

# ΘΕΜΑΤΑ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Ι. ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2014

# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

## Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

Η δημιουργία ενός διακριτού σήματος  $x[n]$  στηρίζεται στη **δειγματοληψία** ενός συνεχούς σήματος  $x_\alpha(t)$ , δηλαδή **στην καταγραφή των δειγμάτων του σε χρονικές στιγμές  $t = nT_s$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) όπου  $T_s$  είναι η περίοδος δειγματοληψίας.**

$$x[n] = x_\alpha(nT_s)$$

Μία ενδιαφέρουσα διαδικασία η **μεταβολή του ρυθμού δειγματοληψίας**, δηλαδή η δειγματοληψία του συνεχούς σήματος  $x_\alpha(t)$  με **διαφορετική περίοδο  $T'_s \neq T_s$ .**

Αυτή η διαδικασία θα οδηγήσει στο νέο διακριτό σήμα

$$x'[n] = x_\alpha(nT'_s)$$

Εάν είναι  $T'_s > T_s$ , το σήμα  $x'[n]$  θα έχει **λιγότερα** δείγματα από το σήμα  $x[n]$ .

Εάν είναι  $T'_s < T_s$ , το σήμα  $x'[n]$  θα έχει **περισσότερα** δείγματα από το σήμα  $x[n]$ .

Αυτές οι δύο καταστάσεις περιγράφονται από τους όρους **υποδειγματοληψία** και **υπερδειγματοληψία** και αμφότερες αποτελούν τις δύο εναλλακτικές μορφές της επονομαζόμενης **επαναδειγματοληψίας** η οποία ορίζεται ως η **δειγματοληψία του αρχικού σήματος με διαφορετική περίοδο ή συχνότητα δειγματοληψίας.**

# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

## Υποδειγματοληψία

Συνίσταται στην **εκ νέου δειγματοληψία** του διακριτού σήματος  $x[n] = x_\alpha(nT_s)$  που προέκυψε από την αρχική δειγματοληψία του αναλογικού σήματος  $x_\alpha(t)$ .

Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε **μόνο τα δείγματα που βρίσκονται στις άρτιες θέσεις της διακριτής ακολουθίας**  $x[n]$ , κατασκευάζοντας το σήμα  $x_d[n] = x[2n]$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), δηλαδή θεωρώντας μόνο ένα δείγμα για κάθε ομάδα  $M = 2$  δειγμάτων.

Στη γενική περίπτωση, για κάθε τιμή του  $M$ , το σήμα μας θα έχει την μορφή  $x_d[n] = x[Mn]$  ( $M = 1, 2, 3, \dots$ ) και κατά συνέπεια, το νέο σήμα  $x_d[n]$  προκύπτει θεωρώντας **ένα δείγμα για κάθε ομάδα  $M$  δειγμάτων**

Επειδή δε είναι  $x[n] = x_\alpha(nT_s)$  θα έχουμε  $x_d[n] = x_\alpha(nMT_s)$ .

Η υποδειγματοληψία του σήματος  $x[n]$  το οποίο έχει προκύψει από την δειγματοληψία του σήματος  $x_\alpha(t)$  με περίοδο  $T_s$ , οδηγεί σε ένα σήμα  $x_d[n]$ , που είναι εκείνο που θα παίρναμε εάν πραγματοποιούσαμε δειγματοληψία του σήματος  $x_\alpha(t)$  με περίοδο  $T_d = MT_s$ .

Το σύστημα που πραγματοποιεί υποδειγματοληψία λέγεται **συμπιεστής** αφού συμπιέζει το σήμα εισόδου, υπό την έννοια πως το σήμα που προκύπτει στην έξοδο του, έχει  **$M$  φορές λιγότερα δείγματα** από το αρχικό σήμα, τα οποία μάλιστα βρίσκονται **πιο κοντά μεταξύ τους στο χρόνο** σε σχέση με τα δείγματα του αρχικού διακριτού σήματος.

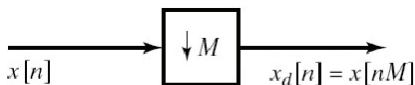
Εάν το σήμα  $x_\alpha(t)$  χαρακτηρίζεται από πεπερασμένο εύρος ζώνης, δηλαδή είναι  $\mathcal{X}_\alpha(j\omega) = 0$  για  $|\Omega| \geq \Omega_N$ , τότε εάν είναι  $\pi/T_d = \pi/(MT) \geq \Omega_N$ , το  $x_d[n]$  αποτελεί μία **ακριβή αναπαράσταση** του  $x_\alpha(t)$  αφού δεν θα εμφανίζεται αναδίπλωση συχνότητας.

# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

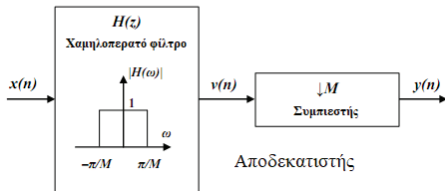
## Υποδειγματοληψία

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Συμπίεστης



Αποδεκατιστής

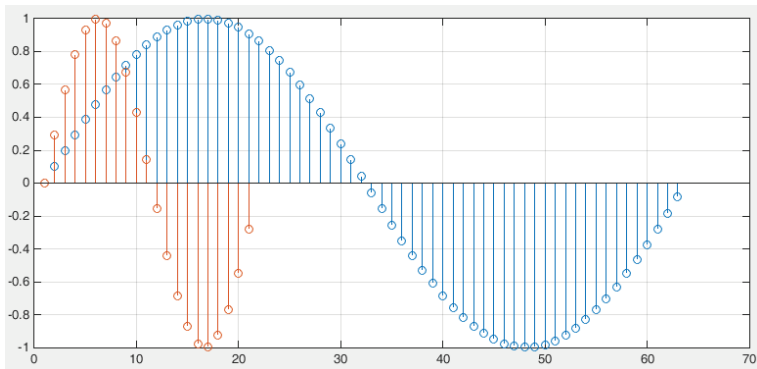
**Σχήμα:** Η διαδικασία της υποδειγματοληψίας ενός διακριτού σήματος πραγματοποιείται από το σύστημα του **συμπίεστη**, ενώ το σύστημα του **αποδεκατιστή** χρησιμοποιείται για την αποφυγή του φαινομένου της αναδίπλωσης συχνότητας.

# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

## Υποδειγματοληψία

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



**Σχήμα:** Υποδειγματοληψία του απλού διακριτού ημιτονοειδούς σήματος με τιμή παραμέτρου  $M = 3$ . Παρατηρήστε πως το σήμα **συμπίεζεται στο χρόνο**, αφού τα δείγματα του αρχικού σήματος ανάμεσα στα οποία παρεμβάλλονταν δύο δείγματα, πλέον καθίστανται διαδοχικά.

# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

## Υποδειγματοληψία

Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στους μετασχηματισμούς DTFT των σημάτων  $x[n]$  και  $x_d[n]$ ;

Ο μετασχηματισμός  $\mathcal{X}_\alpha(e^{j\omega})$  του σήματος  $x[n]$ , σχετίζεται με το μετασχηματισμό  $\mathcal{X}(j\omega)$  του σήματος  $x_\alpha(t)$  ως

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{X}_\alpha \left[ j \left( \frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right]$$

ενώ για τον μετασχηματισμό του  $x_d[n] = x[nM] = x_\alpha(nMT_s) = x_\alpha(nT_d)$ , θα έχουμε

$$\mathcal{X}_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_d} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \mathcal{X}_\alpha \left[ j \left( \frac{\omega}{T_d} - \frac{2\pi r}{T_d} \right) \right] = \frac{1}{MT} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \mathcal{X}_\alpha \left[ j \left( \frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi r}{MT} \right) \right]$$

Εκφράζοντας το δείκτη  $r$  στη δεύτερη εξίσωση ως  $r = i + kM$  όπου  $k$  και  $i$  ακέραιοι δείκτες τέτοιοι ώστε  $-\infty < k < \infty$  και  $0 \leq i \leq M-1$ , η τελευταία σχέση γίνεται

$$\mathcal{X}_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{X}_\alpha \left[ j \left( \frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi k}{T} - \frac{2\pi i}{MT} \right) \right] \right\}$$

# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

## Υποδειγματοληψία

Αλλά ο όρος μέσα στις αγκύλες της τελευταίας έκφρασης είναι ο μετασχηματισμός

$$\mathcal{X}(e^{j(\omega-2\pi i)/M}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{X}_{\alpha} \left[ j \left( \frac{\omega - 2\pi i}{MT} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right]$$

και τελικά θα λάβουμε

$$\mathcal{X}_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \mathcal{X}(e^{j(\omega/M-2\pi i/M)})$$

Ο μετασχηματισμός  $\mathcal{X}_d(e^{j\omega})$  μπορεί να θεωρηθεί

είτε ως ένα σύνολο από **άπειρα αντίγραφα** του  $\mathcal{X}_{\alpha}(j\omega)$  τα οποία έχουν υποστεί κλιμάκωση πλάτους κατά  $1/T_d$ , κλιμάκωση συχνότητας κατά  $T_d$  (αφού είναι  $\omega = \Omega T_d$ ) και μετατόπιση φάσης κατά ακέραια πολλαπλάσια του  $2\pi$ .

είτε ως ένα σύνολο από  **$M$  αντίγραφα** του  $\mathcal{X}(e^{j\omega})$  του  $x[n]$ , τα οποία έχουν υποστεί κλιμάκωση πλάτους κατά  $1/M$ , κλιμάκωση συχνότητας κατά  $M$  και μετατόπιση φάσης κατά ακέραια πολλαπλάσια του  $2\pi$ .

Το φάσμα  $\mathcal{X}_d(e^{j\omega})$  του σήματος  $x_d[n]$  είναι **περιοδικό** με περίοδο  $2\pi$  ενώ το φαινόμενο της αναδίπλωσης μπορεί να αποφευχθεί, εάν το  $\mathcal{X}(e^{j\omega})$  χαρακτηρίζεται από πεπερασμένο εύρος ζώνης δηλαδή εάν είναι

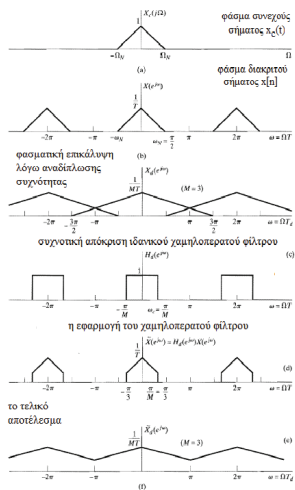
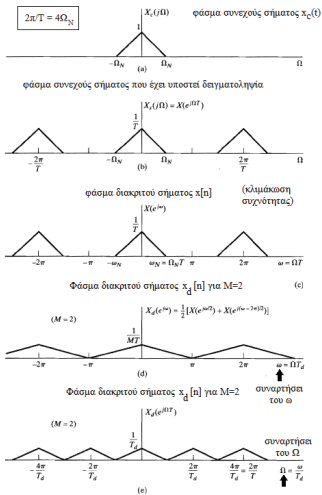
$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = 0 \quad \omega_N \leq |\omega| \leq \pi$$

# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

## Υποδειγματοληψία

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Υποδειγματοληψία διακριτού σήματος.



# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

## Υπερδειγματοληψία

Η υπερδειγματοληψία αποτελεί την αντίστροφη της δειγματοληψίας: ενώ η τελευταία συνίσταται στη μείωση του πλήθους των δειγμάτων του διακριτού σήματος, η πρώτη συνίσταται στην αύξηση αυτού του πλήθους.

Λαμβάνοντας υπόψη πως η μείωση του ρυθμού δειγματοληψίας κατά ένα παράγοντα  $M$ , συνίσταται στον πολλαπλασιασμό της περιόδου δειγματοληψίας κατά αυτό τον παράγοντα (και κατά συνέπεια, στη διαίρεση της συχνότητας δειγματοληψίας  $F = 1/T_s$  κατά τον ίδιο παράγοντα, αφού η περίοδος και η συχνότητα δειγματοληψίας είναι μεγέθη αντιστρόφως ανάλογα), η υπερδειγματοληψία κατά τον παράγοντα  $L$ , συνίσταται στον πολλαπλασιασμό της συχνότητας δειγματοληψίας κατά αυτόν τον παράγοντα.

Κατά συνέπεια, θεωρώντας ένα αναλογικό σήμα  $x_\alpha(t)$ , η υπερδειγματοληψία οδηγεί στη δημιουργία ενός διακριτού σήματος της μορφής

$$x_u[n] = x_\alpha(nT_u)$$

όπου  $T_u = T_s/L$ , από την ακολουθία των δειγμάτων

$$x[n] = x_\alpha(nT_s)$$

με τα δύο αυτά διακριτά σήματα να σχετίζονται μεταξύ τους σύμφωνα με τη σχέση

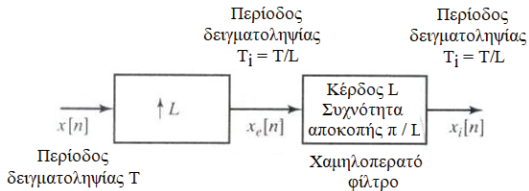
$$x_u[n] = x[n/L] = x_\alpha(nT_s/L) \quad (n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots)$$

# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

## Υπερδειγματοληψία

Η διακριτή ακολουθία  $x_u[n]$  μπορεί να προκύψει από τη διακριτή ακολουθία  $x[n]$  χρησιμοποιώντας το σύστημα αύξησης του ρυθμού δειγματοληψίας που απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα και περιγράφεται από το όνομα **διαστολέας** ή **εκτονωτής**.

Όπως η υποδειγματοληψία πραγματοποιεί **συμπίεση** στο χρόνο, έτσι και η υπερδειγματοληψία πραγματοποιεί **επέκταση** ή **διαστολή** στο χρόνο, αφού δύο δείγματα του αρχικού διακριτού σήματος που αρχικά ήταν διαδοχικά, τώρα απομακρύνονται χρονικά, αφού ανάμεσά τους παρεμβάλλονται  $L$  πρόσθετα δείγματα.



**Σχήμα:** Η διάταξη του διαστολέα ή εκτονωτή που χρησιμοποιείται για την πραγματοποίηση της διαδικασίας της υπερδειγματοληψίας.

# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

## Υπερδειγματοληψία

Η έξοδος αυτού του συστήματος δίδεται από την εξίσωση

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - kL]$$

Η **υπερδειγματοληψία** αποτελεί μία διαδικασία **δύο βημάτων**: (α) δημιουργείται το σήμα  $x_e[n]$  από το σήμα  $x[n]$  και (β) τα δείγματα του σήματος  $x_e[n]$  χρησιμοποιούνται για την **ανακατασκευή** του σήματος  $x_u[n]$  δια της χρήσεως του **χαμηλοπερατού** φίλτρου, η κρουστική απόκριση του οποίου έχει τη μορφή

$$h_u[n] = \frac{\sin(\pi n/L)}{\pi n/L}$$

με τιμές  $h_u[0] = 1$  και  $h_u[n] = 0$  για  $n = \pm L, \pm 2L, \dots$ . Θα είναι λοιπόν,

$$x_u[n] = h_u[n] * x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin[\pi(n - kL)/L]}{\pi(n - kL)/L}$$

και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει αμέσως ότι

$$x_u[n] = x[n/L] = x_\alpha(nT_s/L) = x_\alpha(nT_u), \quad n = 0, \pm L, 2L, \dots$$

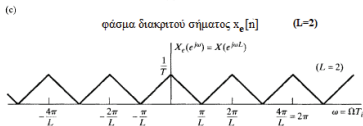
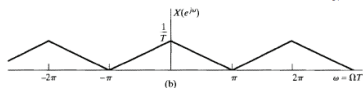
Το παραπάνω σύστημα είναι γνωστό ως **παρεμβολέας**.

# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

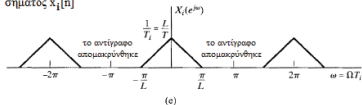
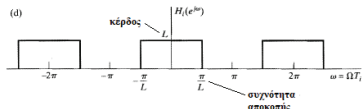
## Υπερδειγματοληψία

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της ακολουθίας  $x_e[n]$  είναι

$$X_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] \right) e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega Lk} = X(e^{j\omega L}) \quad (1)$$



Ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με κέρδος  $L$  και συχνότητα αποκοπής  $\pi/L$



Σχήμα: Η διαδικασία της υπερδειγματοληψίας.

# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

## Υπερδειγματοληψία

Στην πράξη βέβαια καταφεύγουμε στη χρήση **προσεγγιστικών** φίλτρων, το πιο απλό από τα οποία είναι το **φίλτρο γραμμικής παρεμβολής** με κρουστική απόκριση

$$h_{\text{lin}}[n] = \begin{cases} 1 - |n|/L, & |n| \leq L \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

και συχνοτική απόκριση

$$H_{\text{lin}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \left[ \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right]^2$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το φίλτρο γραμμικής παρεμβολής, η έξοδος του έχει τη μορφή

$$x_{\text{in}}[n] = \sum_{k=n-L+1}^{n+L-1} x_e[k] h_{\text{lin}}[n-k]$$

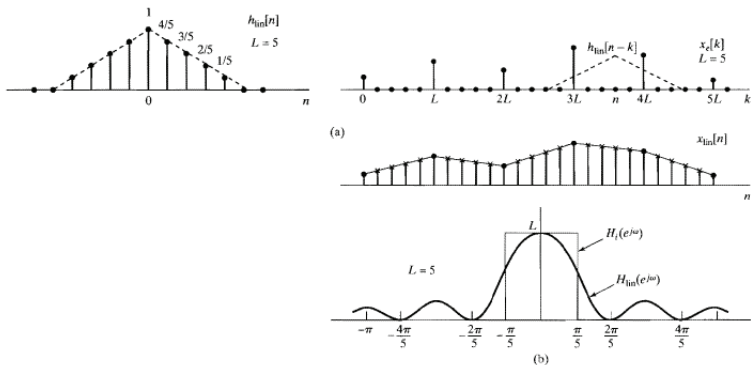
Η έξοδος που θα λάβουμε είναι εκείνη που θα παίρνουμε **εάν ενώνουμε δύο διαδοχικά σημεία του αρχικού σήματος και στη συνέχεια υπολογίζαμε τα  $L - 1$  ενδιάμεσα σημεία που βρίσκονται πάνω στην ευθεία που ενώνει αυτά τα δύο σημεία**, όπως ακριβώς υπαγορεύεται από τον τρόπο λειτουργίας της μεθόδου της **γραμμικής παρεμβολής**.

# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

## Υπερδειγματοληψία

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



**Σχήμα:** (α) Η **κρουστική απόκριση** του φίλτρου γραμμικής παρεμβολής (αριστερά) και (β) η υλοποίηση της γραμμικής παρεμβολής και η **συχνοτική απόκριση** του ομώνυμου φίλτρου απέναντι στη συχνοτική απόκριση του ιδανικού φίλτρου.

# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

## Υπερδειγματοληψία

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ένα φίλτρο που επιτρέπει τη δημιουργία  $L$  το πλήθος ενδιάμεσων δειγμάτων είναι το

$$\tilde{h}_i[n] = 0 \quad |n| \geq KL$$

$$\tilde{h}_i[n] = \hat{h}_i[-n] \quad |n| \leq KL$$

$$\tilde{h}_i[0] = 1 \quad n = 0$$

$$\tilde{h}_i[n] = 0 \quad n = \pm L, \pm 2L, \dots, \pm KL$$

ενώ η αντίστοιχη έξοδος που παράγεται από το φίλτρο, δίνεται από την εξίσωση

$$\tilde{x}_u[n] = \sum_{k=n-KL+1}^{n+KL-1} x_e[k] \tilde{h}_u[n-k]$$

Ένα άλλο ιδιαίτερα διαδεδομένο φίλτρο παρεμβολής περιγράφεται από την εξίσωση

$$\tilde{h}_u[n] = \begin{cases} (a+2)|n/L|^3 - (a+3)|n/L|^2 + 1 & 0 \leq n \leq L \\ a|n/L|^3 - 5|n/L|^2 + 8a|n/L| - 4a & L \leq n \leq 2L \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

και χρησιμοποιεί για τον υπολογισμό της τιμής του κάθε ενδιάμεσου δείγματος, τέσσερα δείγματα της αρχικής ακολουθίας.

# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

Συνδυασμός υποδειγματοληψίας και υπερδειγματοληψίας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν εάν συνδέσουμε εν σειρά έναν **αποδεκατιστή** και έναν **παρεμβολέα** μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα **υβριδικό σύστημα**, το οποίο να μεταβάλλει τη συχνότητα δειγματοληψίας κατά έναν **μη ακέραιο** συντελεστή. Ειδικότερα:

Η διάταξη της **υπερδειγματοληψίας** προκαλεί μείωση της περιόδου του σήματος από την τιμή  $T_s$  στην τιμή  $T_s/L$ .

Η έξοδος αυτού του συστήματος γίνεται είσοδος σε ένα σύστημα **υποδειγματοληψίας**, το οποίο προκαλεί αύξηση της περιόδου του σήματος κατά τον παράγοντα  $M$ .

Η συνδυασμένη χρήση των δύο συστημάτων οδηγεί σε μία έξοδο η οποία έχει υποστεί δειγματοληψία με περίοδο  $TM/L$ .

Εάν επιλέξουμε κατάλληλα τις τιμές των παραμέτρων  $M$  και  $L$ , μπορούμε να επιτύχουμε **πρακτικά οποιονδήποτε λόγο περιόδων δειγματοληψίας** επιθυμούμε.

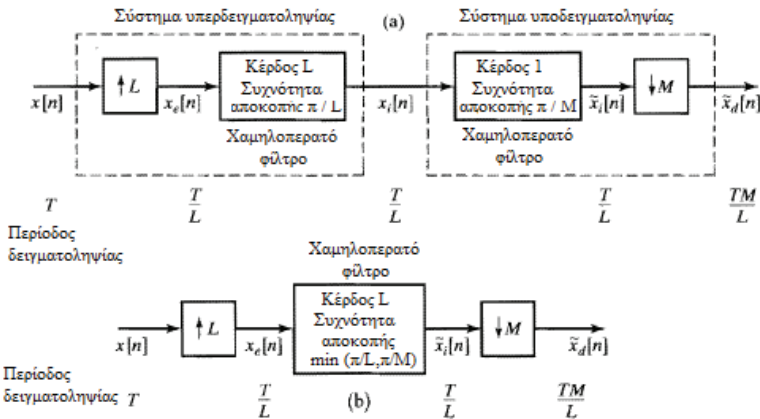
Εάν είναι  $M > L$  το τελικό αποτέλεσμα είναι η **αύξηση** της περιόδου δειγματοληψίας, ενώ αν είναι  $M < L$  το τελικό αποτέλεσμα είναι η **μείωση** της περιόδου δειγματοληψίας.

Ο τρόπος διασύνδεσης των δύο συστημάτων, οδηγεί στην εν σειρά σύνδεση των δύο χαμηλοπερατών φίλτρων σε ένα φίλτρο με κέρδος  $L$  και συχνότητα αποκοπής  $\min(\pi/L, \pi/M)$ . Εάν είναι  $M > L$  η κυρίαρχη συχνότητα αποκοπής είναι η  $\pi/M$  (μείωση του ρυθμού δειγματοληψίας), ενώ εάν είναι  $M < L$  η κυρίαρχη συχνότητα αποκοπής είναι η  $\pi/L$  (αύξηση του ρυθμού δειγματοληψίας).



# Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία

Συνδυασμός υποδειγματοληψίας και υπερδειγματοληψίας



**Σχήμα:** Η δειγματοληψία ενός σήματος κατά έναν **μη ακέραιο συντελεστή** πραγματοποιείται με τη βοήθεια ενός σύνθετου συστήματος που προκύπτει από την εν σειρά σύνδεση ενός συστήματος **υπερδειγματοληψίας** και ενός συστήματος **υποδειγματοληψίας**.

# Πολυρυθμική επεξεργασία σήματος

## Πολυρυθμική επεξεργασία σήματος

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

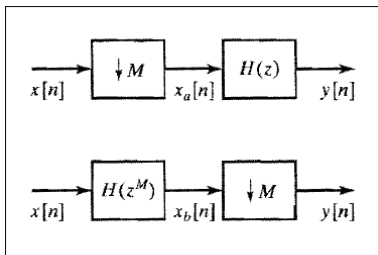
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η παραπάνω μεταβολή του ρυθμού δειγματοληψίας χαρακτηρίζεται από **πολύ υψηλό** υπολογιστικό κόστος. Στην πράξη χρησιμοποιούνται **πιο αποδοτικές** τεχνικές που υλοποιούν την επονομαζόμενη **πολυρυθμική επεξεργασία σήματος**. Παρατηρούμε ότι:

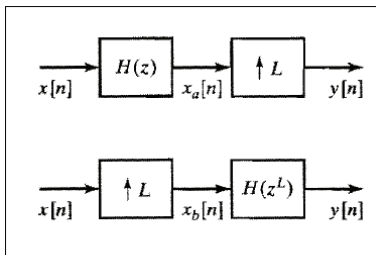
Το σύστημα της **υποδειγματοληψίας** αποτελείται από ένα **χαμηλοπερατό φίλτρο** που συνδέεται εν σειρά με έναν **συμπιεστή**.

Το σύστημα της **υπερδειγματοληψίας** αποτελείται από έναν **διαστολέα** ή **εκτονωτή**, που συνδέεται εν σειρά με ένα **χαμηλοπερατό φίλτρο**.

Αποδεικνύεται πως η εναλλαγή των δύο υποσυστημάτων οδηγεί σε ένα σύστημα που είναι **εντελώς ισοδύναμο** με το προηγούμενο.



Υποδειγματοληψία



Υπερδειγματοληψία

Σχήμα: Δημιουργία ισοδύναμου συστήματος.

# Πολυρυθμική επεξεργασία σήματος

## Πολυρυθμική επεξεργασία σήματος

Αυτή η ισοδυναμία αποδεικνύεται ως εξής. Ξεκινώντας από το κάτω σχήμα της αριστερής εικόνας το ψηφιακό φίλτρο  $\mathcal{H}(z^M)$  δέχεται ως είσοδο το διακριτό σήμα  $x[n]$  και παράγει στην έξοδο του το διακριτό σήμα  $x_b[n]$ . Από το **θεώρημα της συνέλιξης**, τα φάσματα των δύο αυτών σημάτων θα σχετίζονται μέσω της σχέσης

$$\mathcal{X}_b(e^{j\omega}) = \mathcal{H}(e^{j\omega M})\mathcal{X}(e^{j\omega})$$

Παρατηρώντας τώρα ότι

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \mathcal{X}_b(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)})$$

και συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις λαμβάνουμε

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \mathcal{X}(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)})\mathcal{H}(e^{j(\omega - 2\pi i)})$$

Παρατηρώντας όμως ότι  $\mathcal{H}(e^{j\omega - 2\pi i}) = \mathcal{H}(e^{j\omega})$  η παραπάνω σχέση λαμβάνει τη μορφή

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \mathcal{H}(e^{j\omega}) \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \mathcal{X}(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)}) = \mathcal{H}(e^{j\omega})\mathcal{X}_a(e^{j\omega})$$

εξίσωση που είναι η περιγραφή του επάνω συστήματος της αριστερής εικόνας.

# Πολυρυθμική επεξεργασία σήματος

## Πολυρυθμική επεξεργασία σήματος

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η κατάσταση είναι ακριβώς η ίδια για την περίπτωση της υπερδειγματοληψίας, με τα δύο συστήματα που απεικονίζονται στην δεξιά εικόνα του σχήματος, να είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \mathcal{X}_a(e^{j\omega L}) = \mathcal{X}(e^{j\omega L})\mathcal{H}(e^{j\omega L})$$

Είναι όμως

$$\mathcal{X}_b(e^{j\omega}) = \mathcal{X}(e^{j\omega L})$$

και επομένως θα είναι

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \mathcal{H}(e^{j\omega L})\mathcal{X}_b(e^{j\omega})$$

Αλλά η τελευταία εξίσωση αντιστοιχεί στο κάτω σύστημα της δεξιάς εικόνας του σχήματος. Επομένως, τόσο στην περίπτωση της υποδειγματοληψίας όσο και στην περίπτωση της υπερδειγματοληψίας, η εναλλαγή των δύο υποσυστημάτων που εμφανίζονται στις διατάξεις πραγματοποίησης αυτών των διαδικασιών, οδηγεί σε νέα συστήματα τα οποία είναι εντελώς ισοδύναμα με τα αρχικά.

# Πολυρυθμική επεξεργασία σήματος

Υποδειγματοληψία και υπερδειγματοληψία πολλαπλών βαθμίδων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Έστω πως επιθυμούμε να κατασκευάσουμε **σύστημα υποδειγματοληψίας** διακριτού σήματος κατά συντελεστή  $M = M_1 M_2$  όπου  $M_1$  και  $M_2$  ακέραιες ποσότητες.

Η χρήση ενός απλού συστήματος **αποδεκατιστή**, θα απαιτούσε τη χρήση ενός **συμπιεστή** και ενός **ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου** με συχνότητα αποκοπής  $\pi/M = \pi/(M_1 M_2)$ .

Εναλλακτικά, μπορούμε να συνδέσουμε εν σειρά δύο **αποδεκατιστές** οι οποίοι υλοποιούν **υποδειγματοληψία** κατά συντελεστές  $M_1$  και  $M_2$  και ως εκ τούτου, τα **χαμηλοπερατά φίλτρα** που χρησιμοποιούνται σε αυτούς, θα χαρακτηρίζονται από συχνότητες αποκοπής  $\pi/M_1$  και  $\pi/M_2$  αντίστοιχα.

Εναλλάσσοντας τις θέσεις του συμπιεστή του πρώτου αποδεκατιστή και του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου του δεύτερου αποδεκατιστή, κατασκευάζουμε ένα **ισοδύναμο σύστημα** στο οποίο στη συνέχεια αντικαθιστούμε τους δύο συμπιεστές με ένα **σύνθετο συμπιεστή** και τα δύο χαμηλοπερατά φίλτρα με ένα **σύνθετο χαμηλοπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς**

$$H(z) = H_1(z)H_2(z^{M_1})$$

και **κρουστική απόκριση**

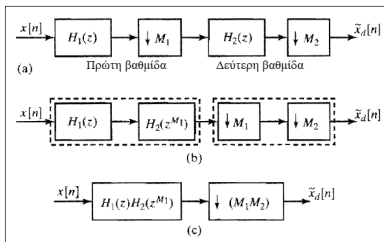
$$h[n] = h_1[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k]\delta[n - kM_1]$$

# Πολυρυθμική επεξεργασία σήματος

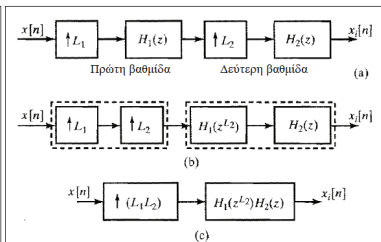
Υποδειματοληψία και υπερδειματοληψία πολλαπλών βαθμίδων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σύστημα υποδειματοληψίας δύο βαθμίδων



Σύστημα υπερδειματοληψίας δύο βαθμίδων

**Σχήμα:** Συστήματα υποδειματοληψίας και υπερδειματοληψίας **δύο βαθμίδων**.

# Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

## Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

Το μειονέκτημα της κλασικής διαδικασίας υποδειγματοληψίας κατά έναν συντελεστή  $M$ , είναι πως αν και διατηρούμε ένα και μοναδικό δείγμα για κάθε ομάδα  $M$  δειγμάτων, **ωστόσο, υπολογίζονται και όλα τα υπόλοιπα δείγματα.**

Μία πιο αποδοτική τεχνική είναι η **πολυφασική ανάλυση.**

Ένα διακριτό σήμα  $h[n]$  μπορεί να αναπαρασταθεί ως η **επαλληλία**  $M$  διακριτών ακολουθιών  $h_k[n]$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ ), η καθεμία εκ των οποίων προκύπτει από την **διαδοχική υποδειγματοληψία** του σήματος  $h[n]$  με συντελεστή  $M$ , αφού προηγουμένως εφαρμοστεί επί αυτού η διαδικασία της **μοναδιαίας χρονικής υστέρησης.**

Αυτές οι  $k$  το πλήθος διακριτές ακολουθίες έχουν τη μορφή

$$h_k[n] = \begin{cases} h[n + k] & n = \text{ακέραιο πολλαπλάσιο του } M, \text{ δηλαδή } n = \ell M \ (\ell \in \mathbb{I}) \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

( $k = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ ) και επιτρέπουν την **ανακατασκευή** του αρχικού σήματος  $h[n]$  σύμφωνα με την εξίσωση

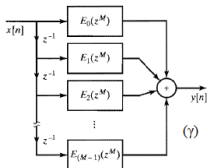
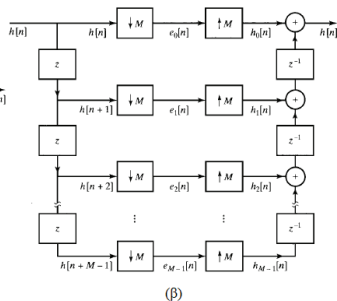
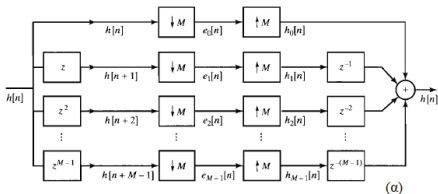
$$h[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h_k[n - k]$$

# Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

## Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ



**Σχήμα:** Η επίδειξη της τεχνικής της πολυφασικής ανάλυσης και η δομή φίλτρου που προκύπτει από αυτή.



# Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

## Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

Οι ακολουθίες  $e_k[n]$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ ) που εμφανίζονται σε αυτά τα διαγράμματα ορίζονται ως

$$e_k[n] = h[nM + k] = h_k[nM]$$

και αποτελούν τις επονομαζόμενες **πολυφασικές συνιστώσες** του διακριτού σήματος  $h[n]$  ως προς τον ακέραιο αριθμό  $M$ .

