac{pB}{p^2 + \omega_0^2} \right)^k \right\} / \left\{ \sum_{k=0}^N \alpha_k \left(\frac{pB}{p^2 + \omega_0^2} \right)^k \right\}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοφρακτικό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η τάξη της συνάρτησης μεταφοράς του ζωνοφρακτικού φίλτρου $\mathcal{H}_{BS}(p)$ είναι **διπλάσια** από την τάξη της συνάρτησης μεταφοράς του πρωτότυπου χαμηλοπερατού φίλτρου $\mathcal{H}(s)$.

Η συνάρτηση $\mathcal{H}_{BS}(p)$ αποτελεί το **άθροισμα** μιας συνάρτησης μεταφοράς χαμηλοπερατού φίλτρου και μιας συνάρτησης μεταφοράς υψηλοπερατού φίλτρου.

Πραγματοποιώντας τις αντικαταστάσεις $s = j\Omega$ και $p = j\omega$ θα λάβουμε

$$j\Omega = \frac{j\omega B}{-\omega^2 + \omega_0^2} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \omega^2 + \frac{B}{\Omega}\omega - \omega_0^2 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι **δευτεροβάθμια** με **διακρίνουσα** $\Delta = (B^2/\Omega^2) + 4\omega_0^2$ και **ρίζες**

$$\omega_{1,2} = -\frac{B}{2\Omega} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B^2}{\Omega^2} + 4\omega_0^2} = -\frac{B}{2\Omega} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B}{2\Omega}\right)^2}$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός του πρωτότυπου χαμηλοπερατού στο ζωνοπερατό φίλτρο απεικονίζει κάθε συχνότητα Ω του χώρου των s σε **δύο συχνότητες** του χώρου των p .

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία για την **κατοπτρική συχνότητα** $s^* = -j\Omega$ βρίσκουμε

$$\omega_{3,4} = \frac{B}{2\Omega} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B^2}{\Omega^2} + 4\omega_0^2} = \frac{B}{2\Omega} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B}{2\Omega}\right)^2}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοφρακτικό

Επομένως, δύο **οποιοσδήποτε** τιμές συχνότητας $\pm j\Omega$ του χώρου των s απεικονίζονται στις τέσσερις συχνότητες $\pm\omega_\alpha$ και $\pm\omega_\beta$ όπου

$$\omega_\alpha = \frac{B}{2\Omega} + \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B}{2\Omega}\right)^2} \quad \text{και} \quad \omega_\beta = -\frac{B}{2\Omega} + \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B}{2\Omega}\right)^2}$$

Οι συχνότητες ω_α και ω_β ικανοποιούν τις εξισώσεις $\omega_\alpha - \omega_\beta = B/\Omega$ και $\omega_\alpha\omega_\beta = \omega_0^2$.

Η **απόκριση συχνότητας** του ζωνοφρακτικού φίλτρου προκύπτει από τη **σύνθεση** των συχνοτικών αποκρίσεων ενός **χαμηλοπερατού** και ενός **υψηλοπερατού** φίλτρου.

Αρχικά, εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $p' = 1/s$ κατασκευάζουμε την απόκριση ενός **κανονικοποιημένου υψηλοπερατού φίλτρου** με **ζώνη διέλευσης** που εκτείνεται από $\Omega'_p = 1$ έως $\Omega' = \infty$ και **ζώνη αποκοπής** που ορίζεται από τις συχνότητες $\Omega' = 0$ έως $\Omega' = 1/\Omega_s$.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε στην p' το **μετασχηματισμό ζωνοπερατού φίλτρου** για να λάβουμε τη **συνάρτηση απόκρισης συχνότητας** του επιθυμητού ζωνοφρακτικού φίλτρου.

Η περιοχή από $\Omega' = 0$ έως ∞ απεικονίζεται στις περιοχές $[\omega_0, \infty)$ και $[-\omega_0, 0]$ ενώ η περιοχή συχνοτήτων $(-\infty, 0]$ απεικονίζεται στις περιοχές $[0, \omega_0]$ και $(-\infty, -\omega_0]$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοφρακτικό

Επομένως, ο **μετασχηματισμός** του ζωνοπερατού φίλτρου εφαρμοζόμενος επί της συνάρτησης μεταφοράς ενός **κανονικοποιημένου** υψηλοπερατού φίλτρου δημιουργεί **δύο ζώνες διέλευσης** με διακύμανση που σχετίζεται με τιμή εξασθένησης A_p για τις περιοχές τιμών που ορίζονται από τις συχνότητες

$$\omega_{p1} = -\frac{B\Omega'_p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B\Omega'_p}{2}\right)^2} = -\frac{B}{2\Omega_p} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B}{2\Omega_p}\right)^2}$$

$$\omega_{p2} = +\frac{B\Omega'_p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B\Omega'_p}{2}\right)^2} = +\frac{B}{2\Omega_p} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B}{2\Omega_p}\right)^2}$$

και **μία περιοχή αποκοπής** με διακύμανση που σχετίζεται με τιμή εξασθένησης A_s και για τις περιοχές τιμών που ορίζονται από τις συχνότητες

$$\omega_{s1} = -\frac{B\Omega'_s}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B\Omega'_s}{2}\right)^2} = -\frac{B}{2\Omega_s} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B}{2\Omega_s}\right)^2}$$

$$\omega_{s2} = +\frac{B\Omega'_s}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B\Omega'_s}{2}\right)^2} = +\frac{B}{2\Omega_s} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B}{2\Omega_s}\right)^2}$$

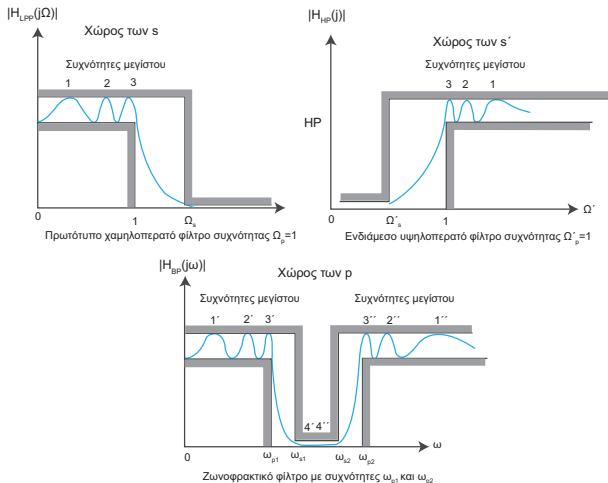
Οι παραπάνω συχνότητες ικανοποιούν τις σχέσεις $\omega_{s2} - \omega_{s1} = B\Omega'_s = B/\Omega_s$,
 $\omega_{p2} - \omega_{p1} = B$ και $\omega_{p1}\omega_{p2} = \omega_{s1}\omega_{s2} = \omega_0^2$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοφρακτικό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Κατασκευή ζωνοφρακτικού φίλτρου από πρωτότυπο χαμηλοπερατό φίλτρο.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοφρακτικό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Διατυπώνοντας τη συνάρτηση μεταφοράς του **χαμηλοπερατού** φίλτρου $\mathcal{H}_{LPP}(s)$ ως

$$\mathcal{H}_{LPP}(s) = K \left\{ \prod_{k=1}^M (s - s_{z_k}) \right\} / \left\{ \prod_{k=1}^M (s - s_{p_k}) \right\}$$

η **αντικατάσταση** $s = (p^2 + \omega_0^2)/pB$ θα οδηγήσει στη συνάρτηση

$$\mathcal{H}_{BS}(p) = K \left\{ \prod_{k=1}^M \left(\frac{pB}{p^2 + \omega_0^2} - s_{z_k} \right) \right\} / \left\{ \prod_{k=1}^M \left(\frac{pB}{p^2 + \omega_0^2} - s_{p_k} \right) \right\}$$

Επομένως, οι **πόλοι** της συνάρτησης $\mathcal{H}_{BS}(s)$ θα προκύψουν ως οι **ρίζες** της εξίσωσης

$$\frac{pB}{p^2 + \omega_0^2} - s_{p_k} = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad p^2 - \frac{B}{s_{p_k}} p + \omega_0^2 = 0$$

με **διακρίνουσα** $\Delta = B^2/s_{p_k}^2 - 4\omega_0^2$ και **ρίζες**

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{B}{s_{p_k}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B^2}{s_{p_k}^2} - 4\omega_0^2}$$

Διακρίνουμε **δύο περιπτώσεις** όσον αφορά στη φύση του πόλου s_{p_k} .

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοφρακτικό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ο πόλος s_{p_k} είναι πραγματικός αριθμός. Στην περίπτωση αυτή, οι πόλοι $p_{1,2}$ της συνάρτησης μεταφοράς $\mathcal{H}_{BS}(p)$ θα είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί, ανάλογα με το πρόσημο του υπόρριζου.

Οι πόλοι $p_{1,2}$ συνήθως είναι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής

$$p_{1,2} = \frac{B}{2s_{p_k}} \pm \frac{j}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - \frac{B^2}{s_{p_k}^2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{4Q^2 - 1} \right)$$

όπου $Q = \omega_0 s_{p_k} / B$ ο παράγοντας ποιότητας των πόλων. Επομένως, ο πόλος s_{p_k} δημιουργεί δύο μιγαδικούς συζυγείς πόλους με συχνότητα ω_0 και παράγοντα ποιότητας $Q = \omega_0 s_{p_k} / B$, και δύο μηδενικά στις θέσεις $\pm j\omega_0$.

Ο πόλος s_{p_k} είναι μιγαδικός αριθμός της μορφής $s_{p_k} = \xi_k + j\zeta_k$. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $s_{p_k}^2 = (\xi_k + j\zeta_k)^2 = (\xi_k^2 - \zeta_k^2) + j(2\xi_k\zeta_k)$ και η εξίσωση ορισμού των πόλων $p_{1,2}$ λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{B}{2s_{p_k}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B^2}{s_{p_k}^2} - 4\omega_0^2} = \frac{B}{2(\xi_k + j\zeta_k)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B^2}{(\xi_k^2 - \zeta_k^2) + j(2\xi_k\zeta_k)} - 4\omega_0^2} = \\ &= \frac{B(\xi_k - j\zeta_k)}{2(\xi_k^2 + \zeta_k^2)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{B^2(\xi_k^2 - \zeta_k^2)}{(\xi_k^2 + \zeta_k^2)^2} - 4\omega_0^2 \right] - j \frac{2B^2\xi_k\zeta_k}{(\xi_k^2 + \zeta_k^2)^2}} \end{aligned}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοφρακτικό

Παρατηρώντας πως η παράσταση του **υπόρριζου** είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$C_k = \left[\frac{B^2(\xi_k^2 - \zeta_k^2)}{(\xi_k^2 + \zeta_k^2)^2} - 4\omega_0^2 \right] - j \frac{2B^2 \xi_k \zeta_k}{(\xi_k^2 + \zeta_k^2)^2}$$

αυτή μπορεί να διατυπωθεί στην **εκθετική** της μορφής $C_k = |C_k| e^{j\varphi_k}$ όπου

$$|C_k| = \sqrt{\left[\frac{B^2(\xi_k^2 - \zeta_k^2)}{(\xi_k^2 + \zeta_k^2)^2} - 4\omega_0^2 \right]^2 + \frac{4B^4 \xi_k^2 \zeta_k^2}{(\xi_k^2 + \zeta_k^2)^4}} \quad \text{και} \quad \varphi_k = -\tan^{-1} \frac{2B^2 \xi_k \zeta_k}{B^2(\xi_k^2 - \zeta_k^2) - 4\omega_0^2(\xi_k^2 + \zeta_k^2)^2}$$

Αντικαθιστώντας και πραγματοποιώντας τις αλγεβρικές πράξεις, βρίσκουμε

$$p_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{B\xi_k}{\xi_k^2 + \zeta_k^2} + \sqrt{|C_k|} \cos \frac{\varphi_k}{2} \right) - \frac{j}{2} \left(\frac{B\zeta_k}{\xi_k^2 + \zeta_k^2} - \sqrt{|C_k|} \sin \frac{\varphi_k}{2} \right)$$
$$p_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{B\xi_k}{\xi_k^2 + \zeta_k^2} - \sqrt{|C_k|} \cos \frac{\varphi_k}{2} \right) - \frac{j}{2} \left(\frac{B\zeta_k}{\xi_k^2 + \zeta_k^2} + \sqrt{|C_k|} \sin \frac{\varphi_k}{2} \right)$$

Επομένως, **για κάθε ζεύγος** μιγαδικών συζυγών πόλων στη συνάρτηση του χαμηλοπερατού φίλτρου, η συνάρτηση του ζωνοφρακτικού φίλτρου περιέχει **δύο ζεύγη** μιγαδικών συζυγών πόλων καθώς επίσης και **δύο μηδενικές τιμές** στις θέσεις $p = \pm j\omega_0$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοφρακτικό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν η συνάρτηση $\mathcal{H}_{LPP}(s)$ διαθέτει **μηδενικές τιμές**, αυτές θα είναι **αμιγώς φανταστικοί αριθμοί** της μορφής $s_{z_k} = j\nu_k$ όπου ν_k πραγματική μεταβλητή. Επομένως, οι **μηδενικές τιμές** της συνάρτησης $\mathcal{H}_{BS}(p)$ υπολογίζονται ως

$$\frac{Bp}{p^2 + \omega_0^2} - j\nu_k = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad p^2 + j\frac{B}{\nu_k}p + \omega_0^2 = 0$$

$$\text{και είναι οι } p_{1,2} = -\frac{j}{2} \frac{B}{\nu_k} \pm \frac{j}{2} \sqrt{4\omega_0^2 + (B^2/\nu_k^2)}.$$

Επομένως, **για κάθε** μηδενική τιμή της συνάρτησης $\mathcal{H}_{LPP}(s)$, δημιουργούνται **δύο αμιγώς φανταστικές μηδενικές τιμές** στη συνάρτηση $\mathcal{H}_{BS}(p)$, που **δεν έχουν το ίδιο μέτρο** και δεν σχετίζονται με την ιδιότητα της **μγαδικής συζυγίας**.

Οι **μηδενικές τιμές** στη συνάρτηση $\mathcal{H}_{LPP}(s)$ εμφανίζονται σε **μγαδικώς συζυγή** ζεύγη· επομένως, για τη μηδενική τιμή $s_{z_k} = j\nu_k$ θα υπάρχει και η **μγαδικώς συζυγή** τιμή $s_{z_k}^* = -j\nu_k$, που δίνει το **ζεύγος** μηδενικών τιμών

$$p_{3,4} = \frac{j}{2} \frac{B}{\nu_k} \pm \frac{j}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - (B^2/\nu_k^2)}$$

Επομένως, το κάθε ζεύγος **συζυγών μηδενικών** τιμών της συνάρτησης $\mathcal{H}_{LPP}(s)$ οδηγεί στη δημιουργία **τεσσάρων πόλων** της συνάρτησης $\mathcal{H}_{BS}(p)$ στις θέσεις $\pm j\omega_0$.

Ωστόσο οι δύο από αυτούς τους πόλους **θα ακυρωθούν** από τις δύο μηδενικές τιμές που υπάρχουν στις ίδιες θέσεις λόγω της ύπαρξης των πόλων.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοφρακτικό

Η **επιλεκτικότητα** ενός ζωνοφρακτικού φίλτρου συναρτήσει της επιλεκτικότητας του **πρωτότυπου** φίλτρου υπολογίζεται ως

$$F_s^{BS} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{B\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \Big|_{\omega=\omega_c} \quad F_s^{LPP} = \frac{B(\omega_c^2 + \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega_c^2)^2} F_s^{LPP}$$

με την επιλεκτικότητα F_s^{LPP} να υπολογίζεται στη συχνότητα $\Omega_c = (B\omega_c)/(\omega_0^2 - \omega_c^2)$ όπου η ω_c μπορεί να είναι κάποια από τις ω_{c1} και ω_{c2} . Οι **παράγοντες φασματικής απόδοσης** των δύο φίλτρων είναι ίσοι μεταξύ τους.

Η **υστέρηση φάσης** του ζωνοφρακτικού φίλτρου έχει τη μορφή

$$\tau_{BS}^{\varphi}(\omega) = -\frac{1}{\omega} \angle \mathcal{H}_{BS}(\omega) = -\frac{1}{\omega} \angle \mathcal{H}_{LPP} \left(j \frac{B\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2} \right)$$

ενώ η αντίστοιχη **υστέρηση ομάδας** διατυπώνεται ως

$$\begin{aligned} \tau_{BS}^g(\omega) &= -\frac{d}{d\omega} \angle \mathcal{H}_{BS}(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle \mathcal{H}_{LPP} \left(j \frac{B\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) = \\ &= \frac{d}{d\omega} \left(\frac{B\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \tau_{LPP}^g \left(\frac{B\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) = \frac{B(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \tau_{LPP}^g \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{B\omega} \right) \end{aligned}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί συχνότητας - Χαμηλοπερατό σε ζωνοφρακτικό

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **κρουστική απόκριση** του ζωνοφρακτικού φίλτρου θα προκύψει από τον **αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace** της συνάρτησης μεταφοράς $\mathcal{H}_{BS}(p)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$\mathcal{H}_{BS}(p) = \mathcal{H}_{LP}(p) + \mathcal{H}_{HP}(p)$$

η εφαρμογή του **αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace** θα μας οδηγήσει στο αποτέλεσμα

$$h_{BS}(t) = h_{LP}(t) + h_{HP}(t)$$

Μετά τον υπολογισμό της **κρουστικής απόκρισης** του συστήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε και τη **βηματική απόκριση** ως το **ολοκλήρωμα της κρουστικής απόκρισης**.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασηματισμοί κυκλωμάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οι παραπάνω μετασηματισμοί που θα μετατρέψουν το **πρωτότυπο χαμηλοπερατό φίλτρο** που έχουμε κατασκευάσει σε **χαμηλοπερατό, υψηλοπερατό, ζωνοπερατό ή ζωνοφρακτικό φίλτρο**, θα πρέπει να εφαρμοσθούν και στο **ηλεκτρικό κύκλωμα** που το υλοποιεί.

Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως **μετασηματισμός κυκλώματος** και πραγματοποιείται **απευθείας** πάνω στα στοιχεία του κυκλώματος.

Μετατροπή πρωτότυπου χαμηλοπερατού σε χαμηλοπερατό φίλτρο

Η εφαρμογή του μετασηματισμού $s = p/\omega_0$ επί των αντιστάσεων $Z_C(s)$ και $Z_L(s)$ οδηγεί στις αντιστάσεις $Z_C(p) = \omega_0/(pC)$ και $Z_L(p) = (pL)/\omega_0$.

Επομένως για να μετατρέψουμε ένα πρωτότυπο σε ένα μετασηματισμένο χαμηλοπερατό φίλτρο, **διαιρούμε όλες τις αντιστάσεις των στοιχείων του κυκλώματος με την τιμή του συντελεστή ω_0** . Αυτή η διαδικασία προκαλεί **κλιμάκωση** του άξονα των συχνοτήτων, **χωρίς όμως** να μεταβάλλει το σχήμα της καμπύλης απόκρισης πλάτους του φίλτρου.

Μετατροπή πρωτότυπου χαμηλοπερατού σε υψηλοπερατό φίλτρο

Η εφαρμογή του μετασηματισμού $s = \omega_0^2/p$ επί των αντιστάσεων $Z_C(s)$ και $Z_L(s)$ οδηγεί στις αντιστάσεις $Z_C(p) = p/(\omega_0^2 C)$ και $Z_L(p) = (\omega_0^2 L)/p$.

Επομένως η αντίσταση $Z_C(p)$ είναι **ανάλογη** του p και παρουσιάζει συμπεριφορά **πηνίου** αυτεπαγωγής $L = 1/(\omega_0^2 C)$ ενώ η αντίσταση $Z_L(p)$ είναι **αντιστρόφως ανάλογη** του p και παρουσιάζει συμπεριφορά **πυκνωτή** χωρητικότητας $C = 1/(\omega_0^2 L)$.

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί κυκλωμάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Για να μετασχηματίσουμε λοιπόν, το πρωτότυπο χαμηλοπερατό φίλτρο σε υψηλοπερατό φίλτρο θα πρέπει να αντικαταστήσουμε **όλα τα πηνία με πυκνωτές** και **όλους τους πυκνωτές με πηνία** με τις παραπάνω τιμές αυτεπαγωγής και χωρητικότητας.

Μετατροπή πρωτότυπου χαμηλοπερατού σε ζωνοπερατό φίλτρο

Η εφαρμογή του μετασχηματισμού $s = (p^2 + \omega_0^2)/pB$ επί της αντίστασης $Z_L(s)$ οδηγεί σε μία νέα αντίσταση της μορφής

$$Z_L(p) = \frac{L(p^2 + \omega_0^2)}{Bp} = \frac{Lp^2 + L\omega_0^2}{Bp} = \left(\frac{L}{B}\right)p + \left(\frac{L\omega_0^2}{B}\right)\frac{1}{p}$$

Ο πρώτος όρος της τελευταίας έκφρασης αντιστοιχεί σε **αντίσταση πηνίου** αυτεπαγωγής L/B ενώ ο δεύτερος αντιστοιχεί σε **αντίσταση πυκνωτή** χωρητικότητας $B/(L\omega_0^2)$.

Επομένως **το κάθε πηνίο** του κυκλώματος που υλοποιεί το πρωτότυπο χαμηλοπερατό φίλτρο, θα πρέπει να αντικατασταθεί **από ένα πηνίο και ένα πυκνωτή** με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, συνδεδεμένα **εν σειρά**.

Από την άλλη πλευρά, η εφαρμογή του παραπάνω μετασχηματισμού στην αντίσταση $Z_C(s)$ οδηγεί σε μία νέα αντίσταση της μορφής $Z_C(p) = Bp/[C(p^2 + \omega_0^2)]$. Είναι όμως

$$\frac{1}{Z_C(p)} = \frac{C(p^2 + \omega_0^2)}{Bp} = \frac{CP}{B} + \frac{C\omega_0^2}{Bp} = \left(\frac{1}{C/B}\right)\frac{1}{p} + \left(\frac{B}{C\omega_0^2}\right)p$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασχηματισμοί κυκλωμάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Αλλά ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος αντιστοιχεί σε **αντίσταση πυκνωτή** χωρητικότητας C/B ενώ ο δεύτερος σε **αντίσταση πηνίου** αυτεπαγωγής $B/(\omega_0^2 C)$. Επομένως **ο κάθε πυκνωτής** θα πρέπει να αντικατασταθεί **από έναν πυκνωτή και ένα πηνίο** με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, συνδεδεμένα **παράλληλα**.

Μετατροπή πρωτότυπου χαμηλοπερατού σε ζωνοφρακτικό φίλτρο

Η εφαρμογή του μετασχηματισμού $s = pB/(p^2 + \omega_0^2)$ επί της αντίστασης $Z_C(s)$ οδηγεί σε μία νέα αντίσταση της μορφής

$$Z_C(p) = \frac{p^2 + \omega_0^2}{BpC} = \left(\frac{1}{CB}\right)p + \left(\frac{\omega_0^2}{CB}\right)\frac{1}{p}$$

Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί σε **αντίσταση πηνίου** αυτεπαγωγής $1/(CB)$ ενώ ο δεύτερος σε **αντίσταση πυκνωτή** χωρητικότητας CB/ω_0^2 . Επομένως, ο κάθε πυκνωτής του κυκλώματος θα πρέπει να αντικατασταθεί **από ένα πηνίο και έναν πυκνωτή** με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, συνδεδεμένα **εν σειρά**.

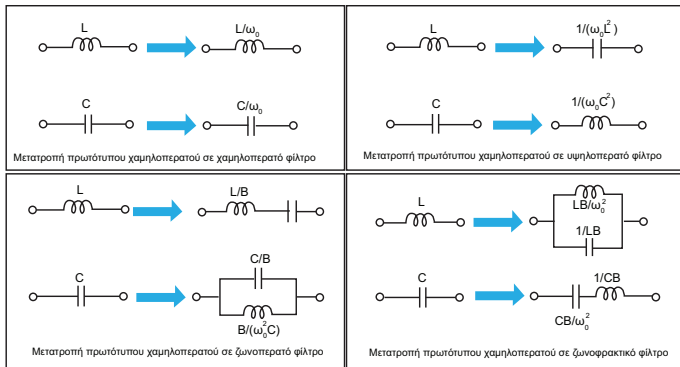
Η εφαρμογή του παραπάνω μετασχηματισμού στην αντίσταση $Z_L(s)$ οδηγεί σε μία νέα αντίσταση της μορφής $Z_L(p) = LBp/(p^2 + \omega_0^2)$. Είναι όμως,

$$\frac{1}{Z_L(p)} = \frac{p^2 + \omega_0^2}{LBp} = \frac{p}{LB} + \frac{\omega_0^2}{LBp} = \frac{1}{(LB)\frac{1}{p}} + \frac{1}{\left(\frac{LB}{\omega_0^2}\right)p}$$

Τα χαρακτηριστικά των αναλογικών φίλτρων

Μετασηματισμοί κυκλωμάτων

Αλλά ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος αντιστοιχεί σε **αντίσταση πυκνωτή** χωρητικότητας $1/LB$, ενώ ο δεύτερος σε **αντίσταση πηνίου** αυτεπαγωγής LB/ω_0^2 . Επομένως, το κάθε πηνίο του κυκλώματος θα πρέπει να αντικατασταθεί **από έναν πυκνωτή και ένα πηνίο** με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, συνδεδεμένα **παράλληλα**.



Σχήμα: Οι μετασηματισμοί στοιχείων κυκλώματος για τη μετατροπή του **πρωτότυπου** φίλτρου σε **χαμηλοπερατό, υψηλοπερατό, ζωνοπερατό και ζωνοφρακτικό** φίλτρο.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Εισαγωγικές έννοιες

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το ψηφιακό φίλτρο είναι ένα σύστημα υλικού ή λογισμικού που δέχεται σαν είσοδο ένα διακριτό σήμα $x[n]$ και παράγει στην έξοδό του ένα δεύτερο διακριτό σήμα $y[n]$, τροποποιώντας το πλάτος, τη συχνότητα και τη φάση του σήματος εισόδου.

Τα ψηφιακά φίλτρα χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές όπως η συμπίεση δεδομένων, η απομάκρυνση της ηχούς, η κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση φωνητικών σημάτων και οι εφαρμογές ψηφιακής επεξεργασίας εικόνας, που στοχεύουν στη βελτίωση της ποιότητας του σήματος και στην εξαγωγή πληροφορίας από αυτό.

Οι βασικές λειτουργίες ενός ψηφιακού φίλτρου είναι η μεταβολή των φασματικών χαρακτηριστικών, ο διαχωρισμός των συχνοτήτων του σήματος εισόδου και η απομάκρυνση ανεπιθύμητων χαρακτηριστικών.

Το σήμα και ο θόρυβος δεν θα πρέπει να διαθέτουν κοινές συχνότητες, έτσι ώστε να είναι δυνατός ο πλήρης διαχωρισμός τους.

Η απόκριση ενός διακριτού φίλτρου κρουστικής απόκρισης $h[n]$ σε ένα εκθετικό σήμα $x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$ είναι το σήμα

$$y[n] = \mathcal{H}(e^{j\omega_0}) x[n] = (A | \mathcal{H}(e^{j\omega_0}) |) e^{j[\omega_0 n + \angle \mathcal{H}(e^{j\omega_0})]}$$

όπου $\mathcal{H}(e^{j\omega_0})$ είναι η συχνοτική απόκριση του φίλτρου, δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής του απόκρισης, υπολογισμένης στη θέση της συχνότητας του σήματος εισόδου, $\omega = \omega_0$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Η σύγκριση των ψηφιακών με τα αναλογικά φίλτρα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τα ψηφιακά φίλτρα διαθέτουν ιδιότητες όπως η **εντελής γραμμική** φασική απόκριση, οι οποίες δεν υποστηρίζονται από ένα αναλογικό φίλτρο.

Η συμπεριφορά των ψηφιακών φίλτρων **δεν εξαρτάται** και **δεν επηρεάζεται** από περιβαλλοντικούς παράγοντες, σε αντίθεση με τα αναλογικά φίλτρα που απαιτούν **πολύ συχνή βαθμονόμηση** αφού οι χαρακτηριστικές των ηλεκτρονικών τους συνιστωσών, επηρεάζονται από τη θερμοκρασία και τη γήρανση.

Η **συχνοτική απόκριση** των ψηφιακών φίλτρων μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί στις εκάστοτε απαιτήσεις αφού περιέχουν έναν **προγραμματιζόμενο επεξεργαστή**.

Τα ψηφιακά φίλτρα επιτρέπουν το φιλτράρισμα **πολλών** σημάτων εισόδου **από το ίδιο φίλτρο** και την αποθήκευση τόσο των **φιλτραρισμένων** όσο και των **αφιλτράριστων** τιμών.

Τα ψηφιακά φίλτρα χαρακτηρίζονται από **πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια υπολογισμού** σε σχέση με τα αναλογικά φίλτρα στα οποία η επίτευξη μιας τέτοιας ακρίβειας είναι αρκετά περιορισμένη και απαιτεί τη χρήση πολύπλοκων κυκλωμάτων.

Οι συνεχείς και εντυπωσιακές εξελίξεις της **τεχνολογίας VLSI** επιτρέπουν την κατασκευή ψηφιακών φίλτρων με **ολοένα και μικρότερο μέγεθος**, **χαμηλότερο κόστος** και **μειωμένη** κατανάλωση ισχύος.

Το βασικό μειονέκτημα των ψηφιακών φίλτρων έναντι των αναλογικών, είναι η **εισαγωγή χρονικών υστερήσεων** όσον αφορά στην παραγωγή του σήματος εξόδου, λόγω της χρήσεως **ψηφιακών επεξεργαστών**, με τις τιμές αυτών των υστερήσεων να εξαρτώνται από την **ταχύτητα του επεξεργαστή** και το **βαθμό πολυπλοκότητας** της επεξεργασίας που εφαρμόζεται επί του σήματος εισόδου.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Φίλτρα επιλογής συχνότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η εφαρμογή ενός **ψηφιακού φίλτρου** επί ενός σήματος εισόδου, έχει ως αποτέλεσμα την **εξασθένιση** ή **αποκοπή** ορισμένων από τις συχνότητες που περιλαμβάνονται σε αυτό.

Αυτή η διαδικασία εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της **συχνοτικής απόκρισης** $\mathcal{H}(e^{j\omega})$, που με τη σειρά της εξαρτάται από τους **συντελεστές** α_k και β_k της **εξίσωσης διαφορών**

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \alpha_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M \beta_k x[n-k]$$

Με **κατάλληλη** επιλογή των εν λόγω συντελεστών μπορούμε να κατασκευάσουμε ψηφιακά φίλτρα που να αποκόπτουν την **επιθυμητή** σε κάθε περίπτωση περιοχή συχνοτήτων, επιτρέποντας ταυτόχρονα **τη διέλευση** σε κάποιες άλλες από αυτές.

Ένας ισοδύναμος τρόπος περιγραφής ενός ψηφιακού φίλτρου, χρησιμοποιεί τη **συνάρτηση μεταφοράς** η οποία ορίζεται ως **ο μετασχηματισμός** \mathcal{Z} της κρουστικής απόκρισης $h[n]$.

Η τάξη του φίλτρου προσδιορίζεται **από το πλήθος των πόλων και των μηδενικών τιμών της συνάρτησης μεταφοράς**, η θέση των οποίων επί του **μιγαδικού επιπέδου** καθορίζει και το μέτρο της συνάρτησης $\mathcal{H}(e^{j\omega})$.

Ένας πόλος προκαλεί **ενίσχυση** των συχνοτήτων που βρίσκονται κοντά σε αυτόν, σε αντίθεση με ένα μηδενικό που προκαλεί **εξασθένιση** των γειτονικών συχνοτήτων.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

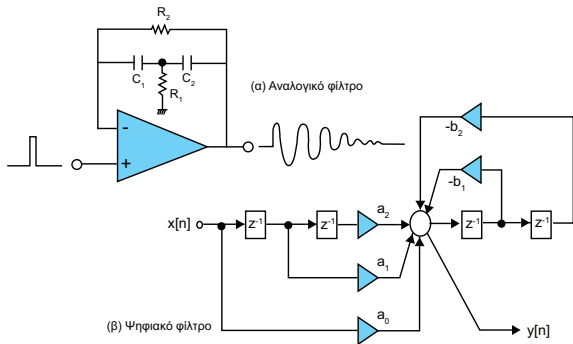
Φίλτρα επιλογής συχνότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εκτός από το μέτρο της συχνοτικής απόκρισης, οι θέσεις των πόλων και των μηδενικών τιμών επηρεάζουν και την **ευστάθεια** του φίλτρου, αφού οι πόλοι ενός **ευσταθούς φίλτρου** βρίσκονται όλοι **στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου** $z = e^{j\omega}$.

Ο πιο γνωστός τύπος ευστάθειας, είναι η **ευστάθεια κατά BIBO** σύμφωνα με την οποία η **απόκριση του φίλτρου όταν σε αυτό διαβιβαστεί φραγμένη είσοδος, είναι η παραγωγή φραγμένης εξόδου**.



Σχήμα: Δομές αναλογικού και ψηφιακού φίλτρου

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Φίλτρα πεπερασμένης και άπειρης κρουστικής απόκρισης

Εάν το μήκος του σήματος $h[n]$ είναι **πεπερασμένο**, το φίλτρο χαρακτηρίζεται ως φίλτρο **πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite Impulse Response (FIR) filter)**.

Εάν, αντίθετα, η **κρουστική απόκριση έχει άπειρο μήκος**, το φίλτρο χαρακτηρίζεται ως **φίλτρο άπειρης κρουστικής απόκρισης (Infinite Impulse Response (IIR) Filter)**.

Λαμβάνοντας υπόψη πως τόσο τα φίλτρα **τύπου FIR** όσο και τα φίλτρα **τύπου IIR** είναι **γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα διακριτά συστήματα**, η απόκρισή τους στο σήμα εισόδου $x[n]$ θα δίδεται από την **εξίσωση της συνέλιξης**.

Αυτή η εξίσωση για τα φίλτρα **τύπου FIR** έχει τη μορφή

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]$$

όπου N είναι το **πλήθος των δειγμάτων** της **πεπερασμένης** κρουστικής απόκρισης $h[n]$.

Η αντίστοιχη εξίσωση για τα φίλτρα **τύπου IIR** έχει τη μορφή

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

αφού στην προκειμένη περίπτωση η κρουστική απόκριση έχει **άπειρο μήκος**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σύγκριση των φίλτρων πεπερασμένης και άπειρης κρουστικής απόκρισης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τα ιδανικά φίλτρα **FIR** προσφέρουν μία **εντελώς γραμμική** φασική απόκριση η οποία εισάγει μία **χρονική υστέρηση** στο σήμα εισόδου **χωρίς** να παραμορφώνει τα φασικά του χαρακτηριστικά. Τα φίλτρα **IIR** χαρακτηρίζονται από **μη γραμμικές φασικές αποκρίσεις**, ειδικότερα **στο άκρο** των συχνοτικών ζωνών και είναι **ακατάλληλα** για μετάδοση δεδομένων, ανάλυση βιοιατρικών σημάτων και ψηφιακή επεξεργασία ήχου και εικόνας.

Τα φίλτρα **FIR** υλοποιούνται με **μη αναδρομικές δομές** και είναι πάντοτε **ευσταθή**. Αντίθετα τα φίλτρα **IIR** είναι **ευαίσθητα** σε διαταραχές της εισόδου τους που ίσως προκαλέσουν **αστάθεια** και **ταλαντώσεις** στην έξοδό τους. Ένα φίλτρο **IIR** είναι **αιτιατό** και **ευσταθές** μόνο όταν οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται **στο εσωτερικό** του μοναδιαίου κύκλου.

Εάν οι **ζώνες μετάβασης** της συχνοτικής απόκρισης πρέπει να έχουν **μικρό εύρος** δηλαδή να χαρακτηρίζονται από **απότομες μεταβάσεις** από τις περιοχές **διέλευσης** στις περιοχές **αποκοπής** και αντίστροφα, τα φίλτρα **FIR** απαιτούν **περισσότερους** συντελεστές φίλτρου σε σχέση με τα **IIR**.

Επομένως, για **δεδομένη** προδιαγραφή φίλτρου όσον αφορά **στην απόκριση πλάτους**, η χρήση φίλτρου **FIR** απαιτεί **μεγαλύτερο χρόνο επεξεργασίας** και **περισσότερο αποθηκευτικό χώρο** σε σχέση με φίλτρο **IIR**.

Σε αντίθεση με τα **ψηφιακά φίλτρα IIR** για τα οποία ορίζονται οι αντίστοιχες **αναλογικές δομές** και είναι δυνατή η **μετατροπή** ενός αναλογικού φίλτρου σε ένα **ψηφιακό IIR φίλτρο**, τα φίλτρα τύπου **FIR** **δεν διαθέτουν τα αντίστοιχα αναλογικά ισοδύναμα**. ωστόσο, από την άλλη πλευρά, προσφέρουν μεγαλύτερο βαθμό ευκολίας όσον αφορά τη σύνθεση φίλτρου που να χαρακτηρίζεται από την οποιαδήποτε αυθαίρετη συχνοτική απόκριση.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σύγκριση των φίλτρων πεπερασμένης και άπειρης κρουστικής απόκρισης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Σε περιπτώσεις κατά τις οποίες χρησιμοποιούμε **μικρό αριθμό από bits** για την υλοποίηση ψηφιακών φίλτρων, λαμβάνει χώρα η εμφάνιση **ανεπιθύμητων σφαλμάτων** όπως είναι τα **σφάλματα λόγω στρογγυλοποίησης τιμών** καθώς και τα **σφάλματα κβαντισμού των συντελεστών του φίλτρου**. Αποδεικνύεται πως αυτά τα σφάλματα είναι **πολύ πιο έντονα** στα φίλτρα τύπου IIR σε σχέση με τα FIR φίλτρα.

Στηριζόμενοι σε όλα τα παραπάνω, μπορούμε να διατυπώσουμε τους ακόλουθους **πρακτικούς κανόνες** όσον αφορά στον τύπο του φίλτρου που θα χρησιμοποιήσουμε σε κάθε περίπτωση:

- Εάν επιθυμούμε **απότομες μεταβάσεις** από τις ζώνες διέλευσης στις ζώνες αποκοπής και αντίστροφα, καθώς και λειτουργία **υπό καθεστώς υψηλής ρυθμαπόδοσης**, χρησιμοποιούμε φίλτρα **IIR**, αφού αυτά χρησιμοποιούν **λιγότερους συντελεστές** σε σχέση με τα FIR φίλτρα. Τα φίλτρα **IIR** είναι **πολύ αποδοτικά** και απαιτούν **πολύ λιγότερους** υπολογισμούς ανά δείγμα εξόδου για τον υπολογισμό της απόκρισής τους και για το λόγο αυτό οι υλοποιήσεις τους σε υλικό χρησιμοποιούνται σε **συστήματα πραγματικού χρόνου** τα οποία λειτουργούν σε **πολύ μεγαλύτερες** ταχύτητες σε σχέση με τα **FIR** φίλτρα.
- Εάν το πλήθος των συντελεστών του φίλτρου **δεν είναι πολύ μεγάλο** και επιθυμούμε **μηδενική ή όσο το δυνατόν μικρότερη παραμόρφωση των φασικών χαρακτηριστικών του σήματος εισόδου**, θα πρέπει να καταφύγουμε στη χρήση **FIR** φίλτρων.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Ιδανικά ψηφιακά φίλτρα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τα **ιδανικά ψηφιακά φίλτρα** διαθέτουν δύο σημαντικές ιδιότητες:

- η απόκριση πλάτους οδηγεί **στον απότομο μηδενισμό** του πλάτους του σήματος εισόδου στις θέσεις των **συχνοτήτων αποκοπής**.
- η απόκριση φάσης είναι **γραμμική συνάρτηση** της συχνότητας του σήματος εισόδου.

Έστω σήμα εισόδου $x[n]$ με συχνότητα στο διάστημα $\omega_1 < \omega < \omega_2$ που διέρχεται από ψηφιακό φίλτρο με συχνοτική απόκριση

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \begin{cases} Ae^{-j\omega n_0} & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

όπου $A = |\mathcal{H}(e^{j\omega})|$ και n_0 σταθερές. Το **φάσμα** του σήματος εξόδου θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \mathcal{X}(e^{j\omega})\mathcal{H}(e^{j\omega}) = A\mathcal{X}(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0} \quad (\omega_1 < \omega < \omega_2)$$

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της **κλιμάκωσης** και της **χρονικής μετατόπισης** του **μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου**

$$\alpha x[n] \Leftrightarrow \alpha \mathcal{X}(e^{j\omega}) \quad \text{και} \quad x[n - n_0] \Leftrightarrow \mathcal{X}(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$$

λαμβάνουμε $y[n] = Ax[n - n_0]$. Επομένως, η έξοδος του συστήματος είναι μια **τροποποιημένη έκδοση** του σήματος εισόδου που χαρακτηρίζεται από **χρονική υστέρηση** και **ενίσχυση ή εξασθένιση του πλάτους** του.

Αυτές όμως οι μεταβολές **δεν παραμορφώνουν** το σήμα.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Ιδανικά ψηφιακά φίλτρα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Επομένως, τα **ιδανικά φίλτρα** θα χαρακτηρίζονται από μια **γραμμική φασική χαρακτηριστική καμπύλη** που θα περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής

$$\angle \mathcal{H}(e^{j\omega}) = -\omega n_0$$

Πράγματι, στην περίπτωση αυτή η έξοδος του φίλτρου θα έχει τη μορφή

$$y[n] = Ax[n - n_0] = Ae^{j[\omega n + \angle \mathcal{H}(e^{j\omega})]} = Ae^{j\omega(n - n_0)}$$

από όπου φαίνεται πως η συχνότητα του σήματος **δεν έχει τροποποιηθεί** από το φίλτρο.

Η **υστέρηση** του σήματος ως συνάρτηση της συχνότητας, ορίζεται ως

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \left\{ \angle \mathcal{H}(e^{j\omega}) \right\}$$

ονομάζεται **υστέρηση ομάδας** και ερμηνεύεται ως η **χρονική υστέρηση** που υφίσταται η κάθε **απλή αρμονική** συνιστώσα του σήματος εισόδου λόγω της διέλευσής της από το ψηφιακό φίλτρο.

Αυτή η **υστέρηση** είναι **ανεξάρτητη** από τη συχνότητα ω .

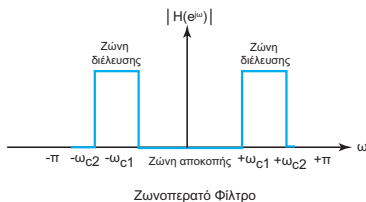
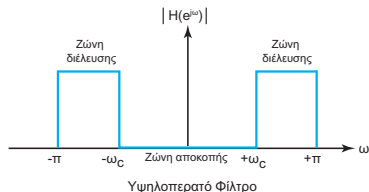
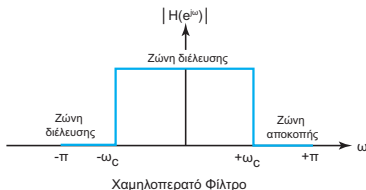
Επομένως, όλα τα σήματα υφίστανται **την ίδια υστέρηση** από ένα ιδανικό ψηφιακό φίλτρο, **ανεξάρτητα** από τη συχνότητά τους.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Ιδανικά ψηφιακά φίλτρα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Απόκριση πλάτους ιδανικού χαμηλοπερατού, υψηλοπερατού, ζωνοπερατού και ζωνοφρακτικού ψηφιακού φίλτρου.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Ιδανικά ψηφιακά φίλτρα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το βασικό μειονέκτημα των ιδανικών φίλτρων, είναι πως αυτά **δεν αποτελούν αιτιατά συστήματα** και επομένως **δεν μπορούν να υλοποιηθούν στην πράξη**.

Επομένως, τα ιδανικά φίλτρα δεν αποτελούν παρά **θεωρητικά μοντέλα**, η συμπεριφορά των οποίων προσεγγίζεται στον καλύτερο δυνατό βαθμό από τα **πραγματικά φίλτρα** τα οποία θα πρέπει υποχρεωτικά να είναι **αιτιατά**.

Ιδιαίτερο ρόλο στην κατασκευή ενός ψηφιακού φίλτρου, παίζουν **οι θέσεις των πόλων και των μηδενικών τιμών** του φίλτρου επί του μιγαδικού επιπέδου.

Ειδικότερα, οι πόλοι του συστήματος θα πρέπει να τοποθετηθούν **κοντά στα σημεία του μοναδιαίου κύκλου που αντιστοιχούν στις επιθυμητές σε κάθε περίπτωση τιμές συχνότητων**, ενώ αντίθετα οι μηδενικές τιμές θα πρέπει να τοποθετηθούν **κοντά στις λιγότερο σημαντικές συχνότητες**.

Επιπλέον, θα πρέπει να επιβληθούν και οι δύο ακόλουθοι περιορισμοί:

- Όλοι οι πόλοι του φίλτρου θα πρέπει να τοποθετηθούν **στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου**, για να είναι το φίλτρο **αιτιατό και ευσταθές**. Οι μηδενικές τιμές μπορούν να τοποθετηθούν **οπουδήποτε πάνω στο μιγαδικό επίπεδο**.
- Εάν το σύστημα χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη **μιγαδικών πόλων και μηδενικών τιμών**, αυτά θα πρέπει να εμφανίζονται σε ζεύγη **συζυγών ποσοτήτων**, έτσι ώστε οι συντελεστές του φίλτρου να είναι **πραγματικοί αριθμοί**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Πραγματικά ψηφιακά φίλτρα

- Η **συχνοτική απόκριση** των φίλτρων **επιλογής συχνοτήτων** μπορεί να λάβει μηδενική τιμή **για ορισμένες** τιμές συχνότητας, όχι όμως και σε **κάθε** πεπερασμένη ζώνη συχνοτήτων, αφού τότε το ολοκλήρωμα της **διακριτής έκδοσης του θεωρήματος Paley-Wiener** θα ελάμβανε **άπειρη** τιμή.
- Η **απόκριση πλάτους** του φίλτρου $|\mathcal{H}(e^{j\omega})|$ **δεν έχει** σταθερή τιμή κατά μήκος της ζώνης διέλευσης, αλλά παρουσιάζει **διακυμάνσεις**. Εάν το πλάτος αυτών των διακυμάνσεων είναι ίσο με δ_p , τότε η τιμή του πλάτους της συνάρτησης κυμαίνεται μεταξύ $1 \pm \delta_p$.
- Η τιμή του μέτρου της συνάρτησης στην **περιοχή αποκοπής συχνοτήτων** συνήθως **δεν είναι** σταθερή και ίση με το μηδέν, αλλά παρουσιάζει και αυτή **διακυμάνσεις**, το πλάτος των οποίων είναι ίσο με δ_s .
- Από τις τιμές των δ_p και δ_s μπορούμε να ορίσουμε το **εύρος διακύμανσης** στη ζώνη διέλευσης A_p και την **εξασθένηση** στη ζώνη αποκοπής A_s (σε dB) ως

$$A_p = -20 \log_{10} \frac{1 - \delta_p}{1 + \delta_p} \quad \text{και} \quad A_s = -20 \log_{10} \frac{\delta_s}{1 + \delta_p}$$

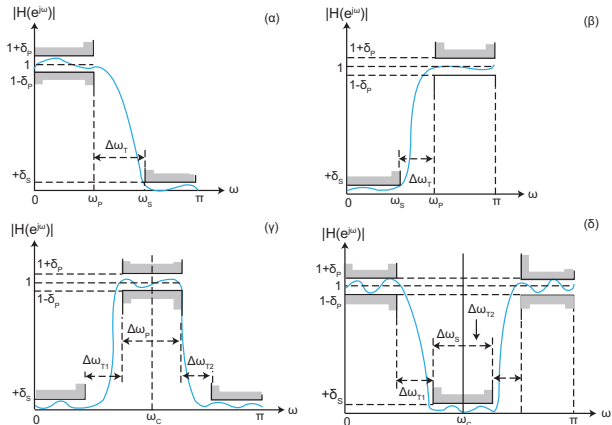
- Η μετάβαση από την περιοχή **διέλευσης** στην περιοχή **αποκοπής** δεν είναι απότομη και **δεν παρατηρείται** ασυνέχεια στη **συχνότητας αποκοπής**. Η πτώση του μέτρου $|\mathcal{H}(e^{j\omega})|$ είναι **αρκετά ομαλή** και ο πραγματικός μηδενισμός γίνεται **σε μία άλλη** συχνότητα που υπαγορεύει και το εύρος της **ζώνης μετάβασης**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Πραγματικά ψηφιακά φίλτρα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Μεταβολή του πλάτους της $|H(e^{j\omega})|$ πραγματικών ψηφιακών φίλτρων

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Πραγματικά ψηφιακά φίλτρα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το εύρος της ζώνης διέλευσης, είναι γνωστό ως **εύρος ζώνης** του φίλτρου. Επομένως, η **απόκριση πλάτους** ενός **πραγματικού** φίλτρου αποτελείται από τη **ζώνη διέλευσης**, τη **ζώνη μετάβασης** και τη **ζώνη αποκοπής** που ορίζονται από τις περιοχές συχνοτήτων $[0, \omega_p]$, $[\omega_p, \omega_s]$ και $[\omega_s, \pi]$, αντίστοιχα.

Το **πραγματικό** και το **φανταστικό** μέρος της συνάρτησης απόκρισης συχνότητας ενός ψηφιακού **αιτιατού** φίλτρου σχετίζονται δια μέσου του **διακριτού μετασχηματισμού Hilbert**. Το **μέτρο** και η **φάση** της συχνοτικής απόκρισης εξαρτώνται από το **πραγματικό** και το **φανταστικό** μέρος της εν λόγω συνάρτησης ως

$$|\mathcal{H}(e^{j\omega})| = \sqrt{\mathcal{H}_R^2(\omega) + \mathcal{H}_I^2(\omega)} \quad \text{και} \quad \angle\{\mathcal{H}(e^{j\omega})\} = \tan^{-1} \left[\frac{\mathcal{H}_I(\omega)}{\mathcal{H}_R(\omega)} \right]$$

και επομένως αυτές οι συναρτήσεις **δεν μπορούν να επιλεγούν με αυθαίρετο τρόπο και ανεξάρτητα η μία από την άλλη**.

Συνήθως σχεδιάζεται το **μέτρο** της συνάρτησης $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ έτσι ώστε το φίλτρο να συμπεριφέρεται κατάλληλα και στη συνέχεια **επιλέγεται** η κατάλληλη **συνάρτηση φασικής απόκρισης** $\angle\{\mathcal{H}(e^{j\omega})\}$.

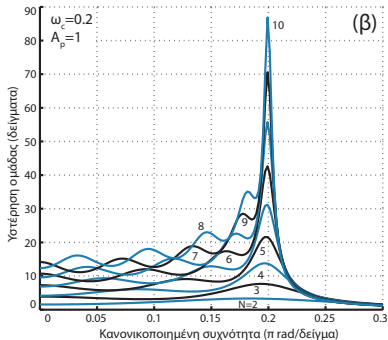
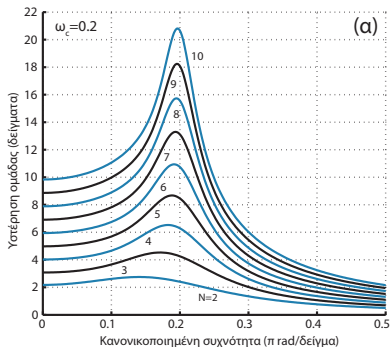
Τα ψηφιακά φίλτρα περιγράφονται από τις προσεγγίσεις **Butterworth**, **Chebyshev I**, **Chebyshev II** και **Cauer** (ή **ελλειπτική προσέγγιση**).

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Πραγματικά ψηφιακά φίλτρα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



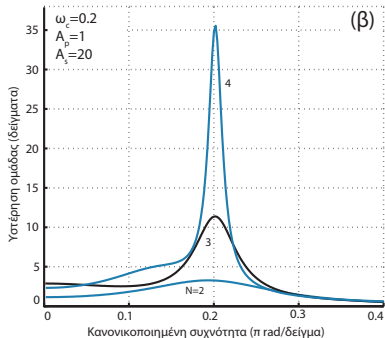
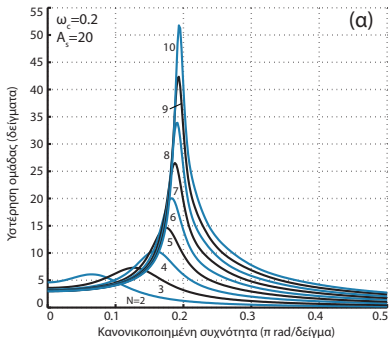
Σχήμα: Η μεταβολή της υστέρησης ομάδας για τα ψηφιακά φίλτρα **Butterworth** και **Chebyshev I** και για συγκεκριμένες προδιαγραφές λειτουργίας.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Πραγματικά ψηφιακά φίλτρα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Η μεταβολή της υστέρησης ομάδας για τα ψηφιακά φίλτρα **Chebyshev II** και **Causer** και για συγκεκριμένες προδιαγραφές λειτουργίας.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση ψηφιακών φίλτρων

Τα πέντε στάδια σχεδίασης και κατασκευής ψηφιακών φίλτρων, είναι τα εξής:

- Καθορισμός των **προδιαγραφών** και των **απαιτήσεων λειτουργίας** του φίλτρου.
- Υπολογισμός των **συντελεστών του φίλτρου** έτσι ώστε η συνάρτηση μεταφοράς του να ικανοποιεί στο μέγιστο δυνατό βαθμό τις προδιαγραφές λειτουργίας.
- Αναπαράσταση του φίλτρου από την κατάλληλη δομή **σχηματικών διαγραμμάτων** ή **γραφήμάτων ροής σημάτων**.
- Εκτίμηση των επιπτώσεων του **πεπερασμένου μήκους των καταχωρητών** που χρησιμοποιούνται για την αποθήκευση των συντελεστών του φίλτρου και των δειγμάτων εισόδου και εξόδου καθώς και των **σφαλμάτων πάσης φύσεως στην απόδοση** και στην **ακρίβεια της λειτουργίας** του φίλτρου.
- **Υλοποίηση** του φίλτρου σε υλικό ή λογισμικό.

Σε αρκετές περιπτώσεις, είναι πιθανή η **συγχώνευση** δύο ή περισσότερων βημάτων σε μία πιο πολύπλοκη διαδικασία, ενώ είναι αρκετά συνηθισμένη η **επιστροφή** σε κάποιο βήμα περισσότερες από μία φορές, εάν κάτι τέτοιο κριθεί αναγκαίο.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση ψηφιακών φίλτρων

Αρχικά καθορίζουμε τις **παραμέτρους λειτουργίας** του φίλτρου όπως είναι

- τα **χαρακτηριστικά του σήματος** (τύπος και μηχανισμός παραγωγής σημάτων εισόδου και εξόδου, ρυθμός δεδομένων, πλάτος σήματος και μέγιστη συχνότητα ενδιαφέροντος)
- τα **χαρακτηριστικά του φίλτρου** (επιθυμητή απόκριση πλάτους, φάσης και τιμές ανοχής, ταχύτητα λειτουργίας)
- ο **τύπος της υλοποίησης** (κώδικας σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού ή χρήση εξειδικευμένου τεχνικού εξοπλισμού)
- κάθε άλλος σημαντικός παράγοντας, όπως είναι το **κόστος υλοποίησης**.

Μία μέθοδος υπολογισμού της συνάρτησης μεταφοράς χαρακτηρίζεται ως **άμεση** όταν το πρόβλημα επιλύεται στο χώρο των z και ως **έμμεση** όταν κατασκευάζουμε μία συνάρτηση μεταφοράς **συνεχούς χρόνου** η οποία **μετασχηματίζεται** στο διακριτό ισοδύναμό της.

Τα φίλτρα **μη αναδρομικού τύπου** σχεδιάζονται πάντοτε με **άμεσες μεθόδους**, ενώ τα **αναδρομικά φίλτρα** μπορούν να σχεδιαστούν χρησιμοποιώντας **τόσο άμεσες όσο και έμμεσες μεθόδους**.

Για την περίπτωση των φίλτρων **FIR**, η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ προσδιορίζεται δια του υπολογισμού των δειγμάτων $h[n]$ της κρουστικής τους απόκρισης, αφού αυτή έχει **πεπερασμένο μήκος**.

Για την περίπτωση των φίλτρων **IIR**, ο προσδιορισμός της συνάρτησης μεταφοράς συνίσταται στον υπολογισμό των **συντελεστών** α_k και β_k της εξίσωσης διαφορών που περιγράφει τη λειτουργία τους.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση ψηφιακών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στα φίλτρα FIR, ο υπολογισμός των τιμών της $h[n]$ γίνεται με πολλούς τρόπους, όπως είναι η χρήση συνάρτησης παραθύρου, η δειγματοληψία στο χώρο των συχνοτήτων και ο αλγόριθμος Parks-McClellan.

Στα φίλτρα IIR, ο υπολογισμός των συντελεστών α_k και β_k , στηρίζεται κυρίως στο μετασχηματισμό αναλογικών φίλτρων στα ψηφιακά ισοδύναμά τους, όπως είναι η μέθοδος αναλλοίωτου της κρουστικής απόκρισης και ο διγραμμικός μετασχηματισμός.

Μία ακόμη μέθοδος υπολογισμού των συντελεστών ενός IIR φίλτρου, είναι η μέθοδος τοποθέτησης πόλων και μηδενικών τιμών. Ωστόσο, αυτή δεν συνίσταται για τη σχεδίαση φίλτρων υψηλών προδιαγραφών, αφού στηρίζεται στην επαναληπτική εναλλαγή των θέσεων των πόλων και των μηδενικών τιμών επί του μιγαδικού επιπέδου και στη χρήση της μεθόδου της δοκιμής και του λάθους.

Η συνάρτηση μεταφοράς που υπολογίζεται με τις παραπάνω τεχνικές αναπαρίσταται με σχηματικά διαγράμματα ή γραφήματα ροής σημάτων.

Οι μέθοδοι αναπαράστασης της συνάρτησης μεταφοράς χαρακτηρίζονται άμεσες όταν χρησιμοποιούν απευθείας τη συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού φίλτρου ή έμμεσες όταν η δομή του φίλτρου μέσω ενός ισοδύναμου πρωτότυπου αναλογικού φίλτρου.

Για τα φίλτρα IIR χρησιμοποιείται η κανονική ή μη κανονική μορφή, ενώ εναλλακτικά, μπορούμε να διαχωρίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε απλούστερες συναρτήσεις και σε διασύνδεση υποσυστημάτων εν σειρά ή παράλληλα.

Η αναπαράσταση των φίλτρων FIR, στηρίζεται κυρίως στην κανονική και στη μη κανονική μορφή ενώ άλλες δομές στηρίζονται σε δειγματοληψία συχνότητας και στη χρήση τεχνικών συνέλιξης.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση ψηφιακών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Αν και κατά τη φάση της αναπαράστασης του φίλτρου υποθέτουμε **άπειρη** ή **πολύ μεγάλη** ακρίβεια, στην πράξη το ψηφιακό υλικό χαρακτηρίζεται από **πεπερασμένη ακρίβεια** που εξαρτάται από το **μήκος των καταχωρητών** που χρησιμοποιούνται για την αποθήκευση των αριθμών, τον **τύπο της αναπαράστασης** που έχει υιοθετηθεί και τον **τύπο της αριθμητικής**.

Ειδικότερα, οι βασικές αιτίες της μείωσης της απόδοσης ενός φίλτρου είναι οι εξής:

- Ο **κβαντισμός των συντελεστών του φίλτρου** που εισαγάγει σφάλματα στις αποκρίσεις πλάτους και φάσης, με αποτέλεσμα αυτές να είναι διαφορετικές από εκείνες που είχαν καθοριστεί κατά τον προσδιορισμού των προδιαγραφών.
- Ο **κβαντισμός των τιμών των σημάτων εισόδου και εξόδου** καθώς και των **εσωτερικών σημάτων** ενός ψηφιακού φίλτρου.
- Τα **αριθμητικά σφάλματα στρογγυλοποίησης** που εμφανίζονται όταν τα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν, απαιτούν τη χρήση περισσότερων bits από αυτά που υπαγορεύονται από το μήκος των καταχωρητών, με αποτέλεσμα τη **στρογγυλοποίηση** τους ή την εμφάνιση **φαινομένων υπερχείλισης**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση ψηφιακών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η πραγματική **υλοποίηση** του φίλτρου, δηλαδή η φυσική του κατασκευή, πραγματοποιείται είτε με **λογισμικό** που θα εξομοιώνει τη λειτουργία του φίλτρου σε **ηλεκτρονικό υπολογιστή** ή **ολοκληρωμένο κύκλωμα ψηφιακής επεξεργασίας σήματος** είτε καταφεύγοντας σε μία υλοποίηση με **υλικό**.

Το φίλτρο που θα κατασκευάσουμε, θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον τις επόμενες συνιστώσες:

- Μνήμη για την **αποθήκευση** των **συντελεστών του φίλτρου**. Εάν αυτοί έχουν υπολογιστεί δια παντός και δεν πρόκειται να μεταβληθούν ποτέ, μπορούμε να τους αποθηκεύσουμε σε μία **μνήμη ROM** για λόγους καλύτερης προστασίας.
- Μνήμη για την αποθήκευση **των δειγμάτων εισόδου και εξόδου**.
- **Πολλαπλασιαστές** υλοποιημένους σε υλικό ή λογισμικό.
- **Αθροιστές** ή **αριθμητική και λογική μονάδα**.

Ο τύπος της υλοποίησης επιλέγεται σύμφωνα με τις ανάγκες μας.

Εάν το φίλτρο προορίζεται για **εφαρμογές πραγματικού χρόνου** απαιτείται **ταχύτατη επεξεργασία** του τρέχοντος δείγματος και παραγωγή της εξόδου **πριν από την έλευση** του επόμενου δείγματος.

Αυτό επιβάλλει την υλοποίηση του φίλτρου σε **υλικό** και τη χρήση **γρήγορου εξοπλισμού**.

Σε εφαρμογές **μη πραγματικού χρόνου** στις οποίες συνήθως είναι διαθέσιμο **το σύνολο των δεδομένων** προς επεξεργασία, η υλοποίηση του φίλτρου μπορεί να πραγματοποιηθεί σε λογισμικό και χρησιμοποιώντας έναν **απλό υπολογιστή**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Η αιτιότητα στα ψηφιακά φίλτρα

Οι **ικανές** και **αναγκαίες** συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιεί η συχνοτική απόκριση ενός διακριτού φίλτρου έτσι ώστε αυτό να είναι **αιτιατό**, υπαγορεύονται από τη **διακριτή έκδοση του θεωρήματος των Paley-Wiener** που διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα

Εάν η **κρουστική απόκριση** κάποιου φίλτρου $h[n]$ έχει **πεπερασμένη ενέργεια** και είναι **αιτιατό διακριτό σήμα**, δηλαδή έχει τιμές $h[n] = 0$ για $n < 0$, αποδεικνύεται ότι

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |\ln | \mathcal{H}(e^{j\omega}) || d\omega < \infty$$

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να **συσχετίσουμε τη συνάρτηση $| \mathcal{H}(e^{j\omega}) |$ με κάποια φυσική απόκριση $\mathcal{L}\mathcal{H}(e^{j\omega})$** έτσι ώστε το φίλτρο που περιγράφεται από τη συνάρτηση της **συχνοτικής απόκρισης**

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \mathcal{H}_R(e^{j\omega}) + j\mathcal{H}_I(e^{j\omega}) = | \mathcal{H}(e^{j\omega}) | e^{j\mathcal{L}\mathcal{H}(e^{j\omega})}$$

να είναι ένα **αιτιατό ψηφιακό φίλτρο**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Η αιτιότητα στα ψηφιακά φίλτρα

Θεωρώντας ένα **αιτιατό ψηφιακό φίλτρο** $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ η επιβολή της συνθήκης της **αιτιότητας** επιτρέπει τον **πλήρη καθορισμό** της συνάρτησης $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ γνωρίζοντας **μόνο το πραγματικό μέρος της**, $\mathcal{H}_R(e^{j\omega}) \equiv \Re\{\mathcal{H}(e^{j\omega})\}$, ή **μόνο το φανταστικό μέρος της** $\mathcal{H}_I(e^{j\omega}) = \Im\{\mathcal{H}(e^{j\omega})\}$ και την τιμή του δείγματος $h[0]$. Πράγματι, παρατηρώντας ότι

$$h_e[n] = \frac{h[n] + h[-n]}{2} = \begin{cases} \frac{h[n] + 0}{2} & \text{για } n > 0 \\ \frac{h[n] + h[n]}{2} & \text{για } n = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{h[n]}{2} & \text{για } n > 0 \\ h[n] & \text{για } n = 0 \end{cases}$$

η κρουστική απόκριση θα λάβει τη μορφή

$$h[n] = \begin{cases} 2h_e[n] & \text{για } n > 0 \\ h_e[n] & \text{για } n = 0 \end{cases} = 2h_e[n]u[n] - h_e[0]\delta[n]$$

και ο υπολογισμός του **μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου** της τελευταίας εξίσωσης μας δίνει

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(e^{j\omega}) &= \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}_R(e^{j\lambda})\delta(\omega - \lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}_R(e^{j\lambda}) d\lambda \\ &\quad - \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}_R(e^{j\lambda}) \cot\left(\frac{\omega - \lambda}{2}\right) d\lambda - h_e[0] \end{aligned}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Η αιτιότητα στα ψηφιακά φίλτρα

ή σε μία ισοδύναμη γραφή,

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \mathcal{H}_R(e^{j\omega}) + j \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}_R(e^{j\lambda}) \cot\left(\frac{\omega - \lambda}{2}\right) d\lambda \right\}$$

Επομένως, το **φανταστικό** μέρος $\mathcal{H}_I(\omega)$ της συχνοτικής απόκρισης $\mathcal{H}(e^{j\omega})$, μπορεί να υπολογιστεί από το **πραγματικό** μέρος της, $\mathcal{H}_R(\omega)$ δια μέσου της εξισώσεως

$$\mathcal{H}_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}_R(e^{j\lambda}) \cot\left(\frac{\omega - \lambda}{2}\right) d\lambda$$

Από την άλλη πλευρά, διαπιστώνουμε ότι

$$\mathcal{H}_R(e^{j\omega}) = h[0] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}_I(e^{j\lambda}) \cot\left(\frac{\omega - \lambda}{2}\right) d\lambda$$

Οι εξισώσεις

$$\mathcal{H}_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}_R(e^{j\lambda}) \cot\left(\frac{\omega - \lambda}{2}\right) d\lambda \quad \text{και}$$

$$\mathcal{H}_R(e^{j\omega}) = +\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}_I(e^{j\lambda}) \cot\left(\frac{\omega - \lambda}{2}\right) d\lambda + h[0]$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Η αιτιότητα στα ψηφιακά φίλτρα

αποτελούν ζεύγος εξισώσεων ευθέως - αντίστροφου μετασχηματισμού για τον διακριτό μετασχηματισμό Hilbert.

Αυτές οι εξισώσεις χαρακτηρίζουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier μιας αιτιατής και ευσταθούς διακριτής ακολουθίας πραγματικών αριθμών.