Ένα φίλτρο μπορεί λοιπόν να αναλυθεί σε ένα σύνολο  $M$  απλούστερων **πολυφασικών φίλτρων**, με **συναρτήσεις μεταφοράς**

$$E_k(z) = \mathcal{Z}\{e_k[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_k[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[nM + k]z^{-n}$$

Εκφράζοντας το δείκτη  $n$  ( $-\infty < n < \infty$ ) ως  $n = Mr + k$  ( $-\infty < r < \infty$ ), ( $0 \leq k \leq M - 1$ ) θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[Mr + k]z^{-(Mr+k)} \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[Mr + k](z^M)^{-r} \right) z^{-k} = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M)z^{-k} \end{aligned}$$

# Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

## Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

ή σε αναπαράσταση πινάκων

$$\mathcal{H}(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & z^{-2} & \dots & z^{-(M-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0(z^M) \\ E_1(z^M) \\ E_2(z^M) \\ \vdots \\ E_{M-1}(z^M) \end{bmatrix}$$

Οι συναρτήσεις  $E_k(z)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ ) χαρακτηρίζονται ως οι **πολυφασικές** συνιστώσες της συνάρτησης μεταφοράς  $\mathcal{H}(z)$  στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας, ενώ η γραφή αυτής της συνάρτησης με τον παραπάνω τρόπο, οδηγεί στην υλοποίηση του ψηφιακού φίλτρου που απεικονίζεται στην εικόνα ( $\gamma$ ) του προηγούμενου σχήματος.

Αυτές οι πολυφασικές δομές, χαρακτηρίζονται από **μεγαλύτερη αποδοτικότητα**, αφού τα πολυφασικά φίλτρα διαθέτουν **λιγότερους συντελεστές** σε σχέση με το αρχικό φίλτρο  $\mathcal{H}(z)$ , ενώ χρησιμοποιούν **μικρότερους ρυθμούς δεδομένων** λόγω της υποδειγματοληψίας που λαμβάνει χώρα, με αποτέλεσμα την πραγματοποίηση μεγαλύτερου πλήθους υπολογισμών και την πιο εύκολη και απλή μετάδοση δεδομένων.

# Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

Ένα παράδειγμα πολυφασικής ανάλυσης

Ας θεωρήσουμε μία κρουστική απόκριση με 12 δείγματα, της μορφής

$$h[n] = \{h[0], h[1], h[2], h[3], h[4], h[5], h[6], h[7], h[8], h[9], h[10], h[11]\}$$

Οι πολυφασικές συνιστώσες για την τιμή  $M = 3$  υπολογίζονται ως εξής:

Στο πρώτο φίλτρο το σήμα  $h[n]$  υφίσταται απευθείας υποδειματοληψία με συντελεστή  $M = 3$  οδηγώντας στη δημιουργία του σήματος

$$e_0[n] = \{h[0], h[3], h[6], h[9]\}$$

Στο δεύτερο φίλτρο το σήμα  $h[n]$  πριν από τη δειγματοληψία του διέρχεται από ένα στοιχείο μοναδιαίας χρονικής προώθησης οπότε θα είναι

$$h[n] = \{h[1], h[2], h[3], h[4], h[5], h[6], h[7], h[8], h[9], h[10], h[11], 0\}$$

το οποίο εάν υποστεί υποδειγματοληψία με συντελεστή  $M = 3$  θα οδηγήσει στη δημιουργία του σήματος

$$e_1[n] = \{h[1], h[4], h[7], h[10]\}$$

Στο τρίτο φίλτρο το σήμα  $h[n]$  πριν από τη δειγματοληψία του διέρχεται από ένα στοιχείο χρονικής προώθησης κατά δύο δείγματα οπότε θα είναι

$$h[n] = \{h[2], h[3], h[4], h[5], h[6], h[7], h[8], h[9], h[11], h[11], 0, 0\}$$

το οποίο εάν υποστεί υποδειγματοληψία με συντελεστή  $M = 3$  θα οδηγήσει στη δημιουργία του σήματος

$$e_2[n] = \{h[2], h[5], h[8], h[11]\}$$

# Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

Ένα παράδειγμα πολυφασικής ανάλυσης

Τα σήματα  $e_0[n]$ ,  $e_1[n]$  και  $e_2[n]$ , αποτελούν τις πολυφασικές συνιστώσες του διακριτού σήματος  $h[n]$  η υποδειγματοληψία των οποίων για τιμή  $M = 3$  οδηγεί στα σήματα

$$h_0[n] = \{h[0], 0, 0, h[3], 0, 0, h[6], 0, 0, h[9], 0, 0\}$$

$$h_1[n] = \{h[1], 0, 0, h[4], 0, 0, h[7], 0, 0, h[10], 0, 0\}$$

$$h_2[n] = \{h[2], 0, 0, h[5], 0, 0, h[8], 0, 0, h[11], 0, 0\}$$

Ενώ η λειτουργία του πρώτου φίλτρου έχει ολοκληρωθεί, το δεύτερο φίλτρο απαιτεί την διέλευση του σήματος  $h_1[n]$  από ένα σύστημα μοναδιαίας χρονικής υστέρησης που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών  $y[n] = x[n - 1]$  και οδηγεί στο σήμα

$$h_1[n] = \{0, h[1], 0, 0, h[4], 0, 0, h[7], 0, 0, h[10], 0\}$$

ενώ το δεύτερο φίλτρο απαιτεί την διέλευση του σήματος  $h_2[n]$  από ένα σύστημα που προκαλεί υστέρηση κατά δύο χρονικές μονάδες, περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών  $y[n] = x[n - 2]$  και οδηγεί στο σήμα

$$h_2[n] = \{0, 0, h[2], 0, 0, h[5], 0, 0, h[8], 0, 0, h[11]\}$$

Τα τρία λοιπόν σήματα που φτάνουν στην είσοδο του αθροιστή είναι τα

$$\begin{array}{l} h_0[n] = \{ h[0] \quad 0 \quad 0 \quad h[3] \quad 0 \quad 0 \quad h[6] \quad 0 \quad 0 \quad h[9] \quad 0 \quad 0 \} \\ h_1[n] = \{ \quad 0 \quad h[1] \quad 0 \quad 0 \quad h[4] \quad 0 \quad 0 \quad h[7] \quad 0 \quad 0 \quad h[10] \quad 0 \} \\ h_2[n] = \{ \quad 0 \quad 0 \quad h[2] \quad 0 \quad 0 \quad h[5] \quad 0 \quad 0 \quad h[8] \quad 0 \quad 0 \quad h[11] \} \\ \hline h[n] = \{ h[0] \quad h[1] \quad h[2] \quad h[3] \quad h[4] \quad h[5] \quad h[6] \quad h[7] \quad h[8] \quad h[9] \quad h[10] \quad h[11] \} \end{array}$$

# Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

Ένα παράδειγμα πολυφασικής ανάλυσης

Θεωρώντας τη συνάρτηση μεταφοράς  $\mathcal{H}(z) = (1 - 2z^{-1})/(1 + 3z^{-1})$  και την τιμή  $M = 2$  παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{H}(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})}{(1 + 3z^{-1})(1 - 3z^{-1})} = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{1 - 9z^{-2}} = \frac{1 + 6z^{-2}}{1 - 9z^{-2}} + \frac{-5z^{-1}}{1 - 9z^{-2}}$$

Θα είναι λοιπόν  $\mathcal{H}(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$  όπου

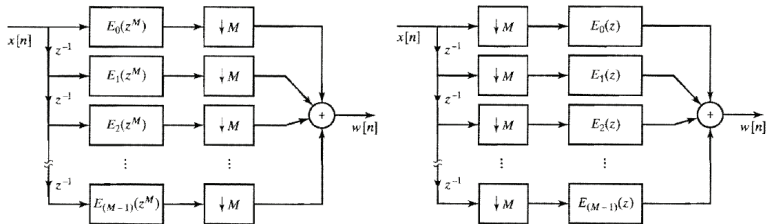
$$E_0(z^2) = \frac{1 + 6z^{-2}}{1 - 9z^{-2}} \quad \text{και} \quad E_1(z^2) = \frac{-5}{1 - 9z^{-2}}$$

Οι παραπάνω τεχνικές άμεση εφαρμογή στις διατάξεις **υποδειγματοληψίας** και **υπερδειγματοληψίας**. Ένας **αποδεκατιστής** αποτελείται από ένα χαμηλοπερατό φίλτρο συνδεδεμένο εν σειρά με ένα συμπίεστή, ενώ ένας **παρεμβολέας** αποτελείται από έναν εκτονωτή συνδεδεμένο εν σειρά με ένα χαμηλοπερατό φίλτρο.

Εάν αντικαταστήσουμε τα φίλτρα αυτών των διατάξεων με τη δομή του παραπάνω σχήματος μπορούμε να κατασκευάσουμε πιο εξελιγμένες δομές αποδεκατιστή και παρεμβολέα οι οποίες απεικονίζονται στα επόμενα σχήματα μαζί με τα **ισοδύναμα κυκλώματα** που προκύπτουν **εναλλάσσοντας** τα δύο υποσυστήματα του αποδεκατιστή και του παρεμβολέα.

# Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

Υλοποιήσεις φίλτρων



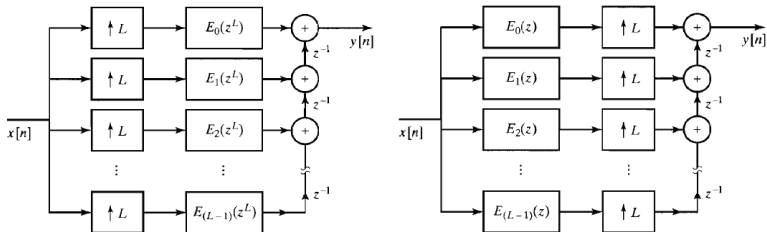
Σχήμα: Υλοποιήσεις φίλτρου υποδειματοληψίας με τεχνική πολυφασικής ανάλυσης.

# Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

Υλοποιήσεις φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Υλοποιήσεις φίλτρου υπερδειγματοληψίας με τεχνική πολυφασικής ανάλυσης.

# Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

## Υλοποιήσεις φίλτρων

Έστω πως το σήμα εισόδου  $x[n]$  είναι **χροнисμένο**, σε ένα δείγμα ανά μονάδα χρόνου και πως η συνάρτηση μεταφοράς  $\mathcal{H}(z)$  περιγράφει ένα **φίλτρο FIR**, μήκους  $N$  δειγμάτων.

Στην παραδοσιακή υλοποίηση, απαιτείται η πραγματοποίηση  $N$  πολλαπλασιασμών και  $N - 1$  προσθέσεων ανά μονάδα χρόνου, ενώ στην νέα υλοποίηση, το καθένα από τα πολυφασικά φίλτρα  $E_k(z)$  χαρακτηρίζεται από κρουστική απόκριση μήκους  $N/M$ , ενώ η είσοδος του είναι χρονισμένη σε ένα δείγμα ανά  $M$  μονάδες χρόνου.

Κατά συνέπεια, το κάθε φίλτρο απαιτεί  $(1/M)(N/M)$  πολλαπλασιασμούς και  $(1/M)[(N/M) - 1]$  προσθέσεις ανά μονάδα χρόνου και επειδή υπάρχουν  $M$  το πλήθος τέτοια φίλτρα το σύστημα στο σύνολο του απαιτεί την πραγματοποίηση  $(N/M)$  πολλαπλασιασμών και  $[(N/M) - 1] + (M - 1)$  προσθέσεων (οι πρόσθετες  $M - 1$  προσθέσεις σχετίζονται με τη λειτουργία του αθροιστή).

Παρόμοια είναι η κατάσταση και στην περίπτωση της υπερδειγματοληψίας. Εάν θεωρήσουμε την ίδια χρονισμένη είσοδος  $x[n]$ , στην παραδοσιακή υλοποίηση, στην έξοδο του φίλτρου εμφανίζονται  $L$  τιμές ανά μονάδα χρόνου, ενώ απαιτούνται  $NL$  πολλαπλασιασμοί και  $(NL - 1)$  προσθέσεις ανά μονάδα χρόνου.

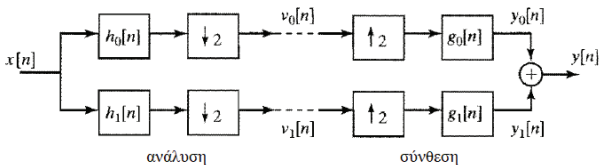
Στη νέα υλοποίηση, απαιτούνται  $L(N/L)$  πολλαπλασιασμοί και  $L[(N/L) - 1]$  προσθέσεις ανά μονάδα χρόνου συν  $L - 1$  προσθέσεις για τον υπολογισμό της εξόδου.



# Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

Ανάλυση και σύνθεση φωνητικού σήματος

Υλοποιείται από σύστημα δύο καναλιών με υποσυστήματα για **ανάλυση** και **σύνθεση**. Στη θέση των διακεκομμένων γραμμών υπάρχει οποιοδήποτε ψηφιακό σύστημα επεξεργασίας του φωνητικού σήματος εισόδου.



**Σχήμα:** Σύστημα **ανάλυσης / σύνθεσης** φωνητικού σήματος δύο καναλιών.

Το υποσύστημα της ανάλυσης διαχωρίζει το φάσμα συχνοτήτων σε μία **χαμηλοπερατή ζώνη συχνοτήτων** (το σήμα  $v_0[n]$  που έχει υποστεί **υποδειγματοληψία**) και σε μία **υψηλοπερατή ζώνη συχνοτήτων** (το σήμα  $v_1[n]$  που έχει υποστεί **υπερδειγματοληψία**).

Η χαμηλοπερατή ζώνη διαθέτει τιμές συχνότητας στην περιοχή  $0 \leq \omega \leq \pi/2$ , ενώ η υψηλοπερατή ζώνη να διαθέτει τιμές συχνότητας στην περιοχή  $\pi/2 \leq \omega \leq \pi$ .

Οι κρουστικές αποκρίσεις  $h_0[n]$  και  $h_1[n] = e^{j\pi n} h_0[n]$  περιγράφουν χαμηλοπερατό & υψηλοπερατό φίλτρο. Στο πεδίο της συχνότητας έχουμε  $\mathcal{H}_1(e^{j\omega}) = \mathcal{H}_0(e^{j(\omega-\pi)})$ .

# Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

Ανάλυση και σύνθεση φωνητικού σήματος

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το **τμήμα σύνθεσης** ανακατασκευάζει μία προσέγγιση της εισόδου  $x[n]$  από τα σήματα  $v_0[n]$  και  $v_1[n]$ , με **υπερδειγματοληψία** σε αμφότερα τα σήματα και **φιλτράρισμα** από ένα χαμηλοπερατό και ένα υψηλοπερατό φίλτρο, με κρουστικές αποκρίσεις  $g_0[n]$  και  $g_1[n]$ .

Στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας οι έξοδοι αυτών των φίλτρων  $y_0[n]$  και  $y_1[n]$  προστίθενται μεταξύ τους για να δώσουν την τελική έξοδο  $y[n]$  η οποία αποτελεί μία **προσεγγιστική έκδοση** του σήματος εισόδου  $x[n]$ .

Η περιγραφή του παραπάνω συστήματος στο πεδίο της συχνότητας μας δίνει

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [G_0(e^{j\omega})H_0(e^{j\omega}) + G_1(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega})] X(e^{j\omega}) \\ + \frac{1}{2} [G_0(e^{j\omega})H_0(e^{j(\omega-\pi)}) + G_1(e^{j\omega})H_1(e^{j(\omega-\pi)})] X(e^{j(\omega-\pi)})$$

Χρησιμοποιώντας **ιδανικά φίλτρα**, η ανακατασκευή του  $x[n]$  είναι τέλεια, οπότε θα είναι  $y[n] = x[n]$  και  $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$ . Ωστόσο, αυτό γίνεται και με **πραγματικά φίλτρα**, εάν απομακρύνουμε τις συνέπειες του φαινομένου της **αναδίπλωσης**, δηλαδή αν επιλέξουμε τα φίλτρα έτσι ώστε να είναι

$$G_0(e^{j\omega})H_0(e^{j(\omega-\pi)}) + G_1(e^{j\omega})H_1(e^{j(\omega-\pi)}) = 0$$

# Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

Ανάλυση και σύνθεση φωνητικού σήματος

Υπάρχουν πολλές συνθήκες που οδηγούν στο παραπάνω αποτέλεσμα, όπως είναι οι

$$h_1[n] = e^{j\pi n} h_0[n] \iff H_1(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$g_0[n] = 2h_0[n] \iff G_0(e^{j\omega}) = 2H_0(e^{j\omega})$$

$$g_1[n] = -2h_1[n] \iff G_1(e^{j\omega}) = -2H_0(e^{j(\omega-\pi)})$$

Η αντικατάσταση των παραπάνω συνθηκών στην προηγούμενη εξίσωση μας δίνει

$$Y(e^{j\omega}) = [H_0^2(e^{j\omega}) - H_0^2(e^{j(\omega-\pi)})] X(e^{j\omega})$$

από όπου προκύπτει πως η τέλεια ανακατασκευή του σήματος εισόδου απαιτεί να είναι

$$H_0^2(e^{j\omega}) - H_0^2(e^{j(\omega-\pi)}) = e^{-j\omega M}$$

Η χρήση των πολυφασικών δομών που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες ενότητες, οδηγεί σε βελτιωμένες δομές που απαιτούν μικρότερο πλήθος προσθέσεων και πολλαπλασιασμών σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε προηγουμένως. Ένα παράδειγμα τέτοιας δομής παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα, με τα εμπλεκόμενα σήματα να ορίζονται ως

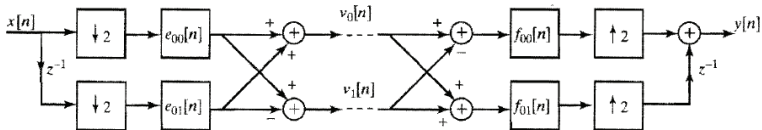
$$e_{00}[n] = h_0[2n] \quad e_{01}[n] = h_0[2n+1]$$

$$f_{00}[n] = 2e_{00}[n] \quad f_{01}[n] = 2e_{01}[n]$$

# Η τεχνική της πολυφασικής ανάλυσης

Ανάλυση και σύνθεση φωνητικού σήματος

Η παραπάνω δομή δύο καναλιών μπορεί να γενικευτεί σε μία **δομή  $N$  καναλιών** για πιο λεπτομερή ανάλυση του φάσματος του σήματος εισόδου.



**Σχήμα:** Πολυφασική υλοποίηση του συστήματος **ανάλυσης / σύνθεσης φωνητικού σήματος** δύο καναλιών.

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

## Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οι μέθοδοι επεξεργασίας στο πεδίο του διακριτού χρόνου, είναι **πιο ακριβείς και αποτελεσματικές** σε σχέση με τις αντίστοιχες μεθόδους στο πεδίο του συνεχούς χρόνου.

Για το λόγο αυτό, **μετασχηματίζουμε το αναλογικό σήμα  $x_\alpha(t)$  σε διακριτό σήμα  $x[n]$** , εφαρμόζουμε σε αυτό τις κατάλληλες μορφές επεξεργασίας και έπειτα μετασχηματίζουμε το επεξεργασμένο σήμα  $y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\}$  στο αρχικό αναλογικό σήμα  $x_\alpha(t)$ .

Η ανακατασκευή του αναλογικού σήματος από τα δείγματα του, πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας την εξίσωση παραβολής

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\alpha(nT_s) \left\{ \sin \left[ \frac{\pi}{T_s} (t - nT_s) \right] \right\} / \left\{ \frac{\pi}{T_s} (t - nT_s) \right\}$$

με το σήμα  $x_r(t)$  να ταυτίζεται με το  $x_\alpha(t)$  εάν **δεν εμφανίζεται** το φαινόμενο της **αναδίπλωσης συχνότητας**.

Η διάταξη μετατροπής του συνεχούς στο διακριτό σήμα χαρακτηρίζεται ως **ιδανικός μετατροπέας C/D (Continuous/Discrete)** ενώ η διάταξη μετατροπής του διακριτού στο συνεχές σήμα, χαρακτηρίζεται ως **ιδανικός μετατροπέας D/C (Discrete/Continuous)**.

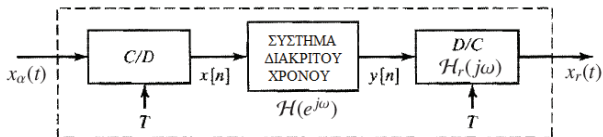
Ο χαρακτηρισμός **ιδανικός** οφείλεται στην παραδοχή, πως το αναλογικό σήμα είναι **αυστηρά περιορισμένου εύρους ζώνης**, ενώ το χαμηλοπερατό φίλτρο που χρησιμοποιείται στη διαδικασία ανακατασκευής είναι **ιδανικό**.

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Το σύστημα ψηφιακής επεξεργασίας αναλογικών σημάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



**Σχήμα:** Επεξεργασία **συνεχών** σημάτων στο πεδίο του **διακριτού** χρόνου. .

Η εξίσωση παρεμβολής ισχύει ως έχει μόνο για την περίπτωση του **ταυτοτικού** συστήματος, ενώ γενικά θα είναι  $y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} = \mathcal{T}\{x_\alpha(nT_s)\}$  και κατά συνέπεια, η έξοδος του συστήματος δεν θα είναι η  $x_r(t)$ , αλλά κάποιο άλλο σήμα  $y_r(t)$ .

Έστω  $\mathcal{H}_r(j\omega)$  τη συχνотική απόκριση του μετατροπέα D/C και  $\mathcal{Y}_r(j\Omega) = \mathcal{F}\{y_r(t)\}$ ,  $\mathcal{X}(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$  και  $\mathcal{Y}(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{y[n]\}$ . Θα είναι τότε

$$\mathcal{Y}_r(j\Omega) = \mathcal{H}_r(j\Omega)\mathcal{Y}(e^{j\Omega T_s}) = \begin{cases} T_s \mathcal{Y}(e^{j\Omega T_s}) & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

όπου  $\Omega_c = \omega/T_s = \pi/T_s$  (όπου χρησιμοποιούμε τη μέγιστη συχνότητα ενός διακριτού σήματος  $\omega = \pi$ ).

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

## Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Εάν το διακριτό σύστημα ανάμεσα στους μετατροπείς C/D και D/C είναι σύστημα LTI με συχνοτική απόκριση  $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ , το θεώρημα της συνέλιξης μας δίνει

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \mathcal{H}(e^{j\omega})\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \mathcal{H}(e^{j\Omega T_s})\mathcal{X}(e^{j\Omega T_s})$$

(αφού είναι  $\omega = \Omega T_s$ ) και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_r(j\Omega) &= \mathcal{H}_r(j\Omega)\mathcal{Y}(e^{j\Omega T_s}) = \mathcal{H}_r(j\Omega)\mathcal{H}(e^{j\Omega T_s})\mathcal{X}(e^{j\Omega T_s}) \\ &= \mathcal{H}_r(j\Omega)\mathcal{H}(e^{j\Omega T_s})\frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{X}_\alpha \left[ j \left( \Omega - \frac{2k\pi}{T_s} \right) \right]\end{aligned}$$

Εάν είναι  $\mathcal{X}_\alpha(j\Omega) = 0$  για  $|\Omega| \geq \pi/T_s$ , ο μόνος μη μηδενικός όρος είναι αυτός που αντιστοιχεί στην τιμή  $k = 0$ . Επιπλέον, επειδή για  $|\Omega| < \pi/T_s$  είναι  $\mathcal{H}_r(j\Omega) = T_s$  θα έχουμε  $\mathcal{H}_r(j\Omega)(1/T_s) = 1$  και η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\mathcal{Y}_r(j\Omega) = \begin{cases} \mathcal{H}(e^{j\Omega T_s})\mathcal{X}_\alpha(j\Omega) & |\Omega| < \pi/T_s \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

Εάν λοιπόν ο μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{X}_\alpha(j\Omega)$  είναι **περιορισμένου εύρους ζώνης** και ικανοποιείται το **θεώρημα του Nyquist**, η είσοδος και η έξοδος του σύνθετου συστήματος στο πεδίο της συχνότητας, σχετίζονται ως

$$\mathcal{Y}_r(j\Omega) = \mathcal{H}_{\text{eff}}(j\Omega)\mathcal{X}_\alpha(j\Omega) \quad \text{όπου} \quad \mathcal{H}_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} \mathcal{H}(e^{j\Omega T_s}) & |\Omega| < \pi/T_s \\ 0 & |\Omega| \geq \pi/T_s \end{cases}$$

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

## Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Επομένως, το ιδανικό σύστημα επεξεργασίας αναλογικών σημάτων στο πεδίο του διακριτού χρόνου, μπορεί να θεωρηθεί ως **σύστημα LTI**.

Στην πράξη, τα σήματα **δεν διαθέτουν** αυστηρά περιορισμένο εύρος ζώνης, ενώ τα ιδανικά φίλτρα **δεν είναι** υλοποιήσιμα. Καταφεύγουμε λοιπόν σε προσεγγιστικά συστήματα μετατροπής αναλογικού σε ψηφιακό (**A/D converter**) και ψηφιακού σε αναλογικό (**D/A converter**).

Η εμφάνιση πλασματικών συχνοτήτων αντιμετωπίζεται επιλέγοντας την κατάλληλη συχνότητα δειγματοληψίας.

Συνήθως καταφεύγουμε στη μείωση της συχνότητας δειγματοληψίας μέσω φιλτραρίσματος που πραγματοποιείται τοποθετώντας ένα φίλτρο antialiasing πριν το ιδανικό σύστημα. Η συχνοτική απόκριση αυτού του φίλτρου, στην ιδανική περίπτωση είναι

$$H_{aa}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \leq \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_c \end{cases}$$

Εάν  $H_{cdc}(j\Omega)$  είναι η συχνοτική απόκριση του ιδανικού συστήματος, η συχνοτική απόκριση του σύνθετου συστήματος θα ορίζεται ως το γινόμενο

$$H_{eff}(j\Omega) = H_{aa}(j\Omega) \times H_{cdc}(j\Omega) = \begin{cases} \mathcal{H}(e^{j\Omega T_s}) & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & |\Omega| \geq \Omega_c \end{cases}$$



# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

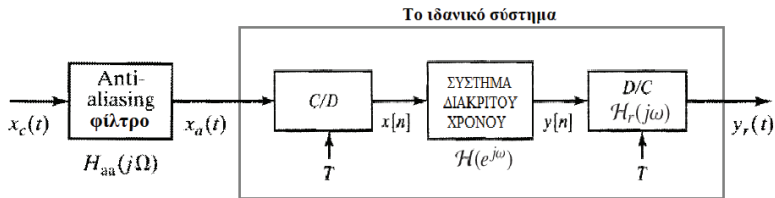
## Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Επομένως, το σύστημα στο οποίο έχει προστεθεί το φίλτρο antialiasing συμπεριφέρεται ως **σύστημα LTI**, παρά το γεγονός πως το σήμα **δεν έχει** αυστηρά περιορισμένο εύρος ζώνης.

Επειδή **δεν υπάρχουν** ιδανικά φίλτρα είναι αδύνατο να ισχύει  $|H_{aa}(j\Omega)| = 0$  για  $|\Omega| > \pi/T$ . Ωστόσο, μπορούμε να σχεδιάσουμε φίλτρα με πολύ μικρές τιμές  $|H_{aa}(j\Omega)|$  για την παραπάνω συχνότητα, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η επίδραση του φαινομένου της αναδίπλωσης.

Βέβαια, στην περίπτωση αυτή, η ισότητα του γινομένου των συχνοτικών αποκρίσεων θα ισχύει **μόνο κατά προσέγγιση** έτσι ώστε να μπορούμε να γράψουμε ότι

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) \approx H_{aa}(j\Omega)H(e^{j\Omega T})$$



**Σχήμα:** Χρησιμοποιώντας ένα φίλτρο πριν την είσοδο του αναλογικού σήματος στο σύστημα, για την **αποφυγή** του φαινομένου της αναδίπλωσης.

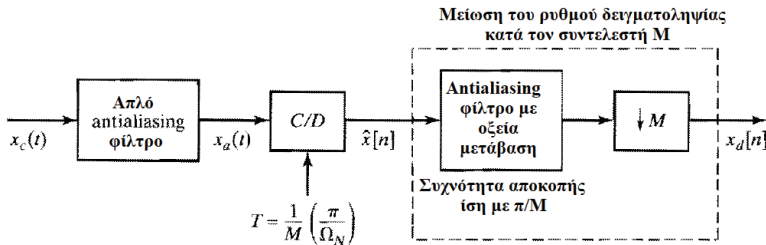
# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

## Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Η παραδοχή της **πολύ οξείας μετάβασης** του αναλογικού φίλτρου στη θέση της συχνότητας αποκοπής χαρακτηρίζεται από **πολύ υψηλό κόστος**.

Επιπλέον, αυτά τα φίλτρα χαρακτηρίζονται από **φασική απόκριση με μεγάλο βαθμό μη γραμμικότητας**, ιδιαίτερα στη ζώνη διέλευσης.

Μία πιο συμβιβαστική λύση συνίσταται στη χρήση ενός **αρκετά απλού και φθηνού αναλογικού φίλτρου antialiasing** που χαρακτηρίζεται από πιο ομαλή και σταδιακή μετάβαση στην περιοχή της ζώνης αποκοπής.



**Σχήμα:** Μία **πιο συμβιβαστική λύση** χαμηλότερου κόστους.

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό σήμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η χρήση ενός διακριτού σήματος **δεν είναι δυνατόν** να συμβεί στην πράξη, διότι η δειγματοληψία πραγματοποιείται με **άπειρη** ακρίβεια.

Στην πράξη, το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας είναι μία **διακριτή ακολουθία δειγμάτων πεπερασμένης ακρίβειας**, ή **κβαντισμένων δειγμάτων** που είναι γνωστή ως **ψηφιακό σήμα**.

Η μετατροπή ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακό σήμα, πραγματοποιείται με τη βοήθεια μιας διάταξης **A/D**, μίας φυσικής, πραγματικής διάταξης, η οποία είναι δυνατόν να υλοποιηθεί με τα κατάλληλα κυκλώματα.

Αυτή η διάταξη δέχεται στην είσοδο της μία τιμή, που εκφράζει το πλάτος κάποιας τάσης ή κάποιου ρεύματος και τη μετασχηματίζει **σε μία ακολουθία δυαδικών αριθμών**, η οποία αποτελεί την **δυαδική αναπαράσταση** της κβαντισμένης τιμής του πλάτους που έχει προκύψει μέσω δειγματοληψίας που έλαβε χώρα με περασμένη ακρίβεια.

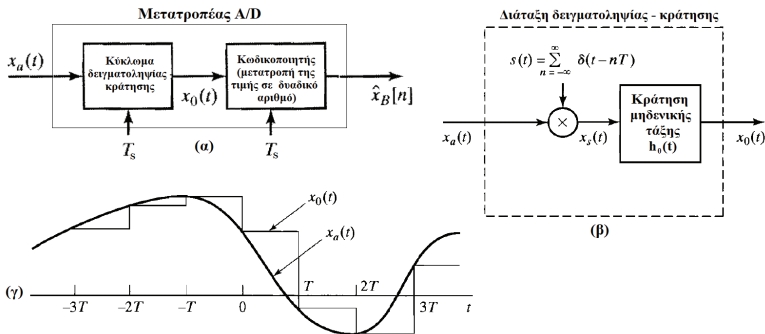
Αυτή η διαδικασία μετατροπής **δεν είναι στιγμιαία**, αλλά απαιτεί κάποιο πολύ μικρό αλλά **μη μηδενικό** χρονικό διάστημα. Επομένως, μετά την καταγραφή του δείγματος κατά την διαδικασία της δειγματοληψίας, αυτό διατηρείται **για το χρονικό διάστημα που απαιτείται** προκειμένου να πραγματοποιηθεί η μετατροπή της τιμής του δείγματος σε δυαδικό κώδικα

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό σήμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



**Σχήμα:** Διάταξη μετατροπέα A/D [(α)], το κύκλωμα δειγματοληψίας - κράτησης [(β)] και η είσοδος και η έξοδος του κυκλώματος δειγματοληψίας - κράτησης θέσης [(γ)].