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη της αιτιότητας και εργαζόμενοι όπως και πριν οδηγούμαστε στις σχέσεις

$$\angle \mathcal{H}(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\pi}^{+\pi} \log(|\mathcal{H}(e^{j\lambda})|) \cot\left(\frac{\omega-\lambda}{2}\right) d\lambda$$

$$\log(|\mathcal{H}(e^{j\omega})|) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\pi}^{+\pi} \angle \mathcal{H}(e^{j\lambda}) \cot\left(\frac{\omega-\lambda}{2}\right) d\lambda + \tilde{h}[0]$$

Η ποσότητα $\tilde{h}[0]$ που εμφανίζεται στη δεύτερη εξίσωση υπολογίζεται ως

$$\tilde{h}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \log |\mathcal{H}(e^{j\omega})| d\omega$$

Αποδεικνύεται πως εάν όλες οι μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς $\mathcal{H}(z)$ βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, οπότε το φίλτρο είναι γνωστό ως φίλτρο ελάχιστης φάσης, το σήμα $\tilde{h}[n]$ είναι ένα αιτιατό σήμα.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Σε ένα φίλτρο **πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης**, το πλήθος των δειγμάτων του διακριτού σήματος $h[n]$ είναι **πεπερασμένο** και ίσο με την **τάξη** του φίλτρου N .

Επομένως, η **έξοδος** του φίλτρου θα δίδεται από τη σχέση

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k x[n-k]$$

Παρατηρούμε πως ο υπ' αριθμόν k συντελεστής του φίλτρου **ταυτίζεται** με το αντίστοιχο δείγμα της κρουστικής απόκρισης, δηλαδή $\beta_k = h[k]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$).

Τα φίλτρα **πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης** μπορούν να διαχωριστούν σε δύο κατηγορίες, στα **συμμετρικά** και στα **αντισυμμετρικά** φίλτρα, η κρουστική απόκριση των οποίων ικανοποιεί τις ιδιότητες συμμετρίας

$$h[n] = +h[N-1-n] \quad \text{και} \quad h[n] = -h[N-1-n]$$

Επομένως η **συνάρτηση μεταφοράς** του ψηφιακού φίλτρου υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots + h[N-2]z^{-(N-2)} + h[N-1]z^{-(N-1)} \\ &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots \pm h[2]z^{-(N-3)} \pm h[1]z^{-(N-2)} \pm h[0]z^{-(N-1)} \end{aligned}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στα **συμμετρικά** και **αντισυμμετρικά** φίλτρα **FIR**, η συνάρτηση $\mathcal{H}(z)$ διαθέτει ρίζες που εμφανίζονται σε **αντίστροφα ζεύγη**.

Επομένως, εάν η ποσότητα z_1 αποτελεί **ρίζα** της συνάρτησης $\mathcal{H}(z)$, το ίδιο θα συμβαίνει και με την ποσότητα $1/z_1$.

Η συνάρτηση μεταφοράς των **συμμετρικών** και **αντισυμμετρικών** φίλτρων τύπου FIR, χαρακτηρίζεται από τις επόμενες ιδιότητες:

- Στις θέσεις $z_i = \pm 1$ υπάρχει **αυθαίρετο πλήθος ριζών**, αφού $z_i^{-1} = \pm 1$.
- Στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου υπάρχει **αυθαίρετο πλήθος ζευγών μιγαδικών συζυγών ριζών**, αφού οι μιγαδικοί αριθμοί που ανήκουν σε αυτή την καμπύλη ικανοποιούν την εξίσωση

$$(z - z_i)(z - z_i^*) = (z - e^{i\psi_i})(z - e^{-i\psi_i}) = \left(z - \frac{1}{z_i^*}\right) \left(z - \frac{1}{z_i}\right)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\mathcal{H}(z) = \begin{cases} z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] \left(z^{\frac{N-1-2n}{2}} \pm z^{-\frac{N-1-2n}{2}} \right) \\ z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \left\{ h \left[\frac{N-1}{2} \right] + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h[n] \left(z^{\frac{N-1-2n}{2}} \pm z^{-\frac{N-1-2n}{2}} \right) \right\} \end{cases}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

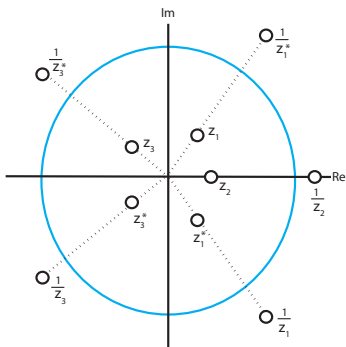
Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η 1η εξίσωση αντιστοιχεί σε **άρτιες** τιμές του N και η 2η σε **περιττές** τιμές του N .

Έχοντας υπολογίσει τη **συνάρτηση μεταφοράς** $\mathcal{H}(z)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση **συχνοτικής απόκρισης** $\mathcal{H}(e^{j\omega})$, υπολογίζοντας τη **συνάρτηση μεταφοράς** επί της περιφέρειας του **μοναδιαίου κύκλου** $z = e^{j\omega}$.



Σχήμα: Επίδειξη της συμμετρίας των **πραγματικών** και των **φανταστικών** ριζών της συνάρτησης μεταφοράς $\mathcal{H}(z)$ ενός φίλτρου FIR.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Υπάρχουν τέσσερις τύποι φίλτρων τύπου FIR.

- Συμμετρικά φίλτρα και περιττές τιμές του N , γνωστά ως φίλτρα FIR τύπου I
- Συμμετρικά φίλτρα και άρτιες τιμές του N , γνωστά ως φίλτρα FIR τύπου II
- Αντισυμμετρικά φίλτρα και περιττές τιμές του N , γνωστά ως φίλτρα FIR τύπου III
- Αντισυμμετρικά φίλτρα και άρτιες τιμές του N , γνωστά ως φίλτρα FIR τύπου IV

Καταφεύγοντας σε επιχειρήματα συμμετρίας η απόκριση πλάτους των αντισυμμετρικών φίλτρων FIR δίδεται από την εξίσωση

$$|\mathcal{H}(e^{j\omega})| = \begin{cases} 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] \sin \left[\omega \left(\frac{N-1}{2} \right) - n \right] & N \text{ άρτιο} \\ 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h[n] \sin \left[\omega \left(\frac{N-1}{2} \right) - n \right] & N \text{ περιττό} \end{cases}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

ενώ η **φασική απόκριση** $\angle \mathcal{H}(e^{j\omega})$ θα έχει **την ίδια μορφή** για **άρτιες** και **περιττές** τιμές του μήκους N της κρουστικής απόκρισης και θα δίδεται από τη σχέση

$$\angle \mathcal{H}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \omega \left(\frac{N-1}{2} \right) & \text{για } |\mathcal{H}(e^{j\omega})| > 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \omega \left(\frac{N-1}{2} \right) & \text{για } |\mathcal{H}(e^{j\omega})| < 0 \end{cases}$$

Επομένως, η **φασική απόκριση** των συμμετρικών και αντισυμμετρικών φίλτρων τύπου FIR είναι **γραμμική συνάρτηση** της συχνότητας.

Για το λόγο αυτό τα εν λόγω φίλτρα ονομάζονται και **φίλτρα γραμμικής φάσης**.

Ορίζοντας τους κατάλληλους συντελεστές, το μέτρο της συχνοτικής απόκρισης $\mathcal{H}_r(\omega)$ για όλες τις κατηγορίες φίλτρων, γράφεται ως

$$|\mathcal{H}(e^{j\omega})| = \mathcal{Q}(\omega)\mathcal{P}(\omega)$$

όπου η συνάρτηση $\mathcal{Q}(\omega)$ ορίζεται ως

$$\mathcal{Q}(\omega) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου I} \\ 1 & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου II} \\ \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου III} \\ \sin(\omega) & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου IV} \end{cases}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

ενώ η συνάρτηση $\mathcal{P}(\omega)$ δίδεται από την εξίσωση

$$\mathcal{P}(\omega) = \sum_{k=0}^L \xi[k] \cos(\omega k)$$

με τις ποσότητες $\xi[k]$ και L να ορίζονται από τις εξισώσεις

$$\xi[k] = \begin{cases} \tilde{\beta}(k) & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου I} \\ \alpha(k) & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου II} \\ \tilde{\delta}(k) & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου III} \\ \tilde{\gamma}(k) & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου IV} \end{cases}$$

και

$$L = \begin{cases} (N/2) - 1 & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου I} \\ (N - 1)/2 & \text{για φίλτρα FIR τύπου II} \\ (N/2) - 1 & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου III} \\ (N - 3)/2 & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου IV} \end{cases}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η σχεδίαση ενός **φίλτρου FIR** με τα επιθυμητά χαρακτηριστικά, στηρίζεται στον **προσδιορισμό της συχνοτικής απόκρισης**, η οποία στη γενική περίπτωση έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h_d[n] e^{-j\omega n}$$

Έχοντας υπολογίσει αυτή τη συνάρτηση, μπορούμε στη συνέχεια να προσδιορίσουμε το **διάνυσμα της κρουστικής απόκρισης** του φίλτρου από την εξίσωση του **αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier**

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Ωστόσο, το διακριτό σήμα που θα προκύψει με τον τρόπο αυτό, έχει **άπειρο πλήθος στοιχείων**. Επομένως για να μπορέσει να χρησιμοποιηθεί για την αναπαράσταση ενός φίλτρου πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης θα πρέπει να το μετασχηματίσουμε με κάποιο τρόπο έτσι ώστε να διατηρήσουμε μόνο τα N πρώτα δείγματά του.

Ακολουθεί η παρουσίαση **τεχνικών σχεδίασης** ψηφιακών φίλτρων αυτού του τύπου.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ο πιο εύκολος τρόπος δημιουργίας μιας **κρουστικής απόκρισης πεπερασμένου μήκους** $h[n]$, είναι ο **πολλαπλασιασμός** της ιδανικής κρουστικής απόκρισης άπειρου μήκους $h_d[n]$, με μία **συνάρτηση παραθύρου** $w[n]$, μήκους N δειγμάτων έτσι ώστε αυτή να καταστεί ένα **πεπερασμένο** διακριτό σήμα.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Για την περίπτωση του **ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου** με συχνότητα αποκοπής $\omega = \omega_c$ και συχνοτική απόκριση με **μοναδιαίο κέρδος** και **γραμμική φάση**

$$\mathcal{H}_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\alpha\omega} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

η αντίστοιχη **ιδανική κρουστική απόκριση άπειρου μήκους** $h_d[n]$ υπολογίζεται ως

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} e^{j\omega(n-\alpha)} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$$

Παρατηρώντας πως το φάσμα $\mathcal{W}(e^{j\omega})$ όλων των **συναρτήσεων παραθύρου** $w[n]$ μήκους N δειγμάτων χαρακτηρίζεται από **γραμμική φάση** $\angle \mathcal{W}(e^{j\omega}) = \omega(N-1)/2$, η κατασκευή ενός φίλτρου FIR με χρήση **συνάρτησης παραθύρου**, αντιστοιχεί στην τιμή $\alpha = (N-1)/2$ η οποία νοείται ως **υστέρηση στο πεδίο του χρόνου**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ο πολλαπλασιασμός της **ιδανικής κρουστικής απόκρισης** $h_d[n]$ με την κατάλληλη **συνάρτηση παραθύρου** $w[n]$, δίνει την **πεπερασμένη** κρουστική απόκριση $h[n] = h_d[n]w[n]$ μήκους N στοιχείων.

Αντίστοιχα, η **ιδανική συχνοτική απόκριση** $\mathcal{H}_d(e^{j\omega})$ προσεγγίζεται από την **πραγματική συχνοτική απόκριση** $\mathcal{H}(e^{j\omega})$, η οποία χαρακτηρίζεται από τις επόμενες ιδιότητες.

(1) Η **πραγματική** συχνοτική απόκριση $\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h[n]\}$ θα προκύψει από τη **συνέλιξη** ανάμεσα στην **ιδανική** συχνοτική απόκριση $\mathcal{H}_d(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h_d[n]\}$ και στο **φάσμα** της συνάρτησης παραθύρου $\mathcal{W}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{w[n]\}$:

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}_d(e^{j\lambda}) \mathcal{W}(e^{j(\omega-\lambda)}) d\lambda$$

Για την ιδανική περίπτωση του **ορθογώνιου παραθύρου** που οδηγεί στο **μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσέγγισης** ε^2 σε σχέση με όλα τα παράθυρα του ίδιου μήκους, η **πραγματική** συχνοτική απόκριση υπολογίζεται ως

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}_d(e^{j\lambda}) \frac{\sin[(\omega-\lambda)N/2]}{\sin[(\omega-\lambda)/2]} \exp\left[-j(\omega-\lambda)\frac{N-1}{2}\right] d\lambda$$

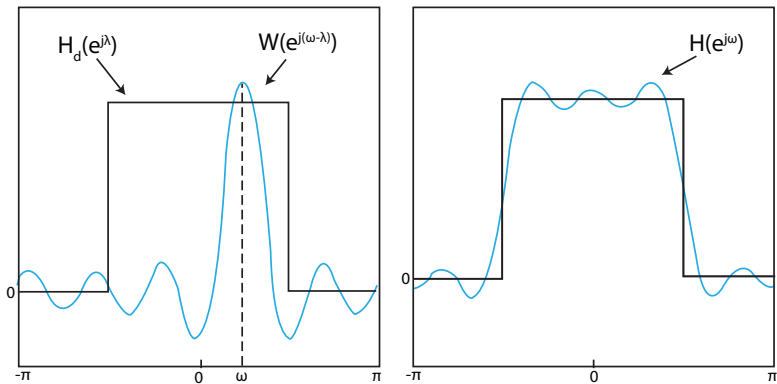
και παρουσιάζεται διαγραμματικά στο επόμενο σχήμα.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Εξομάλυνση της επιθυμητής συχνωτικής απόκρισης $H_d(e^{j\omega})$ λόγω της συνέλιξης της με το φάσμα $W(e^{j\omega})$ του ορθογώνιου παραθύρου $w[n]$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **ιδανική** συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}_d(e^{j\omega})$ υφίσταται **εξομάλυνση**, με αποτέλεσμα την εμφάνιση **ζώνης μετάβασης** και **διακυμάνσεων συγκεκριμένου πλάτους** οι οποίες εξηγούνται με τη βοήθεια του **φαινομένου Gibbs**.

Αυτά ισχύουν για **κάθε συνάρτηση μεταφοράς** πραγματικού φίλτρου.

(2) Το **φάσμα** μιας συνάρτησης παραθύρου περιέχει έναν **κεντρικό λοβό** το **εύρος** του οποίου είναι **αντιστρόφως ανάλογο** του μήκους του παραθύρου και μια σειρά **παράπλευρων λοβών**, το **ύψος** των οποίων μεταβάλλεται **ανάλογα** με το πλήθος των δειγμάτων της ακολουθίας.

Ειδικότερα, η **αύξηση** του μήκους του παραθύρου οδηγεί στην **ελάττωση** του εύρους του κεντρικού λοβού και ταυτόχρονα στην **αύξηση** του ύψους των παράπλευρων λοβών το οποίο μεταβάλλεται με τέτοιο τρόπο ώστε **το εμβαδόν αυτών των λοβών να παραμένει σταθερό και ανεξάρτητο από την τάξη του φίλτρου**.

Η επίδραση του **φάσματος** του παραθύρου $\mathcal{W}(e^{j\omega})$ στην **ιδανική συχνοτική απόκριση** του φίλτρου $\mathcal{H}_d(e^{j\omega})$, συνίσταται στην **προσαύξηση** του εύρους της ιδανικής συχνοτικής απόκρισης κατά το **εύρος** του φάσματος παραθύρου.

Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως **φασματική διάχυση**.

Επιπλέον, το φάσμα **επεκτείνεται** σε περιοχές συχνοτήτων στις οποίες αρχικά το μέτρο του ήταν ίσο με το μηδέν.

Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως **φασματική διαρροή** και οφείλεται στην ύπαρξη των **παράπλευρων λοβών**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

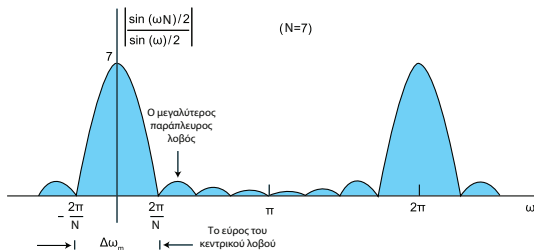
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το φαινόμενο της **φασματικής διάχυσης** μπορεί να ελαττωθεί **αυξάνοντας το μήκος του παραθύρου**. Ωστόσο, αυτό έχει όμως ως αποτέλεσμα, **την αύξηση του βαθμού του φαινομένου της διαρροής**.

Δηλαδή, δεν μπορούμε να μεταβάλλουμε **ταυτόχρονα** και με τον επιθυμητό τρόπο, το εύρος του κεντρικού λοβού και το εύρος των παράπλευρων λοβών και για το λόγο αυτό αναγκαζόμαστε να καταφύγουμε σε κάποιο είδος **συμβιβασμού**, επιλέγοντας τον τύπο παραθύρου που χαρακτηρίζεται ως ο **καταλληλότερος** για κάθε πρόβλημα.

Αν και το ορθογώνιο παράθυρο οδηγεί στο **ελάχιστο** δυνατό σφάλμα προσέγγισης και στην **ελάχιστη** δυνατή φασματική διάχυση, αυτό δεν αποτελεί την καλύτερη επιλογή, αφού το φάσμα του περιέχει **παράπλευρους λοβούς μεγάλου μεγέθους**.



Σχήμα: Μεταβολή του μέτρου του φάσματος $\mathcal{W}(e^{j\omega})$ ορθογώνιου παραθύρου.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η ύπαρξη των παράπλευρων λοβών οδηγεί στην εμφάνιση διακυμάνσεων τόσο στην περιοχή διέλευσης όσο και στην περιοχή αποκοπής.

Το βασικό χαρακτηριστικό των διακυμάνσεων είναι ο τρόπος μεταβολής του πλάτους τους, το οποίο έχει αρκετά μεγάλη τιμή στο όριο της συχνότητας αποκοπής και ελαττώνεται σταδιακά καθώς απομακρυνόμαστε από αυτή.

Αυτό το πλάτος εξαρτάται από το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από τους παράπλευρους λοβούς και τον οριζόντιο άξονα και παραμένει σταθερό και ανεξάρτητο της τιμής του N .

Εάν αυξήσουμε την τάξη του φίλτρου, θα διαπιστώσουμε πως αυτές οι ταλαντώσεις πραγματοποιούνται ολοένα και με μεγαλύτερη συχνότητα, αλλά παραμένουν αμετάβλητες ως προς το πλάτος τους.

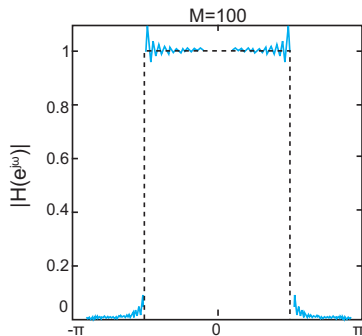
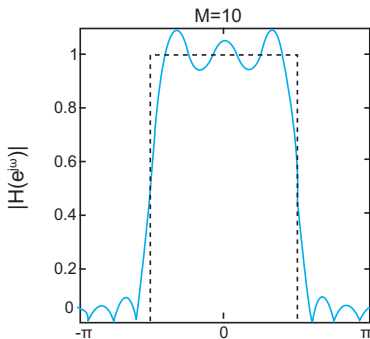
Η εμφάνιση αυτών των ανεπιθύμητων χαρακτηριστικών μας αναγκάζει να καταφύγουμε τελικά στη χρήση άλλων συναρτήσεων παραθύρου που οδηγούν σε χαμηλότερους παράπλευρους λοβούς σε σχέση με το ορθογώνιο παράθυρο ενώ ταυτόχρονα ο κεντρικός τους λοβός χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερο εύρος.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



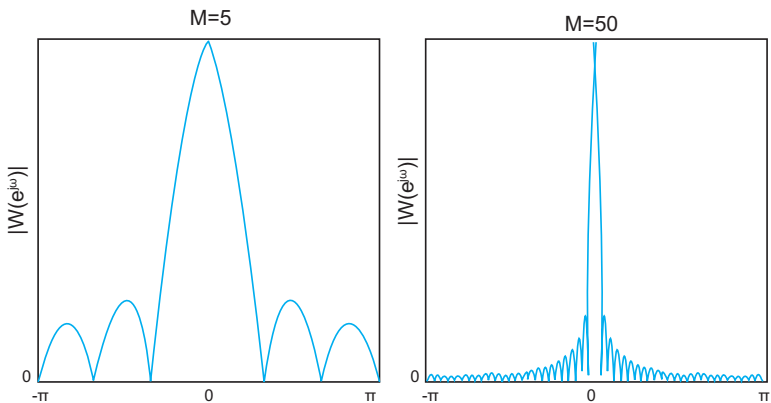
Σχήμα: Ελάττωση του **βαθμού εξομάλυνσης** της **πραγματικής** συχνотικής απόκρισης $H(e^{j\omega})$ με την **αύξηση** της τάξης του ψηφιακού φίλτρου N .

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



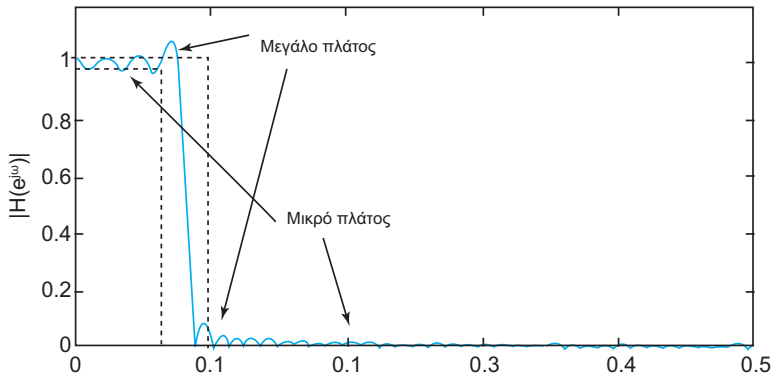
Σχήμα: Μεταβολή του **εύρους** και του **ύψους** του κεντρικού και των παράπλευρων λοβών με την **αύξηση** της τάξης του φίλτρου N .

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Οι διακυμάνσεις της συνάρτησης $|H(e^{j\omega})|$ που οφείλονται στην εμφάνιση του φαινομένου Gibbs.

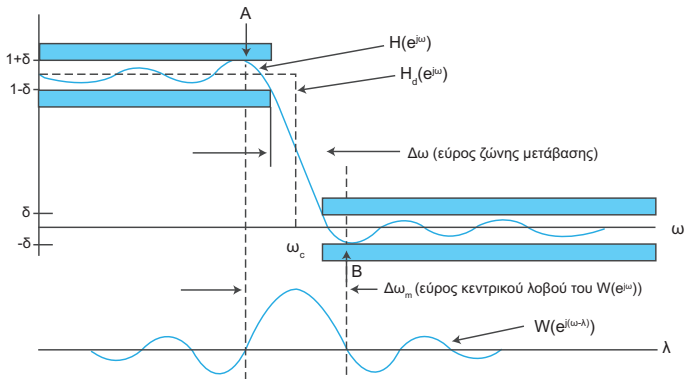
Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ο τρόπος με τον οποίο τα **χαρακτηριστικά** του φάσματος του παραθύρου επηρεάζουν την **απόκριση πλάτους** του προς κατασκευή φίλτρου, παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα: Η εξάρτηση των χαρακτηριστικών της **επιθυμητής συχνοτικής απόκρισης** από το **φάσμα** του εφαρμοζόμενου παραθύρου.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οι σκιασμένες περιοχές ορίζονται από τις **προδιαγραφές** του φίλτρου που περιλαμβάνουν τα όρια των ζωνών διέλευσης και αποκοπής ω_p και ω_s , το πλάτος των διακυμάνσεων στη ζώνη διέλευσης A_p και την ελάχιστη εξασθένηση στη ζώνη αποκοπής A_s .

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι:

- Η **ιδανική** συχνότητα αποκοπής ω_c διχοτομεί **επακριβώς** τη **ζώνη μετάβασης** που ορίζεται από τις συχνότητες ω_p και ω_s και επομένως μπορεί να υπολογιστεί ως ο **μέσος όρος** $\omega_c = (\omega_p + \omega_s)/2$.
- Το **εύρος** $\Delta\omega$ της **ζώνης μετάβασης** είναι **ανάλογο** του εύρους του κεντρικού λοβού του φάσματος $\mathcal{W}(e^{j\omega})$ του παραθύρου $\Delta\omega_m$, αλλά πάντα μικρότερο από αυτό.
- Το **μέγιστο πλάτος** της διακύμανσης δ στη **ζώνη διέλευσης** (σημείο A) είναι ίσο με το αντίστοιχο **μέγιστο πλάτος** της **ζώνης αποκοπής** (σημείο B), με την απόσταση ανάμεσα σε αυτά τα σημεία να ισούται με το **εύρος** $\Delta\omega_m$. Η τιμή του πλάτους δ είναι **ανεξάρτητη** του μήκους του παραθύρου και εξαρτάται μόνο από το σχήμα του (δηλαδή τον τύπο του).

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οι τιμές των παραμέτρων $\Delta\omega$ και $\Delta\omega_m$ μαζί με την **ελάχιστη εξασθένηση** στη ζώνη αποκοπής A_s^{\min} για γνωστές **συναρτήσεις παραθύρου** ακολουθούν στη συνέχεια.

Παράθυρο	$\Delta\omega$	$\Delta\omega_m$	A_s^{\min}
Ορθογώνιο	$4\pi/N$	$1.8\pi/N$	21 dB
Bartlett	$8\pi/N$	$6.1\pi/N$	25 dB
von Hann	$8\pi/N$	$6.2\pi/N$	44 dB
Hamming	$8\pi/N$	$6.6\pi/N$	53 dB
Blackman	$12\pi/N$	$11\pi/N$	74 dB

Η επιλογή της κατάλληλης **συνάρτησης παραθύρου** υπαγορεύεται από τα **χαρακτηριστικά εξασθένησης** που παρέχονται από αυτό και τις εκάστοτε προδιαγραφές του.

Έστω ότι ζητείται **φίλτρο FIR I** με $\omega_p = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.2\pi$ και $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$.

Είναι $A_s^{\min} = -20 \log_{10} \delta = -40$ dB και από τον πίνακα διαπιστώνουμε, πως το κατάλληλο παράθυρο είναι το **παράθυρο von Hann** για το οποίο $A_s^{\min} = -44$ dB.

Για να υπολογίσουμε το **μήκος του παραθύρου** παρατηρούμε ότι $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.1\pi$ και επειδή αυτό το **παράθυρο von Hann** είναι ίσο με $6.2\pi/N$ και το φίλτρο είναι τύπου I τελικά βρίσκουμε $N = 80$.

Στη συνέχεια, πραγματοποιούμε τις εξής διαδικασίες:

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

(1) Υπολογίζουμε τη **συχνότητα αποκοπής** $\omega_c = (\omega_p + \omega_s)/2$ και τη **συχνοτική απόκριση του ιδανικού φίλτρου**

$$\mathcal{H}_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

Στην προκειμένη περίπτωση είναι $\omega_c = (0.2\pi + 0.3\pi)/2 = 0.25\pi$ και επομένως

$$\mathcal{H}_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 0.25\pi \\ 0 & 0.25\pi < |\omega| < \pi \end{cases}$$

(2) Υπολογίζουμε την **ιδανική (μη αιτιατή) κρουστική απόκριση άπειρου μήκους** ως

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

και παρατηρώντας ότι $\omega_c = 0.25\pi$ θα έχουμε

$$h_d[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n} = \frac{0.25\pi}{\pi} \frac{\sin(0.25\pi n)}{0.25\pi n} = \frac{\sin(0.25\pi n)}{\pi n}$$

Αν και αυτός ο υπολογισμός είναι σχετικά εύκολος, στη γενική περίπτωση η **ιδανική κρουστική απόκριση** υπολογίζεται με τη βοήθεια **λογισμικού** που υλοποιεί τον **αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

(3) Καθιστούμε την ιδανική κρουστική απόκριση **αιτιατό σήμα**, μετατοπίζοντας τη χρονικά κατά $N/2$ δείγματα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αυτή η διαδικασία δίνει

$$h_d[n] = \frac{\sin[0.25\pi(n - 40)]}{\pi(n - 40)}$$

(4) Πολλαπλασιάζουμε την **ιδανική κρουστική απόκριση** με την επιλεγμένη **συνάρτηση παραθύρου**, καθιστώντας τη **πεπερασμένη**. Ο πολλαπλασιασμός του σήματος $h_d[n]$ με τη διακριτή ακολουθία του **παραθύρου von Hann** μας δίνει

$$h[n] = h_d[n]w[n] = \frac{1}{2} \frac{\sin[0.25\pi(n - 40)]}{\pi(n - 40)} \times \left[1 - \cos \frac{2\pi n}{79} \right] \quad 0 \leq n < 80$$

(5) Υπολογίζουμε την **πραγματική συχνοτική απόκριση** ως τον **διακριτό μετασχηματισμό Fourier** της πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης $h[n]$.

Αρχικά υπολογίζουμε το **μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου**

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{79} \frac{\sin[0.25\pi(n - 40)]}{n - 40} \left[1 - \cos \frac{2\pi n}{79} \right] e^{j\omega n}$$

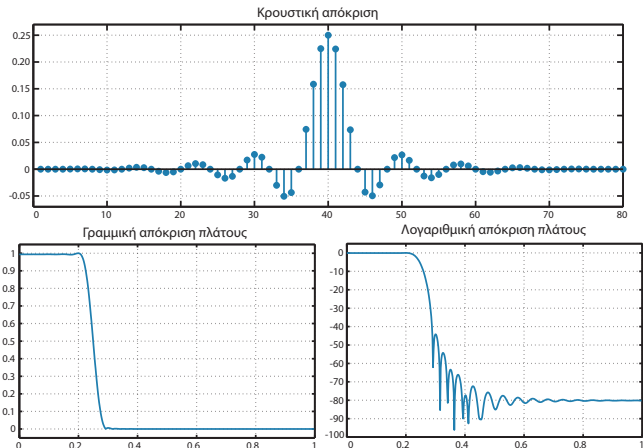
και ύστερα τον **διακριτό μετασχηματισμό Fourier** $\mathcal{H}[k]$ ως τα δείγματα της $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ υπολογισμένα στις θέσεις $\omega = 2\pi k/N = \pi k/40$ ($k = 0, 1, \dots, 79$).

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Η **κρουστική απόκριση** $h[n]$ και το μέτρο της **συχνотικής απόκρισης** χαμηλοπερατού φίλτρου με προδιαγραφές $\omega_p = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.2\pi$ και $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$ που έχει υλοποιηθεί με τη βοήθεια του **παραθύρου von Hann**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

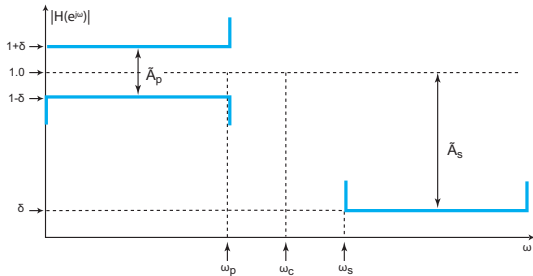
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Κατά τη χρήση του παραθύρου Kaiser, ο λόγος εναπομένουσας διακύμανσης επηρεάζει το πλάτος των διακυμάνσεων στις περιοχές διέλευσης και αποκοπής, ενώ η τάξη N του φίλτρου επηρεάζει μόνο το εύρος της περιοχής μετάπτωσης.

Επομένως, η τιμή της παραμέτρου α στην εξίσωση ορισμού του παραθύρου, μπορεί να επιλεγεί με τη βοήθεια μιας εμπειρικής σχέσης έτσι ώστε να επιτύχουμε το επιθυμητό πλάτος διακύμανσης στις περιοχές διέλευσης και αποκοπής.

Στη συνέχεια, με μία δεύτερη εμπειρική εξίσωση μπορούμε να επιλέξουμε και την τάξη N του φίλτρου, έτσι ώστε να επιτύχουμε το επιθυμητό εύρος της περιοχής μετάπτωσης.

Έστω πως επιθυμούμε να κατασκευάσουμε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο FIR με τα χαρακτηριστικά που απεικονίζονται στη συνέχεια.



Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Αυτά τα χαρακτηριστικά περιλαμβάνουν την τιμή δ του **πλάτους** της διακύμανσης, τις **τιμές παραμέτρων** \tilde{A}_p και \tilde{A}_s και τις τιμές των **συχνοτήτων** ω_p και ω_s που οδηγούν σε συχνότητα **αποκοπής** $\omega_c = (\omega_p + \omega_s)/2$.

Η εφαρμογή της **μεθόδου του παραθύρου Kaiser** πραγματοποιείται ως εξής.

(1) Θεωρούμε το **ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο** με **συχνοτική απόκριση**

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{για } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{για } \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

(2) Υπολογίζουμε την **ιδανική κρουστική απόκριση** $h_d[n]$ από τον **αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier** της **ιδανικής συχνοτικής απόκρισης** οδηγούμενοι στο αποτέλεσμα

$$h_d[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c n)$$

(3) Επιλέγουμε την τιμή του δ έτσι ώστε το **πραγματικό εύρος** της διακύμανσης στην **περιοχή διέλευσης** A_p να είναι μικρότερο ή ίσο του **επιθυμητού εύρους** \tilde{A}_p και η **πραγματική** ελάχιστη εξασθένηση A_s να είναι μεγαλύτερη ή ίση της **επιθυμητής** ελάχιστης εξασθένησης \tilde{A}_s .

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Μια **κατάλληλη** τιμή για την παράμετρο δ είναι η

$$\delta = \min(\tilde{\delta}_p, \tilde{\delta}_s)$$

όπου οι ποσότητες $\tilde{\delta}_p$ και $\tilde{\delta}_s$ δίδονται από τις εμπειρικές σχέσεις

$$\tilde{\delta}_p = \frac{10^{0.05\bar{A}_p} - 1}{10^{0.05\bar{A}_p} + 1} \quad \text{και} \quad \tilde{\delta}_s = 10^{-0.05\bar{A}_s}$$

(4) Υπολογίζουμε την τιμή της **πραγματικής** εξασθένησης A_s ως

$$A_s = -20 \log_{10}(\delta)$$

(5) Υπολογίζουμε την **παράμετρο** α του παραθύρου Kaiser από την **εμπειρική σχέση**

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{για } A_s \leq 21 \\ 0.5842(A_s - 21)^{0.4} + 0.07886(A_s - 21) & \text{για } 21 \leq A_s \leq 50 \\ 0.1102(A_s - 8.7) & \text{για } A_s > 50 \end{cases}$$

(6) Υπολογίζουμε την τιμή της **βοηθητικής παραμέτρου** D από τη σχέση

$$D = \begin{cases} 0.9222 & \text{για } A_s \leq 21 \\ \frac{A_s - 7.95}{14.36} & \text{για } A_s > 21 \end{cases}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

(7) Επιλέγουμε την **τάξη** του φίλτρου N ως τη μικρότερη ακέραια τιμή τέτοια ώστε

$$N \geq 1 + \left\lceil \frac{\Omega_s D}{\omega_s - \omega_p} \right\rceil$$

όπου Ω_s η **συχνότητα δειγματοληψίας** του σήματος εισόδου.