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό σήμα

Η διάταξη **δειγματοληψίας - κράτησης (sample and hold)** περιγράφεται την εξίσωση

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT)$$

όπου  $x[n] = x_\alpha(nT_s)$  είναι τα **ιδανικά** δείγματα του σήματος  $x_\alpha(t)$  που υφίσταται τη δειγματοληψία, ενώ το σήμα  $h_0(t)$  που ορίζεται ως

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T, \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

αποτελεί την **κρουστική απόκριση** του συστήματος **κράτησης δείγματος μηδενικής τάξης (zero-order hold)** το οποίο διατηρεί **μόνο το τρέχον δείγμα** που υφίσταται δειγματοληψία. Η εξίσωση ορισμού του σήματος  $x_0(t)$  μπορεί να λάβει και τη μορφή

$$x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(nT)\delta(t - nT)$$

Η ιδανική διαδικασία **sample & hold** είναι ισοδύναμη με τη διαμόρφωση του σήματος από **συρμό κρουστικών συναρτήσεων**, συνοδευόμενη από **φιλτράρισμα [εικόνα (β)]**.

Η έξοδος του συστήματος [εικόνα (γ)] έχει τη μορφή **κλιμακωτής κυματομορφής**, με την τιμή του κάθε δείγματος να διατηρείται **σταθερή** κατά τη διάρκεια της περιόδου δειγματοληψίας των  $T_s$  δευτερολέπτων.

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό σήμα

Η μετατροπή των δειγμάτων άπειρης ακρίβειας του **διακριτού σήματος** στα δείγματα πεπερασμένης ακρίβειας του **ψηφιακού σήματος** είναι γνωστή ως **κβαντισμός (quantization)**.

Η διαδικασία του κβαντισμού πραγματοποιείται από το σύστημα του **κβαντιστή (quantizer)** ο οποίος είτε είναι ενσωματωμένος στον κωδικοποιητή, είτε βρίσκεται πριν από αυτόν και αμέσως μετά τη διάταξη δειγματοληψίας - κράτησης. Η λειτουργία του κβαντιστή περιγράφεται από την εξίσωση

$$\tilde{x}[n] = Q(x[n])$$

όπου  $x[n]$  είναι το  $n$  δείγμα του **διακριτού σήματος** που δέχεται στην είσοδο του και  $\tilde{x}[n]$  είναι το **κβαντισμένο δείγμα** του **ψηφιακού σήματος** που εμφανίζεται στην έξοδο του.

Κατά τη διαδικασία του κβαντισμού, η τιμή του δείγματος εισόδου  $x[n]$  **στρογγυλοποιείται προς τα πάνω ή προς τα κάτω** έτσι ώστε να ταυτιστεί με μία από τις τιμές του συνόλου των **επιπέδων κβαντισμού**.

Εάν τα επίπεδα κβαντισμού **ισαπέχουν** μεταξύ τους, ο κβαντιστής χαρακτηρίζεται ως **ομοιόμορφος**, ενώ στην αντίθετη περίπτωση χαρακτηρίζεται ως **ανομοιόμορφος**.

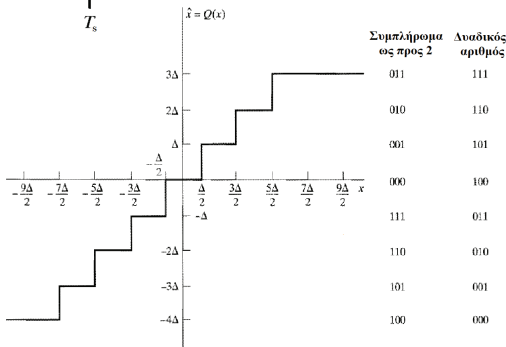
Στη γενική περίπτωση, εάν τα δείγματα του ψηφιακού σήματος χρησιμοποιούνται σε **αριθμητικούς υπολογισμούς**, καταφεύγουμε στη χρήση **ομοιόμορφων** κβαντιστών.

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό σήμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



**Σχήμα:** Διάταξη μετατροπέα A/D με κβαντιστή [(α)] και χαρακτηριστική καμπύλη ομοιόμορφου κβαντιστή [(β)].

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό σήμα

Ο κβαντιστής του σχήματος επιτρέπει την κωδικοποίηση ενός διακριτού σήματος που περιέχει **τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές**. Εάν είναι γνωστό εκ των προτέρων πως όλα τα δείγματα του σήματος έχουν θετικές τιμές, χρησιμοποιείται **διαφορετική** χαρακτηριστική καμπύλη.

Λόγω της επακόλουθης **κωδικοποίησης στο δυαδικό σύστημα** στην οποία χρησιμοποιείται ένα συγκεκριμένο πλήθος από bits, συνήθως το πλήθος των επιπέδων κβαντισμού είναι **δύναμη του 2**. Εάν για την κωδικοποίηση στο δυαδικό σύστημα απαιτούνται  $N$  bits, τα οποία επιτρέπουν τον ορισμό  $2^N$  διαφορετικών τιμών, τότε χρησιμοποιείται ένας κβαντιστής με  $2^N$  **επίπεδα κβαντισμού**, με το κάθε επίπεδο να αντιστοιχεί σε μία από τις παραπάνω  $2^N$  τιμές.

Εάν λοιπόν κατά την λειτουργία του κβαντιστή, η τιμή ενός δείγματος του ψηφιακού σήματος απεικονιστεί σε κάποιο επίπεδο κβαντισμού, τότε η κωδικοποίησή του στο δυαδικό σύστημα, συνίσταται πολύ απλά **στην αντικατάστασή του από την αντίστοιχη δυαδική τιμή**.

Εκτός από τη **συνήθη δυαδική τιμή**, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αναπαράστασή της σύμφωνα με το **συμπλήρωμα ως προς 2**, αλλά μιλώντας, γενικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί **οποιοδήποτε σχήμα εκχώρησης μιας δυαδικής ακολουθίας, ή κωδικολέξης (codeword)** στις τιμές των επιπέδων κβαντισμού.

Στην **ψηφιακή επεξεργασία σήματος**, για πρακτικούς λόγους χρησιμοποιείται το **συμπλήρωμα ως προς 2** επειδή επιτρέπει την **απευθείας χρήση** των δυαδικών ακολουθιών που προκύπτουν στους αριθμητικούς υπολογισμούς.



# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό σήμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στους **ομοιόμορφους κβαντιστές**, η απόσταση ανάμεσα στα διαδοχικά επίπεδα κβαντισμού, είναι σταθερή και ίση με  $\Delta$ .

Η τιμή του  $\Delta$  εξαρτάται από το **εύρος τιμών** του σήματος που δειγματοληπτείται καθώς και από το **πλήθος των επιπέδων κβαντισμού**, δηλαδή από το **πλήθος των bits** που χρησιμοποιούνται στην κωδικοποίηση.

Έστω πως δειγματοληπτείται το ημιτονοειδές σήμα  $x_a(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ , με εύρος τιμών  $E = A - (-A) = A + A = 2A$ . Εάν για την κωδικοποίηση χρησιμοποιούνται  $k$  bits, το πλήθος των επιπέδων κβαντισμού είναι  $2^k$  και η απόσταση  $\Delta$  υπολογίζεται ως

$$\Delta = \frac{2A}{2^k} = \frac{A}{2^{k-1}}$$

Η διαδικασία του κβαντισμού είναι **απωλεστική** αφού οδηγεί σε **μείωση της ακρίβειας** με την οποία γνωρίζουμε τις τιμές των δειγμάτων του σήματος.

Θεωρώντας έναν ομοιόμορφο κβαντιστή με επίπεδα κβαντισμού  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  και δείγματα  $x[i] = 2.17$  και  $x[j] = 3.89$ , οι κβαντισμένες τιμές είναι οι  $\tilde{x}[i] = 2$  και  $\tilde{x}[j] = 4$  οι οποίες εισάγουν τα σφάλματα  $e[i] = \tilde{x}[i] - x[i] = 2 - 2.17 = -0.17$  και  $e[j] = \tilde{x}[j] - x[j] = 4 - 3.89 = 0.11$ .

Με τον τρόπο αυτό ανακύπτει ένα **σήμα σφάλματος κβαντισμού** της μορφής

$$e[n] = \tilde{x}[n] - x[n]$$

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό σήμα

Θεωρώντας ένα δείγμα με τιμή  $\Delta/2 < x[n] < 3\Delta/2$  αυτό θα στρογγυλοποιηθεί στην τιμή  $\Delta$ . Θα είναι δηλαδή  $\tilde{x}[n] = \Delta$  και επομένως  $e[n] = \Delta - x[n]$ . Για  $x[n] = \Delta/2$  θα είναι  $e[n] = \Delta - (\Delta/2) = \Delta/2$ , ενώ για  $x[n] = 3\Delta/2$ , θα είναι  $e[n] = \Delta - (3\Delta/2) = -\Delta/2$ . Επομένως, η περιοχή τιμών του σφάλματος θα είναι η

$$-\Delta/2 \leq e[n] < \Delta/2$$

Για να ισχύει η παραπάνω σχέση, θα πρέπει τα δείγματα του διακριτού σήματος να λαμβάνουν τιμές στην περιοχή λειτουργίας του κβαντιστή

$$-9\Delta/2 \leq x[n] \leq 7\Delta/2$$

Στη γενική περίπτωση ενός κβαντιστή των  $k + 1$  bits και απόσταση  $\Delta$  ανάμεσα στα διαδοχικά επίπεδα, η παραπάνω περιοχή λειτουργίας είναι η

$$(-A - \Delta/2) < x[n] \leq (A - \Delta/2)$$

Εάν τα δείγματα του σήματος  $x[n]$  βρίσκονται εκτός αυτής της περιοχής, υπάρχει περίπτωση το σφάλμα κβαντισμού  $e[n]$  να έχει τιμή μεγαλύτερη από  $\Delta/2$ .

Στην περίπτωση αυτή, τα δείγματα εισόδου **αποκόπτονται**, με το πρόσθετο σφάλμα να χαρακτηρίζεται ως **παραμόρφωση λόγω υπερφόρτωσης** (ο κβαντιστής χαρακτηρίζεται ως **υπερφορτωμένος**, επειδή έχει λάβει ένα δείγμα με τιμή **εκτός της περιοχής** που υποστηρίζει).

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό σήμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στη γενική περίπτωση, το σήμα του σφάλματος κβαντισμού  $e[n]$ , δεν είναι γνωστό, η ανάλυσή του στηρίζεται σε **στατιστικές μεθόδους** και περιγράφεται ως μία **ακολουθία λευκού θορύβου** ομοιόμορφα κατανεμημένου, με **μέση τιμή ίση με το μηδέν** και **διακύμανση** που δίδεται από τη σχέση

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12}$$

Για έναν ομοιόμορφο κβαντιστή των  $k + 1$  bits και με εύρος πλήρους κλίμακας ίσο με  $2A$ , η διακύμανση ή ισχύς του θορύβου δίδεται από τη σχέση

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2k} A^2}{12}$$

ενώ η φασματική πυκνότητα ισχύος περιγράφεται από την εξίσωση

$$P_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 = \frac{2^{-2k} A^2}{12} \quad |\omega| \leq \pi$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο λόγος **σήματος προς θόρυβο** (Signal-to-Noise Ratio, SNR) που ορίζεται ως **ο λόγος της ισχύος του σήματος προς την ισχύ του θορύβου**. Αυτός ο λόγος για έναν **ομοιόμορφο κβαντιστή** που χρησιμοποιεί  $k + 1$  bits για τα επίπεδα κβαντισμού, εκπεφρασμένος σε μονάδες dB δίδεται από τη σχέση

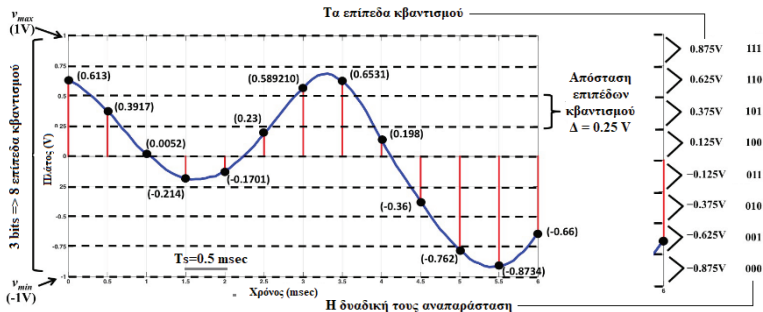
$$\text{SNR}_Q = 10 \log_{10} \left( \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{12 \cdot 2^{2k} \sigma_x^2}{A^2} \right) = 6.02k + 10.8 - 20 \log_{10} \left( \frac{A}{\sigma_x} \right)$$

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό σήμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



110 101 100 011 011 100 110 110 100 010 000 000 001

Η δυαδική ακολουθία

**Σχήμα:** Επίδειξη κβαντισμού με ομοιόμορφο κβαντιστή 8 επιπέδων.

$T_s = 0.5 \text{ msec}$ ,  $F_s = 2000 \text{ δείγματα/sec}$ ,  $V_{\min} = -1 \text{ V}$ ,  $V_{\max} = +1 \text{ V}$ ,  
 $V_{\max} - V_{\min} = 1 - (-1) = 2 \text{ V}$ . Ομοιόμορφος κβαντιστής 8 επιπέδων,  
 $\Delta = (V_{\max} - V_{\min})/2^3 = (2/8) \text{ V} = 0.25\text{V}$ .

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό σήμα

Η υποδιαίρεση της περιοχής τιμών  $[-1, 1]$  σε **8 ίσα διαστήματα** μας οδηγεί στις επόμενες τιμές των επιπέδων κβαντισμού

$-0.875 \quad -0.625 \quad -0.375 \quad -0.125 \quad +0.125 \quad +0.375 \quad +0.625 \quad +0.875$

στις οποίες αντιστοιχούμε τους **οκτώ δυαδικούς αριθμούς μήκους τριών bits** ως εξής:

$-0.875 \rightarrow 000 \quad -0.625 \rightarrow 001 \quad -0.375 \rightarrow 010 \quad -0.125 \rightarrow 011$   
 $+0.125 \rightarrow 100 \quad +0.375 \rightarrow 101 \quad +0.625 \rightarrow 110 \quad +0.875 \rightarrow 111$

**Πίνακας:** Τα αποτελέσματα της διαδικασίας του κβαντισμού.

$x[n]$	$\tilde{x}[n]$	Binary	$e[n]$
+0.613000	+0.625	110	+0.01200
+0.391700	+0.375	101	-0.01670
+0.005200	+0.125	100	+0.11980
-0.214000	-0.125	011	+0.08900
-0.170100	-0.125	011	+0.04510
+0.230000	+0.125	100	-0.10500
+0.589210	+0.625	110	+0.03579
+0.653100	+0.625	110	-0.02810
+0.198000	+0.125	100	-0.07300
-0.360000	-0.375	010	-0.01500
-0.762000	-0.875	000	-0.11300
-0.873400	-0.875	000	-0.00160
-0.660000	-0.625	001	+0.00350

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή ψηφιακού σήματος σε αναλογικό σήμα

Η διαδικασία **ανακατασκευής** ενός αναλογικού από ένα διακριτό σήμα στο πεδίο της συχνότητας περιγράφεται από την εξίσωση

$$\mathcal{X}_r(j\Omega) = \mathcal{X}(e^{j\Omega T})\mathcal{H}_r(j\Omega)$$

όπου  $\mathcal{X}(e^{j\omega})$  είναι ο DTFT της ακολουθίας δειγμάτων, ενώ  $\mathcal{X}_r(j\Omega)$  είναι ο CTFT του ανακατασκευασμένου συνεχούς σήματος.

Η **συχνотική απόκριση** του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου ανακατασκευής είναι

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

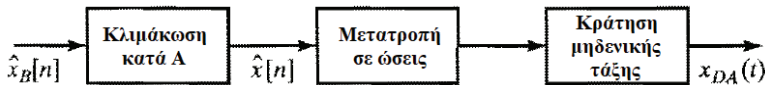
ενώ το **ανακατασκευασμένο** συνεχές σήμα και το διακριτό σήμα σχετίζονται ως

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\alpha(nT_s) \left\{ \sin \left[ \frac{\pi}{T_s} (t - nT_s) \right] \right\} / \left\{ \frac{\pi}{T_s} (t - nT_s) \right\}$$

Ο **ιδανικός μετατροπέας D/C**, δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί και στην στην πράξη χρησιμοποιείται είναι μία διάταξη [D/A (Digital-to-Analog) converter], ακολουθούμενη από ένα **αναλογικό χαμηλοπερατό φίλτρο**.