Εάν δεν γνωρίζουμε αυτή τη συχνότητα θεωρούμε πως είναι ίση με τη **μέγιστη δυνατή συχνότητα δειγματοληψίας** η οποία από το **θεώρημα του Nyquist** είναι ίση με 2π .

(8) Κατασκευάσουμε το διακριτό σήμα $w[n]$ από την εξίσωση του **παραθύρου Kaiser**.

(9) Υπολογίζουμε τη **συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου** από τη σχέση

$$\mathcal{H}(z) = z^{-(N-1)/2} \mathcal{Z}\{h_d[n]w[n]\}$$

(10) Υπολογίζουμε τη **συχνοτική απόκριση** του φίλτρου $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ ως τη **συνάρτηση μεταφοράς** $\mathcal{H}(z)$ υπολογισμένη **στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ζητείται **χαμηλοπερατό φίλτρο** με τιμές παραμέτρων $\omega_p = 0.4\pi$, $\omega_s = 0.6\pi$ και $\delta_1 = \delta_2 = 0.001$. Η εφαρμογή του αλγορίθμου του **παραθύρου Kaiser** γίνεται ως εξής:

(1) Υπολογίζουμε την τιμή της **συχνότητας αποκοπής** από τη σχέση

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = \frac{0.4\pi + 0.6\pi}{2} = 0.5\pi$$

(2) Υπολογίζουμε τις τιμές των παραμέτρων δ και $\Delta\omega$ ως

$$\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0.001 \quad \text{και} \quad \Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.6\pi - 0.4\pi = 0.2\pi$$

(3) Υπολογίζουμε την τιμή της **πραγματικής εξασθένησης** από τη σχέση

$$A_s = -20 \log_{10}(\delta) = -20 \log_{10}(10^{-3}) = (-20)(-3) = 60$$

(4) Υπολογίζουμε την τιμή της **παραμέτρου α** ως

$$\alpha = 0.1102(A_s - 8.7) = 0.1102(60 - 8.7) = 0.1102 \cdot 51.3 = 5.653260$$

(5) Υπολογίζουμε την τιμή της **παραμέτρου D** από τη σχέση

$$D = \frac{A_s - 7.95}{14.36} = \frac{60 - 7.95}{14.36} = \frac{52.05}{14.36} = 3.624651$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

(6) Επειδή **δεν γνωρίζουμε τη συχνότητα δειγματοληψίας**, θέτουμε $\Omega_s = 2\pi$. Θα είναι τότε

$$N \geq 1 + \left\lceil \frac{2\pi \cdot 3.624651}{0.2\pi} \right\rceil \geq 1 + [36.24651] \geq 37 \text{ και επομένως } N = 37$$

(7) Υπολογίζουμε το διακριτό σήμα της **κρουστικής απόκρισης**. Η εφαρμογή του φίλτρου τάξεως N προκαλεί **υστέρηση** ίση με $N/2$ στην **ιδανική συχνοτική απόκριση** η οποία επομένως θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega N/2} & \text{για } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

(8) Η **ιδανική κρουστική απόκριση** υπολογίζεται από τον **αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier** οδηγώντας στο αποτέλεσμα

$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} e^{-j\omega N/2} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n - (N/2))]}{\pi[n - (N/2)]}$$

(9) Υπολογίζουμε την **πραγματική** κρουστική απόκριση από τη σχέση $h[n] = h_{lp}[n]w[n]$

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin[\omega_c(n - 18.5)]}{\pi(n - 18.5)} \times \frac{I_0 \left[5.653260 \sqrt{1 - \left(\frac{n - 18.5}{18.5} \right)^2} \right]}{I_0(5.653260)} & 0 \leq n \leq 37 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

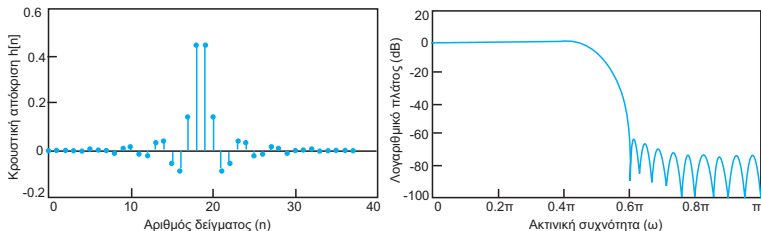
Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

(10) Υπολογίζουμε τη **συχνοτική απόκριση** του **πραγματικού** φίλτρου από το **μετασχηματισμό Fourier** της παραπάνω σχέσης.

Η **κρουστική απόκριση** του φίλτρου $h[n]$ και το μέτρο της **συχνοτικής απόκρισης** $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ παρουσιάζονται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα: Η κρουστική απόκριση $h[n]$ και η απόκριση πλάτους $|\mathcal{H}(e^{j\omega})|$ για το παράδειγμα εφαρμογής της **μεθόδου του παραθύρου Kaiser**.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί πάρα πολύ εύκολα να γενικευθεί έτσι ώστε να επιτρέψει τη σχεδίαση **όλων των υπόλοιπων** τύπων φίλτρων, δηλαδή **υψηλοπερατά, ζωνοπερατά και ζωνοφρακτικά** φίλτρα.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

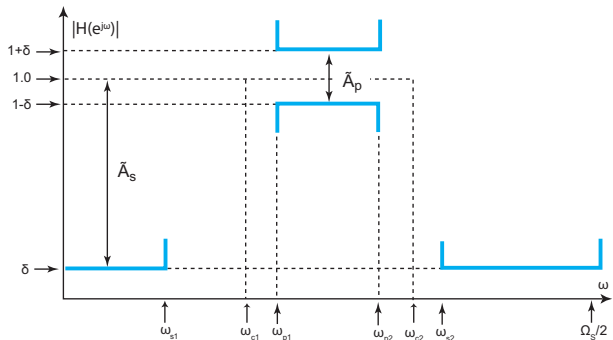
Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ζητείται **ζωνοπερατό φίλτρο** με τιμές παραμέτρων \tilde{A}_p και \tilde{A}_s που να επιτρέπει τη διέλευση των συχνοτήτων $\omega_{p1} \leq \omega \leq \omega_{p2}$ και να αποκόπτει τις συχνότητες $\omega_{s1} \leq \omega \leq \omega_{s2}$.

Η **συχνотική απόκριση** του παραπάνω ψηφιακού φίλτρου παρουσιάζεται στη συνέχεια. Οι συχνότητες ω_{c1} και ω_{c2} ορίζουν την **περιοχή διέλευσης** του ιδανικού ζωνοπερατού φίλτρου, ενώ η παράμετρος Ω_s αναπαριστά τη **συχνότητα δειγματοληψίας** του σήματος εισόδου.



Σχήμα: Εφαρμογή του **παραθύρου Kaiser** για την κατασκευή **ζωνοπερατού** φίλτρου.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η μεθοδολογία σχεδίασης του φίλτρου θα στηριχθεί στη **συνάρτηση συχνοτικής απόκρισης του ιδανικού ζωνοπερατού φίλτρου**.

Αυτή η συνάρτηση, για το φίλτρο του παραπάνω σχήματος έχει τη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{για } -\omega_{c2} \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ 1 & \text{για } +\omega_{c1} \leq \omega \leq +\omega_{c2} \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Στην προκειμένη περίπτωση, οι συχνότητες ω_{c1} και ω_{c2} δίδονται από τις σχέσεις

$$\omega_{c1} = \omega_{p1} - (B_t/2) \quad \text{και} \quad \omega_{c2} = \omega_{p2} + (B_t/2)$$

με την ποσότητα B_t να ορίζεται ως

$$B_t = \min[(\omega_{p1} - \omega_{s1}), (\omega_{s2} - \omega_{p2})]$$

Έχοντας υπολογίσει τις παραπάνω παραμέτρους, η μεθοδολογία σχεδιασμού του ζωνοπερατού φίλτρου θα πραγματοποιηθεί όπως και προηγουμένως.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Μέθοδος δειγματοληψίας συχνότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η μέθοδος της δειγματοληψίας συχνότητας συνίσταται στον προσδιορισμό των τιμών της επιθυμητής κρουστικής απόκρισης $\mathcal{H}_d(e^{j\omega})$ στις θέσεις των k συχνοτήτων $\omega_k = 2\pi k/N$ ($k = 0, 1, 2, \dots, L$) όπου N η τάξη φίλτρου, ενώ είναι $L = (N - 1)/2$ για άρτιες τιμές τάξης και $L = (N/2) - 1$ για περιττές τιμές τάξης.

Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι η εξίσωση

$$\mathcal{H}[k] \equiv \mathcal{H}_d \left[\exp \left(j \frac{2\pi}{N} k \right) \right] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] \exp \left(-j \frac{2\pi}{N} kn \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

που παραπέμπει σε διακριτό μετασχηματισμό Fourier μήκους N σημείων.

Επομένως, η πεπερασμένη κρουστική απόκριση του φίλτρου μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση του αντίστροφου μετασχηματισμού

$$h[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{H}_d \left[\exp \left(j \frac{2\pi}{N} k \right) \right] \exp \left(j \frac{2\pi}{N} kn \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Εάν προσδιορίσουμε τις τιμές N δειγμάτων της επιθυμητής συχνοτικής απόκρισης του προς κατασκευή φίλτρου σε ισαπέχουσες μεταξύ τους συχνότητες, μπορούμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του θεωρούμενου φίλτρου.

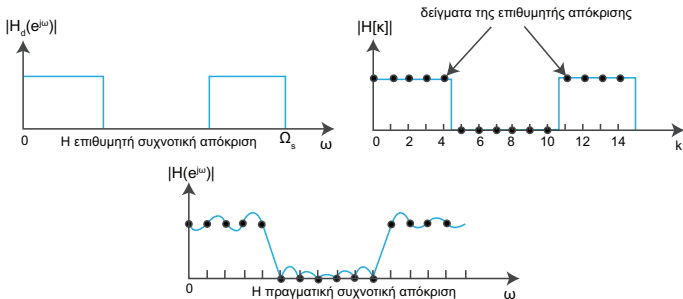
Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Μέθοδος δειγματοληψίας συχνότητας

Η **υπολογιζόμενη** κρουστική απόκριση, σχετίζεται με την **ιδανική** κρουστική απόκριση ως

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_d[n + kN], \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε σε αυτή τον **αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier** για να υπολογίσουμε τη ζητούμενη απόκριση συχνότητας $\mathcal{H}(e^{j\omega})$.



Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Μέθοδος δειγματοληψίας συχνότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **απόκριση πλάτους** θα πρέπει να διαθέτει **άρτια συμμετρία** ενώ η απόκριση φάσης **περιττή συμμετρία**, έτσι ώστε το φίλτρο να είναι **αιτιατό** με **γραμμική φάση** και **σταθερούς συντελεστές**.

Η **κρουστική απόκριση** $h[n]$ είναι **σήμα πραγματικών τιμών** και επομένως θα είναι $\mathcal{H}[k] = \mathcal{H}^*[M - k]$.

Αυτή η ιδιότητα, σε συνδυασμό με τις **συνθήκες συμμετρίας** της κρουστικής απόκρισης, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τα δείγματα του σήματος $h[n]$ χρησιμοποιώντας μόνο $(N + 1)/2$ δείγματα για **περιττό** N και $N/2$ δείγματα για **άρτιο** N .

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις για τη **συμμετρική** και την **αντισυμμετρική** περίπτωση ως

$$\mathcal{H}_d(e^{j\omega}) = |\mathcal{H}_d(e^{j\omega})| \exp \left[j \left(\frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\omega(N-1)}{2} \right) \right]$$

όπου $\alpha = 0$ για **συμμετρικό σήμα** και $\alpha = 1$ για **αντισυμμετρικό σήμα**, οι τιμές των δειγμάτων της συχνοτικής απόκρισης στις θέσεις των τιμών συχνότητας $\omega_k = 2\pi k/N$ υπολογίζονται ως

$$\mathcal{H}[k] = \mathcal{H}_d \left[\exp \left(j \frac{2\pi}{N} k \right) \right] = \left| \mathcal{H}_d \left[\exp \left(j \frac{2\pi}{N} k \right) \right] \right| \exp \left[j \left(\frac{\alpha\pi}{2} - \frac{2\pi k}{N} \frac{(N-1)}{2} \right) \right]$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Μέθοδος δειγματοληψίας συχνότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ορίζοντας τα **πραγματικά δείγματα** $\mathcal{G}[k]$ από τη σχέση $G[k] = (-1)^k | \mathcal{H}_d(e^{j2\pi k/N}) |$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$) και **απαλείφοντας** τη συνάρτηση $| \mathcal{H}_d(e^{j2\pi k/N}) |$ από τις δύο τελευταίες σχέσεις, προκύπτει ότι

$$\mathcal{H}[k] = \mathcal{G}[k] \exp(j\pi k) \exp \left[j \left(\frac{\alpha\pi}{2} - \frac{2\pi k (N-1)}{N} \right) \right]$$

Επομένως, οι **συνθήκες συμμετρίας** για τα δείγματα $\mathcal{H}[k]$ μετασχηματίζονται σε αντίστοιχες **συνθήκες συμμετρίας** για τα δείγματα $\mathcal{G}[k]$.

Για τη **συμμετρική περίπτωση** ($\alpha = 0$) θα είναι $\mathcal{G}[k] = -\mathcal{G}[N - k]$ και

$$\mathcal{H}[k] = \mathcal{G}[k] \exp(j\pi k) \exp \left[-j\pi k \left(\frac{N-1}{N} \right) \right] = \mathcal{G}[k] \exp \left(j \frac{\pi k}{N} \right)$$

ενώ για την **αντισυμμετρική περίπτωση** ($\alpha = 1$) θα είναι $\mathcal{G}[k] = \mathcal{G}[N - k]$ και

$$\mathcal{H}[k] = \mathcal{G}[k] \exp(j\pi k) \exp \left[-j \frac{\pi}{2} - j\pi k \left(\frac{N-1}{N} \right) \right] = \mathcal{G}[k] \exp \left(j \frac{\pi}{2} \right) \exp \left(j \frac{\pi k}{N} \right)$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Μέθοδος δειγματοληψίας συχνότητας

Χρησιμοποιώντας τις τιμές των **πραγματικών δειγμάτων** $\mathcal{G}[k]$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}h[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{H}[k] \exp\left(j \frac{2\pi k}{N} n\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{G}[k] \exp\left(j \frac{\pi k}{N}\right) \exp\left(j \frac{2\pi k}{N} n\right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{H}[k] \exp\left[j \frac{2\pi k}{N} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{N} \left\{ \mathcal{G}[0] + \sum_{k=1}^{N-1} \mathcal{H}[k] \exp\left[j \frac{2\pi k}{N} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \right\}\end{aligned}$$

Η παραπάνω έκφραση με τη βοήθεια των **σχέσεων συμμετρίας** των δειγμάτων $\mathcal{G}[k]$ γίνεται

$$h[n] = \frac{1}{N} \left\{ \mathcal{G}[0] + 2 \sum_{k=1}^L \mathcal{G}[k] \cos\left[\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \right\}$$

για τη **συμμετρική** περίπτωση ενώ για την **αντισυμμετρική** περίπτωση έχουμε

$$h[n] = \begin{cases} -\frac{2}{N} \sum_{k=1}^L \mathcal{G}[k] \sin\left[\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] & N \text{ περιττό} \\ \frac{1}{N} \left\{ (-1)^{n+1} \mathcal{G}\left(\frac{N}{2}\right) - 2 \sum_{k=1}^L \mathcal{G}[k] \sin\left[\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \right\} & N \text{ άρτιο} \end{cases}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Μέθοδος δειγματοληψίας συχνότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να **γενικευθεί**, δειγματοληπτώντας την **ιδανική συχνοτική απόκριση** $\mathcal{H}_d(e^{j\omega})$ στις θέσεις $\omega_k = 2\pi(k+m)/M$, με την παράμετρο m να παίρνει μία από τις τιμές $m = 0$ και $m = 1/2$.

Στην περίπτωση αυτή, οι **εξισώσεις ορισμού** των συναρτήσεων $\mathcal{H}[k]$ και $h[n]$ γίνονται

$$\mathcal{H}[k] \equiv \mathcal{H}_d \left\{ \exp \left[j \frac{2\pi}{N} (k+m) \right] \right\} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] \exp \left(-j \frac{2\pi}{N} (k+m) n \right)$$

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \mathcal{H}_d \left\{ \exp \left[j \frac{2\pi}{N} (k+m) \right] \right\} \exp \left(j \frac{2\pi}{N} (k+m) n \right)$$

($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$) οι οποίες για την τιμή $m = 0$ απλοποιούνται σε αυτές που παρουσιάσαμε προηγουμένως.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το μειονέκτημα της μεθόδου σχεδίασης με τη χρήση παραθύρων, είναι η έλλειψη της δυνατότητας επακριβούς καθορισμού των συχνοτήτων διέλευσης και αποκοπής ω_p και ω_s , αφού αυτές εξαρτώνται από τον τύπο του παραθύρου και την τάξη του φίλτρου N .

Επιπλέον, η λύση που κατασκευάζεται δεν είναι η βέλτιστη: η τάξη του φίλτρου που προκύπτει δεν είναι η ελάχιστη δυνατή, κάτι που οδηγεί στην αύξηση των υπολογισμών και στη μείωση της αποδοτικότητας και της ταχύτητας εκτέλεσης των αλγορίθμων.

Μια άλλη μέθοδος σχεδίασης φίλτρων FIR στηρίζεται στην παραδοχή πως το σφάλμα προσέγγισης της ιδανικής από την πραγματική απόκριση συχνότητας δεν σχετίζεται με κάποιες συγκεκριμένες συχνότητες αλλά κατανέμεται σε όλες τις συχνότητες που ανήκουν τόσο στην περιοχή διέλευσης όσο και στην περιοχή αποκοπής.

Επιπλέον, η κάθε ζώνη συχνοτήτων σχετίζεται με διαφορετική εν γένει συνάρτηση βάρους που καθορίζει τη συνεισφορά της στην τιμή του τελικού σφάλματος προσέγγισης.

Αυτή η μέθοδος είναι γνωστή ως σταθμισμένη μέθοδος Chebyshev και στηρίζεται στην περιγραφή της συνάρτησης σφάλματος με τη βοήθεια ενός γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων συνημίτονου, ο οποίος στη συνέχεια ελαχιστοποιείται με τη βοήθεια ενός αποδοτικού πολυμεταβλητού αλγορίθμου βελτιστοποίησης που είναι γνωστός ως αλγόριθμος εναλλαγής του Remez.

Αυτή η μέθοδος οδηγεί σε βέλτιστα (ως προς την τάξη τους) ψηφιακά φίλτρα που χαρακτηρίζονται από την εμφάνιση διακυμάνσεων τόσο στη ζώνη διέλευσης όσο και στη ζώνη αποκοπής.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η συνάρτηση του πραγματικού φίλτρου $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ αποτελεί μία προσέγγιση της συνάρτησης $\mathcal{H}_d(e^{j\omega})$ του αντίστοιχου ιδανικού φίλτρου.

Μιλώντας γενικά, οι μέθοδοι που περιγράφουμε, στηρίζονται στην ελαχιστοποίηση του σφάλματος προσέγγισης $\mathcal{E}(\omega)$ της ιδανικής συνάρτησης $\mathcal{H}_d(e^{j\omega})$ από την πραγματική συνάρτηση $\mathcal{H}(e^{j\omega})$.

Υπάρχουν αρκετές τέτοιες συναρτήσεις σφάλματος, όπως είναι το μέσο απόλυτο, το μέσο τετραγωνικό και το μέγιστο σφάλμα που δίδονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} | \mathcal{H}_d(e^{j\omega}) - \mathcal{H}(e^{j\omega}) | d\omega$$

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} | \mathcal{H}_d(e^{j\omega}) - \mathcal{H}(e^{j\omega}) |^2 \omega$$

$$\mathcal{E}(\omega) = \max_{\omega} | \mathcal{H}_d(e^{j\omega}) - \mathcal{H}(e^{j\omega}) |$$

και τα οποία, θεωρούν ισοδύναμες όλες τις συχνότητες.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ακόμη, ορίζονται το **σταθμισμένο μέσο τετραγωνικό σφάλμα** και το **σταθμισμένο μέγιστο σφάλμα** που σχετίζουν τις διάφορες περιοχές συχνοτήτων με διαφορετικές **συναρτήσεις βάρους** $\mathcal{W}(\omega)$ και ορίζονται ως

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{W}(\omega) |\mathcal{H}_d(e^{j\omega}) - \mathcal{H}(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$\mathcal{E}(\omega) = \max_{\omega} |\mathcal{W}(\omega) [\mathcal{H}_d(e^{j\omega}) - \mathcal{H}(e^{j\omega})]|$$

Η μέθοδος που θα παρουσιάσουμε στηρίζεται στη χρήση του **σταθμισμένου μέγιστου σφάλματος**, το οποίο, για **μη αρνητική** συνάρτηση βάρους $\mathcal{W}(\omega) \geq 0$ αποδεικνύεται πως έχει τη μορφή

$$\mathcal{E}(\omega) = \max_{\omega} \left\{ \mathcal{W}(\omega) \mathcal{Q}(\omega) \left[\frac{|\mathcal{H}_d(e^{j\omega})|}{\mathcal{Q}(\omega)} - \mathcal{P}(\omega) \right] \right\} \quad \text{όπου}$$

$$|\mathcal{H}_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad \text{και} \quad \mathcal{W}(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ \delta_p / \delta_s & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

Ορίζοντας τις ποσότητες $\tilde{\mathcal{W}}(\omega) = \mathcal{W}(\omega) \mathcal{Q}(\omega)$ και $|\tilde{\mathcal{H}}_d(e^{j\omega})| = |\mathcal{H}_d(e^{j\omega})| / \mathcal{Q}(\omega)$ και

$$\mathcal{P}(\omega) = \sum_{k=0}^L \xi[k] \cos(\omega k)$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

η παραπάνω σχέση γράφεται

$$E(\omega) = \max_{\omega} \left\{ \tilde{W}(\omega) \left[\left| \tilde{H}_d(e^{j\omega}) \right| - \sum_{k=0}^L \xi[k] \cos(\omega k) \right] \right\}$$

Επομένως, η σχεδίαση του ψηφιακού φίλτρου ανάγεται στον προσδιορισμό των συντελεστών $\xi[k]$ που ελαχιστοποιούν τη μέγιστη απόλυτη τιμή του μέτρου $|E(\omega)|$ υπολογιζόμενου επί της επιθυμητής περιοχής συχνότητας.

Σε μαθηματική γραφή, αυτό το πρόβλημα ελαχιστοποίησης διατυπώνεται ως

$$\min_x \left[\max_{\omega} |E(\omega)| \right] = \min_x \left\{ \max_{\omega} \left| \tilde{W}(\omega) \left(\left| \tilde{H}_d(e^{j\omega}) \right| - \sum_{k=0}^L \xi[k] \cos(\omega k) \right) \right| \right\}$$

όπου $x = [\xi[0] \ \xi[1] \ \dots \ \xi[L]]^T$ και $\omega \in S$, με το σύνολο S να προκύπτει από την ένωση όλων των περιοχών συχνότητας για τις οποίες θα εφαρμοσθεί η παραπάνω διαδικασία ελαχιστοποίησης.

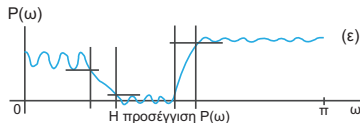
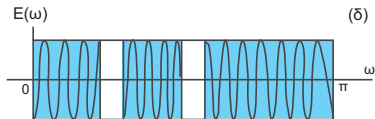
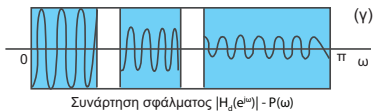
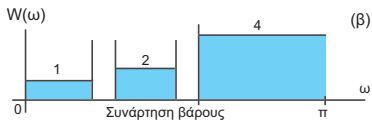
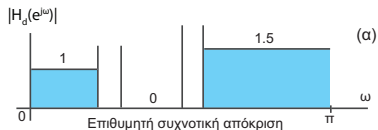
Μετά τον υπολογισμό των συντελεστών $\xi[k]$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα δείγματα της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου. Η διαδικασία υπολογισμού για την περίπτωση της προσέγγισης μιας ιδανικής συχνοτικής απόκρισης που χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη τριών ζωνών συχνοτήτων ενδιαφέροντος, παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Προσέγγιση **ιδανικής** συχνотικής απόκρισης με **σταθμισμένη** συνάρτηση σφάλματος.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Θεώρημα

Έστω S **συμπαγές υποσύνολο** του διαστήματος $[0, \pi]$ που προκύπτει από την ένωση μικρότερων κλειστών διαστημάτων που εκφράζουν τις **ζώνες συχνοτήτων ενδιαφέροντος** και εντός του οποίου ορίζονται η **επιθυμητή συχνοτική απόκριση** $|\tilde{H}_d(e^{j\omega})|$ και η **θετική συνάρτηση βάρους** $\mathcal{W}(\omega)$. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το πολυώνυμο

$$\mathcal{P}(\omega) = \sum_{k=0}^L \xi[k] \cos(\omega k)$$

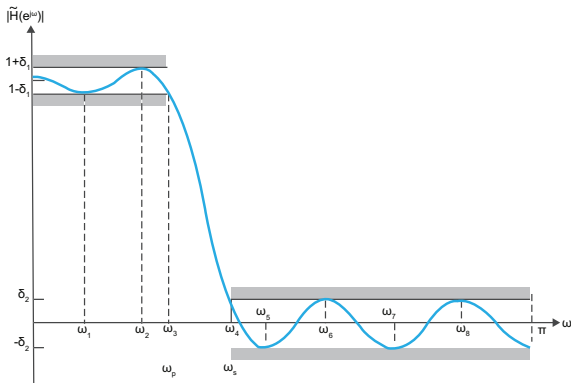
η **μοναδική βέλτιστη σταθμισμένη προσέγγιση Chebyshev** της συνάρτησης $|\tilde{H}_d(e^{j\omega})|$ στο σύνολο S , είναι να διαθέτει η συνάρτηση σφάλματος $\mathcal{E}(\omega) = \tilde{\mathcal{W}}(\omega)[|\tilde{H}_d(e^{j\omega})| - \mathcal{P}(\omega)]$ **τουλάχιστον $L + 2$ ακρότατες τιμές συχνότητας** στο σύνολο S . Θα πρέπει δηλαδή να υπάρχουν τουλάχιστον $L + 2$ συχνότητες $\omega_i \in S$ τέτοιες ώστε

- $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_L < \omega_{L+1} < \omega_{L+2}$
- $\mathcal{E}(\omega_i) = -\mathcal{E}(\omega_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, L + 2)$
- $|\mathcal{E}(\omega_i)| = \max_{\omega \in S} |\mathcal{E}(\omega)|, \quad i = 1, 2, \dots, L + 2$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

Σύμφωνα με το **θεώρημα της εναλλαγής**, οι συντελεστές $\xi[k]$ αντιστοιχούν σε φίλτρο που αποτελεί τη **βέλτιστη προσέγγιση κατά Chebyshev** ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου με **λόγο διακύμανσης** $\delta_p \delta_s = K_1/K_2 = K$ και με **όρια ζωνών** διέλευσης και αποκοπής ω_p και ω_s , αν και μόνο αν η συνάρτηση σφάλματος $\mathcal{E}(\omega)$ εμφανίζει **τουλάχιστον $L + 2$ εναλλαγές** εντός του κλειστού διαστήματος S δηλαδή λαμβάνει στις θέσεις $L + 2$ ακρότατων συχνοτήτων τη **μέγιστη** τιμή της, αλλά με **εναλλασσόμενα πρόσημα**:



Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Έστω χαμηλοπερατό φίλτρο με **περιοχή διέλευσης** $0 \leq \omega \leq \omega_p$ και **περιοχή αποκοπής** $\omega_s \leq \omega \leq \pi$. Παραγωγίζοντας την εξίσωση του σφάλματος

$$\mathcal{E}(\omega) = \mathcal{W}(\omega) [| \mathcal{H}_d(e^{j\omega}) | - | \mathcal{H}(e^{j\omega}) |]$$

θα λάβουμε

$$\frac{d\mathcal{E}(\omega)}{d\omega} = \frac{d\mathcal{W}(\omega)}{d\omega} \times [| \mathcal{H}_d(e^{j\omega}) | - | \mathcal{H}(e^{j\omega}) |] + \mathcal{W}(\omega) \times \left[\frac{d| \mathcal{H}_d(e^{j\omega}) |}{d\omega} - \frac{d| \mathcal{H}(e^{j\omega}) |}{d\omega} \right]$$

όπου

$$\frac{d\mathcal{W}(\omega)}{d\omega} = \frac{d| \mathcal{H}_d(e^{j\omega}) |}{d\omega} = 0$$

και $\dot{\mathcal{E}}(\omega_i) = 0$. Αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση λαμβάνουμε

$$\frac{d\mathcal{E}(\omega)}{d\omega} = - \frac{d| \mathcal{H}(e^{j\omega}) |}{d\omega} = 0$$

Επομένως, οι συχνότητες ω_i στις οποίες η συνάρτηση σφάλματος $\mathcal{E}(\omega)$ παρουσιάζει **μέγιστη** ή **ελάχιστη** τιμή, αντιστοιχούν σε τιμές **ακρότατων** στις οποίες η συχνοτική απόκριση $| \mathcal{H}(e^{j\omega}) |$ του πραγματικού φίλτρου **πληροί** την ανοχή που έχει καθοριστεί.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν το θεωρούμενο φίλτρο είναι **φίλτρο FIR I**, η **συχνοτική** του απόκριση θα είναι

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}(e^{j\omega})| &= \sum_{k=0}^L \alpha[k] \cos(\omega k) = \sum_{k=0}^L \alpha[k] \left[\sum_{n=0}^k \beta_{nk} (\cos \omega)^n \right] \\ &= \sum_{k=0}^L \alpha[k] \left(\beta_{0k} + \beta_{1k} \cos \omega + \beta_{2k} (\cos \omega)^2 + \dots + \right) = \sum_{k=0}^L \alpha'[k] (\cos \omega)^k \end{aligned}$$

(όπου $\alpha'[k] = \alpha[k] \beta_{nk}$), με παράγωγο στις θέσεις των ακρότατων συχνοτήτων

$$\frac{d |\mathcal{H}(e^{j\omega})|}{d\omega} = -\sin \omega \sum_{k=0}^L k \alpha'[k] (\cos \omega)^{k-1} = -\sin \omega \sum_{k=0}^{L-1} (k+1) \alpha'_{k+1} (\cos \omega)^k = 0$$

Ο **μηδενισμός** της παραγώγου απαιτεί να είναι είτε **$\sin \omega = 0$** (οπότε η συνάρτηση $|\mathcal{H}(e^{j\omega})|$ διαθέτει **δύο** ακρότατες συχνότητες στις θέσεις $\omega = 0$ και $\omega = \pi$) είτε

$$\sum_{k=0}^{L-1} (k+1) \alpha'_{k+1} (\cos \omega)^k = 0$$

(οπότε η συνάρτηση $|\mathcal{H}(e^{j\omega})|$ διαθέτει **επιπλέον** στο διάστημα $(0, \pi)$ **το πολύ** $L - 1$ **τοπικά ακρότατα** που μπορεί να είναι **μέγιστα** ή **ελάχιστα**).

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Χρησιμοποιώντας το **θεώρημα της εναλλαγής** μπορούμε να επιλύσουμε με **μοναδικό** τρόπο το πρόβλημα **βελτιστοποίησης κατά Chebyshev**.

Εάν συμβολίσουμε με $\{\omega_n\}$ ($n = 0, 1, \dots, L + 1$) τις **επιθυμητές** ακρότατες συχνότητες του ψηφιακού φίλτρου, αυτές θα ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων

$$\tilde{W}(\omega_n)[|\tilde{H}_d(e^{j\omega_n})| - \mathcal{P}(\omega_n)] = (-1)^n \delta \quad (n = 0, 1, \dots, L + 1)$$

όπου δ είναι η **μέγιστη τιμή** της συνάρτησης $\mathcal{E}(\omega)$. Οι παραπάνω γραμμικές εξισώσεις μπορούν να επαναδιατυπωθούν με τη μορφή

$$|\tilde{H}_d(e^{j\omega_n})| = \mathcal{P}(\omega_n) + \frac{(-1)^n \delta}{\tilde{W}(\omega_n)} = \sum_{k=0}^L \alpha[k] \cos(\omega_n k) + \frac{(-1)^n \delta}{\tilde{W}(\omega_n)} \quad (n = 0, 1, \dots, L + 1)$$

ή σε **μορφή πίνακα** ως $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ με τους πίνακες \mathbf{X} και \mathbf{B} να ορίζονται ως

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \alpha(2) \\ \vdots \\ \alpha(L) \\ \delta \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} |\tilde{H}_d(e^{j\omega_0})| \\ |\tilde{H}_d(e^{j\omega_1})| \\ |\tilde{H}_d(e^{j\omega_2})| \\ \vdots \\ |\tilde{H}_d(e^{j\omega_L})| \\ |\tilde{H}_d(e^{j\omega_{L+1}})| \end{bmatrix}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

και με τον πίνακα \mathbf{A} να έχει τη μορφή

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_0) & \cos(2\omega_0) & \dots & \cos(L\omega_0) & \frac{1}{\tilde{W}(\omega_0)} \\ 1 & \cos(\omega_1) & \cos(2\omega_1) & \dots & \cos(L\omega_1) & \frac{1}{\tilde{W}(\omega_1)} \\ 1 & \cos(\omega_2) & \cos(2\omega_2) & \dots & \cos(L\omega_2) & \frac{1}{\tilde{W}(\omega_2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos(\omega_L) & \cos(2\omega_L) & \dots & \cos(L\omega_L) & \frac{1}{\tilde{W}(\omega_L)} \\ 1 & \cos(\omega_{L+1}) & \cos(2\omega_{L+1}) & \dots & \cos(L\omega_{L+1}) & \frac{1}{\tilde{W}(\omega_{L+1})} \end{bmatrix}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα μπορούμε να προσδιορίσουμε τους **συντελεστές** $\{\alpha_k\}$ ($k = 0, 1, \dots, L$) και τελικά να σχεδιάσουμε το ψηφιακό φίλτρο.

Ειδικότερα, ο **αλγόριθμος του Remez** αποτελείται από τα επόμενα βήματα:

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

ΒΗΜΑ 1 Ξεκινούμε από ένα αρχικό σύνολο $L + 1$ ακρότατων συχνοτήτων ω_i ($i = 1, 2, \dots, L + 1$) έχοντας διασφαλίσει πως σε κάθε ζώνη ενδιαφέροντος αντιστοιχεί μία τέτοια συχνότητα.

Η μέση απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ακρότατες συχνότητες είναι ίση με

$$\Delta\omega = \frac{B}{L + 2 - K} = \frac{B_1 + B_2 + \dots + B_K}{L + 2 - K} = \frac{1}{L + 2 - K} \sum_{i=1}^K B_i = \frac{1}{L + 2 - K} \sum_{i=1}^K (\omega_i^h - \omega_i^\ell)$$

Επομένως, η ζώνη υπ' αριθμόν i με εύρος ζώνης B_i θα χωριστεί σε

$$\frac{B_i}{\Delta\omega} = \frac{\Delta\omega_i}{\Delta\omega} = \frac{\omega_i^h - \omega_i^\ell}{\Delta\omega}$$

ίσα μεταξύ τους διαστήματα. Στη γενική περίπτωση απαιτείται **στρογγυλοποίηση** προς τον πλησιέστερο ακέραιο, έτσι ώστε να έχουμε **ακέραιο** πλήθος διαστημάτων για τη ζώνη υπ' αριθμόν i .

ΒΗΜΑ 2 Ξεκινώντας από το σύνολο των $L + 2$ συχνοτήτων $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_L, \omega_{L+1}\}$ προσδιορίζουμε αναλυτικά την τιμή της παραμέτρου δ από τη σχέση

$$\delta = \frac{\gamma_0 |\tilde{H}_d(e^{j\omega_0})| + \gamma_1 |\tilde{H}_d(e^{j\omega_1})| + \dots + \gamma_L |\tilde{H}_d(e^{j\omega_L})| + \gamma_{L+1} |\tilde{H}_d(e^{j\omega_{L+1}})|}{\frac{\gamma_0}{\tilde{W}(\omega_0)} - \frac{\gamma_1}{\tilde{W}(\omega_1)} + \dots + \frac{(-1)^{L+1} \gamma_{L+1}}{\tilde{W}(\omega_{L+1})}}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

με την **παράμετρο** γ_k ($k = 1, 2, \dots, L + 1$) να ορίζεται ως

$$\gamma_k = \prod_{n=0, n \neq k}^{L+1} \frac{1}{\cos(\omega_k) - \cos(\omega_n)}$$

Στο επόμενο βήμα της διαδικασίας, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι (α) η συνάρτηση

$$\mathcal{P}(\omega) = \sum_{k=0}^L \alpha[k] (\cos \omega)^k = \sum_{k=0}^L \alpha[k] x^k \quad (\text{όπου } x = \cos \omega)$$

είναι **πολυώνυμο** βαθμού L και (β) οι τιμές της συνάρτησης $\mathcal{P}(\omega)$ στις θέσεις $x_k = \cos(\omega_k)$ μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση

$$\mathcal{P}(\omega_k) = | \widetilde{\mathcal{H}}_d(e^{j\omega_k}) | - \frac{(-1)^k \delta}{\widetilde{\mathcal{W}}(\omega_k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, L)$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $\mathcal{P}(\omega)$ στις θέσεις των $L + 1$ συχνοτήτων $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_L\}$ από τη **βαρυκεντρική μορφή** της **μεθόδου παρεμβολής του Lagrange**

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

η οποία αποδίδεται από την εξίσωση

$$\mathcal{P}(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(\omega_k) \\ \frac{\sum_{k=0}^L \frac{w_k \mathcal{P}(\omega_k)}{\cos \omega - \cos \omega_k}}{\sum_{k=0}^L \frac{w_k}{\cos \omega - \cos \omega_k}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \omega = \omega_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, L) \\ \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{array}$$

για τιμές βαρών $w_k = \gamma_k$ όπου γ_k οι παράμετροι που εμφανίζονται στην εξίσωση υπολογισμού της παραμέτρου δ .

ΒΗΜΑ 3 Προσδιορίζονται οι συχνότητες $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_\rho$ (για τιμή $\rho > L + 1$) στις θέσεις των οποίων το μέτρο της συνάρτησης σφάλματος $|\mathcal{E}(\omega)|$ **μεγιστοποιείται** στα άκρα των ζωνών ενδιαφέροντος, ικανοποιώντας την ιδιότητα $|\mathcal{E}(\tilde{\omega}_i)| \geq \delta$.

Αυτή η διαδικασία στηρίζεται στον **υπολογισμό** της συνάρτησης $|\mathcal{E}(\omega)|$ στις θέσεις ενός **σχετικά πυκνού** συνόλου τιμών συχνότητας, το πλήθος S των οποίων θα πρέπει να είναι **ικανοποιητικό** έτσι ώστε να διασφαλίζεται σχετικά καλή ακρίβεια. Ειδικότερα:

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

(1) Για την **επιλεγμένη** τιμή της παραμέτρου S και για την υπ' αριθμόν i ζώνη ενδιαφέροντος ($i = 1, 2, \dots, K$) υπολογίζουμε την τιμή $\delta\omega_i = B_i/N_i$ όπου $N_i = m_i S$ και θέτουμε $\xi = 0$ όπου ξ μια **βοηθητική** παράμετρος.

(2) Για κάθε ζώνη i ($i = 1, 2, \dots, K$) και για κάθε **συχνότητα** $\omega_i^1 = \omega_i^\ell$,
 $\omega_i^2 = \omega_i^\ell + \delta\omega_i, \dots, \omega_i^j = \omega_i^\ell + (j-1)\delta\omega_i, \dots, \omega_i^{N_i+1} = \omega_i^h$ θέτουμε $\omega_\xi = \omega_i^j$ και $\xi = \xi + 1$, εάν είναι $|\mathcal{E}(\omega_i^j)| \geq |\delta|$ και **ισχύει** κάποια από τις επόμενες συνθήκες:

(α) Η συνάρτηση $|\mathcal{E}(\omega_i^j)|$ **μεγιστοποιείται** στη θέση $\omega_i^j = \omega_i^\ell$, δηλαδή

$$|\mathcal{E}(\omega_i^\ell)| > |\mathcal{E}(\omega_i^\ell + \varepsilon)|$$

(β) Η συνάρτηση $|\mathcal{E}(\omega_i^j)|$ **μεγιστοποιείται** στη θέση ω_i^j , δηλαδή

$$|\mathcal{E}(\omega_i^j - \delta\omega_i)| < |\mathcal{E}(\omega_i^j)| > |\mathcal{E}(\omega_i^j + \delta\omega_i)|$$

(γ) Η συνάρτηση $|\mathcal{E}(\omega_i^j)|$ **μεγιστοποιείται** στη θέση $\omega_i^j = \omega_i^h$, δηλαδή

$$|\mathcal{E}(\omega_i^h)| > |\mathcal{E}(\omega_i^h - \varepsilon)|$$

Η παράμετρος ε είναι μία σταθερά με **πολύ μικρή τιμή** της τάξεως του $0.01\delta\omega_i$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η παραπάνω βήμα προς βήμα διαδικασία αναζήτησης των συχνοτήτων μεγίστου είναι αρκετά χρονοβόρα και χαρακτηρίζεται από μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

Για το λόγο αυτό απαιτείται επιτάχυνση αυτής της διαδικασίας και υπάρχουν αρκετοί αλγόριθμοι για αυτό.

Ο πρώτος από αυτούς τους αλγόριθμους αποτελεί μία βελτιωμένη έκδοση της απλής εξονυχιστικής αναζήτησης και είναι γνωστός ως επιλεκτική αναζήτηση και στηρίζεται στον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης $|\mathcal{E}(\omega)|$ στα σημεία ενδιαφέροντος.

Μία εναλλακτική μέθοδος υπολογισμού των ακρότατων τιμών συχνότητας, είναι η αριθμητική μέθοδος της κυβικής παρεμβολής, η οποία ωστόσο δεν είναι κατάλληλη για εφαρμογή σε περιοχές συχνοτήτων κοντά στα όρια των ζωνών ενδιαφέροντος, αφού εκεί η συνάρτηση σφάλματος δεν συμπεριφέρεται ομαλά.

Σε αυτή τη μέθοδο υπολογίζουμε και χρησιμοποιούμε κατάλληλα τις ακρότατες συχνότητες της παραπάνω συνάρτησης, η οποία θεωρούμε πως περιγράφεται από ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο της μορφής

$$|\mathcal{E}(\omega)| = \alpha_0 + \alpha_1\omega + \alpha_2\omega^2 + \alpha_3\omega^3 = \sum_{i=0}^3 \alpha_i\omega^i \quad \text{με παράγωγο}$$

$$\frac{d|\mathcal{E}(\omega)|}{d\omega} = \alpha_1 + 2\alpha_2\omega + 3\alpha_3\omega^2 = 0 \quad \text{και} \quad \text{συνθήκη μεγίστου}$$

$$\frac{d^2|\mathcal{E}(\omega)|}{d\omega^2} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3\omega < 0$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

ΒΗΜΑ 4 Στην πράξη τα φίλτρα έχουν συνήθως **περισσότερες από μία ζώνες** και το πλήθος των **ακρότατων** τιμών αυξάνεται **κατά 2** τιμές **ανά ζώνη** για κάθε ζώνη ενδιαφέροντος, αφού τα δύο άκρα κάθε ζώνης θεωρούνται ως **υποψήφιες θέσεις μεγίστου**.

Για συχνοτική απόκριση με K ζώνες ενδιαφέροντος, το πλήθος των μεγίστων θα είναι στη **χειρότερη** περίπτωση ίσο με $T = L + 2K$, προκαλώντας έτσι την εμφάνιση $T - (L + 2) = 2K - 2$ **πλεονασματικών** ακρότατων τα οποία θα πρέπει να απομακρυνθούν.

Αυτό γίνεται με έναν **επαναληπτικό αλγόριθμο απαλοιφής**, ο οποίος αρχικά **ταξινομεί κατά αύξουσα διάταξη** τις ζώνες συχνότητας ως προς το **μέσο** σφάλμα ζώνης και μετά **απορρίπτει** μία ακρότατη συχνότητα για κάθε ζώνη, διασχίζοντας τις ζώνες με **κυκλικό** τρόπο και ξεκινώντας από τη ζώνη με το **μικρότερο μέσο σφάλμα**. Ειδικότερα:

(1) Υπολογίζουμε το **μέσο σφάλμα ζώνης** για τη ζώνη υπ' αριθμόν i ($i = 1, 2, \dots, K$) ως

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{v_i} \sum_{\tilde{\omega}_i \in \Omega_i} |\mathcal{E}(\tilde{\omega}_i)| \quad (i = 1, 2, \dots, K)$$

όπου $\Omega_i = \{\tilde{\omega}_i : \omega_i^l \leq \omega_i \leq \omega_i^h\}$ το σύνολο των **δυνατικών ακρότατων συχνοτήτων** της ζώνης i και v_i ($i = 1, 2, \dots, K$) το **πλήθος** των ακρότατων για τη ζώνη i .

(2) Ταξινομούμε τις K ζώνες **κατά αύξουσα σειρά** ως προς το **μέσο** σφάλμα ζώνης κατασκευάζοντας την **ταξινομημένη λίστα** ζωνών Z_1, Z_2, \dots, Z_K με τις ζώνες Z_1 και Z_K να χαρακτηρίζονται από το **ελάχιστο** και το **μέγιστο σφάλμα ζώνης** αντίστοιχα.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Βέλτιστα ισοκυματικά φίλτρα & αλγόριθμος Remez

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

(3) Διασχιζουμε την ταξινομημένη λίστα με κυκλικό τρόπο, απορρίπτοντας μία μέγιστη συχνότητα ω_i ανά ζώνη, μέχρι να απορριφθούν όλες οι πλεονάζουσες συχνότητες. Η συχνότητα που απορρίπτεται οδηγεί στη μικρότερη τιμή του μέτρου $|\mathcal{E}(\omega_i)|$ χωρίς να ταυτίζεται με τις συχνότητες που αποτελούν τα όρια της ζώνης.

ΒΗΜΑ 5 Ο αλγόριθμος του Remez είναι σχεδιασμένος έτσι ώστε με την αύξηση του πλήθος των επαναλήψεων, η τιμή του δ να αυξάνει μονοτονικά ενώ η μέγιστη τιμή του σφάλματος να μειώνεται συνεχώς.

Ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν η μέγιστη τιμή του σφάλματος ταυτιστεί με την τρέχουσα απόλυτη τιμή της παραμέτρου δ , δηλαδή όταν ικανοποιείται η συνθήκη $Q = (E_{\max} - |\delta|) / E_{\max} < \varepsilon$ όπου ε μια παράμετρος σύγκλισης.

ΒΗΜΑ 6 Αντικαθιστούμε τις τρέχουσες τιμές του συνόλου αναφοράς και τις τιμές των συναρτήσεων $\tilde{W}(\omega)$ και $|\tilde{\mathcal{H}}(e^{j\omega})|$ στην εξίσωση πινάκων και επιλύουμε ως προς \mathbf{X} .

Εναλλακτικά υπολογίζουμε (για μία τελευταία φορά) τη συνάρτηση $\mathcal{P}(\omega)$ από τα δείγματα $\mathcal{P}(\Omega_m)$ ($m = 1, 2, \dots, L + 2$) με την αριθμητική μέθοδο παρεμβολής του Lagrange με τα δείγματα $\mathcal{P}(\Omega_m)$ ($m = 1, 2, \dots, L + 2$) να υπολογίζονται στις θέσεις των βέλτιστων ακρότατων τιμών συχνότητας.

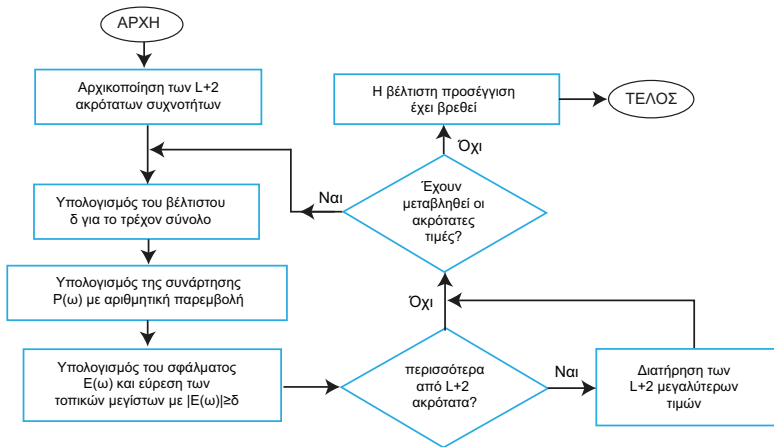
Από τη σχέση $|\mathcal{H}(e^{j\omega})| = \mathcal{P}(\omega) \mathcal{Q}(\omega)$ υπολογίζουμε το μέτρο της πραγματικής απόκρισης, με τη συνάρτηση $\mathcal{Q}(\omega)$ να εξαρτάται από τον τύπο του φίλτρου και προσδιορίζουμε τις τιμές των L δειγμάτων $|\mathcal{H}(e^{j\omega_k})|$ ($\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, 2, \dots, L$).

Τα δείγματα $h[n]$ της κρουστικής απόκρισης θα προκύψουν δια της εφαρμογής του αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier των δειγμάτων $|\mathcal{H}(e^{j\omega_k})|$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Ο αλγόριθμος Parks - McClellan

Αποτελεί την υλοποίηση του αλγορίθμου του Remez σε ηλεκτρονικό υπολογιστή και περιγράφεται από το επόμενο διάγραμμα ροής



Σχήμα: Το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου Parks-McClellan

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Ο αλγόριθμος Parks - McClellan

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στην πράξη, οι **προδιαγραφές λειτουργίας** περιλαμβάνουν την **τάξη** N του φίλτρου, τα **όρια των ζωνών διέλευσης και αποκοπής** ω_p και ω_s και τις τιμές των αντίστοιχων **διακυμάνσεων** δ_p και δ_s

Αυτές οι παράμετροι **δεν είναι** ανεξάρτητες μεταξύ τους: αντίθετα, η **γνώση** κάποιων από αυτές, επιτρέπει τον **υπολογισμό** των υπολοίπων, δια μέσου μιας **επαναληπτικής** διαδικασίας ή κάποιων **προσεγγιστικών** εξισώσεων.

Εάν οι τιμές των δ_p , δ_s , ω_p και ω_s είναι γνωστές, η **τάξη** του φίλτρου N μπορεί να υπολογιστεί **προσεγγιστικά** ως

$$N \approx \frac{-20 \log_{10}(\sqrt{\delta_p \delta_s}) - 13}{14.6 \frac{\omega_s - \omega_p}{2\pi}} + 1$$

που κατασκευάστηκε από τον Kaiser ή από την **πιο ακριβή** σχέση

$$N = \frac{D_\infty(\delta_p, \delta_s) - f(\delta_p, \delta_s)(\Delta F)^2}{\Delta F} + 1$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } D_\infty(\delta_p, \delta_s) &= [0.005309(\log_{10} \delta_p)^2 + 0.07114 \log_{10} \delta_p - 0.4761] \log_{10} \delta_p - \\ &\quad - [0.00266(\log_{10} \delta_p)^2 + 0.5941 \log_{10} \delta_p + 0.4278] \\ f(\delta_p, \delta_s) &= 11.01217 + 0.51244(\log_{10} \delta_p - \log_{10} \delta_s) \end{aligned}$$

με την παράμετρο ΔF να ορίζεται ως $\Delta F = (\omega_s - \omega_p)/2\pi$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Ο αλγόριθμος Parks - McClellan

Εάν το φίλτρο έχει **πολλές ζώνες ενδιαφέροντος**, βρίσκουμε την τιμή του N για την **κάθε** ζώνη μετάβασης που **παρεμβάλλεται** ανάμεσα σε ζώνη διέλευσης και ζώνη αποκοπής και επιλέγουμε για την τάξη του φίλτρου, τη **μέγιστη** αυτών των τιμών. Ειδικότερα:

(1) Υπολογίζουμε την τάξη του φίλτρου N . Εάν είναι άρτιος αριθμός, θέτουμε $N = N + 1$.

(2) Εκτελούμε τον **αλγόριθμο του Remez** και βρίσκουμε το μέγιστο σφάλμα δ_{\max} .

(A) Εάν είναι $\delta_{\max} > \delta_p$: (α) Θέτουμε $N = N + 2$, σχεδιάζουμε ξανά το φίλτρο και υπολογίζουμε ξανά το δ_{\max} . (β) Εάν για τη νέα τιμή είναι $\delta_{\max} \leq \delta_p$ προχωρούμε στο Βήμα 3, αλλιώς επιστρέφουμε στο Βήμα 2(A)α.

(B) Εάν είναι $\delta_{\max} < \delta_p$: (α) Κάνουμε ό,τι και στο 2(A)α αλλά για $N = N - 2$. (β) Εάν για τη νέα τιμή είναι $\delta_{\max} > \delta_p$ προχωρούμε στο Βήμα 4, διαφορετικά, επιστρέφουμε στο Βήμα 2(A)β.

(3) Υπολογίζουμε την **κρουστική** και τη **συχνотική** απόκριση χρησιμοποιώντας το τελευταίο σύνολο **ακρότατων τιμών συχνότητας** και την αντίστοιχη τιμή για το N .

(4) Επαναλαμβάνουμε το Βήμα 3 χρησιμοποιώντας το **προτελευταίο** σύνολο ακρότατων τιμών συχνότητας.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (FIR) - Ψηφιακοί διαφοριστές και μετασχηματιστές Hilbert

Η βασική λειτουργία ενός **ψηφιακού διαφοριστή** είναι ο υπολογισμός της παραγώγου ενός σήματος, για συχνοτική απόκριση **ιδανικού** φίλτρου

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = j\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Το αποτέλεσμα είναι μία **κρουστική απόκριση** της μορφής

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} j\omega e^{j\omega n} d\omega = \frac{\cos(\pi n)}{n} \quad -\infty < n < +\infty \quad (n \neq 0)$$

Ο **ιδανικός διαφοριστής** χαρακτηρίζεται από **αντισυμμετρική κρουστική απόκριση** της μορφής $h[n] = -h[-n]$ οπότε θα είναι $h[0] = 0$.

Ο **μετασχηματιστής Hilbert** αποτελεί ένα **ολοπερατό φίλτρο**, που επιφέρει μία **μετατόπιση φάσης** 90° στο σήμα εισόδου, για συχνοτική απόκριση **ιδανικού** φίλτρου

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j & 0 < \omega \leq \pi \\ +j & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

Το αποτέλεσμα είναι μία **μη αιτιατή απόκριση άπειρης διάρκειας** της μορφής

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \int_0^{\pi} j e^{j\omega n} d\omega \right) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2(\pi n/2)}{n} \\ 0 \end{cases}$$

Η κρουστική απόκριση είναι όπως και προηγούμενος **αντισυμμετρικό σήμα**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR)

Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι σχεδίασης **φίλτρων IIR**, η πιο γνωστή εκ των οποίων συνίσταται **στη μετατροπή** των αναλογικών IIR φίλτρων στα ψηφιακά ισοδύναμά τους.

Αυτή η μετατροπή, μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους, όπως είναι

- Η μετατροπή της **διαφορικής εξίσωσης** του αναλογικού φίλτρου στην **εξίσωση διαφορών** του αντίστοιχου ψηφιακού φίλτρου.
- Η κατασκευή του ψηφιακού φίλτρου έτσι ώστε η κρουστική του απόκριση να αποτελεί τη **δειγματοληπτημένη έκδοση** της κρουστικής απόκρισης του αντίστοιχου αναλογικού φίλτρου.

Η περιοχή σύγκλισης ενός αναλογικού φίλτρου είναι **το αριστερό ημιπίεδο του μιγαδικού επιπέδου** ενώ η περιοχή σύγκλισης του αντίστοιχου ψηφιακού φίλτρου είναι **το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου**.

Επομένως, αυτές οι διαδικασίες μετατροπής θα πρέπει να απεικονίζουν **το φανταστικό άξονα του χώρου των s στο μοναδιαίο κύκλο του χώρου των z** και να μετασχηματίζουν τη μία περιοχή στην άλλη, έτσι ώστε **ένας ευσταθής πόλος του αναλογικού φίλτρου να μετασχηματιστεί σε ευσταθή πόλο του αντίστοιχου ψηφιακού φίλτρου**.

Ένας δεύτερος τρόπος σχεδίασης **αναδρομικών φίλτρων IIR** είναι η χρήση **μεθόδων βελτιστοποίησης**, που οδηγούν σε συνάρτηση απόκρισης συχνότητας ως τη **βέλτιστη προσέγγιση** μιας ιδανικής συνάρτησης $H(e^{j\omega})$, από την οπτική γωνία της **ελαχιστοποίησης** κάποιας **συνάρτησης σφάλματος**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Προσέγγιση παραγώγων από εξισώσεις διαφορών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η παράγωγος μιας συνάρτησης μπορεί να **προσεγγιστεί** από την αντίστοιχη διαφορά. Η **πρώτη παράγωγος** μιας συνεχούς συνάρτησης $x = x(t)$ ορίζεται ως το όριο

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

και η **προσέγγισή της** στο πεδίο του **διακριτού χρόνου**, στηρίζεται στη χρήση της **διαφοράς προς τα πίσω**. Ειδικότερα, ισχύει ότι

$$x'(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

όπου το διάστημα Δt δεν είναι **απειροστό** όπως στη συνεχή περίπτωση, αλλά **πεπερασμένο** και με μικρή φυσικά τιμή.

Αυτό το διάστημα μπορεί να θεωρηθεί ως η **περίοδος δειγματοληψίας** $T_s \equiv T$ ενώ χρησιμοποιούνται τα **δείγματα** της συνάρτησης $x(t)$ που αντιστοιχούν σε χρονικές στιγμές $t_n = nT_s$. Επομένως, η παραπάνω σχέση μπορεί να λάβει τη μορφή

$$\left. \frac{x(t)}{dt} \right|_{t=nT} = \frac{x[nT] - x[nT - T]}{T} = \frac{x[nT] - x[(n-1)T]}{T_s} = \frac{x[n] - x[n-1]}{T}$$

όπου για λόγους **απλότητας** της γραφής ορίζουμε $x[n] \equiv x[nT]$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Προσέγγιση παραγώγων από εξισώσεις διαφορών

Χρησιμοποιώντας αυτή την προσέγγιση για την **πρώτη παράγωγο**, η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $x(t)$ θα προσεγγίζεται από την εξίσωση

$$\left. \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right|_{t=nT} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) \right]_{t=nT} = \frac{x'[n] - x'[n-1]}{T} = \frac{x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]}{T^2}$$

όπου $x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$ η **δεύτερη διαφορά** της συνάρτησης $x[n]$.

Έστω **συνεχές** σύστημα LTI με είσοδο $x(t)$ έξοδο $y(t) = x'(t)$.

Λαμβάνοντας το **μετασχηματισμό Laplace** των δύο μελών θα έχουμε $\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{Y}(s)$ και $\mathcal{L}\{x'(t)\} = s\mathcal{X}(s)$ και επομένως η **συνάρτηση μεταφοράς** του συστήματος είναι

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = s$$

Ο υπολογισμός της **διακριτής προσέγγισης** της συνεχούς παραγώγου πρώτης τάξεως, είναι η έξοδος ενός συστήματος με είσοδο $x[n]$ και έξοδο $y[n] = (x[n] - x[n-1])/T$.

Λαμβάνοντας το **μετασχηματισμό Z** των δύο μελών προκύπτει ότι

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{1}{T} \mathcal{X}(z) - \frac{1}{T} z^{-1} \mathcal{X}(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T} \mathcal{X}(z)$$

οδηγώντας σε **συνάρτηση μεταφοράς** της μορφής

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{X}(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Προσέγγιση παραγώγων από εξισώσεις διαφορών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Επομένως, η **διακριτοποίηση** του συνεχούς συστήματος που υπολογίζει τη **συνεχή πρώτη παράγωγο** και περιγράφεται από τη **συνάρτηση μεταφοράς** $\mathcal{H}(s) = s$ πραγματοποιείται από την **αντικατάσταση** $s = (1 - z^{-1})/T$ όπου T κατάλληλα επιλεγμένη **περίοδος δειγματοληψίας** με σχετικά μικρή τιμή.

Η εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας στο συνεχές σύστημα υπολογισμού της **δευτέρας παραγώγου** και στο διακριτό ισοδύναμό του που περιγράφονται από τις σχέσεις

$$y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad \text{και} \quad y[n] = \frac{x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]}{T^2}$$

αντίστοιχα, θα οδηγήσει στις **συναρτήσεις μεταφοράς**

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = s^2 \quad \text{και} \quad \mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{X}(z)} = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{T^2} = \left(\frac{1 - z^{-1}}{T} \right)^2$$

Επομένως, η συνάρτηση $\mathcal{H}(z)$ του διακριτού συστήματος, προκύπτει από τη συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$ του συνεχούς συστήματος, με την αντικατάσταση $s^2 = [(1 - z^{-1})/T]^2$.

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία, το συνεχές σύστημα υπολογισμού της **συνεχούς παραγώγου τάξεως k** , μετασχηματίζεται στο **ισοδύναμο** διακριτό σύστημα, πραγματοποιώντας στη **συνάρτηση μεταφοράς** $\mathcal{H}(s)$ την αντικατάσταση

$$s^k = \left(\frac{1 - z^{-1}}{T} \right)^k$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Προσέγγιση παραγώγων από εξισώσεις διαφορών

Επομένως, η **συνάρτηση μεταφοράς** $\mathcal{H}(z)$ ενός ψηφιακού συστήματος IIR σχετίζεται με τη **συνάρτηση μεταφοράς** $\mathcal{H}(s)$ του ισοδύναμου συνεχούς συστήματος, ως

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}}$$

για κατάλληλα επιλεγμένη τιμή του **διαστήματος δειγματοληψίας** T .

Ο παραπάνω μετασχηματισμός απεικονίζει το **φανταστικό άξονα** $s = j\omega$ του χώρου των s στην περιφέρεια του **μοναδιαίου** κύκλου.

Επιπλέον, **διατηρεί την ευστάθεια**: δηλαδή τα σημεία του **αριστερού** ημιεπιπέδου του χώρου των s απεικονίζονται στο **εσωτερικό** του μοναδιαίου κύκλου στο χώρο των z .

Ωστόσο, ο εν λόγω μετασχηματισμός **δεν διατηρεί τα συχνοτικά χαρακτηριστικά του αναλογικού συστήματος**, αφού τα σημεία του φανταστικού άξονα $s = j\omega$ δεν απεικονίζονται στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου στο χώρο των z .

Αυτή η μέθοδος λειτουργεί σωστά **μόνο** για ορισμένα χαμηλοπερατά φίλτρα καθώς και για **ζωνοπερατά** φίλτρα με **πολύ μικρή συχνότητα συντονισμού**.

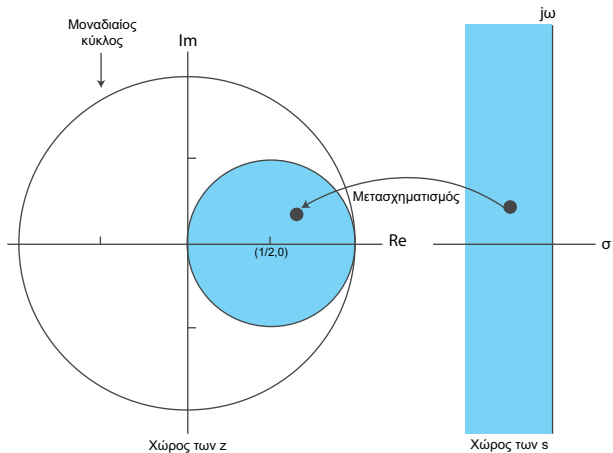
Αντίθετα, **δεν μπορεί** να χρησιμοποιηθεί, για την κατασκευή **υψηλοπερατών φίλτρων**, στα οποία χρησιμοποιείται ο πιο γενικός **διγραμμικός μετασχηματισμός**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Προσέγγιση παραγώγων από εξισώσεις διαφορών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Απεικόνιση του χώρου των s στο χώρο των z από το μετασχηματισμό που στηρίζεται στην προσέγγιση παραγώγων από πεπερασμένες διαφορές.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Προσέγγιση παραγώγων από εξισώσεις διαφορών

Προκειμένου να απομακρύνουμε τους παραπάνω περιορισμούς χρησιμοποιούμε τη **διαφορά τάξεως L** , προχωρώντας στην αντικατάσταση

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT} = \sum_{k=1}^L \alpha_k \frac{y[n+k] - y[n-k]}{T}$$

με τους συντελεστές α_k να επιλέγονται έτσι ώστε να βελτιστοποιούν την προσέγγιση της παραγώγου από την ισοδύναμη πεπερασμένη διαφορά.

Η συνάρτηση μεταφοράς του **συνεχούς διαφοριστή** θα είναι και πάλι η $\mathcal{H}(s) = s$, ενώ, για το **διακριτό σύστημα** του δεξιού μέλους που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \sum_{k=1}^L \alpha_k \frac{x[n+k] - x[n-k]}{T}$$

η εφαρμογή του μετασχηματισμού \mathcal{Z} στα δύο μέλη του σε συνδυασμό με την ιδιότητα της **χρονικής μετατόπισης** θα μας δώσει

$$\mathcal{Y}(z) = \sum_{k=1}^L \alpha_k \frac{\mathcal{Z}\{x[n+k]\} - \mathcal{Z}\{x[n-k]\}}{T} = \sum_{k=1}^L \alpha_k \frac{\mathcal{X}(z)(z^k - z^{-k})}{T} = \frac{\mathcal{X}(z)}{T} \sum_{k=1}^L \alpha_k (z^k - z^{-k})$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Προσέγγιση παραγώγων από εξισώσεις διαφορών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς του **διακριτού συστήματος** είναι η

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{X}(z)} = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^L (z^k - z^{-k})$$

και σχετίζεται με τη συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$ του **συνεχούς συστήματος** ως

$$s = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^L \alpha_k (z^k - z^{-k})$$

Αυτός ο νέος αλλά **πιο πολύπλοκος** μετασχηματισμός οδηγεί σε **καλύτερα αποτελέσματα**.

Επιτρέπει την **απεικόνιση** του **φανταστικού άξονα** του χώρου των s στο **μοναδιαίο κύκλο** του χώρου των z .

Το **αριστερό ημιεπίπεδο** του χώρου των s απεικονίζεται στο εσωτερικό του **μοναδιαίου κύκλου** στο χώρο των z και επομένως, η ευστάθεια του φίλτρου **διατηρείται**.

Ωστόσο, παραμένει το πρόβλημα της **κατάλληλης επιλογής** των τιμών των συντελεστών α_k , το οποίο, όμως δεν είναι τετριμμένο.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ξεκινώντας από ένα αναλογικό φίλτρο με κρουστική απόκριση $h_\alpha(t)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ψηφιακό φίλτρο έτσι ώστε η κρουστική του απόκριση $h[n]$ να σχετίζεται με την κρουστική απόκριση $h_\alpha(t)$ του αναλογικού φίλτρου δια μέσου μιας διαδικασίας δειγματοληψίας περιόδου T_s - θα είναι λοιπόν,

$$h[n] = h_\alpha(nT_s), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Η κατασκευή του ψηφιακού φίλτρου με τον τρόπο αυτό, συνιστά τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης.