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή ψηφιακού σήματος σε αναλογικό σήμα



**Σχήμα:** Σχηματικό διάγραμμα μετατροπέα ψηφιακού σήματος σε αναλογικό (D/A).

Ο μετατροπέας D/A δέχεται στην είσοδό του μία ακολουθία κωδικολέξεων  $\tilde{x}_B[n]$  και παράγει το συνεχές σήμα

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\tilde{x}_B[n]h_0(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n]h_0(t - nT)$$

όπου  $h_0(t)$  είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος κράτησης μηδενικής τάξεως

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Ο μετατροπέας D/A διατηρεί το τρέχον κβαντισμένο δείγμα για μία περίοδο δείγματος, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που αυτό γίνεται από τη διάταξη δειγματοληψίας - κράτησης που περιλαμβάνεται στο σύστημα μετατροπής A/D.

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή ψηφιακού σήματος σε αναλογικό σήμα

Χρησιμοποιώντας την έκφραση  $\tilde{x}[n] = x[n] + e[n]$ , η παραπάνω σχέση γράφεται

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT) = x_0(t) + e_0(t)$$

όπου για λόγους απλότητας έχουμε ορίσει τις ποσότητες

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT) \quad \text{και} \quad e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της πρώτης εξίσωσης έχει τη μορφή

$$X_0(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathcal{H}_0(j\Omega)e^{-j\Omega T_s n} = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega T_s n} \right) \mathcal{H}_0(j\Omega) = \mathcal{X}(e^{j\Omega T_s})\mathcal{H}_0(j\Omega)$$

όπου  $\mathcal{H}_0(j\omega) = \mathcal{F}\{h_0(t)\}$  η συχνотική απόκριση του συστήματος κράτησης μηδενικής τάξης. Παρατηρώντας τώρα ότι

$$\mathcal{X}(e^{j\Omega T_s}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_\alpha \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi k}{T_s} \right) \right)$$



# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή ψηφιακού σήματος σε αναλογικό σήμα

θα έχουμε

$$x_0(j\Omega) = \left[ \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_\alpha \left( j \left( \Omega - \frac{2\pi k}{T_s} \right) \right) \right] \mathcal{H}_0(j\Omega)$$

Εάν ο μετασχηματισμός  $\mathcal{X}_\alpha(j\Omega)$  περιορίζεται σε συχνότητες  $\omega < \pi/T$ , τα μετατοπισμένα αντίγραφα του  $\mathcal{X}_\alpha(j\Omega)$ , δεν επικαλύπτονται και ορίζοντας το φίλτρο

$$\tilde{\mathcal{H}}_r(j\Omega) = \frac{\mathcal{H}_r(j\Omega)}{\mathcal{H}_0(j\Omega)}$$

η έξοδό του θα είναι η  $x_\alpha(t)$  εάν η είσοδός του είναι η  $x_0(t)$ . Αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{H}_0(j\Omega) = \frac{2 \sin(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2}$$

και κατά συνέπεια, η παραπάνω σχέση γίνεται

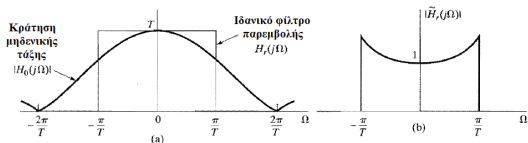
$$\tilde{\mathcal{H}}_r(j\Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)} e^{j\Omega T/2}, & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή ψηφιακού σήματος σε αναλογικό σήμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



**Σχήμα:** Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $|\mathcal{H}_0(j\Omega)|$  (σε αντιπαράβολή με την  $|\mathcal{H}_r(j\Omega)|$  για το ιδανικό φίλτρο αντιστάθμισης) [(α)] και  $|\tilde{\mathcal{H}}_r(j\Omega)|$  [(β)].

Αποδεικνύεται πως η έξοδος του σύνθετου συστήματος είναι η

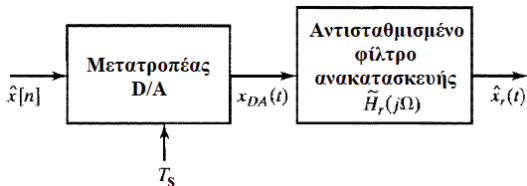
$$\begin{aligned}\tilde{x}_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n] \left\{ \sin \left[ \frac{\pi}{T_s} (t - nT_s) \right] \right\} / \left\{ \frac{\pi}{T_s} (t - nT_s) \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left\{ \sin \left[ \frac{\pi}{T_s} (t - nT_s) \right] \right\} / \left\{ \frac{\pi}{T_s} (t - nT_s) \right\} \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \left\{ \sin \left[ \frac{\pi}{T_s} (t - nT_s) \right] \right\} / \left\{ \frac{\pi}{T_s} (t - nT_s) \right\}\end{aligned}$$

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Μετατροπή ψηφιακού σήματος σε αναλογικό σήμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



**Σχήμα:** Η δομή ενός πρακτικού συστήματος μετατροπής ψηφιακού σε αναλογικό σήμα.

Επομένως, το **αναλογικό σήμα** που προκύπτει ως το αποτέλεσμα της διαδικασίας μετατροπής του ψηφιακού σήματος σε αναλογικό, θα δίδεται από την εξίσωση

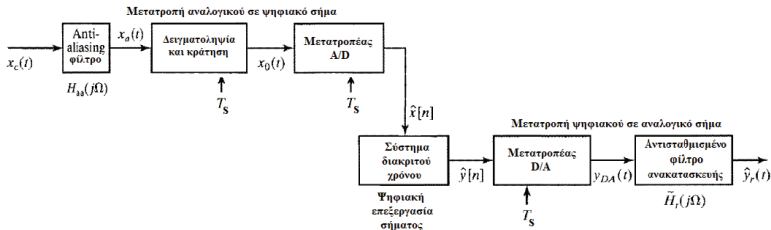
$$\tilde{x}_r(t) = x_\alpha(t) + e_\alpha(t)$$

όπου  $e_\alpha(t)$  ένα σήμα **περιορισμένου εύρους ζώνης** που περιγράφει **λευκό θόρυβο**.

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

## Ανακεφαλαίωση

Η λεπτομερής δομή ενός **συστήματος ψηφιακής επεξεργασίας αναλογικού σήματος** είναι η



**Σχήμα:** Ένα **πρακτικό σύστημα** ψηφιακής επεξεργασίας αναλογικού σήματος.

Αυτό το σύστημα αποτελείται από **ένα υποσύστημα μετατροπής του αναλογικού σε ψηφιακό σήμα**, καθώς και από **ένα υποσύστημα μετατροπής του ψηφιακού σε αναλογικό σήμα**, ενώ ανάμεσα σε αυτά τα δύο υποσυστήματα, βρίσκεται **ένα σύστημα διακριτού χρόνου** που εφαρμόζει επί του ψηφιακού σήματος που έχει προκύψει με τον παραπάνω τρόπο, τις κατάλληλες σε κάθε περίπτωση **μορφές ψηφιακής επεξεργασίας σήματος**.

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

## Ανακεφαλαίωση

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν (α) η έξοδος του φίλτρου antialiasing περιορίζεται σε συχνότητες  $\omega < \pi/T_s$ , (β) το φάσμα  $\tilde{H}_r(j\omega)$  είναι **περιορισμένου εύρους ζώνης** και (γ) το διακριτό σύστημα ψηφιακής επεξεργασίας σήματος είναι **LTI**, θα έχουμε

$$\tilde{y}_r(t) = y_a(t) + e_a(t)$$

όπου

$$T\mathcal{Y}_\alpha(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega)\mathcal{H}_0(j\Omega)\mathcal{H}(e^{j\Omega T})\mathcal{H}_{aa}(j\Omega)\mathcal{X}_c(j\Omega)$$

Εάν ο θόρυβος κβαντισμού είναι **λευκός θόρυβος** με διακύμανση  $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$ , το φάσμα ισχύος του θορύβου στην έξοδο, είναι

$$P_{e_\alpha}(j\Omega) = |\tilde{H}_r(j\Omega)\mathcal{H}_0(j\Omega)\mathcal{H}(e^{j\Omega T})|^2 \sigma_e^2$$

Τέλος, εάν οι επιδράσεις του φαινομένου της αναδίπλωσης είναι **αμελητέες**, η συχνοτική απόκριση του συστήματος έχει τη μορφή

$$T\mathcal{H}_{\text{eff}}(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega)\mathcal{H}_0(j\Omega)\mathcal{H}(e^{j\Omega T})\mathcal{H}_{aa}(j\Omega)$$

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

## Συστήματα ελάχιστης φάσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τα συστήματα ελάχιστης φάσης αποτελούν αιτιατά και ευσταθή συστήματα συνεχούς και διακριτού χρόνου, των οποίων το αντίστροφο σύστημα υφίσταται και είναι επίσης αιτιατό και ευσταθές.

Οι πόλοι και οι μηδενικές τιμές του αντίστροφου συστήματος ταυτίζονται με τις μηδενικές τιμές και τους πόλους του ευθέως συστήματος. Επομένως, οι πόλοι και οι μηδενικές τιμές ενός συστήματος ελάχιστης φάσης θα ανήκουν στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο ή στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

Η αναγκαιότητα αυτών των συστημάτων, πηγάζει από το γεγονός πως η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος LTI με ρητή συνάρτηση μεταφοράς, δεν προσδιορίζει με μοναδικό τρόπο το σύστημα, αφού αν και ο χαρακτηρισμός του συστήματος ως αιτιατό και ευσταθές επιβάλλει τον παραπάνω περιορισμό για τους πόλους του συστήματος, ωστόσο, αυτό δεν ισχύει για τις μηδενικές του τιμές, οι οποίες μπορεί να βρίσκονται οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο.

Εάν επιβάλλουμε την απαίτηση να είναι και το αντίστροφο σύστημα, αιτιατό και ευσταθές, η συνάρτηση  $\mathcal{H}(z)$  προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο και περιέχει τους πόλους και τις μηδενικές τιμές της συνάρτησης  $\mathcal{C}(z) = \mathcal{H}(z)\mathcal{H}^*(1/z^*)$  όπου το σύμβολο \* υποδηλώνει μιγαδική συζυγία.

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

## Συστήματα ελάχιστης φάσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Μια συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος **μη ελάχιστης φάσης**, μπορεί να γραφεί ως

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}_{\min}(z)\mathcal{H}_{\text{ap}}(z)$$

όπου  $\mathcal{H}_{\min}(z)$  η συνάρτηση μεταφοράς ενός **συστήματος ελάχιστης φάσης** και  $\mathcal{H}_{\text{ap}}(z)$  η συνάρτηση μεταφοράς ενός **ολοπερατού συστήματος**.

Επομένως, **ένα σύστημα μη ελάχιστης φάσης προκύπτει από την εν σειρά σύνδεση ενός συστήματος ελάχιστης φάσης με ένα ολοπερατό σύστημα.**

Έστω σύστημα μη ελάχιστης φάσης  $\mathcal{H}(z)$  με ένα μηδενικό  $z = 1/c^*$  στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου ( $|c| < 1$ ) (όλες οι άλλες μηδενικές τιμές και όλοι οι πόλοι βρίσκονται στο **εσωτερικό** του μοναδιαίου κύκλου). Θα είναι τότε

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}_1(z)(z^{-1} - c^*)$$

με τη συνάρτηση  $\mathcal{H}_1(z)$  να αποτελεί εξ ορισμού συνάρτηση συστήματος ελάχιστης φάσης. Ισοδύναμα, έχουμε

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}_1(z)(1 - cz^{-1})\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}$$

Επειδή είναι  $|c| < 1$ , η  $\mathcal{H}_1(z)(1 - cz^{-1})$  θα σχετίζεται με **σύστημα ελάχιστης φάσης** διαφέροντας από την  $\mathcal{H}(z)$  μόνο στο ότι η μηδενική τιμή της  $\mathcal{H}(z)$  εκτός του μοναδιαίου κύκλου στη θέση  $z = 1/c^*$ , απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου και στη συζυγή αντίστροφη θέση  $z = c$ .

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

## Συστήματα ελάχιστης φάσης

Ο όρος  $(z^{-1} - c^*)/(1 - cz^{-1})$  παραπέμπει σε ένα ολοπερατό φίλτρο, αφού για ένα τέτοιο φίλτρο ισχύει

$$\mathcal{H}_{ap}(z) = \prod_{k=1}^N \frac{(z^{-1} - c_k^*)}{(1 - c_k z^{-1})}$$

με  $|\mathcal{H}_{ap}(z)| = 1$ . Παρατηρούμε τώρα ότι

$$|\mathcal{H}(z)| = |\mathcal{H}_{min}(z)| |\mathcal{H}_{ap}(z)| \quad \text{και} \quad \angle \mathcal{H}(s) = \angle \mathcal{H}_{min}(s) + \angle \mathcal{H}_{ap}(s)$$

και επειδή ισχύει  $|\mathcal{H}_{ap}(z)| = 1$  τελικά οδηγούμαστε στη σχέση

$$|\mathcal{H}(z)| = |\mathcal{H}_{min}(z)|$$

Βέβαια, ένα ολοπερατό φίλτρο, διαθέτει **θετική φασική απόκριση** και επιφέρει **μετατόπιση φάσης** από  $0^\circ$  έως  $-180^\circ$ .

Επομένως, ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει **την ίδια απόκριση πλάτους σε σχέση με ένα σύστημα μη ελάχιστης φάσης και τη μικρότερη δυνατή τιμή φάσης.**

Για συνάρτηση  $\mathcal{H}(z)$  **μη ελάχιστης φάσης**, η εκδοχή **ελάχιστης φάσης** βρίσκεται προσδιορίζοντας τις μηδενικές τιμές της  $\mathcal{H}(z)$  στο **δεξί** ημιεπίπεδο και συσχετίζοντας με την καθεμία από αυτές **μία ολοπερατή συνάρτηση**, προσθέτοντας ένα μηδενικό στο αριστερό ημιεπίπεδο, σε **κατοπτρική** θέση ως προς το φανταστικό άξονα.



# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Συστήματα ελάχιστης φάσης - Παράδειγμα

Έστω δύο **αιτιατά και ευσταθή** συστήματα με συναρτήσεις μεταφοράς

$$\mathcal{H}_1(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad \text{και} \quad \mathcal{H}_2(z) = \frac{\left(1 + \frac{3}{2}e^{+j\pi/4}z^{-1}\right) \left(1 + \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

Το σύστημα  $\mathcal{H}_1(z)$  έχει έναν **ευσταθή πόλο** στη θέση  $z = -1/2$  και ένα μηδενικό **στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου** στη θέση  $z = -3$  που αντιστοιχεί στην τιμή  $c = 1/z^* = -1/3$ . Η συνάρτηση μεταφοράς του **ολοπερατού φίλτρου** είναι λοιπόν

$$\mathcal{H}_{\text{ap}}(z) = \frac{z^{-1} + (1/3)}{1 + (1/3)z^{-1}}$$

ενώ η συνάρτηση μεταφοράς ελάχιστης φάσης θα δίδεται από την έκφραση

$$\mathcal{H}_{\text{min}}(z) = 3 \frac{1 + (1/3)z^{-1}}{1 + (1/2)z^{-1}}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε

$$\mathcal{H}_1(z) = \left( 3 \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \right) \left( \frac{z^{-1} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \right)$$

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

## Συστήματα ελάχιστης φάσης - Παράδειγμα

Η συνάρτηση μεταφοράς  $\mathcal{H}_2(z)$  διαθέτει δύο **μγαδικές συζυγείς τιμές** στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου καθώς και έναν **πραγματικό πόλο** στο εσωτερικό του κύκλου. Παρατηρώντας ότι

$$\mathcal{H}_2(z) = \frac{9}{4} \frac{\left(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}\right) \left(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}\right)}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

η συνάρτηση επαναδιατυπώνεται με τον παρακάτω τρόπο, με τον πρώτο όρο να αποτελεί τη συνάρτηση μεταφοράς ελάχιστης φάσης και το δεύτερο όρο να αποτελεί τη συνάρτηση μεταφοράς του ολοπερατού συστήματος.

$$\mathcal{H}_2(z) = \left[ \frac{9}{4} \frac{\left(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right) \left(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \right] \\ \times \left[ \frac{\left(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}\right) \left(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}\right)}{\left(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}\right) \left(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)} \right]$$

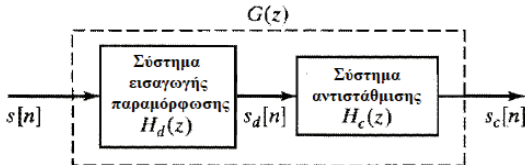
# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

## Συστήματα ελάχιστης φάσης - Εφαρμογή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τα **συστήματα ελάχιστης φάσης** χρησιμοποιούνται ως **συστήματα αντιστάθμισης** σε περιπτώσεις **παραμόρφωσης** ενός σήματος  $s[n]$  από ένα σύστημα η συχνотική απόκριση του οποίου **δεν διαθέτει** τα επιθυμητά χαρακτηριστικά (όπως συμβαίνει κατά τη διέλευση ενός σήματος μέσα από ένα κανάλι επικοινωνίας).