Το ψηφιακό φίλτρο που προκύπτει με αυτή τη μέθοδο, διατηρεί τα συχνοτικά χαρακτηριστικά του ισοδύναμου αναλογικού φίλτρου.

Ωστόσο, η περίοδος δειγματοληψίας T_s θα πρέπει να είναι αρκετά μικρή ώστε να μην λαμβάνει χώρα επικάλυψη των διαδοχικών επαναλήψεων του φάσματος $\mathcal{H}_\alpha(\Omega)$.

Επομένως, αυτή η μέθοδος δεν είναι κατάλληλη για την κατασκευή υψηλοπερατών φίλτρων, οι συχνότητες λειτουργίας των οποίων δεν ικανοποιούν το θεώρημα του Nyquist.

Η απεικόνιση του χώρου των s στο χώρο των z , πραγματοποιείται ως $z = e^{sT_s}$.

Ο φανταστικός άξονας του χώρου των s απεικονίζεται στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου του χώρου των z .

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν είναι $\sigma < 0$ θα είναι $0 < r < 1$ και επομένως, τα σημεία του **αριστερού μιγαδικού ημιεπιπέδου** του χώρου των s , απεικονίζονται στο **εσωτερικό** του **μοναδιαίου κύκλου** του χώρου των z .

Εάν είναι $\sigma > 0$ θα είναι $r > 1$ και επομένως, τα σημεία του **δεξιού μιγαδικού ημιεπιπέδου** του χώρου των s απεικονίζονται στο **εξωτερικό** του **μοναδιαίου κύκλου** του χώρου των z .

Ωστόσο, η απεικόνιση του **φανταστικού άξονα** $s = j\Omega$ στην περιφέρεια του **μοναδιαίου κύκλου** του χώρου των z **δεν είναι 1 προς 1** αφού στην περιοχή τιμών $-\pi \leq \omega \leq \pi$ των **διακριτών** συχνοτήτων απεικονίζονται **πολλές περιοχές τιμών** των συνεχών συχνοτήτων της μορφής $(2k - 1)\pi/T_s \leq \Omega \leq (2k + 1)\pi/T_s$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου k .

Αυτή η **πολλά προς 1** αντιστοιχία **συνεχών προς διακριτές** συχνοτήτες οφείλεται στην εμφάνιση **πλασματικών συχνοτήτων** που σχετίζεται με το γεγονός πως στην πράξη **δεν υπάρχουν** αναλογικά φίλτρα που να χαρακτηρίζονται από **αυστηρά περιορισμένο** εύρος ζώνης φάσματος, έτσι ώστε **να μην υφίσταται** η επικάλυψη των επαναλαμβανόμενων στιγμιοτύπων του αναλογικού φάσματος.

Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται, ορίζοντας για το **αναλογικό** φίλτρο, προδιαγραφές λειτουργίας που να καλύπτουν **και με το παραπάνω** εκείνες που **πραγματικά** επιθυμούμε, ιδιαίτερα για τη **ζώνη αποκοπής**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης

Εάν η συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}_\alpha(s)$ του **πρότυπου αναλογικού φίλτρου** διαθέτει N **διακριτούς** πόλους p_k ($k = 1, 2, \dots, N$), μπορεί να αναπτυχθεί σε **σειρά μερικών κλασμάτων** της μορφής

$$\mathcal{H}_\alpha(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_N}{s - p_N} = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{s - p_k}$$

Στην περίπτωση αυτή η **κρουστική απόκριση** του αναλογικού φίλτρου θα προκύψει ως ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace** της συνάρτησης $\mathcal{H}_\alpha(s)$, ο οποίος διατυπώνεται ως

$$h_\alpha(t) = C_1 e^{p_1 t} u(t) + C_2 e^{p_2 t} u(t) + \dots + C_N e^{p_N t} u(t) = \left(\sum_{k=1}^N C_k e^{p_k t} \right) u(t)$$

με τη **βηματική συνάρτηση** $u(t)$ να χρησιμοποιείται για να καταστήσει την κρουστική απόκριση $h(t)$ **αιτιατό σήμα**.

Η **κρουστική απόκριση** $h[n]$ του ψηφιακού φίλτρου, θα λάβει τη μορφή

$$h[n] = h_\alpha(nT_s) = \sum_{k=1}^N C_k e^{p_k n T_s}$$

ενώ η **συνάρτηση μεταφοράς** $\mathcal{H}(z)$ θα προκύψει ως ο **μετασχηματισμός \mathcal{Z}** της **διακριτής κρουστικής απόκρισης** $h[n]$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Κατά συνέπεια, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\mathcal{H}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N C_k e^{p_k n T_s} \right) z^{-n} = \sum_{k=1}^N C_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_k T_s z^{-1}})^n = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{1 - e^{p_k T_s z^{-1}}}$$

Οι λεπτομέρειες της **απεικόνιση** του χώρου των s στο χώρο των z παρουσιάζονται στο επόμενο σχήμα από το οποίο παρατηρούμε πως ο μετασχηματισμός $z = e^{sT_s}$ απεικονίζει **ζώνες του αριστερού μιγαδικού ημιεπιπέδου** εύρους $2\pi/T_s$ του χώρου των s στο **εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου** στο χώρο των z .

Το **βασικό πλεονέκτημα** της μεθόδου αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης είναι η **γραμμική συσχέτιση** των συνεχών και διακριτών συχνοτήτων διαμέσου της σχέσης $\omega = \Omega T_s$ η οποία οδηγεί σε **πλήρη ταύτιση** θέτοντας $T_s = 1$.

Αυτή η εκχώρηση είναι **επιτρεπτή** αφού αποδεικνύεται πως το ψηφιακό φίλτρο που προκύπτει είναι **ανεξάρτητο** από την τιμή της παραμέτρου T_s .

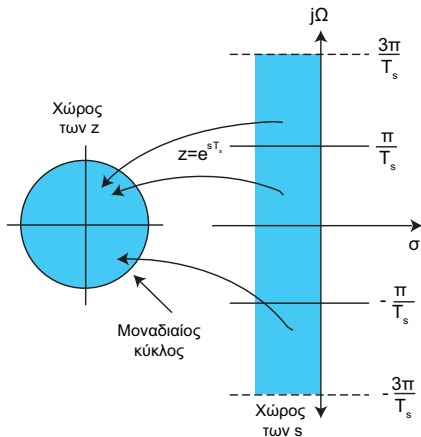
Το μειονέκτημά της είναι η **αρνητική επίδραση** της εμφάνισης **πλασματικών** συχνοτήτων.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Απεικόνιση του χώρου των s στο χώρο των z υπό την εφαρμογή του μετασχηματισμού $z = e^{sT_s}$ που οδηγεί στη **μέθοδο αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης**

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του ταιριασμένου μετασχηματισμού \mathcal{Z}

Εάν η συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$ διαθέτει **εκτός από πόλους και μηδενικές τιμές** και έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(s) = H_0 \left\{ \prod_{i=1}^M (s - z_i) / \prod_{i=1}^N (s - p_i) \right\}$$

η μετατροπή του αναλογικού φίλτρου στο **ψηφιακό ισοδύναμό του**, μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια του **ταιριασμένου μετασχηματισμού \mathcal{Z}** .

Αυτός ο μετασχηματισμός αποτελεί **γενίκευση** της μεθόδου της **αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης**, υπό την έννοια πως η **απεικόνιση** των μηδενικών τιμών του αναλογικού φίλτρου στις αντίστοιχες **μηδενικές** τιμές του ψηφιακού φίλτρου, πραγματοποιείται με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο γίνεται και η απεικόνιση των πόλων.

Εάν το αναλογικό φίλτρο διαθέτει N πόλους s_{p_i} και M μηδενικές τιμές s_{z_i} , οι αντίστοιχοι **πόλοι** και **μηδενικές τιμές** του ψηφιακού φίλτρου υπολογίζονται ως $z_{p_i} = e^{s_{p_i} T_s}$ και $z_{z_i} = e^{s_{z_i} T_s}$ όπου T_s **περίοδος δειγματοληψίας**, ενώ η **συνάρτηση μεταφοράς** είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) &= (z + 1)^L H_0 \left\{ \prod_{i=1}^M (1 - e^{z_{z_i} T_s} z^{-1}) / \prod_{i=1}^N (1 - e^{z_{p_i} T_s} z^{-1}) \right\} \\ &= (z + 1)^L H_0 \left\{ \prod_{i=1}^M (z - e^{z_{z_i} T_s}) / \prod_{i=1}^N (z - e^{z_{p_i} T_s}) \right\} \end{aligned}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του ταιριασμένου μετασχηματισμού Z

Ο **διορθωτικός παράγοντας** $(z + 1)^L$ **βελτιώνει** τη συμπεριφορά του φίλτρου έτσι ώστε να καθιστά δυνατή την εφαρμογή του μετασχηματισμού για την κατασκευή **χαμηλοπερατών** και **ζωνοπερατών** φίλτρων.

Οι πόλοι που προκύπτουν δια της εφαρμογής αυτής της μεθόδου είναι οι ίδιοι με εκείνους που προκύπτουν με τη μέθοδο της **αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης**.

Ωστόσο, οι δύο μέθοδοι **διαφέρουν** όσον αφορά **στις θέσεις των μηδενικών τιμών**.

Το βασικό μειονέκτημα του **ταιριασμένου μετασχηματισμού Z** είναι η εισαγωγή **αρκετά μεγάλου σφάλματος** όσον αφορά στην **εξασθένηση** στη ζώνη διέλευσης, ενώ γενικά **δεν προσφέρει έλεγχο** της τιμής της στάθμης της απόκρισης πλάτους του ψηφιακού φίλτρου.

Σημειώστε πως αυτός ο μετασχηματισμός επίσης είναι **ευάλωτος** όσον αφορά στις συνέπειες της εμφάνισης **πλασματικών συχνοτήτων** που ωστόσο μπορούν να περιοριστούν επιλέγοντας **ικανοποιητικά μικρή τιμή** για την παράμετρο T_s .

Εάν το **μέγιστο κέρδος** του αναλογικού φίλτρου είναι **ίσο με τη μονάδα**, το αντίστοιχο **κέρδος** του ψηφιακού φίλτρου είναι γενικά **διαφορετικό** της μονάδας και για το λόγο αυτό απαιτείται **επαναπροσδιορισμός** του συντελεστή κανονικοποίησης.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Διγραμμικός μετασχηματισμός

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ο **διγραμμικός μετασχηματισμός** αποτελεί μία **σύμμορφη απεικόνιση** που απεικονίζει το **φантаστικό άξονα** $s = j\Omega$ του χώρου των s στην **περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου** του χώρου των z , **μόνο μία φορά**.

Ας θεωρήσουμε για λόγους απλότητας ένα **σύστημα πρώτης τάξεως** που περιγράφεται από τη **συνάρτηση μεταφοράς**

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{\beta}{s + \alpha}$$

Επαναδιατυπώνοντας την παραπάνω σχέση με τη μορφή $s\mathcal{Y}(s) + \alpha\mathcal{Y}(s) = \beta\mathcal{X}(s)$ και λαμβάνοντας τον **αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace** θα έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\mathcal{Y}(s)\} + \alpha\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{Y}(s)\} = \beta\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{X}(s)\} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = \beta x(t)$$

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση $y(t)$ από **το ολοκλήρωμα της πρώτης παραγώγου της** υπολογισμένο στην περιοχή τιμών $[t_0, t]$ με **αρχική συνθήκη** $y_0 \equiv y(t_0)$, βρίσκουμε

$$y(t) = \int_{t_0}^t \frac{dy(\tau)}{d\tau} d\tau + y(t_0) = \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau + y(t_0)$$

και η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$y'(t) + \alpha \left(\int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau + y(t_0) \right) = \beta x(t)$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Διγραμμικός μετασχηματισμός

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Προσεγγίζοντας την τιμή του ολοκληρώματος με τη βοήθεια του **κανόνα του τραπεζίου** για τις τιμές $\alpha = nT_s - T_s = (n-1)T_s$ και $\beta = nT_s$ βρίσκουμε

$$y(nT_s) = \frac{1}{2} \left[y'(nT_s) + y'[(n-1)T_s] \right] [nT_s - (n-1)T_s] + y[(n-1)T_s]$$

ή ισοδύναμα

$$y[n] = \frac{T_s}{2} \left(y'[n] + y'[n-1] \right) + y[n-1]$$

όπου $f(nT) \equiv f[n]$. Επιλύοντας την εξίσωση ως προς $y'(t)$ και υπολογίζοντας τις τιμές στις θέσεις $t = nT_s$ και $t = (n-1)T_s$ βρίσκουμε

$$y'[n] = -\alpha y[n] + \beta x[n] \quad \text{και} \quad y'[n-1] = -\alpha y[n-1] + \beta x[n-1]$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη εξίσωση, αυτή λαμβάνει τη μορφή

$$\left(1 + \frac{\alpha T_s}{2} \right) y[n] - \left(1 - \frac{\alpha T_s}{2} \right) y[n-1] = \frac{\beta T_s}{2} \left(x[n] + x[n-1] \right)$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Διγραμμικός μετασχηματισμός

Λαμβάνοντας το **μετασχηματισμό Z** των δύο μελών και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της **χρονικής μετατόπισης** η **συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}(z)$** του συστήματος, γίνεται

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{X}(z)} = \frac{(\beta T_s/2)(1 + z^{-1})}{\left(1 + \frac{\alpha T_s}{2}\right) - \left(1 - \frac{\alpha T_s}{2}\right)z^{-1}} = \frac{\beta}{T_s} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

Εάν συγκρίνουμε τις **συναρτήσεις μεταφοράς** του συνεχούς και του διακριτού συστήματος

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\beta}{s + \alpha} \quad \text{και} \quad \mathcal{H}(z) = \frac{\beta}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

προκύπτει ότι η απεικόνιση από το χώρο των s στο χώρο των z γίνεται ως

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

Τα σημεία του **αριστερού μιγαδικού ημιεπιπέδου** του χώρου των s απεικονίζονται στο **εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου** του χώρου των z .

Τα σημεία του **δεξιού ημιεπιπέδου**, απεικονίζονται στο **εξωτερικό** του εν λόγω κύκλου.

Ο **διγραμμικός μετασχηματισμός** διατηρεί την ευστάθεια, αφού ένας ευσταθής πόλος του αναλογικού φίλτρου απεικονίζεται σε ένα ευσταθές σημείο του χώρου των z .

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Διγραμμικός μετασχηματισμός

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Επίσης, η περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου του χώρου των z απεικονίζεται στο **φανταστικό άξονα** του χώρου των s .

Οι συχνότητες Ω και ω στο πεδίο του **συνεχούς** και του **διακριτού** χρόνου σχετίζονται ως

$$\omega = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\Omega T_s}{2} \right)$$

Σε αντίθεση με τη μέθοδο της **αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης** που οδηγούσε σε μία **γραμμική σχέση** της μορφής $\omega = \Omega T_s$, η μέθοδος του **διγραμμικού μετασχηματισμού** οδηγεί σε μία **μη γραμμική συσχέτιση** των συχνοτήτων ω και Ω , η οποία προσδίδει στη διαδικασία σχεδίασης του ψηφιακού φίλτρου, ένα **αυξημένο** βαθμό πολυπλοκότητας.

Ωστόσο, η σχεδίαση ψηφιακών φίλτρων με **διγραμμικό μετασχηματισμό**, είναι **απαλλαγμένη** από τα προβλήματα που επιφέρει η εμφάνιση **πλασματικών συχνοτήτων**.

Ειδικότερα, οι ζώνες διέλευσης και αποκοπής του αναλογικού φίλτρου, θα **απεικονιστούν** στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής του ψηφιακού φίλτρου με τρόπο ώστε να διατηρούνται **όλα** τα χαρακτηριστικά που καθιστούν **υλοποιήσιμη** τη διακριτή συνάρτηση μεταφοράς.

Το βασικό μειονέκτημα του διγραμμικού μετασχηματισμού είναι η **στρέβλωση** της συχνότητας ω λόγω της **μη γραμμικής** φύσης της παραπάνω εξίσωσης. Αυτή η **στρέβλωση συχνότητας** εμφανίζεται ως **συμπίεση** που καθιστά τις εικόνες των περιοχών της συχνότητας Ω ολοένα και πιο μικρές καθώς μετακινούμαστε προς τις υψηλές συχνότητες.

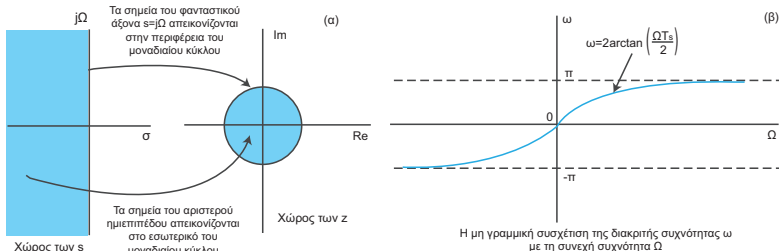
Αυτό **δεν συμβαίνει** στη μέθοδο της **αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης**, όπου η καμπύλη $\omega = f(\Omega) = \Omega T$ είναι **ευθεία γραμμή** και οι ζώνες συχνοτήτων στο χώρο των ω αποτελούν **ακριβείς εικόνες** των συχνοτικών ζωνών στο χώρο των Ω .

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Διγραμμικός μετασχηματισμός

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Η απεικόνιση του χώρου των s στο χώρο των z με τη βοήθεια του **διγραμμικού μετασχηματισμού** και η **μη γραμμική συσχέτιση** που υφίσταται ανάμεσα στη **συνεχή** συχνότητα Ω και στη **διακριτή** συχνότητα ω

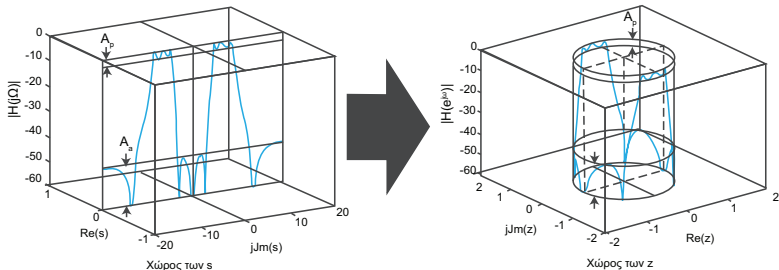
Η επίδραση της **στρέβλωσης συχνότητας** αίρεται πλήρως, **προστρεβλώνοντας** τις τιμές συχνότητας που σχετίζονται με τις προδιαγραφές λειτουργίας του αναλογικού φίλτρου.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Διγραμμικός μετασχηματισμός

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Η απεικόνιση της απόκρισης πλάτους του αναλογικού φίλτρου στο χώρο των z , κάτω από την επίδραση του διγραμμικού μετασχηματισμού

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Διγραμμικός μετασχηματισμός

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Θεωρώντας ένα απλό αναλογικό **χαμηλοπερατό** φίλτρο με συχνότητες **διέλευσης** και **αποκοπής** Ω_p και Ω_s , το οποίο χρησιμοποιείται για την κατασκευή ενός **ψηφιακού φίλτρου**, με συχνότητες λειτουργίας που σχετίζονται με τις συχνότητες Ω_p και Ω_s ως

$$\omega_p = \frac{2}{T_s} \tan^{-1} \left(\frac{\Omega_p T_s}{2} \right) \quad \text{και} \quad \omega_s = \frac{2}{T_s} \tan^{-1} \left(\frac{\Omega_s T_s}{2} \right)$$

η διαδικασία της **προστρέβλωσης** συνίσταται στο χαρακτηρισμό ως **συχνοτήτων λειτουργίας** του αναλογικού φίλτρου, όχι των Ω_p και Ω_s , αλλά των

$$\tilde{\omega}_p = \frac{2}{T_s} \tan \left(\frac{\omega_p T_s}{2} \right) \quad \text{και} \quad \tilde{\omega}_s = \frac{2}{T_s} \tan \left(\frac{\omega_s T_s}{2} \right)$$

αφού στην περίπτωση αυτή, η εφαρμογή του μετασχηματισμού θα οδηγήσει **επακριβώς** στις συχνότητες ω_p και ω_s που έχουν καθοριστεί κατά τις προδιαγραφές του φίλτρου. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή θα είναι

$$\tilde{\omega}_p = \frac{2}{T_s} \tan^{-1} \left(\frac{\tilde{\omega}_p T_s}{2} \right) = \omega_p$$

$$\tilde{\omega}_s = \frac{2}{T_s} \tan^{-1} \left(\frac{\tilde{\omega}_s T_s}{2} \right) = \omega_p$$

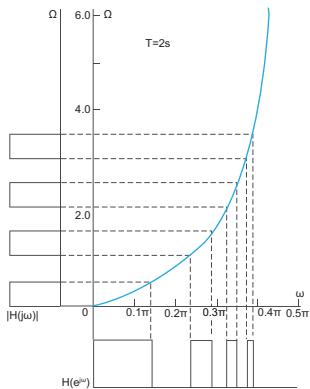
και επομένως οι **συχνότητες λειτουργίας** του ψηφιακού φίλτρου θα είναι **ακριβώς αυτές** που έχουν προσδιοριστεί κατά το στάδιο καθορισμού των προδιαγραφών του.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

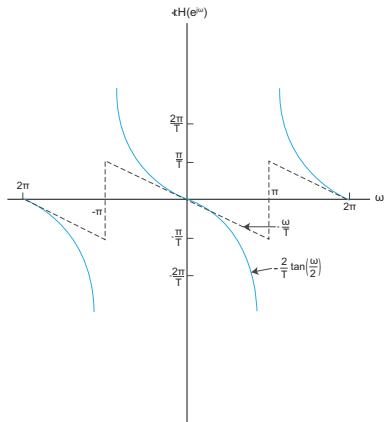
Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Διγραμμικός μετασχηματισμός

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Στρέβλωση συχνότητας διγραμμικού μετασχηματισμού.



Σχήμα: Η επίδραση της στρέβλωσης συχνότητας στη φασική απόκριση.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μέθοδος τοποθέτησης πόλων / μηδενικών τιμών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η συνεισφορά ενός ζεύγους μιγαδικών συζυγών μηδενικών τιμών $z = re^{\pm j\vartheta}$ στη συνάρτηση $\mathcal{H}(z)$ διακριτού συστήματος, είναι η εμφάνιση του όρου $(z - re^{j\vartheta})(z - re^{-j\vartheta})$ στην παράσταση του αριθμητή.

Εάν οι μηδενικές τιμές ανήκουν στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου, θα είναι $r = 1$ και η παραπάνω συνεισφορά γίνεται $(z - e^{j\vartheta})(z - e^{-j\vartheta})$.

Η συνεισφορά στη συχνοτική απόκριση είναι η $(e^{j\omega} - e^{j\vartheta})(e^{j\omega} - e^{-j\vartheta})$ και επομένως, το μέτρο της συχνοτικής απόκρισης συχνότητας στη θέση $\omega = \vartheta$ είναι μηδέν.

Ένα ζεύγος μιγαδικών συζυγών πόλων στις θέσεις $p = re^{\pm j\vartheta}$ συνεισφέρει στον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς τον όρο $(z - re^{j\vartheta})(z - re^{-j\vartheta})$ ενώ η αντίστοιχη συνεισφορά στη συχνοτική απόκριση είναι η $(e^{j\omega} - re^{j\vartheta})(e^{j\omega} - re^{-j\vartheta})$.

Επομένως, στη θέση $\omega = \vartheta$, το μέτρο της συχνοτικής απόκρισης είναι αντιστρόφως ανάλογο του όρου $(e^{j\vartheta} - re^{j\vartheta})(e^{j\omega} - re^{-j\vartheta}) = (1 - r)e^{j\vartheta}(e^{j\omega} - re^{-j\vartheta})$, δηλαδή, είναι τόσο πιο μεγάλο όσο πιο κοντά βρίσκεται ο πόλος στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου και αντίστροφα.

Εάν ο πόλος της συνάρτησης μεταφοράς ανήκει στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου, το μέτρο της συχνοτικής απόκρισης σε αυτή τη θέση λαμβάνει άπειρη τιμή.

Επομένως, εάν θέλουμε να ελαττώσουμε το μέτρο της συχνοτικής απόκρισης στη θέση κάποιας συχνότητας, θα πρέπει να τοποθετήσουμε μία μηδενική τιμή σε μία γειτονική ως προς αυτή θέση, ενώ αντίθετα, για να προκαλέσουμε την αύξηση του μέτρου θα πρέπει στη θέση αυτή να τοποθετήσουμε έναν πόλο.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μέθοδος τοποθέτησης πόλων / μηδενικών τιμών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το **διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών** και η **απόκριση πλάτους** χαμηλοπερατού φίλτρου με **συχνότητα αποκοπής** f_c παρουσιάζεται στη συνέχεια για $f_c > f_s/4$ και $f_c < f_s/4$.

Η **μηδενική τιμή** τοποθετείται **πάντοτε** στη θέση $z = -1$ έτσι ώστε να διασφαλίσει πως η συχνοτική απόκριση του φίλτρου σε αυτή τη θέση θα είναι **ίση με το μηδέν**.

Ο **πραγματικός** πόλος $z = \alpha$ τοποθετείται είτε στον **θετικό** είτε στον **αρνητικό** πραγματικό ημιάξονα (αλλά **εντός** του μοναδιαίου κύκλου έτσι ώστε να διασφαλίζεται η **ευστάθεια**) ανάλογα με τη σχέση που υφίσταται ανάμεσα στις συχνότητες f_c και f_s .

Εάν είναι $f_c < f_s/4$ ο πόλος τοποθετείται στον **θετικό πραγματικό ημιάξονα** ενώ εάν είναι $f_c > f_s/4$ ο πόλος τοποθετείται στον **αρνητικό πραγματικό ημιάξονα**. Η α του πόλου υπολογίζεται ως

$$\alpha \approx 1 - 2\pi \frac{f_c}{f_s} \quad \text{και} \quad \alpha \approx -\left(1 - \pi + 2\pi \frac{f_c}{f_s}\right)$$

Στην περίπτωση των **υψηλοπερατών** φίλτρων ο προσδιορισμός της θέσης του πόλου γίνεται **όπως και πριν**, αλλά η μηδενική τιμή τοποθετείται στη θέση $z = 1$.

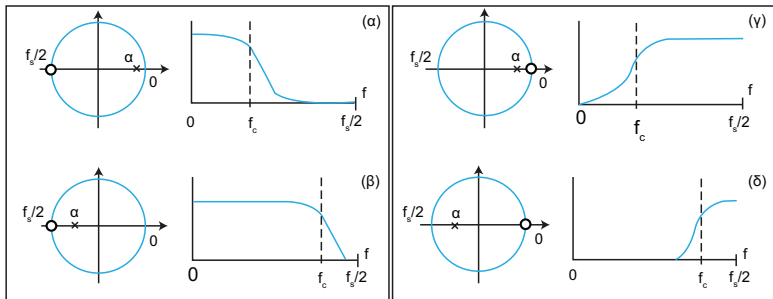
Οι εξισώσεις υπολογισμού της θέσης α του πόλου είναι οι ίδιες με πριν.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μέθοδος τοποθέτησης πόλων / μηδενικών τιμών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Το διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών και η απόκριση πλάτους χαμηλοπερατού και υψηλοπερατού φίλτρου που σχεδιάζεται με τη μέθοδο της τοποθέτησης πόλων - μηδενικών τιμών για $f_c < f_s/4$ [(α),(γ)] και $f_c > f_s/4$ [(β),(δ)].

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μέθοδος τοποθέτησης πόλων / μηδενικών τιμών

Τα **ζωνοπερατά** και **ζωνοφρακτικά** φίλτρα χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη **μιγαδικών συζυγών πόλων και μηδενικών τιμών**.

Στην περίπτωση των **ζωνοπερατών φίλτρων**, θα πρέπει να τοποθετηθούν **δύο μηδενικές τιμές** στις θέσεις $z = 1$ και $z = -1$.

Οι **πόλοι** της συνάρτησης έχουν τη μορφή $p = re^{\pm j\vartheta}$ με το μέτρο r και τη γωνία ϑ να είναι συνάρτηση των **παραμέτρων λειτουργίας** του φίλτρου και να δίνονται από τις **προσεγγιστικές** σχέσεις

$$r \approx 1 - \frac{BW}{f_s} \pi \quad (0.9 \leq r < 1.0) \quad \text{και} \quad \vartheta = \frac{f_0}{f_s} \times 360^\circ$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του **ζωνοπερατού φίλτρου** που προκύπτει, είναι η

$$\mathcal{H}(z) = H_0 \frac{(z+1)(z-1)}{(z-re^{j\vartheta})(z-re^{-j\vartheta})} = H_0 \frac{1-z^{-2}}{(1-re^{j\vartheta}z^{-1})(1-re^{-j\vartheta}z^{-1})}$$

Η **συχνοτική απόκριση** προκύπτει από την παραπάνω σχέση για $z = e^{j\omega}$ και είναι η

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = H_0 \frac{1-e^{-2j\omega}}{(1-re^{j\vartheta}e^{-j\omega})(1-re^{-j\vartheta}e^{-j\omega})} = H_0 \frac{1-e^{-2j\omega}}{1-2r\cos\vartheta e^{-j\omega} + r^2 e^{-2j\omega}}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μέθοδος τοποθέτησης πόλων / μηδενικών τιμών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η σταθερά αναλογίας H_0 προσδιορίζεται έτσι ώστε να αντιστοιχεί σε **μοναδιαίο κέρδος στη ζώνη διέλευσης** και στη θέση $\omega = \vartheta$ και δίδεται από την έκφραση

$$H_0 = \frac{(1-r)\sqrt{1-2r\cos(2\vartheta)+r^2}}{2|\sin\vartheta|}$$

Στα **ζωνοφρακτικά φίλτρα** οι **πόλοι** τοποθετούνται **στις ίδιες θέσεις** με εκείνες των ζωνοπερατών φίλτρων, ενώ **τα μηδενικά** τοποθετούνται **στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου** υπό τις **ίδιες γωνίες** σε σχέση με τους πόλους.

Οι εξισώσεις υπολογισμού των πόλων είναι οι

$$r \approx 1 - \frac{BW}{f_s} \pi \quad (0.9 \leq r < 1.0) \quad \text{και} \quad \vartheta = \frac{f_0}{f_s} \times 360^\circ$$

Η **συνάρτηση μεταφοράς** του ζωνοφρακτικού φίλτρου που κατασκευάζεται είναι η

$$\mathcal{H}(z) = H_0 \frac{(z - e^{j\vartheta})(z - e^{-j\vartheta})}{(z - re^{j\vartheta})(z - re^{-j\vartheta})} = H_0 \frac{1 - 2\cos\vartheta z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\vartheta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μέθοδος τοποθέτησης πόλων / μηδενικών τιμών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **συχνοτική απόκριση** του φίλτρου θα προκύψει από την παραπάνω σχέση για $z = e^{j\omega}$ και δίδεται από τη σχέση

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = H_0 \frac{1 - 2 \cos \vartheta e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}{1 - 2r \cos \vartheta e^{-j\omega} + r^2 e^{-2j\omega}}$$

Η **σταθερά αναλογίας** H_0 προκύπτει από την απαίτηση να είναι $|\mathcal{H}(e^{j\omega})| = 1$ για $\omega = 0$ και δίδεται από την εξίσωση

$$H_0 = \frac{1 - 2r \cos \vartheta + r^2}{2(1 - \cos \vartheta)}$$

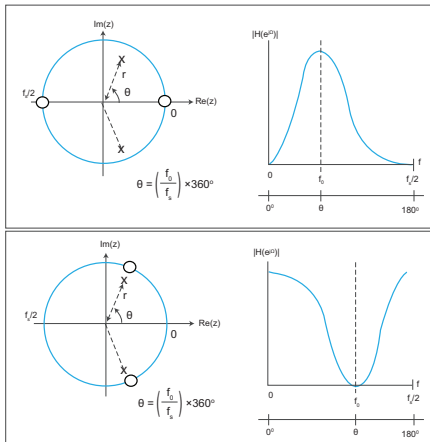
Το **διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών** και η **συχνοτική απόκριση** τυπικού ζωνοπερατού και ζωνοφρακτικού φίλτρου δευτέρας τάξεως που κατασκευάζονται με αυτή τη μέθοδο, παρουσιάζονται στο επόμενο σχήμα.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μέθοδος τοποθέτησης πόλων / μηδενικών τιμών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Το διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών και η συχνοτική απόκριση ζωνοπερατού και ζωνοφρακτικού φίλτρου δευτέρας τάξεως που κατασκευάζονται με τη μέθοδο της τοποθέτησης πόλων - μηδενικών τιμών

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Σχεδίαση με μεθόδους ελαχίστων τετραγώνων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στηρίζονται στην ελαχιστοποίηση του κατάλληλου **σφάλματος προσέγγισης**.

Αποτελούν ειδικές περιπτώσεις του γενικότερου προβλήματος **μοντελοποίησης** μιας διακριτής ακολουθίας $x[n]$ με τη βοήθεια ενός **αιτιατού συστήματος LTI** που περιγράφεται από τη **γνήσια** ρητή συνάρτηση μεταφοράς

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = \frac{\mathcal{B}(z)}{\mathcal{A}(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_M z^{-M}}{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_N z^{-N}} \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^M \beta_n z^{-n} \right\} / \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \alpha_n z^{-n} \right\} \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα, από την **εξίσωση διαφορών**

$$\begin{aligned} y[n] + \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] + \dots + \alpha_N y[n-N] = \\ \beta_0 x[n] + \beta_1 x[n-1] + \beta_2 x[n-2] + \dots + \beta_M x[n-M] \end{aligned}$$

Η **μοντελοποίηση** ενός σήματος ορίζεται ως η αναπαράσταση του σήματος με τη βοήθεια των παραμέτρων κάποιου **μοντέλου** και χρησιμοποιείται ευρύτατα σε πολλές εφαρμογές όπως είναι η **συμπίεση**, η **πρόβλεψη** και η **ανακατασκευή σημάτων**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Σχεδίαση με μεθόδους ελαχίστων τετραγώνων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το διακριτό σήμα $x[n]$ θα μοντελοποιηθεί ως η **απόκριση ενός συστήματος** στην **κρουστική συνάρτηση** $\delta[n]$.

Στην περίπτωση της **τέλειας και χωρίς σφάλματα αναπαράστασης του σήματος** $x[n]$, αυτό θα **ταυτίζεται** με την **κρουστική απόκριση** του συστήματος $h[n]$.

Ωστόσο, στην πράξη εμφανίζεται ένα **σφάλμα προσέγγισης** ανάμεσα στα σήματα $x[n]$ και $h[n]$ και η διαδικασία μοντελοποίησης συνίσταται στον υπολογισμό των τιμών των συντελεστών έτσι ώστε να **ελαχιστοποιείται** αυτό το σφάλμα το οποίο έχει τη μορφή

$$\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{\infty} |e[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x[n] - h[n]|^2$$

Εάν εργαζόμαστε στο **πεδίο της συχνότητας**, τα σήματα $x[n]$ και $h[n]$ δίδονται από τους **αντίστροφους μετασχηματισμούς Fourier διακριτού χρόνου**

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad \text{και} \quad h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathcal{B}(e^{j\omega})}{\mathcal{A}(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega$$

και το παραπάνω σφάλμα διατυπώνεται ως

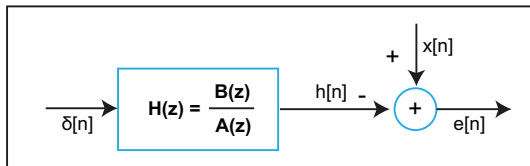
$$\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\mathcal{X}(e^{j\omega}) - \frac{\mathcal{B}(e^{j\omega})}{\mathcal{A}(e^{j\omega})} \right] e^{j\omega n} d\omega \right|^2$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Σχεδίαση με μεθόδους ελαχίστων τετραγώνων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Μοντελοποίηση ενός διακριτού σήματος $x[n]$ ως η απόκριση ενός **αιτιατού συστήματος LTI** με **γνήσια** ρητή συνάρτηση μεταφοράς.

Στη γενική περίπτωση συστήματος με **συνάρτηση μεταφοράς** με N πόλους και M μηδενικές τιμές, η κατασκευή της εν λόγω συνάρτησης μεταφοράς απαιτεί τον υπολογισμό των $M + N + 1$ συντελεστών $\{\alpha_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) και $\{\beta_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, M$).

Αυτό γίνεται επιλύοντας ισάριθμες **αλγεβρικές εξισώσεις** οι οποίες συνιστούν ένα **μη γραμμικό αλγεβρικό σύστημα**.

Εάν στη θέση του σήματος $x[n]$ χρησιμοποιήσουμε την **επιθυμητή κρουστική απόκριση** $h_d[n]$, αυτή η τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την **προσέγγιση** της συμπεριφοράς ενός ψηφιακού φίλτρου όταν είναι γνωστή η συνάρτηση μεταφοράς του $H_d(z)$ ή η κρουστική του απόκριση $h_d[n]$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η προσεγγιστική μέθοδος του Padé

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Προκειμένου να **αποφύγουμε** την επίλυση **μη γραμμικών** αλγεβρικών συστημάτων, μπορούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $\{\alpha_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) και $\{\beta_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, M$) από την **εξίσωση διαφορών**

$$y[n] = -\alpha_1 y[n-1] - \alpha_2 y[n-2] - \dots - \alpha_N y[n-N] \\ + \beta_0 x[n] + \beta_1 x[n-1] + \beta_2 x[n-2] + \dots + \beta_M x[n-M]$$

Εάν ως είσοδο χρησιμοποιήσουμε την **κρουστική συνάρτηση** $\delta[n]$, η έξοδος του συστήματος είναι η **κρουστική απόκριση** $h[n]$ - θα είναι τότε,

$$h[n] = -\alpha_1 h[n-1] - \alpha_2 h[n-2] - \dots - \alpha_N h[n-N] \\ + \beta_0 \delta[n] + \beta_1 \delta[n-1] + \beta_2 \delta[n-2] + \dots + \beta_M \delta[n-M] = \\ = -\alpha_1 h[n-1] - \alpha_2 h[n-2] - \dots - \alpha_N h[n-N] + \beta_n$$

αφού $\delta[n] = 1$ για $n = 0$ και $\delta[n] = 0$ για $n \neq 0$. Η παραπάνω σχέση ισχύει για $0 \leq n \leq M$ ενώ για $M < n < N$ οι συντελεστές β_n **δεν υφίστανται** και επομένως,

$$h[n] = -\alpha_1 h[n-1] - \alpha_2 h[n-2] - \dots - \alpha_N h[n-N]$$

Οι παραπάνω σχέσεις οι οποίες σε συνεπτυγμένη μορφή διατυπώνονται ως

$$y[n] + \sum_{k=0}^N \alpha_k h[n-k] = \begin{cases} \beta_n & n = 1, 2, \dots, M \\ 0 & n = M+1, M+2, \dots, M+N \end{cases}$$

συνιστούν **σύστημα γραμμικών εξισώσεων**, που οδηγεί στις τιμές των α_n και β_n .

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η προσεγγιστική μέθοδος του Padé

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ο υπολογισμός των συντελεστών $\{\alpha_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) και $\{\beta_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, M$) γίνεται **σε δύο** στάδια:

- Υπολογίζουμε τους συντελεστές $\{\alpha_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, N$).
- Υπολογίζουμε τους συντελεστές $\{\beta_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, M$).

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές $\{\alpha_k\}$ εργαζόμαστε στην περιοχή τιμών

$$M + 1 \leq n \leq M + N$$

προχωρώντας στην αντικατάσταση $h[n] = h_d[n]$.

Λαμβάνοντας υπόψη πως οι συντελεστές β_n σε αυτή την περιοχή τιμών είναι **ίσοι με το μηδέν**, οδηγούμαστε στο σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} h_d[M+1] & h_d[M] & h_d[M-1] & \dots & h_d[M-N+1] \\ h_d[M+2] & h_d[M+1] & h_d[M] & \dots & h_d[M-N+2] \\ h_d[M+3] & h_d[M+2] & h_d[M+1] & \dots & h_d[M-N+3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_d[M+N] & h_d[M+N-1] & h_d[M+N-2] & \dots & h_d[M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η προσεγγιστική μέθοδος του Padé

Το παραπάνω σύστημα μπορεί **εναλλακτικά** να διατυπωθεί ως

$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_d[M] & h_d[M-1] & \dots & h_d[M-N+1] \\ h_d[M+1] & h_d[M] & \dots & h_d[M-N+2] \\ h_d[M+2] & h_d[M+1] & \dots & h_d[M-N+3] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_d[M+N-1] & h_d[M+N-2] & \dots & h_d[M] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_M} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}}_{\alpha} = - \underbrace{\begin{bmatrix} h_d[M+1] \\ h_d[M+2] \\ h_d[M+3] \\ \vdots \\ h_d[M+N] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{M+1}}$$

ή ως $\mathbf{X}_M \cdot \alpha = \mathbf{X}_{M+1}$. Ισχύουν οι επόμενες περιπτώσεις:

- Ο πίνακας \mathbf{X}_M είναι **μη ιδιάζων** και το σύστημα **διαθέτει λύση**. Υφίσταται ο **αντίστροφος πίνακας** \mathbf{X}_M^{-1} και η λύση του συστήματος είναι **μοναδική** και ίση με $\alpha = -\mathbf{X}_M^{-1} \mathbf{X}_{M+1}$.
- Ο πίνακας \mathbf{X}_M είναι **ιδιάζων** και το σύστημα **διαθέτει λύση**. Ειδικότερα, το σύστημα έχει **πολλές λύσεις**, αφού εάν το διάνυσμα α αποτελεί **λύση** του συστήματος, τότε λύση θα αποτελεί και το διάνυσμα $\tilde{\alpha} = \alpha + z$ όπου z οι **μη μηδενικές** λύσεις της **ομογενούς εξίσωσης** $\mathbf{X}_m z = 0$.
- Ο πίνακας \mathbf{X}_M είναι **ιδιάζων** και το σύστημα **δεν διαθέτει λύση**. Στην περίπτωση αυτή θέτουμε $\alpha_0 = 0$ και επιλύουμε το σύστημα $\mathbf{X}_M \cdot \alpha = 0$ αντί για το $\mathbf{X}_M \cdot \alpha = \mathbf{X}_{M+1}$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η προσεγγιστική μέθοδος του Padé

Μετά τον υπολογισμό των συντελεστών α_n αυτοί χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των συντελεστών β_n οι οποίοι προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_d[0] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_d[1] & h_d[0] & 0 & \dots & 0 \\ h_d[2] & h_d[1] & h_d[0] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_d[M] & h_d[M-1] & h_d[M-2] & \dots & h_d[M-N] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

ή $\mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$ με τους πίνακες \mathbf{X}_0 , \mathbf{a} και \mathbf{b} να είναι διαστάσεων $M \times N$, $N \times 1$ και $M \times 1$.

Το **βασικό μειονέκτημα** της **προσεγγιστικής μεθόδου του Padé** είναι πως η **ακρίβεια** της προσέγγισης που προσφέρει, **αυξάνει** με την αύξηση της πολυπλοκότητας του φίλτρου.

Επομένως, τα φίλτρα για τα οποία το αποτέλεσμα που προκύπτει θεωρείται αποδεκτό, χαρακτηρίζονται από μεγάλο βαθμό **πολυπλοκότητας**, δηλαδή από **μεγάλο πλήθος** πόλων και μηδενικών τιμών.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η προσεγγιστική μέθοδος του Padé

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν η συνάρτηση μεταφοράς έχει **μόνο** πόλους ($M = 1$) οι συντελεστές α_k υπολογίζονται ως

$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_d[0] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_d[1] & h_d[0] & 0 & \dots & 0 \\ h_d[2] & h_d[1] & h_d[0] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_d[N-1] & h_d[N-2] & h_d[N-3] & \dots & h_d[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} h_d[1] \\ h_d[2] \\ h_d[3] \\ \vdots \\ h_d[N] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_1}$$

ή σε μορφή πινάκων, $\mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{X}_1$. Στην προκειμένη περίπτωση, ο πίνακας \mathbf{X}_0 είναι ένας **κάτω τριγωνικός πίνακας τύπου Toeplitz** και επομένως, οι συντελεστές α_k μπορούν να υπολογιστούν απευθείας από τη σχέση

$$\alpha_k = -\frac{1}{h_d[0]} \left[h_d[k] + \sum_{\ell=1}^{k-1} \alpha_\ell h_d[k-\ell] \right]$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Σχεδίαση βέλτιστων αντιστροφών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στηρίζεται στην **ελαχιστοποίηση** του σφάλματος ανάμεσα στην **έξοδο** του συστήματος $y[n]$ και την **κρουστική απόκριση** $\delta[n]$.

Στο επόμενο σχήμα, το **επιθυμητό** διακριτό και **προς κατασκευήν** σύστημα $\mathcal{H}_d(z)$ συνδέεται **εν σειρά** με ένα **αντίστροφο** σύστημα, με συνάρτηση μεταφοράς $1/\mathcal{H}(z)$. Εάν αυτό είναι το **αντίστροφο** του πρώτου, η συνάρτηση μεταφοράς του είναι η $1/\mathcal{H}_d(z)$ και η **απόκριση** του σύνθετου συστήματος στο σήμα $\delta[n]$ είναι $y[n] = \delta[n]$.

Εάν το δεύτερο σύστημα **δεν είναι** επακριβώς το αντίστροφο του πρώτου, η έξοδος $y[n]$ **δεν θα είναι** επακριβώς η κρουστική συνάρτηση αλλά **μία προσέγγιση** αυτής, με σφάλμα προσέγγισης

$$\mathcal{E} = \sum_{n=1}^{\infty} y^2[n]$$

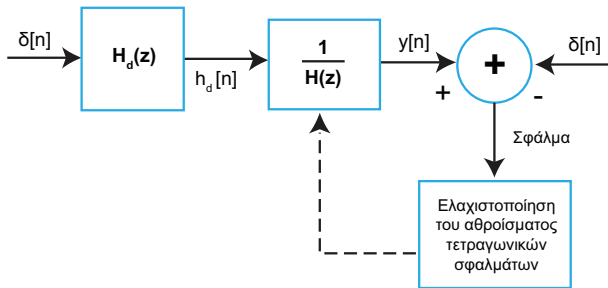
Επομένως, η σχεδίαση του επιθυμητού συστήματος με αυτή τη μέθοδο, συνίσταται στην **ελαχιστοποίηση** του σφάλματος \mathcal{E} , αφού **όσο πιο μικρό** είναι αυτό το σφάλμα, **τόσο πιο μεγάλη** είναι η ομοιότητα ανάμεσα στα σήματα $y[n]$ και $\delta[n]$ και **τόσο πιο πολύ** η συνάρτηση $1/\mathcal{H}(z)$ θα προσεγγίζει τη συνάρτηση $1/\mathcal{H}_d(z)$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Σχεδίαση βέλτιστων αντιστροφών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Σχεδίαση **αντίστροφου φίλτρου** με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Σχεδίαση βέλτιστων αντίστροφων φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Θεωρώντας πως το σύστημα περιέχει **μόνο πόλους** και περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$\mathcal{H}(z) = \beta_0 / \left\{ 1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k} \right\}$$

η συνάρτηση μεταφοράς του **αντίστροφου** συστήματος θα είναι η

$$\frac{1}{\mathcal{H}(z)} = \left\{ 1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k} \right\} / \beta_0 = \frac{\mathcal{X}(s)}{\mathcal{Y}(s)} \text{ και επομένως } \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k} \right) \mathcal{Y}(s) = \beta_0 \mathcal{X}(s)$$

Λαμβάνοντας τον **μετασχηματισμό** \mathcal{Z}^{-1} , η έξοδος του αντίστροφου συστήματος $y[n]$

$$y[n] = \frac{1}{\beta_0} \left[x[n] + \alpha_1 x[n-1] + \alpha_2 x[n-2] + \dots + \alpha_N x[n-N] \right] = \frac{1}{\beta_0} \left[x[n] + \sum_{k=1}^N \alpha_k x[n-k] \right]$$

Εάν ως είσοδο διαβιβάσουμε την **κρουστική συνάρτηση** $x[n] = \delta[n]$, η έξοδος είναι

$$y[n] = \frac{1}{\beta_0} \left[h_d[n] + \sum_{k=1}^N \alpha_k h_d[n-k] \right]$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Σχεδίαση βέλτιστων αντιστροφών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Παρατηρούμε ότι για $n = 0$ και $\beta_0 = h_d[0]$ είναι $y[n] = 0$ ενώ για $n > 0$ είναι $\delta[n] = 0$.

Επομένως, το διακριτό σήμα $y[n]$ θα αναπαριστά το **σφάλμα προσέγγισης** ανάμεσα στην επιθυμητή έξοδο $\delta[n] = 0$ ($n > 0$) και την πραγματική έξοδο $y[n]$.

Η σχεδίαση του φίλτρου συνίσταται λοιπόν στον **προσδιορισμό** των τιμών των συντελεστών $\{\alpha_k\}$ οι οποίοι **ελαχιστοποιούν** το σφάλμα προσέγγισης που ορίζεται ως

$$\mathcal{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[h_d[n] + \sum_{k=1}^N \alpha_k h_d[n-k] \right]^2$$

Μηδενίζοντας την παράγωγο της συνάρτησης σφάλματος ως προς $\{\alpha_k\}$ βρίσκουμε

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\alpha_k} = 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} h_d[n] h_d[n-\ell] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k h_d[n-k] h_d[n-\ell] \right] = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \sum_{n=1}^{\infty} h_d[n-k] h_d[n-\ell] = - \sum_{n=1}^{\infty} h_d[n] h_d[n-\ell]$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Σχεδίαση βέλτιστων αντιστροφών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ορίζοντας τη συνάρτηση

$$\xi(k, \ell) = \sum_{n=1}^{\infty} h_d[n-k]h_d[n-\ell] = \sum_{n=1}^{\infty} h_d[n]h_d[n+k-\ell] = \xi(k-\ell) \quad \text{θα είναι}$$

$$\xi(\ell, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} h_d[n-\ell]h_d[n] \quad \text{και επομένως} \quad \sum_{k=1}^N \alpha_k \xi(k, \ell) = -\xi(k, 0), \quad \ell = 1, 2, \dots, N$$

ή σε **ανεπτυγμένη γραφή**,

$$\alpha_1 \xi(1, 1) + \alpha_2 \xi(2, 1) + \alpha_3 \xi(3, 1) + \dots + \alpha_N \xi(N, 1) = -\xi(1, 0)$$

$$\alpha_1 \xi(1, 2) + \alpha_2 \xi(2, 2) + \alpha_3 \xi(3, 2) + \dots + \alpha_N \xi(N, 2) = -\xi(2, 0)$$

$$\alpha_1 \xi(1, 3) + \alpha_2 \xi(2, 3) + \alpha_3 \xi(3, 3) + \dots + \alpha_N \xi(N, 3) = -\xi(3, 0)$$

.....

$$\alpha_1 \xi(1, N) + \alpha_2 \xi(2, N) + \alpha_3 \xi(3, N) + \dots + \alpha_N \xi(N, N) = -\xi(N, 0)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις αποτελούν σύστημα $N \times N$, με λύση τους συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη **συνάρτηση μεταφοράς** $1/\mathcal{H}(z)$ και ύστερα τη συνάρτηση $\mathcal{H}(z)$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Prony

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **μέθοδος του Prony** προσεγγίζει **απευθείας** το επιθυμητό ψηφιακό φίλτρο, ακολουθώντας **διαφορετική** προσέγγιση από εκείνη που χρησιμοποιείται στη **μέθοδο του Padé**.

Η **μέθοδος του Padé** προσπαθεί να ταιριάζει **επακριβώς** τα $M + N + 1$ πρώτα δείγματα της **επιθυμητής** και της **πραγματικής** κρουστικής απόκρισης $h_d[n]$ και $h[n]$ **αδιαφορώντας** για το τι συμβαίνει από εκεί και πέρα.

Αντίθετα, η **μέθοδος του Prony** λαμβάνει υπόψη της και τα **υπόλοιπα** δείγματα και αντί να προχωρήσει στο **μηδενισμό** του σφάλματος για τις $M + N + 1$ πρώτες τιμές, προσπαθεί να **ελαχιστοποιήσει** ένα σφάλμα προσέγγισης που ορίζεται πάνω **σε όλα** τα δείγματα των διακριτών σημάτων με τη βοήθεια της μεθόδου **ελαχίστων τετραγώνων**.

Έστω πως η **συνάρτηση μεταφοράς** του θεωρούμενου φίλτρου χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη M μηδενικών τιμών και N πόλων και επομένως, η εξίσωση διαφορών που το περιγράφει έχει τη μορφή

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \alpha_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M \beta_k x[n-k]$$

Εάν διαβιβάσουμε στην είσοδο του φίλτρου την **κρουστική συνάρτηση** $x[n] = \delta[n]$, η έξοδος του θα είναι η **κρουστική απόκριση** $h[n]$ και η παραπάνω σχέση διατυπώνεται ως

$$h[n] = - \sum_{k=1}^N \alpha_k h[n-k] + \sum_{k=0}^M \beta_k \delta[n-k]$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Prony

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **μοναδική** μη μηδενική χρονικώς μετατοπισμένη κρουστική συνάρτηση (με τιμή ίση 1) αντιστοιχεί στο δείκτη $k = n$ και επομένως,

$$h[n] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^N \alpha_k h[n-k] + \beta_n & 0 \leq n \leq M \\ -\sum_{k=1}^N \alpha_k h[n-k] & n > M \end{cases}$$

Οι παραπάνω εκφράσεις αφορούν στην **προσέγγιση** της συνάρτησης $\mathcal{H}_d(z)$ από τη συνάρτηση $\mathcal{H}(z)$.

Αν και δεν είναι σίγουρο πως η $\mathcal{H}_d(z)$ θα περιέχει **πόλους** και **μηδενικές τιμές** όπως η $\mathcal{H}(z)$, μπορούμε (τουλάχιστον για $n > M$) να προσεγγίσουμε την ισοδύναμη επιθυμητή κρουστική απόκριση ως

$$\hat{h}_d[n] = -\sum_{k=1}^N \alpha_k h_d[n-k] \quad \text{ορίζοντας} \quad e[n] = h_d[n] - \hat{h}_d[n] = h_d[n] + \sum_{k=1}^N \alpha_k h_d[n-k]$$

Επομένως, οι τιμές των συντελεστών α_k μπορούν να υπολογιστούν ως οι τιμές που **ελαχιστοποιούν το τετραγωνικό σφάλμα προσέγγισης** της **επιθυμητής** κρουστικής απόκρισης $h_d[n]$ από την **πραγματική** κρουστική απόκριση $h[n]$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Prony

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Αυτό το σφάλμα για την περιοχή τιμών $n > M$ διατυπώνεται ως

$$\mathcal{E} = \sum_{n=M+1}^{\infty} |e[n]|^2 = \sum_{n=M+1}^{\infty} \left| h_d[n] - \hat{h}_d[n] \right|^2 = \sum_{n=M+1}^{\infty} \left| h_d[n] + \sum_{k=1}^N \alpha_k h_d[n-k] \right|^2$$

Μηδενίζοντας την παράγωγο της συνάρτησης σφάλματος ως προς α_k , βρίσκουμε

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left\{ \sum_{n=M+1}^{\infty} |e[n]|^2 \right\} = 2 \sum_{n=M+1}^{\infty} e[n] \frac{\partial e[n]}{\partial \alpha_k} = 0$$

$$\text{Είναι όμως } \frac{\partial e[n]}{\partial \alpha_k} = h_d[n-k] \quad \text{και επειδή} \quad e[n] = h_d[n] + \sum_{k=1}^N \alpha_k h_d[n-k]$$

η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} \left[h_d[n] + \sum_{k=1}^N \alpha_k h_d[n-k] \right] h_d[n-\ell] = 0 \quad \text{από όπου προκύπτει ότι}$$

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \left[\sum_{n=M+1}^{\infty} h_d[n-k] h_d[n-\ell] \right] = - \sum_{n=M+1}^{\infty} h_d[n] h_d[n-k]$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Prony

Ορίζοντας τη συνάρτηση

$$\xi(k, \ell) = \sum_{n=M+1}^{\infty} h_d[n-k]h_d[n-\ell]$$

η παραπάνω σχέση λαμβάνει την απλή μορφή

$$\sum_{\ell=1}^N \alpha_{\ell} \xi(k, \ell) = -\xi(k, 0), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

ή ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \xi(1,1) & \xi(1,2) & \xi(1,3) & \dots & \xi(1,N) \\ \xi(2,1) & \xi(2,2) & \xi(2,3) & \dots & \xi(2,N) \\ \xi(3,1) & \xi(3,2) & \xi(3,3) & \dots & \xi(3,N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi(N,1) & \xi(N,2) & \xi(N,3) & \dots & \xi(N,N) \end{bmatrix}}_{\xi} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_5 \end{bmatrix}}_{\alpha} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \xi(1,0) \\ \xi(2,0) \\ \xi(3,0) \\ \vdots \\ \xi(N,0) \end{bmatrix}}_{\gamma}$$

Εάν ο πίνακας ξ είναι **μη ιδιάζων** υφίσταται ο **αντίστροφός του** και το σύστημα διαθέτει τη **μοναδική** λύση $\alpha = -\xi^{-1} \cdot \gamma$. Στην αντίθετη περίπτωση, εφαρμόζουμε διαδικασίες παρόμοιες με αυτές που περιγράψαμε στην **προσεγγιστική μέθοδο του Padé**.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Prony

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Μετά τον υπολογισμό των συντελεστών α_k μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές β_n **μηδενίζοντας το σφάλμα** $e[n]$ για την περιοχή τιμών $0 \leq n \leq M$. Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε στο σύστημα των εξισώσεων

$$b_n = h_d[n] + \sum_{k=1}^N \alpha_k h_d[n-k], \quad 0 \leq n \leq M$$

το οποίο, σε **μορφή πινάκων** διατυπώνεται ως

$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_d[0] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_d[1] & h_d[0] & 0 & \dots & 0 \\ h_d[2] & h_d[1] & h_d[0] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_d[M] & h_d[M-1] & h_d[M-2] & \dots & h_d[M-N] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

ή $\mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$ με τους πίνακες \mathbf{X}_0 , \mathbf{a} και \mathbf{b} να είναι διαστάσεων $M \times N$, $N \times 1$ και $M \times 1$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Shanks

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στη μέθοδο του Shanks οι συντελεστές β_k της συνάρτησης μεταφοράς υπολογίζονται ελαχιστοποιώντας ένα σφάλμα που υπολογίζεται πάνω σε όλα τα διαθέσιμα δείγματα του σήματος $h_d[n]$, χρησιμοποιώντας τεχνικές ελαχίστων τετραγώνων.

Έστω πως το προς σχεδίαση φίλτρο προκύπτει από την εν σειρά σύνδεση ενός φίλτρου $\mathcal{H}_1(z)$ που περιέχει μόνο πόλους και ενός φίλτρου $\mathcal{H}_2(z)$ που περιέχει μόνο μηδενικές τιμές

$$\mathcal{H}_1(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}} \quad \text{και} \quad \mathcal{H}_2(z) = \sum_{k=0}^M \beta_k z^{-k}$$

Αρχικά υπολογίζουμε τους συντελεστές α_k με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και στη συνέχεια τη συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}_1(z)$ και την εξίσωση διαφορών του συστήματος

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \alpha_k y[n-k] + x[n] \quad (n \geq 0)$$

Εάν λοιπόν στο πρώτο σύστημα χρησιμοποιήσουμε ως είσοδο την κρουστική συνάρτηση $\delta[n]$, η έξοδος $v[n]$ είναι

$$v[n] = - \sum_{k=1}^N \alpha_k v[n-k] + \delta[n] \quad (n \geq 0)$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Shanks

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η ακολουθία $v[n]$ διαβιβάζεται τώρα ως είσοδος στο **δεύτερο σύστημα**, η συνάρτηση του οποίου περιέχει τους συντελεστές β_k .

Λαμβάνοντας υπόψη πως η **εξίσωση διαφορών** που προκύπτει από την $\mathcal{H}_2(z)$ είναι η

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \beta_k x[n-k]$$

η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $v[n]$ θα είναι το σήμα

$$\hat{h}_d[n] = \sum_{k=0}^M \beta_k v[n-k]$$

επιτρέποντας έτσι τον ορισμό του **σφάλματος προσέγγισης**

$$e[n] = h_d[n] - \hat{h}_d[n] = h[n] - \sum_{k=0}^M \beta_k v[n-k]$$

Οι συντελεστές β_k υπολογίζονται ως εκείνοι που **ελαχιστοποιούν** το σφάλμα

$$\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[h_d[n] - \sum_{k=0}^M \beta_k v[n-k] \right]^2$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Shanks

Μηδενίζοντας την παράγωγο ως προς β_k καταλήγουμε στην έκφραση

$$\sum_{k=0}^M \beta_k \left[\sum_{n=0}^{\infty} v[n-\ell]v[n-k] \right] = \sum_{n=0}^{\infty} h_d[n]v[n-k], \quad k = 0, 1, 2, \dots, M$$

Ορίζοντας τις **συναρτήσεις**

$$\xi(k, \ell) = \sum_{n=0}^{\infty} v[n-\ell]v[n-k] = \xi(k-\ell) \quad \text{και} \quad \xi(k) = \sum_{n=0}^{\infty} h_d[n]v[n-k]$$

η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\sum_{k=0}^M \beta_k \xi(k, \ell) = \xi(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, M \quad \text{ή σε μορφή πίνακα}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \xi(0,0) & \xi(0,1) & \xi(0,2) & \dots & \xi(0,M) \\ \xi(1,0) & \xi(1,1) & \xi(1,2) & \dots & \xi(1,M) \\ \xi(2,0) & \xi(2,1) & \xi(2,2) & \dots & \xi(2,M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi(M,0) & \xi(M,1) & \xi(M,2) & \dots & \xi(M,M) \end{bmatrix}}_{\xi} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix}}_{\beta} = \underbrace{\begin{bmatrix} \xi(0) \\ \xi(1) \\ \xi(2) \\ \vdots \\ \xi(M) \end{bmatrix}}_{\gamma}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Shanks

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η λύση του παραπάνω συστήματος για την περίπτωση **μη ιδιάζοντος πίνακα συντελεστών** είναι **μοναδική** και δίδεται από τη σχέση

$$\beta = \xi^{-1} \cdot \gamma$$

Τέλος, εργαζόμενοι όπως και στη **μέθοδο του Prony**, το ελάχιστο τετραγωνικό σφάλμα στη μέθοδο του Shanks, βρίσκεται ίσο με

$$\mathcal{E}_{\min} = \sum_{n=0}^{\infty} x^2[n] - \sum_{k=0}^M \beta_k \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} h_d[n] h_d[n-k] \right\} = \xi(0) - \sum_{k=0}^M \beta_k \xi(k)$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Σχεδίαση με μεθόδους βελτιστοποίησης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η χρήση **μεθόδων βελτιστοποίησης**, αίρει τον περιορισμό περί της **τμηματικά συνεχούς** επιθυμητής απόκρισης πλάτους που χαρακτηρίζει τις προηγούμενες μεθόδους.

Οι **μέθοδοι βελτιστοποίησης**, επιτρέπουν την κατασκευή συναρτήσεων μεταφοράς με **αυθαίρετες** αποκρίσεις πλάτους και φάσης, αν και χαρακτηρίζονται από **υψηλό υπολογιστικό κόστος**, όντας **επαναληπτικές** ως προς τη φύση τους.

Αυτές οι μέθοδοι στηρίζονται στην **προσέγγιση** της επιθυμητής απόκρισης πλάτους ή / και φάσης από την αντίστοιχη πραγματική συνάρτηση και στη **βελτιστοποίηση** μιας **αντικειμενικής συνάρτησης** που ορίζεται συναρτήσει της διαφοράς των δύο παραπάνω αποκρίσεων.

Η **βελτιστοποίηση** στηρίζεται στον υπολογισμό των **συντελεστών** του φίλτρου της **πραγματικής** συνάρτησης μεταφοράς οι τιμές των οποίων **ελαχιστοποιούν** την παραπάνω αντικειμενική συνάρτηση.

Έστω φίλτρο με **άρτια** τιμή τάξης και συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = H_0 \prod_{i=1}^L \frac{\alpha_{0i} + \alpha_{1i}z + z^2}{\beta_{0i} + \beta_{1i}z + z^2}$$

όπου $L = N/2$, α_{ij} και β_{ij} ($i = 0, 1$ και $j = 1, 2, \dots, L$) οι **συντελεστές** των φίλτρων 2ας τάξεως που δημιουργούν το προς κατασκευή φίλτρο τάξεως N και H_0 η **πολλαπλασιαστική** σταθερά κανονικοποίησης.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Σχεδίαση με μεθόδους βελτιστοποίησης

Αυτά τα μεγέθη ορίζουν ένα διάνυσμα ξ στο χώρο των $4L + 1$ διαστάσεων της μορφής

$$\xi = \left[\alpha_{01} \dots \alpha_{0L} \alpha_{11} \dots \alpha_{1L} \beta_{01} \dots \beta_{0L} \beta_{11} \dots \beta_{1L} H_0 \right]$$

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $\mathcal{H}_{dr}(\omega) = |\mathcal{H}_d(e^{j\omega})|$ και $\mathcal{H}_r(\xi, \omega) = |\mathcal{H}(e^{j\omega})|$, ως ορίσουμε το **σφάλμα προσέγγισης**

$$e(\xi, \omega) = H_r(\xi, \omega) - \mathcal{H}_{dr}(\omega)$$

και ως υποθέσουμε πως η **επιθυμητή** απόκριση πλάτους $\mathcal{H}_{dr}(\omega)$ είναι **τμηματικά συνεχής** στην περιοχή συχνοτήτων στην οποία ορίζεται.

Η **δειγματοληψία του σφάλματος προσέγγισης** $e(\xi, \omega)$ στις θέσεις K **διακριτών** τιμών συχνότητας $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K$ οδηγεί στη δημιουργία του **διακριτού** σήματος

$$\mathcal{E}(\xi) = \left[e_1(\xi) \ e_2(\xi) \ e_3(\xi) \ \dots \ e_K(\xi) \right] = \left[e(\xi, \omega_1) \ e(\xi, \omega_2) \ e(\xi, \omega_3) \ \dots \ e(\xi, \omega_K) \right]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το συμβολισμό $e_i(\xi) = e(\xi, \omega_i)$ ($i = 1, 2, \dots, K$).

Ας καταφύγουμε στη χρήση της πιο γενικής **συνάρτησης μέτρου**

$$\Psi(\xi) = L_p = \|\mathcal{E}(\xi)\| = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^K |e_i(\xi)|^p} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^K |e(\xi, \omega_i)|^p}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Σχεδίαση με μεθόδους βελτιστοποίησης

(όπου p μία ακέραια ποσότητα) και η οποία για $p = 1$ και $p = 2$ εκφυλίζεται στα μέτρα

$$L_1 = \sum_{i=1}^K |e_i(\xi)| = \sum_{i=1}^K |e(\xi, \omega_i)| \quad \text{και} \quad L_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^K |e_i(\xi)|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^K |e(\xi, \omega_i)|^2}$$

Οι **μέθοδοι ελαχίστων τετραγώνων** αποτελούν **ειδική περίπτωση** αυτού του γενικού προβλήματος βελτιστοποίησης για την οποία είναι $\Psi(\xi) = \varphi(L_2^2)$ ενώ στη **γενική περίπτωση** αυτό το πρόβλημα διατυπώνεται ως

$$\underset{\xi}{\text{minimize}} \Psi(\xi)$$

και συνίσταται στον **υπολογισμό** του διανύσματος αγνώστων ξ έτσι ώστε να **ελαχιστοποιείται** η **αντικειμενική** συνάρτηση $\Psi(\xi)$. Τέλος εάν $p = \infty$, η αντίστοιχη **μετρική** συνάρτηση ορίζεται ως

$$L_\infty = \max_{1 \leq i \leq K} |e_i(\xi)| = \max_{1 \leq i \leq K} |e(\xi, \omega_i)|$$

και το πρόβλημα **βελτιστοποίησης** είναι γνωστό ως **πρόβλημα minimax** αφού συνίσταται στην **ελαχιστοποίηση** του **μέγιστου στοιχείου** της συνάρτησης $\mathcal{E}(\xi)$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Newton και οι παραλλαγές της

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η μέθοδος του Newton αποτελεί μία γνωστή γενική μέθοδο εύρεσης ελάχιστων τιμών κυρτών συναρτήσεων.

Στηρίζεται στη χρήση του αναπτύγματος Taylor μιας γενικής συνάρτησης N μεταβλητών $y = f(x)$ (όπου $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$) ως προς το σημείο $\tilde{x} = x + \delta x$ με το διάνυσμα $\delta x = [\delta x_1 \ \delta x_2 \ \dots \ \delta x_N]^T$ να περιγράφει μία μεταβολή του διανύσματος x .

Εάν η εν λόγω συνάρτηση διαθέτει συνεχείς παραγώγους δευτέρας τάξεως, το ανάπτυγμά της κατά Taylor έχει τη μορφή

$$f(x + \delta x) = f(x) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j + \mathcal{O}(\|\delta x\|_2^2)$$

Εφόσον οι όροι ανωτέρας τάξεως $\mathcal{O}(\|\delta x\|_2^2)$ είναι αμελητέοι, η εύρεση ενός στάσιμου σημείου της συνάρτησης $f(x)$ στη θέση κάποιου σημείου \tilde{x} , βρίσκεται μηδενίζοντας τις παραγώγους της συνάρτησης $f(x + \delta x)$ ως προς τις παραμέτρους δx_k ($k = 1, 2, \dots, N$).

Στην περίπτωση αυτή καταλήγουμε στο σύστημα εξισώσεων

$$\frac{\partial f(x + \delta x)}{\partial (\delta x_k)} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} \delta x_i = 0 \quad \text{ή} \quad \text{ισοδύναμα} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} \delta x_i$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Newton και οι παραλλαγές της

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

(για τις τιμές $k = 1, 2, \dots, N$) το οποίο διατυπωμένο σε μορφή πινάκων γράφεται ως

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_N \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_N \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_N^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_N \end{pmatrix}$$

ή ισοδύναμα $\nabla f(\mathbf{x}) = -\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{x}$ όπου

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_N} \end{array} \right]^T$$

η κλίση της συνάρτησης $f(\mathbf{x})$ και $\delta \mathbf{x} = [\delta x_1 \ \delta x_2 \ \dots \ \delta x_N]$ η μεταβολή του \mathbf{x} , ενώ \mathbf{H} είναι ο Εσσιανός πίνακας ο οποίος ορίζεται ως ο πίνακας των παραγώγων δευτέρας τάξεως της συνάρτησης $f(\mathbf{x})$, οι οποίες υφίστανται και θεωρούνται συνεχείς συναρτήσεις.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Newton και οι παραλλαγές της

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν ο εν λόγω πίνακας είναι **ιδιάζων** και επομένως υπάρχει ο **αντίστροφος του H^{-1}** , το παραπάνω σύστημα έχει **μία και μοναδική λύση** η οποία υπολογίζεται ως

$$\delta x = -H^{-1} \cdot \nabla f(x)$$

Εάν η συνάρτηση $f(x)$ είναι **δευτεροβάθμια** και όλες οι παράγωγοι 2ας τάξεως έχουν **σταθερές τιμές**, ο H είναι **σταθερός συμμετρικός πίνακας**, ενώ όλες οι παράγωγοι **τρίτης και ανωτέρας τάξεως** είναι μηδέν.

Στην περίπτωση αυτή το σύστημα διαθέτει τη **μοναδική** λύση $\delta x = -H^{-1} \cdot \nabla f(x)$ και το **στάσιμο** σημείο υπολογίζεται ως $\tilde{x} = x + \delta x$.

Εάν η συνάρτηση $f(x)$ **δεν είναι** δευτεροβάθμια, σε γειτονιά του **στάσιμου σημείου** ακτίνας $\epsilon \|x - \tilde{x}\|_2 < \epsilon$ οι όροι **ανωτέρας τάξεως** είναι **αμελητέοι** και τα στοιχεία του **Εσσιανού πίνακα** είναι **κατά προσέγγιση** σταθερά, οπότε εργαζόμαστε όπως και πριν.

Στην **πλέον γενική** των περιπτώσεων μιας **οποιασδήποτε** κυρτής συνάρτησης $f(x)$ ενός **αυθαίρετα** επιλεγμένου σημείου x το σύστημα πιθανόν είτε δεν θα έχει **καθόλου** λύση είτε θα έχει **άπειρες** λύσεις.

Στην περίπτωση αυτή καταφεύγουμε στη χρήση μιας **επαναληπτικής** διαδικασίας κατά τη διάρκεια της οποίας η τιμή της συνάρτησης **ελαττώνεται προοδευτικά** δια της εφαρμογής **μιας σειράς από διορθώσεις** στην τιμή x μέχρι να καταλήξουμε σε κάποιο σημείο που να βρίσκεται στη **γειτονιά** της λύσης.

Η διαδικασία **σταματά** όταν βρεθεί κάποιο σημείο x για το οποίο οι όροι ανωτέρας τάξεως του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης $f(x)$ έχουν **αμελητέα** τιμή, οπότε τότε η λύση υπολογίζεται από τη σχέση $\delta x = -H^{-1} \cdot \nabla f(x)$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Newton και οι παραλλαγές της

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το μειονέκτημα της **μεθόδου του Newton** είναι πως σε κάθε επανάληψη απαιτείται

- Ο υπολογισμός των παραγώγων **πρώτης** και **δευτέρας** τάξεως της συνάρτησης $f(x)$ για τον προσδιορισμό του **διανύσματος κλίσης** $\nabla f(x)$ και του **Εσσιανού πίνακα** H
- Ο υπολογισμός του **αντίστροφου πίνακα** H^{-1} εφόσον αυτός υπάρχει, κάτι που διασφαλίζεται όταν ο πίνακας H είναι **θετικά ορισμένος** και επομένως, **μη ιδιάζων**.

Ο έλεγχος της ισχύος της ιδιότητας του **μη ιδιάζοντος** πίνακα συνιστά μία **πρόσθετη** πολυπλοκότητα αυτής της μεθόδου και για το λόγο αυτό στην πράξη χρησιμοποιείται μία **παραλλαγή** της μεθόδου του που είναι γνωστή ως **αλγόριθμος quasi Newton**.

Θεωρώντας δύο σημεία x_k και $x_{k+1} = x_k + \delta_k$ στο χώρο των N διαστάσεων, η **κλίση** της συνάρτησης $f(x)$ σε αυτά, περιγράφεται από τα διανύσματα $\nabla f(x_{k+1}) \equiv \nabla f(x)_{x=x_{k+1}}$ και $\nabla f(x_k) \equiv \nabla f(x)_{x=x_k}$ αντίστοιχα. Θα είναι τότε

$$\nabla f(x_{k+1})_m = \nabla f(x_k)_m + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \nabla f(x_k)_m}{\partial x_{ki}} \delta_{ki} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 \nabla f(x_k)_m}{\partial x_{ki} \partial x_{kj}} \delta_{ki} \delta_{kj} + \mathcal{O}(\|\delta\|_2^2)$$

(για τις τιμές $m = 1, 2, \dots, N$), ή για την απλή περίπτωση **δευτεροβάθμιας** συνάρτησης

$$\nabla f(x_{k+1})_m = \nabla f(x_k)_m + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_{ki}} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_{km}} \right) \delta_{ki} = \nabla f(x_k)_m + \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_{ki} \partial x_{km}} \delta_{ki}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Newton και οι παραλλαγές της

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η παραπάνω εξίσωση σε **μορφή πινάκων** διατυπώνεται ως

$$\nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) = \nabla f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{H} \cdot \delta_k = \nabla f(\mathbf{x}_k) + \gamma_k$$

όπου \mathbf{H} είναι ο **Εσσιανός πίνακας** της $f(\mathbf{x})$ ενώ ορίζουμε $\gamma_k = \mathbf{H} \cdot \delta_k$.

Επομένως, **χωρίς** να καταφύγουμε στον υπολογισμό των παραγώγων **δευτέρας τάξεως** της $f(\mathbf{x})$, μπορούμε να υπολογίσουμε τον **Εσσιανό πίνακα** \mathbf{H} με τη βοήθεια των διανυσμάτων $\gamma_k = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k)$ και $\delta_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$.

Στις παραπάνω εξισώσεις θα πρέπει να προσθέσουμε και τις

$$\delta_0 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \quad \delta_1 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad \delta_2 = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2, \quad \dots \quad \delta_{N-1} = \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_{N-1}$$

όπου $(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-1})$ ένα σύνολο N **γραμμικώς ανεξάρτητων** μεταξύ τους διανυσμάτων. Θα είναι τότε

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_{N-1} \end{bmatrix}$$

και ο **Εσσιανός πίνακας** μπορεί να προσδιοριστεί με μοναδικό τρόπο ως

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_{N-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Newton και οι παραλλαγές της

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Αν και αυτή η τροποποίηση **δεν απαιτεί** υπολογισμό παραγώγων **δευτέρας τάξεως**, ωστόσο απαιτεί ξανά τον **υπολογισμό** και την **αντιστροφή** του **Εσσιανού πίνακα H** , καθώς και τον υπολογισμό των διανυσμάτων $(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-1})$.

Στη μέθοδο **quasi-Newton** ο πίνακας H^{-1} υπολογίζεται **απευθείας** από τα δεδομένα.

Για να το κάνουμε αυτό, κατασκευάζουμε τις ομάδες διανυσμάτων

$$\delta_k = -S_k \cdot \nabla f(x_k), \quad x_{k+1} = x_k + \delta_k, \quad \gamma_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$$

με τον πίνακα S_k να υφίσταται κατά τη διάρκεια της **επαναληπτικής εφαρμογής** του αλγορίθμου μία σειρά **διορθώσεων** της μορφής

$$S_{k+1} = S_k + C_k \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Εάν ο **διορθωτικός πίνακας C_k** είναι τέτοιος ώστε ο πίνακας S_{k+1} να **ικανοποιεί** τη συνθήκη $S_{k+1} \cdot \gamma_i = \delta_i$ ($0 \leq i \leq k$) ενώ τα διανύσματα $(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-1})$ και $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N-1})$ αποτελούν σύνολα **γραμμικώς ανεξάρτητων** μεταξύ τους διανυσμάτων, τότε για τη τιμή $k = N-1$ θα είναι $S_N \cdot \gamma_i = \delta_i$ ($0 \leq i \leq k$).

Η παραπάνω σχέση για τις διάφορες τιμές του i οδηγεί στο σύνολο των N εξισώσεων

$$S_N \cdot \gamma_1 = \delta_1 \quad S_N \cdot \gamma_2 = \delta_2 \quad \dots \quad S_N \cdot \gamma_{N-1} = \delta_{N-1}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Η μέθοδος του Newton και οι παραλλαγές της

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

το οποίο εκπεφρασμένο σε **μορφή πινάκων** διατυπώνεται ως

$$\mathbf{S}_N \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_{N-1} \end{bmatrix}$$

από όπου προκύπτει αμέσως ότι

$$\mathbf{S}_N = \begin{bmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{N-1} \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{H}^{-1}$$

όπου για την τελευταία έκφραση χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση υπολογισμού του **Εσσιανού πίνακα** που κατασκευάσαμε προηγουμένως.

Συνδυάζοντας τη σχέση $\delta_k = -\mathbf{S}_k \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k)$ για την τιμή $k = N$ με τη σχέση $\mathbf{S}_N = \mathbf{H}^{-1}$ θα έχουμε $\delta_N = -\mathbf{H}^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_N)$ από όπου, η λύση του προβλήματος υπολογίζεται ως

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{N+1} = \mathbf{x}_N - \mathbf{H}^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_N)$$

Η **επαναληπτική** διαδικασία ξεκινά από την τιμή $\mathbf{S}_0 = \mathbf{I}_N$ όπου \mathbf{I}_N ο **μοναδιαίος πίνακας τάξεως N** και στο κατάλληλο βήμα της διαδικασίας ενημερώνουμε τα περιεχόμενα του πίνακα \mathbf{S} , επιλέγοντας κάποιον **τύπο διόρθωσης**. Οι πιο γνωστοί τέτοιοι τύποι είναι οι τύποι των **Davidon-Fletcher-Powell** και **Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno** που δίδονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις

$$\mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{S}_k + \frac{\delta_k \delta_k^T}{\gamma_k^T \delta_k} - \frac{\mathbf{S}_k \gamma_k \gamma_k^T \mathbf{S}_k}{\gamma_k^T \mathbf{S}_k \gamma_k} \quad \text{και} \quad \mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{S}_k + \left(1 + \frac{\gamma_k^T \mathbf{S}_k \gamma_k}{\gamma_k^T \delta_k} \right) \frac{\delta_k \delta_k^T}{\gamma_k^T \delta_k} - \frac{\delta_k \gamma_k^T \mathbf{S}_k + \mathbf{S}_k \gamma_k \delta_k^T}{\gamma_k \delta_k}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Αλγόριθμοι βελτιστοποίησης minimax

Οι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης minimax επιτρέπουν τον υπολογισμό των συντελεστών του φίλτρου ως εκείνων των τιμών που ελαχιστοποιούν κάποια αντικειμενική συνάρτηση.

Αυτή η συνάρτηση είναι η συνάρτηση μέτρου L_∞ και τα φίλτρα που προκύπτουν με τον τρόπο αυτό χαρακτηρίζονται ως **ισοκυματικά φίλτρα** αφού το σφάλμα προσέγγισης **κατανέμεται** στις διάφορες συχνοτικές ζώνες ενδιαφέροντος **με ομοιόμορφο τρόπο**.

Ο αλγόριθμος **least-p** που ανήκει σε αυτή την κατηγορία, είναι μια επαναληπτική διαδικασία που δέχεται ως είσοδο ένα αρχικό διάνυσμα x_0 , μία τιμή σφάλματος ανοχής ε_1 και ένα σύνολο K συχνοτήτων $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K)$ στις θέσεις των οποίων **δευματοληπτείται** η συνάρτηση σφάλματος και κατά τη διάρκεια της επανάληψης υπ' αριθμόν k προσπαθεί να **ελαχιστοποιήσει** την αντικειμενική συνάρτηση

$$\Psi_k(x) = \hat{\varepsilon}(x)^p \sqrt{\sum_{i=1}^K \left[\frac{|e_i(x)|}{\hat{\varepsilon}(x)} \right]^p} \quad \text{όπου} \quad \hat{\varepsilon}(x) = \max_{1 \leq i \leq K} |e_i(x)|$$

Για την ελαχιστοποίηση χρειαζόμαστε την κλίση της συνάρτησης $\Psi_k(x)$

$$\nabla_k \Psi(x) = \frac{1}{p} \hat{\varepsilon}(x)^{p-1} \sqrt{\sum_{i=1}^K \left[\frac{|e_i(x)|}{\hat{\varepsilon}(x)} \right]^p} \times \sum_{i=1}^K \left[\frac{|e_i(x)|}{\hat{\varepsilon}(x)} \right]^{p-1} \nabla |e_i(x)|$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Αλγόριθμοι βελτιστοποίησης minimax

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στην παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιείται η **αρχική τιμή** του διανύσματος \tilde{x}_{k+1} της **προηγούμενης** επανάληψης, ενώ το αποτέλεσμα της αποτελεί τη **νέα τιμή** του διανύσματος \tilde{x}_k , για την επόμενη επανάληψη.

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε το σφάλμα $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}(x_k)$ και ελέγχουμε την τιμή της παράστασης $|\mathcal{E}_{k-1} - \mathcal{E}_k|$.

Εάν αυτή η τιμή είναι **μικρότερη** του σφάλματος ανοχής ε_1 , ο αλγόριθμος τερματίζεται και το διάνυσμα x_k επιστρέφεται ως η ζητούμενη λύση, ενώ στην αντίθετη περίπτωση ο αλγόριθμος προχωρά στην επόμενη επανάληψη.

Μία εναλλακτική προσέγγιση στηρίζεται στη χρήση της **αντικειμενικής συνάρτησης**

$$\Psi(x, \lambda, \xi) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i \in I_1} \lambda_i [\varphi_i(x, \xi)]^2 + \sum_{i \in I_2} [\varphi_i(x, \xi)]^2 \right\}$$

όπου $\varphi_i(x, \xi) = |e_i(x)| - \xi$, ξ και λ_i σταθερές ($i = 1, 2, \dots, K$), και

$$I_1 = \{i : \varphi_i(x, \xi) > 0 \text{ και } \lambda_i > 0\} \quad I_2 = \{i : \varphi_i(x, \xi) > 0 \text{ και } \lambda_i = 0\}$$

Εφόσον πληρούνται κάποιες **προϋποθέσεις**, το διάνυσμα \tilde{x} αποτελεί **ισχυρό τοπικό ελάχιστο** της συνάρτησης $\Psi(x, \lambda, \xi)$ και η **ελαχιστοποίηση** του σφάλματος $\mathcal{E}(\tilde{x})$ συνίσταται στην **ελαχιστοποίηση** της συνάρτησης $\Psi(x, \lambda, \xi)$ ως προς το διάνυσμα x .

Η **κλίση** της συνάρτησης $\Psi(x, \lambda, \xi)$ που απαιτείται για την ελαχιστοποίησή της είναι

$$\nabla \Psi(x, \lambda, \xi) = \sum \lambda_i \varphi(x, \xi) \nabla |e_i(x)| + \sum \varphi(x, \xi) \nabla |e_i(x)|$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μετασχηματισμοί ψηφιακών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τα ψηφιακά φίλτρα όπως και τα αναλογικά ισοδύναμά τους επιδέχονται **συχνοτικούς μετασχηματισμούς** που επιτρέπουν τη μετατροπή τους από τη μία μορφή στην άλλη.

Σε πλήρη αναλογία με τα αντίστοιχα **αναλογικά φίλτρα**, τα ψηφιακά φίλτρα κατασκευάζονται στη **χαμηλοπερατή** τους μορφή και το ψηφιακό χαμηλοπερατό φίλτρο που προκύπτει, **μετασχηματίζεται** στο κατάλληλο σε κάθε περίπτωση **χαμηλοπερατό, υψηλοπερατό, ζωνοπερατό ή ζωνοφρακτικό** φίλτρο.

Υποθέτοντας πως το χαμηλοπερατό **προς μετασχηματισμό** φίλτρο ορίζεται στο χώρο των z ενώ το **μετασχηματισμένο** ψηφιακό φίλτρο ορίζεται στο χώρο των \tilde{z} ο εν λόγω μετασχηματισμός αποτελεί μία **συνάρτηση** $z = f(\tilde{z})$ με τις επόμενες ιδιότητες:

- να είναι μια **ρητή** και **πραγματική** συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής \tilde{z} .
- να **διατηρεί** την ευστάθεια, δηλαδή να απεικονίζει το εσωτερικό, την περιφέρεια και το εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του χώρου των z στις αντίστοιχες περιοχές στο χώρο των \tilde{z} .
- να **υπάρχει** η **αντίστροφη συνάρτηση** έτσι ώστε να είναι $\tilde{z} = f^{-1}(z)$.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μετασχηματισμοί ψηφιακών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Έστω πως η ζητούμενη συνάρτηση έχει τη μορφή $f(\tilde{z}) = r(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ για τη μεταβλητή $\tilde{z} = e^{j\omega}$ όπου $r(\omega)$ και $\varphi(\omega)$ το **μέτρο** και η **φάση** της.

Η ευστάθεια **διατηρείται** μόνο εάν είναι $r(\omega) = 1$. Επομένως, οι μεταβλητές \tilde{z} και z ανήκουν **αμφότερες** στην **περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου** και ο μετασχηματισμός προκαλεί απλά τη **μετατόπιση** της \tilde{z} επί της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου κατά ένα **τόξο** που αντιστοιχεί σε κάποια γωνία περιστροφής ϑ .

Από το **θεώρημα του μεγίστου μέτρου**, η συνάρτηση $f(\tilde{z})$ έχει τη μορφή

$$z = f(\tilde{z}) = e^{j\vartheta} \prod_{i=1}^M \frac{\tilde{z} - \lambda_i}{1 - \lambda_i^* \tilde{z}}$$

όπου $\lambda_i = \mu_i e^{j\nu_i}$ ($i = 1, 2, \dots, M$) **μιγαδικοί συντελεστές** τέτοιοι ώστε $\mu_i < 1$.

Η συνάρτηση $f(\tilde{z})$ **δεν είναι** γενικά πραγματική συνάρτηση, ιδιότητα που διασφαλίζεται

- εάν οι συντελεστές λ_i εμφανίζονται **σε ζεύγη μιγαδικών συζυγών**.
- εάν η γωνία ϑ είναι **ακέραιο πολλαπλάσιο** του π της μορφής $\vartheta = \xi\pi$ ($\xi = 1, 2, 3, \dots$) έτσι ώστε να είναι $e^{j\vartheta} = \pm 1$.

Η γωνία ϑ αποτελεί τη **γωνία περιστροφής** της μεταβλητής \tilde{z} επί της **περιφέρειας** του μοναδιαίου κύκλου και επομένως, οι **μοναδικές** επιτρεπτές περιστροφές είναι εκείνες που αντιστοιχούν σε **ακέραια** πολλαπλάσια του π .

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μετασχηματισμοί ψηφιακών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Κατά συνέπεια, η γενική συνάρτηση φασματικού μετασχηματισμού ψηφιακών φίλτρων με πραγματικούς συντελεστές περιγράφεται από την εξίσωση

$$z = f(\tilde{z}) = \pm \prod_{i=1}^M \left(\frac{\tilde{z} - \lambda_i}{1 - \lambda_i^* \tilde{z}} \times \frac{\tilde{z} - \lambda_i^*}{1 - \lambda_i \tilde{z}} \right)$$

όπου η τάξη του φίλτρου έχει διπλασιαστεί ενώ οι παράμετροι λ_i δεν είναι πλέον υποχρεωτικά μιγαδικοί αριθμοί.

Η παράμετρος M , υπαγορεύει τη φύση της απεικόνισης που πραγματοποιείται. Επειδή η συνάρτηση $f(\tilde{z})$ απεικονίζει το μοναδιαίο κύκλο στον εαυτό του, η τιμή του M αντιστοιχεί στο πλήθος των τιμών του z που αντιστοιχούν σε κάθε τιμή του \tilde{z} .

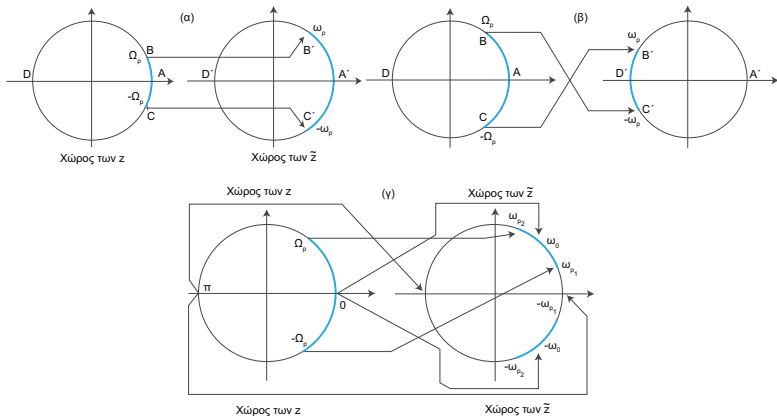
Ειδικότερα, η τιμή του M είναι ίση με 1 για τους μετασχηματισμούς LP→LP και LP→HP και ίση με 2 για τους μετασχηματισμούς LP→BP και LP→BS.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μετασχηματισμοί ψηφιακών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Μετασχηματισμοί **συχνότητας** επί του μοναδιαίου κύκλου για τη μετατροπή χαμηλοπερατού σε **χαμηλοπερατό** [(α)], **υψηλοπερατό** [(β)] και **ζωνοπερατό** [(γ)] φίλτρο.

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μετασχηματισμοί ψηφιακών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ο μετασχηματισμός ψηφιακού **χαμηλοπερατού φίλτρου** $\mathcal{H}(z)$ με συχνότητα αποκοπής Ω_p σε ψηφιακό **χαμηλοπερατό φίλτρο** $\mathcal{H}(\tilde{z})$ με συχνότητα αποκοπής ω_p , **διατηρεί τα** χαρακτηριστικά της απόκρισης πλάτους και αποτελεί μία **απεικόνιση 1:1** ανάμεσα στο **μοναδιαίο κύκλο** και στην εικόνα του.

Επομένως, ο **μετασχηματισμός χαμηλοπερατού σε χαμηλοπερατό φίλτρο** είναι

$$z = \frac{\tilde{z} - \alpha}{1 - \alpha\tilde{z}}$$

Η σταθερά α θα προκύψει από την απαίτηση να αντιστοιχεί η **συχνότητα αποκοπής** $\Omega = \Omega_p$ του αρχικού φίλτρου στη συχνότητα $\omega = \omega_p$ του **μετασχηματισμένου φίλτρου**.

Αντικαθιστώντας τις τιμές $z = e^{j\Omega}$ και $\tilde{z} = e^{j\omega}$ θα λάβουμε

$$e^{j\Omega_p} = \frac{e^{j\omega_p} - \alpha}{1 - \alpha e^{j\omega_p}} \quad \text{από όπου προκύπτει ότι} \quad \alpha = \frac{e^{j\omega_p} - e^{j\Omega_p}}{1 - e^{j(\Omega_p + \omega_p)}}$$

ή ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας την αλγεβρική έκφραση $e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin(x)$

$$\alpha = \frac{\sin[(\Omega_p - \omega_p)/2]}{\sin[(\Omega_p + \omega_p)/2]}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μετασχηματισμοί ψηφιακών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στην περίπτωση του μετασχηματισμού **χαμηλοπερατού** σε **υψηλοπερατό** φίλτρο, η **συχνότητα αποκοπής** Ω_p του χαμηλοπερατού φίλτρου αντιστοιχεί στη **συχνότητα αποκοπής** ω_p του υψηλοπερατού φίλτρου, με τη διαφορά πως η **ζώνη διέλευσης** του χαμηλοπερατού φίλτρου αντιστοιχεί στη **ζώνη αποκοπής** του μετασχηματισμένου υψηλοπερατού φίλτρου και **αντίστροφα**.

Επομένως, ο **μετασχηματισμός χαμηλοπερατού σε υψηλοπερατό φίλτρο** θα έχει τη μορφή

$$z = -\frac{\tilde{z} - \alpha}{1 - \alpha\tilde{z}}$$

Η σταθερά α θα προκύψει από την απαίτηση να αντιστοιχεί η **συχνότητα αποκοπής** $\Omega = \Omega_p$ του αρχικού φίλτρου στη συχνότητα $\omega = \omega_p$ του **μετασχηματισμένου υψηλοπερατού φίλτρου**.

Αντικαθιστώντας τις τιμές $z = e^{j\Omega}$ και $\tilde{z} = e^{j\omega}$ θα λάβουμε

$$e^{j\Omega_p} = -\frac{e^{j\omega_p} - \alpha}{1 - \alpha e^{j\omega_p}} \quad \text{από όπου προκύπτει ότι} \quad \alpha = \frac{\cos[(\Omega_p - \omega_p)/2]}{\cos[(\Omega_p + \omega_p)/2]}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μετασχηματισμοί ψηφιακών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στις διαδικασίες μετασχηματισμού χαμηλοπερατού σε ζωνοπερατό και ζωνοφρακτικό φίλτρο, το αρχικό **χαμηλοπερατό** φίλτρο μετατρέπεται σε **ζωνοπερατό** φίλτρο για τιμή γωνίας περιστροφής $\vartheta = \pi$ και σε **ζωνοφρακτικό** φίλτρο για γωνία περιστροφής $\vartheta = 0$.

Τώρα, σε **κάθε** τιμή του \tilde{z} αντιστοιχούν **δύο** τιμές του z και επομένως,

$$z = \pm \prod_{i=1}^2 \frac{\tilde{z} - \lambda_i}{1 - \lambda_i^* \tilde{z}} = \pm \frac{\tilde{z} - \lambda_1}{1 - \lambda_1^* \tilde{z}} \frac{\tilde{z} - \lambda_2}{1 - \lambda_2^* \tilde{z}} = \pm \frac{\tilde{z}^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\tilde{z} + \lambda_1 \lambda_2}{1 - (\lambda_1^* + \lambda_2^*)\tilde{z} + \lambda_1^* \lambda_2^* \tilde{z}^2} = \pm \frac{\tilde{z}^2 + \alpha_1 \tilde{z} + \alpha_2}{1 + \alpha_1 \tilde{z} + \alpha_2 \tilde{z}^2}$$

με τα λ_1 και λ_2 να είναι **πραγματικοί αριθμοί** έτσι ώστε να είναι $\lambda_1 = \lambda_1^*$ και $\lambda_2 = \lambda_2^*$ ενώ θέσαμε $\alpha_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2) = -(\lambda_1^* + \lambda_2^*)$ και $\alpha_2 = \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1^* \lambda_2^*$.

Ξεκινώντας από την εξίσωση του μετασχηματισμού LP \rightarrow BP, αυτή γράφεται

$$z = f(\tilde{z}) = -\frac{\tilde{z}^2 - (\alpha_2 + 1) \cos(\omega_0) \tilde{z} + \alpha_2}{1 - (\alpha_2 + 1) \cos(\omega_0) \tilde{z} + \alpha_2 \tilde{z}^2} = -\frac{\tilde{z} \left(\frac{\tilde{z} - \alpha}{1 - \alpha \tilde{z}} \right) + \alpha_2}{1 + \alpha_2 \tilde{z} \left(\frac{\tilde{z} - \alpha}{1 - \alpha \tilde{z}} \right)}$$

όπου για λόγους απλότητας ορίσαμε την παράμετρο $\alpha = \cos(\omega_0)$.

Ορίζοντας τις **βοηθητικές συναρτήσεις**

$$t = t(\tilde{z}) = \tilde{z} \frac{\tilde{z} - \alpha}{1 - \alpha \tilde{z}} \quad \text{και} \quad s = s(\tilde{z}) = -\frac{\tilde{z} + \alpha_2}{1 + \alpha_2 \tilde{z}}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μετασχηματισμοί ψηφιακών φίλτρων

η εξίσωση του μετασχηματισμού διατυπώνεται ως μία **σύνθεση συναρτήσεων** της μορφής

$$z = f(\tilde{z}) = s\left(\tilde{z} \frac{\tilde{z} - \alpha}{1 - \alpha\tilde{z}}\right) = s[t(\tilde{z})] = -\frac{t(\tilde{z}) + \alpha_2}{1 + \alpha_2 t(\tilde{z})}$$

όπου η παράμετρος α αποδεικνύεται πως έχει τη μορφή

$$\alpha = \frac{2 \sin\left(\frac{\omega_{p1} + \omega_{p2}}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_{p1} + \omega_{p2}}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\omega_{p1} + \omega_{p2}}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_{p1} - \omega_{p2}}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{p1} + \omega_{p2}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p1} - \omega_{p2}}{2}\right)}$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει τη **συναρτησιακή εξάρτηση** του α από τις συχνότητες ω_{p1} και ω_{p2} της **ζώνης διέλευσης** του προς κατασκευήν **ζωνοπερατού φίλτρου**, ενώ η εξάρτησή της από την κεντρική συχνότητα ω_0 περιγράφεται από την εξίσωση $\alpha = \cos(\omega_0)$.

Ορίζοντας τώρα τη **βοηθητική μεταβλητή**

$$\kappa = -\frac{\alpha_2 + 1}{\alpha_2 - 1} = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{p1} - \omega_{p2}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_{p1} - \omega_{p2}}{2}\right)} \tan \frac{\Omega_p}{2} = \cot\left(\frac{\omega_{p1} - \omega_{p2}}{2}\right) \tan \frac{\Omega_p}{2}$$

Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Σχεδίαση Φίλτρων (IIR) - Μετασχηματισμοί ψηφιακών φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

τελικά οδηγούμαστε στην έκφραση

$$z = f(\tilde{z}) = - \left\{ \tilde{z}^2 - \frac{2\alpha\kappa}{\kappa+1}\tilde{z} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right\} / \left\{ 1 - \frac{2\alpha\kappa}{\kappa+1}\tilde{z} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\tilde{z}^2 \right\}$$

Η εξίσωση του μετασχηματισμού LP \rightarrow BS κατασκευάζεται ομοίως, με τη διαφορά ότι:

- στην **εξίσωση εκκίνησης** θα χρησιμοποιηθεί **θετικό πρόσημο (+)**, αφού η **γωνία περιστροφής** ϑ είναι τώρα ίση με το μηδέν.
- οι **αντιστοιχίες** των συχνοτήτων του χώρου των Ω στο χώρο των ω είναι **διαφορετικές** και πιο συγκεκριμένα οι $\Omega = 0 \mapsto \omega = 0$, $\Omega = -\Omega_p \mapsto \omega = \omega_{p2}$, $\Omega = \Omega_p \mapsto \omega = \omega_{p1}$ και $\Omega = \pi \mapsto \omega = \omega_0$.

Εργαζόμενοι όπως και πριν, βρίσκουμε

$$z = f(\tilde{z}) = \left\{ \tilde{z}^2 - \frac{2\alpha}{\kappa+1}\tilde{z} + \frac{1-\kappa}{1+\kappa} \right\} / \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\kappa+1}\tilde{z} + \frac{1-\kappa}{1+\kappa}\tilde{z}^2 \right\}$$

με τις παραμέτρους α και κ να υπολογίζονται ως

$$\alpha = \cos \omega_0 = \frac{\cos[(\omega_{p2} + \omega_{p1})/2]}{\cos[(\omega_{p2} - \omega_{p1})/2]} \quad \text{και} \quad \kappa = \tan \left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2} \right) \tan \frac{\Omega_p}{2}$$