**Σχήμα:** Ένα σύστημα αντιστάθμισης της παραμόρφωσης σήματος.

Εάν η προσθήκη του **συστήματος αντιστάθμισης** οδηγεί σε **τέλεια** αντιστάθμιση, η έξοδος του συστήματος  $s_c[n]$  ταυτίζεται με το αρχικό σήμα  $s[n]$ .

Επομένως, το σύνθετο σύστημα είναι **ταυτοτικό** και η συχνотική απόκριση του συστήματος  $H_c(z)$  είναι η **αντίστροφη** της συχνотικής απόκρισης του συστήματος  $H_d(z)$ .

Εάν το σύστημα LTI που παραμορφώνει το σήμα, είναι **ευσταθές και αιτιατό**, ενώ το ίδιο ισχύει και για το **σύστημα αντιστάθμισης**, το σύστημα  $H_d(z)$  είναι **ελάχιστης φάσης**, ενώ στην αντίθετη περίπτωση, το μετατρέπουμε με τον τρόπο που δείξαμε.

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Συστήματα ελάχιστης φάσης - Εφαρμογή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οι συναρτήσεις  $\mathcal{H}_d(z)$  και  $\mathcal{H}_{dmin}(z)$  χαρακτηρίζονται από την ίδια απόκριση συχνότητας και θα σχετίζονται μεταξύ τους μέσω της συνάρτησης μεταφοράς ενός ολοπερατού συστήματος ως

$$\mathcal{H}_d(z) = \mathcal{H}_{dmin}(z)\mathcal{H}_{ap}(z)$$

Εάν επιλέξουμε ως συχνοτική απόκριση για το σύστημα αντιστάθμισης τη

$$\mathcal{H}_c(z) = \frac{1}{\mathcal{H}_{dmin}(z)}$$

η συνάρτηση μεταφοράς του σύνθετου συστήματος που απεικονίζει το σήμα  $s[n]$  στο σήμα  $s_c[n]$  θα είναι η

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{H}_d(z)\mathcal{H}_c(z) = \mathcal{H}_{ap}(z)$$

Επομένως, η συνάρτηση  $\mathcal{G}(z)$  αντιστοιχεί σε ολοπερατό σύστημα, όπως απαιτείται

Το μέτρο λοιπόν της απόκρισης συχνότητας αντισταθμίζεται πλήρως, ενώ η φασική απόκριση τροποποιείται κάθε τον παράγοντα  $\angle H_{ap}(e^{j\omega})$ .

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

Συστήματα ελάχιστης φάσης - Παράδειγμα εφαρμογής

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Έστω πως το σύστημα που προκαλεί **παραμόρφωση** στο σήμα εισόδου είναι το

$$H_d(z) = (1 - 0.9e^{j0.6\pi} z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi} z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi} z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi} z^{-1})$$

Η **κρουστική απόκριση** είναι ένα **σήμα περασμένης χρονικής διάρκειας**.

Το σύστημα είναι **ευσταθές και αιτιατό**· ωστόσο, **δεν είναι** ελάχιστης φάσης λόγω της ύπαρξης δύο μηδενικών τιμών **εκτός της περιφέρειας** του μοναδιαίου κύκλου.

Για να κατασκευάσουμε το **σύστημα ελάχιστης φάσης**, απεικονίζουμε τις μηδενικές τιμές  $z = 1.25e^{\pm j0.8\pi}$ , στις **συζυγείς αντίστροφες θέσεις** στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Εάν εκφράσουμε τη συνάρτηση  $H_d(z)$  ως

$$H_d(z) = (1 - 0.9e^{j0.6\pi} z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi} z^{-1})(1.25)^2(z^{-1} - 0.8e^{-j0.8\pi})(z^{-1} - 0.8e^{j0.8\pi})$$

θα είναι

$$H_{\min}(z) = (1.25)^2(1 - 0.9e^{j0.6\pi} z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi} z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi} z^{-1})(1 - 0.8e^{j0.8\pi} z^{-1})$$

ενώ το **ολοπερατό σύστημα** που συσχετίζει τις δύο παραπάνω συναρτήσεις διαθέτει συνάρτηση μεταφοράς

$$H_{\text{ap}}(z) = \frac{(z^{-1} - 0.8e^{-j0.8\pi})(z^{-1} - 0.8e^{j0.8\pi})}{(1 - 0.8e^{j0.8\pi} z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi} z^{-1})}$$

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

## Ιδιότητες

Τα **συστήματα ελάχιστης φάσης**, χαρακτηρίζονται από τρεις ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

1. Η **ιδιότητα της ελάχιστης υστέρησης φάσης**. Αποδεικνύεται ότι

$$\arg[\mathcal{H}(e^{j\omega})] = \arg[\mathcal{H}_{\min}(e^{j\omega})] + \arg[\mathcal{H}_{\text{ap}}(e^{j\omega})]$$

Επομένως, η **συνεχής φάση που αντιστοιχεί στη φάση πρωτεύουσας τιμής, είναι το άθροισμα της μη αναδιπλούμενης φάσης που σχετίζεται με τη συνάρτηση ελάχιστης φάσης και της μη αναδιπλούμενης φάσης του ολοπερατού συστήματος.**

Η **μη αναδιπλωμένη φάση** ολοπερατού συστήματος είναι **αρνητική** για την περιοχή τιμών  $0 \leq \omega \leq \pi$  και επομένως, η απεικόνιση των μηδενικών τιμών της συνάρτησης  $\mathcal{H}_{\min}(z)$  από το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στις **συζυγείς αντίστροφες θέσεις**, οδηγεί σε **μείωση** της μη αναδιπλούμενης φάσης ή σε **αύξηση** της αρνητικής τιμής της φάσης, η οποία νοείται ως υστέρηση φάσης.

Επομένως, το αιτιατό και ευσταθές σύστημα με απόκριση πλάτους τη συνάρτηση  $\mathcal{H}_{\min}(z)$  του οποίου όλοι οι πόλοι και οι μηδενικές τιμές βρίσκονται **στο εσωτερικό** του μοναδιαίου κύκλου, έχει **την ελάχιστη υστέρηση φάσης** σε σχέση με όλα τα συστήματα που χαρακτηρίζονται από την ίδια απόκριση πλάτους.

2. Η **ιδιότητα της ελάχιστης υστέρησης ομάδας**. Ισχύει ότι

$$\text{grd}[\mathcal{H}(e^{j\omega})] = \text{grd}[\mathcal{H}_{\min}(e^{j\omega})] + \text{grd}[\mathcal{H}_{\text{ap}}(e^{j\omega})]$$

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

## Ιδιότητες

Επομένως, η υστέρηση ομάδας συστήματος ελάχιστης φάσης, είναι πάντα μικρότερη από την υστέρηση ομάδας συστήματος μη ελάχιστης φάσης, αφού το σχετιζόμενο ολοπερατό σύστημα, έχει θετική υστέρηση ομάδας.

3. Η ιδιότητα της ελάχιστης ενεργειακής υστέρησης. Αποδεικνύεται πως η ακολουθία ελάχιστης φάσης φαίνεται να διαθέτει μεγαλύτερες τιμές δειγμάτων στο αριστερό της άκρο σε σχέση με όλες τις υπόλοιπες ακολουθίες και πως

$$|h[0]| \leq |h_{\min}[0]|$$

για κάθε αιτιατή ευσταθή ακολουθία  $h[n]$  για την οποία ισχύει

$$|\mathcal{H}(e^{j\omega})| = |\mathcal{H}_{\min}(e^{j\omega})|$$

Από το θεώρημα του Parseval, όλες οι κρουστικές αποκρίσεις των οποίων η απόκριση πλάτους είναι ίση με  $|\mathcal{H}_{\min}(e^{j\omega})|$ , έχουν την ίδια συνολική ενέργεια με την κρουστική απόκριση  $h_{\min}[n]$  αφού ισχύει

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{H}(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{H}_{\min}(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} |h_{\min}[n]|^2$$

Εάν ορίσουμε τη μερική ενέργεια της κρουστικής απόκρισης ως

$$E[n] = \sum_{m=0}^n |h[m]|^2 \quad \text{αποδεικνύεται ότι} \quad \sum_{m=0}^n |h[m]|^2 \leq \sum_{m=0}^n |h_{\min}[m]|^2$$

# Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων

## Ιδιότητες

για όλες τις κρουστικές αποκρίσεις  $h[n]$  της οικογένειας των συστημάτων για τα οποία

$$|\mathcal{H}(e^{j\omega})| = |\mathcal{H}_{\min}(e^{j\omega})|$$

Επομένως, η μερική ενέργεια του συστήματος ελάχιστης φάσης είναι περισσότερο συγκεντρωμένη γύρω από την τιμή  $n = 0$

ή σε μία ισοδύναμη διατύπωση,

η ενέργεια του συστήματος ελάχιστης φάσης χαρακτηρίζεται από τη μικρότερη δυνατή καθυστέρηση σε σχέση με όλα τα συστήματα που χαρακτηρίζονται από την ίδια απόκριση πλάτους.

Για το λόγο αυτό, τα συστήματα ελάχιστης υστέρησης φάσης χαρακτηρίζονται και ως συστήματα ελάχιστης ενεργειακής υστέρησης ή απλά ως συστήματα ελάχιστης υστέρησης.



# Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

## Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

Η συχνοτική απόκριση συστήματος διέλευσης συχνοτήτων χωρίς παραμόρφωση, χαρακτηρίζεται από **σχεδόν σταθερή απόκριση πλάτους** και **μηδενική φάση**.

Αν και η φάση ενός αιτιατού συστήματος, **δεν είναι δυνατόν** να είναι ίση με το μηδέν, ωστόσο εάν αυτή είναι **γραμμική συνάρτηση της συχνότητας**, η παραμόρφωση του σήματος στην έξοδο είναι απλά μία **χρονική μετατόπιση**.

Θεωρώντας σύστημα LTI με κρουστική απόκριση της μορφής

$$\mathcal{H}_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}, \quad |\omega| < \pi$$

( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) με μέτρο, φάση και υστέρηση ομάδας

$$|\mathcal{H}_{id}(e^{j\omega})| = 1 \quad \angle \mathcal{H}_{id}(e^{j\omega}) = -\omega\alpha \quad \text{grd}[\mathcal{H}_{id}(e^{j\omega})] = \alpha$$

η επίδρασή του σε σήμα εισόδου, είναι μία **απλή χρονική υστέρηση** η οποία αντισταθμίζεται εύκολα διαβιβάζοντας το σήμα εξόδου σε ένα σύστημα που προκαλεί την **αντίστοιχη χρονική προώθηση**.

Η **κρουστική απόκριση** του συστήματος δίδεται από την εξίσωση

$$\mathcal{H}_{id}[n] = \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)}, \quad -\infty < n < \infty$$

# Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

## Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

ενώ η έξοδος του συστήματος σύμφωνα με το **θεώρημα της συνέλιξης** είναι η

$$y[n] = x[n] * \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin \pi(n - k - \alpha)}{\pi(n - k - \alpha)}$$

Εάν είναι  $\alpha = n_d$  όπου  $n_d$  ακέραιος, θα έχουμε ν

$$\mathcal{H}_{id}[n] = \delta[n - n_d] \quad \text{και} \quad y[n] = x[n] * \delta[n - n_d] = x[n - n_d]$$

Επομένως, το σύστημα προκαλεί τη μετατόπιση του σήματος εισόδου **κατά  $n_d$  χρονικές μονάδες**.

Εάν το  $\alpha$  **δεν είναι ακέραιος**, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σύστημα LTI με συχνοτική απόκριση  $\mathcal{H}(j\Omega) = e^{-j\Omega\alpha T_s}$  όπου  $T_s (= 1)$  η **περίοδος δειγματοληψίας**.

Θα είναι τότε  $y_c(t) = x_c(t - \alpha T)$  όπου  $x_c(t)$  το συνεχές σήμα που έχει προκύψει από το διακριτό σήμα  $x[n]$  με τη μέθοδο της **παρεμβολής**, ενώ η έξοδος  $y[n]$  προκύπτει από τη δειγματοληψία του σήματος  $y_c(t)$ . Τα ίδια ισχύουν και για την πιο γενική έκφραση

$$H(e^{j\omega}) = |\mathcal{H}(e^{j\omega})| e^{-j\omega\alpha}$$

# Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

## Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εδώ το σήμα  $x[n]$  αρχικά **φιλτράρεται** από τη **συχνοτική απόκριση μηδενικής φάσης**  $|\mathcal{H}(e^{j\omega})|$  και ύστερα υφίσταται **χρονική μετατόπιση** κατά  $\alpha$  που μπορεί να είναι τόσο ακέραια όσο και μη ακέραια.

Για παράδειγμα, εάν η συχνοτική απόκριση ενός ιδανικού χαμηλοπερατό φίλτρου γραμμικής φάσης έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}_{1p}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

τότε η κρουστική απόκριση θα δίδεται από την εξίσωση

$$\mathcal{H}_{1p}[n] = \frac{\sin \omega_c(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)}$$

με την αντίστοιχη έκφραση για την περίπτωση μοναδιαίο κέρδους να προκύπτει απλά θέτοντας  $\omega_c = \pi$ .

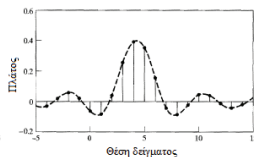
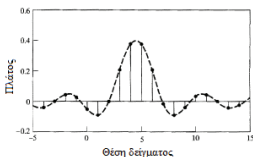
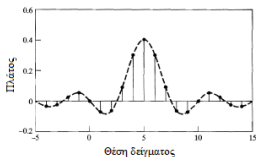
# Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

## Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

Στην πρώτη εικόνα επόμενου σχήματος απεικονίζεται η **κρουστική απόκριση ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου** με συχνότητα αποκοπής  $\omega_c = 0.4\pi$  για  $\alpha = n_d = 5$ .

Εάν  $\alpha \in \mathbb{N}$ , η κρουστική απόκριση είναι **συμμετρική** γύρω από τη θέση  $n = n_d$ , αφού ισχύει

$$h_{1p}[2n_d - n] = \frac{\sin \omega_c(2n_d - n - n_d)}{\pi(2n_d - n - n_d)} = \frac{\sin \omega_c(n_d - n)}{\pi(n_d - n)} = h_{1p}[n]$$



**Σχήμα:** Κρουστικές αποκρίσεις ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής  $\omega_c = 0.4\pi$ . (α) Τιμή υστέρησης  $\alpha = 5$ , (β) Τιμή υστέρησης  $\alpha = 4.5$  και (γ) (α) Τιμή υστέρησης  $\alpha = 4.3$ .

# Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

## Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να ορίσουμε ένα **σύστημα μηδενικής φάσης** της μορφής

$$\hat{H}_{1p}(e^{j\omega}) = H_{1p}(e^{j\omega})e^{j\omega n_d} = |H_{1p}(e^{j\omega})|$$

στο οποίο η κρουστική απόκριση **μετατοπίζεται προς τα αριστερά κατά  $n_d$  δείγματα**, οδηγώντας με τον τρόπο αυτό στη δημιουργία της άρτιας ακολουθίας

$$\hat{h}_{1p}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} = \hat{h}_{1p}[-n]$$

Η δεύτερη εικόνα απεικονίζει την κρουστική απόκριση για  $\omega_c = 0.4\pi$  και  $\alpha = 4.5$ . Εδώ είναι  $2\alpha \in \mathbb{N}$  και ισχύει ότι

$$h_{1p}[2\alpha - n] = h_{1p}[n]$$

με σημείο συμμετρίας το  $\alpha$ . Επειδή η τιμή του  $\alpha$  **δεν είναι ακέραια**, η συμμετρία **δεν είναι ως προς κάποιο σημείο της ακολουθίας** και **δεν είναι δυνατόν να μετατοπίσουμε την ακολουθία για να κατασκευάσουμε μία άρτια ακολουθία με μηδενική φάση**.

Στην περίπτωση της τρίτης εικόνας είναι  $\omega_c = 0.4\pi$  και  $\alpha = 4.3$  (εδώ δεν είναι ακέραιος ούτε το  $\alpha$  ούτε το  $2\alpha$  και **δεν υφίσταται το παραμικρό είδος συμμετρίας**).

# Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

## Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

Γενίκευση των **συστημάτων γραμμικής φάσης** με συχνοτική απόκριση

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = |\mathcal{H}(e^{j\omega})|e^{-j\omega\alpha}$$

είναι τα **συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης** με συχνοτική απόκριση

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \mathcal{A}(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega+j\beta}$$

( $\alpha, \beta$  σταθερές), όπου  $\mathcal{A}(e^{j\omega})$  πραγματική συνάρτηση του  $\omega$ . Εδώ η φάση περιέχει έναν σταθερό όρο  $\beta$  που προστίθεται στην γραμμική συνάρτηση  $-\omega\alpha$ .

Η έκφραση  $-\omega\alpha + \beta$  είναι εξίσωση ευθείας με κλίση  $\alpha$ .

Αυτό το σύστημα χαρακτηρίζεται από **σταθερή υστέρηση ομάδας**. Με άλλα λόγια, η κλάση των συστημάτων για τα οποία ισχύει ότι

$$\tau(\omega) = \text{grd}[\mathcal{H}(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega} \{ \arg[\mathcal{H}(e^{j\omega})] \} = \alpha$$

χαρακτηρίζονται από γραμμική φάση της πιο γενικής μορφής

$$\arg[\mathcal{H}(e^{j\omega})] = \beta - \omega\alpha, \quad 0 < \omega < \pi, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Επαναδιατυπώνοντας την παραπάνω σχέση ως

$$H(e^{j\omega}) = \mathcal{A}(e^{j\omega})e^{j(\beta - \alpha\omega)} = \mathcal{A}(e^{j\omega}) \cos(\beta - \omega\alpha) + j\mathcal{A}(e^{j\omega}) \sin(\beta - \omega\alpha)$$

# Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

## Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

και συγκρίνοντάς την με την εξίσωση ορισμού της συχνοτικής απόκρισης που είναι η

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cos \omega n - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin \omega n$$

(η οποία ισχύει εάν το σήμα  $h[n]$  είναι πραγματικό), θα λάβουμε

$$\cos(\beta - \omega\alpha) = \frac{1}{A(e^{j\omega})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cos \omega n \quad \text{και} \quad \sin(\beta - \omega\alpha) = -\frac{1}{A(e^{j\omega})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin \omega n$$

Επομένως, η εφαπτομένη της γωνίας φάσης της συνάρτησης  $\mathcal{H}(e^{j\omega})$  θα είναι

$$\tan(\beta - \omega\alpha) = \frac{\sin(\beta - \omega\alpha)}{\cos(\beta - \omega\alpha)} = \left( - \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin \omega n \right) / \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cos \omega n \right)$$

$$\text{Είναι όμως} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cos \omega n \sin(\beta - \omega\alpha) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin \omega n \cos(\beta - \omega\alpha) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \left( \cos \omega n \sin(\beta - \omega\alpha) + \sin \omega n \cos(\beta - \omega\alpha) \right) = 0$$

# Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

## Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

και καταφεύγοντας στη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin \vartheta \cos \varphi + \cos \vartheta \sin \varphi = \sin(\vartheta + \varphi)$$

για τις γωνίες  $\varphi = \beta - \omega\alpha$  και  $\vartheta = \omega n$  θα είναι  $\vartheta + \varphi = \beta - \omega\alpha + \omega n = \beta + \omega(n - \alpha)$  και

$$\cos \omega n \sin(\beta - \omega\alpha) + \sin \omega n \cos(\beta - \omega\alpha) = \sin[\beta + \omega(n - \alpha)]$$

και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin[\beta + \omega(n - \alpha)] = 0 \quad \text{για όλες τις συχνότητες } \omega$$

Αυτή η σχέση αποτελεί την **αναγκαία (αλλά όχι ικανή) συνθήκη** για να είναι το σύστημα να χαρακτηρίζεται από σταθερή υστέρηση ομάδας.

Για  $\beta = 0$  ή  $\beta = \pi$ ,  $2\alpha = M = \text{ακέραιος}$  και  $h[2\alpha - n] = h[n]$  ισχύει

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin[\omega(n - \alpha)] = 0$$

ενώ για  $\beta = \pi/2$  ή  $\beta = 3\pi/2$ ,  $2\alpha = M = \text{ακέραιος}$  και  $h[2\alpha - n] = -h[n]$  έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cos[\omega(n - \alpha)] = 0$$



# Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

## Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Παραδείγματα **αιτιατών συστημάτων με γενικευμένη γραμμική φάση** είναι τα **φίλτρα FIR** τύπου **I, II, III** και **IV**.

Ποια είναι η συσχέτιση που υφίσταται ανάμεσα στα φίλτρα τύπου FIR γενικευμένης γραμμικής φάσης και στα συστήματα ελάχιστης φάσης;

Εάν η κρουστική απόκριση αυτών των φίλτρων είναι **πραγματικό σήμα**, η συνάρτηση μεταφοράς διαθέτει μηδενικές τιμές είτε **πάνω στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου**, είτε **σε συζυγείς μεταξύ τους και αντίστροφες θέσεις**.

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς ενός φίλτρου FIR, διατυπώνεται ως το γινόμενο

μιας συνάρτησης μεταφοράς **ελάχιστης φάσης**  $\mathcal{H}_{\min}(z)$  τα  $M_i$  μηδενικά της οποίας βρίσκονται όλα στο **εσωτερικό** του μοναδιαίου κύκλου

μιας συνάρτησης μεταφοράς **μέγιστης φάσης**  $\mathcal{H}_{\max}(z)$  τα  $M_i$  μηδενικά της οποίας βρίσκονται όλα στο **εξωτερικό** του μοναδιαίου κύκλου

μίας συνάρτησης μεταφοράς η οποία περιέχει  $M_o$  μηδενικές τιμές οι οποίες βρίσκονται στην **περιφέρεια** του μοναδιαίου κύκλου.

Θα είναι δηλαδή

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}_{\min}(z)\mathcal{H}_{uc}(z)\mathcal{H}_{\max}(z) \quad \text{όπου} \quad \mathcal{H}_{\max}(z) = \mathcal{H}_{\min}(z^{-1})z^{-M_i}$$

Κατά συνέπεια, η τάξη της συνάρτησης μεταφοράς  $\mathcal{H}(z)$  είναι ίση με  $M = 2M_i + M_o$ .

# Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

## Συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Θεωρώντας τη **συνάρτηση ελάχιστης φάσης**

$$\mathcal{H}_{\min}(z) = (1.25)^2(1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1-0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1-0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})$$

θα έχουμε

$$\mathcal{H}_{\max}(z) = (0.9)^2(1-1.11e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-1.11e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1-1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1-1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})$$

Εάν τα δύο συστήματα συνδεθούν εν σειρά, το σύνθετο σύστημα είναι

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}_{\min}(z)\mathcal{H}_{\max}(z)$$

με **γραμμική φάση** και συχνοτική απόκριση που προκύπτει από το **άθροισμα** των συναρτήσεων του λογαριθμικού πλάτους, της φάσης και της υστέρησης ομάδας.

Για τις συναρτήσεις του λογαριθμικού πλάτους θα έχουμε

$$20 \log_{10} |\mathcal{H}(e^{j\omega})| = 20 \log_{10} |\mathcal{H}_{\min}(e^{j\omega})| + 20 \log_{10} |\mathcal{H}_{\max}(e^{j\omega})| = 40 \log_{10} |\mathcal{H}_{\min}(e^{j\omega})|$$

ενώ για τις φασικές αποκρίσεις προκύπτει ότι

$$\angle \mathcal{H}(e^{j\omega}) = \angle \mathcal{H}_{\min}(e^{j\omega}) + \angle \mathcal{H}_{\max}(e^{j\omega}) \text{ και επομένως } \angle \mathcal{H}_{\max}(e^{j\omega}) = -\omega M_i - \angle \mathcal{H}_{\min}(e^{j\omega})$$

Επομένως  $\angle \mathcal{H}(e^{j\omega}) = -\omega M_i = -4\omega$  (η  $\mathcal{H}_{\min}(z)$  διαθέτει 4 μηδενικά). Συνδυάζοντας τις συναρτήσεις υστέρησης ομάδας των  $\mathcal{H}_{\min}(e^{j\omega})$  και  $\mathcal{H}_{\max}(e^{j\omega})$  βρίσκουμε ομοίως  $\text{grd}[\mathcal{H}(e^{j\omega})] = M_i = 4$ .

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

## Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

Σε ένα φίλτρο **πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης**, το πλήθος των δειγμάτων του διακριτού σήματος  $h[n]$  είναι **πεπερασμένο** και ίσο με την **τάξη** του φίλτρου  $N$ .

Επομένως, η **έξοδος** του φίλτρου θα δίδεται από τη σχέση

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k x[n-k]$$

Παρατηρούμε πως ο υπ' αριθμόν  $k$  συντελεστής του φίλτρου **ταυτίζεται** με το αντίστοιχο δείγμα της κρουστικής απόκρισης, δηλαδή  $\beta_k = h[k]$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ).

Τα φίλτρα **πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης** μπορούν να διαχωριστούν σε δύο κατηγορίες, στα **συμμετρικά** και στα **αντισυμμετρικά** φίλτρα, η κρουστική απόκριση των οποίων ικανοποιεί τις ιδιότητες συμμετρίας

$$h[n] = +h[N-1-n] \quad \text{και} \quad h[n] = -h[N-1-n]$$

Επομένως η **συνάρτηση μεταφοράς** του ψηφιακού φίλτρου υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots + h[N-2]z^{-(N-2)} + h[N-1]z^{-(N-1)} \\ &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots \pm h[2]z^{-(N-3)} \pm h[1]z^{-(N-2)} \pm h[0]z^{-(N-1)} \end{aligned}$$

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

Στα **συμμετρικά** και **αντισυμμετρικά** φίλτρα **FIR**, η συνάρτηση  $\mathcal{H}(z)$  διαθέτει ρίζες που εμφανίζονται σε **αντίστροφα ζεύγη**.

Επομένως, εάν η ποσότητα  $z_1$  αποτελεί **ρίζα** της συνάρτησης  $\mathcal{H}(z)$ , το ίδιο θα συμβαίνει και με την ποσότητα  $1/z_1$ .

Η συνάρτηση μεταφοράς των **συμμετρικών** και **αντισυμμετρικών** φίλτρων τύπου FIR, χαρακτηρίζεται από τις επόμενες ιδιότητες:

Στις θέσεις  $z_i = \pm 1$  υπάρχει **αυθαίρετο πλήθος ριζών**, αφού  $z_i^{-1} = \pm 1$ .

Στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου υπάρχει **αυθαίρετο πλήθος ζευγών μιγαδικών συζυγών ριζών**, αφού οι μιγαδικοί αριθμοί που ανήκουν σε αυτή την καμπύλη ικανοποιούν την εξίσωση

$$(z - z_i)(z - z_i^*) = (z - e^{i\psi_i})(z - e^{-i\psi_i}) = \left(z - \frac{1}{z_i^*}\right) \left(z - \frac{1}{z_i}\right)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε ότι

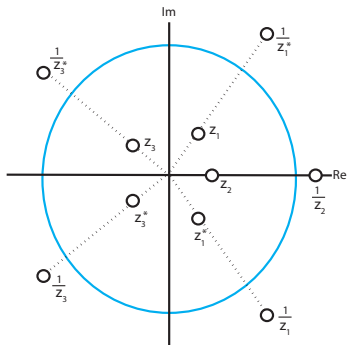
$$\mathcal{H}(z) = \begin{cases} z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] \left( z^{\frac{N-1-2n}{2}} \pm z^{-\frac{N-1-2n}{2}} \right) \\ z^{-\frac{N-1}{2}} \left\{ h \left[ \frac{N-1}{2} \right] + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h[n] \left( z^{\frac{N-1-2n}{2}} \pm z^{-\frac{N-1-2n}{2}} \right) \right\} \end{cases}$$

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

Η 1η εξίσωση αντιστοιχεί σε **άρτιες τιμές** του  $N$  και η 2η σε **περιττές τιμές** του  $N$ .

Έχοντας υπολογίσει τη **συνάρτηση μεταφοράς**  $\mathcal{H}(z)$  μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση **συχνοτικής απόκρισης**  $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ , υπολογίζοντας τη **συνάρτηση μεταφοράς** επί της περιφέρειας του **μοναδιαίου κύκλου**  $z = e^{j\omega}$ .



**Σχήμα:** Επίδειξη της συμμετρίας των **πραγματικών** και των **φανταστικών** ριζών της συνάρτησης μεταφοράς  $\mathcal{H}(z)$  ενός φίλτρου FIR.

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

Υπάρχουν τέσσερις τύποι φίλτρων τύπου FIR.

Συμμετρικά φίλτρα και περιττές τιμές του  $N$ , γνωστά ως φίλτρα FIR τύπου I

Συμμετρικά φίλτρα και άρτιες τιμές του  $N$ , γνωστά ως φίλτρα FIR τύπου II

Αντισυμμετρικά φίλτρα και περιττές τιμές του  $N$ , γνωστά ως φίλτρα FIR τύπου III

Αντισυμμετρικά φίλτρα και άρτιες τιμές του  $N$ , γνωστά ως φίλτρα FIR τύπου IV

Καταφεύγοντας σε επιχειρήματα συμμετρίας η απόκριση πλάτους των αντισυμμετρικών φίλτρων FIR δίδεται από την εξίσωση

$$|\mathcal{H}(e^{j\omega})| = \begin{cases} 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] \sin \left[ \omega \left( \frac{N-1}{2} \right) - n \right] & N \text{ άρτιο} \\ 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h[n] \sin \left[ \omega \left( \frac{N-1}{2} \right) - n \right] & N \text{ περιττό} \end{cases}$$

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

ενώ η **φασική απόκριση**  $\angle \mathcal{H}(e^{j\omega})$  θα έχει την ίδια μορφή για **άρτιες** και **περιττές** τιμές του μήκους  $N$  της κρουστικής απόκρισης και θα δίδεται από τη σχέση

$$\angle \mathcal{H}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \omega \left( \frac{N-1}{2} \right) & \text{για } |\mathcal{H}(e^{j\omega})| > 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \omega \left( \frac{N-1}{2} \right) & \text{για } |\mathcal{H}(e^{j\omega})| < 0 \end{cases}$$

Επομένως, η **φασική απόκριση** των συμμετρικών και αντισυμμετρικών φίλτρων τύπου FIR είναι **γραμμική συνάρτηση** της συχνότητας.

Για το λόγο αυτό τα εν λόγω φίλτρα ονομάζονται και **φίλτρα γραμμικής φάσης**.

Ορίζοντας τους κατάλληλους συντελεστές, το μέτρο της συχνοτικής απόκρισης  $\mathcal{H}_r(\omega)$  για όλες τις κατηγορίες φίλτρων, γράφεται ως

$$|\mathcal{H}(e^{j\omega})| = \mathcal{Q}(\omega)\mathcal{P}(\omega)$$

όπου η συνάρτηση  $\mathcal{Q}(\omega)$  ορίζεται ως

$$\mathcal{Q}(\omega) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου I} \\ 1 & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου II} \\ \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου III} \\ \sin(\omega) & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου IV} \end{cases}$$

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

ενώ η συνάρτηση  $\mathcal{P}(\omega)$  δίδεται από την εξίσωση

$$\mathcal{P}(\omega) = \sum_{k=0}^L \xi[k] \cos(\omega k)$$

με τις ποσότητες  $\xi[k]$  και  $L$  να ορίζονται από τις εξισώσεις

$$\xi[k] = \begin{cases} \tilde{\beta}(k) & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου I} \\ \tilde{\alpha}(k) & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου II} \\ \tilde{\delta}(k) & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου III} \\ \tilde{\gamma}(k) & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου IV} \end{cases}$$

και

$$L = \begin{cases} (N/2) - 1 & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου I} \\ (N - 1)/2 & \text{για φίλτρα FIR τύπου II} \\ (N/2) - 1 & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου III} \\ (N - 3)/2 & \text{για τα φίλτρα FIR τύπου IV} \end{cases}$$

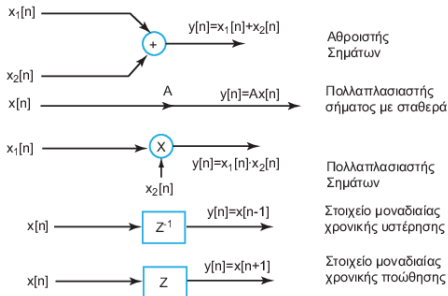


# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα διακριτού χρόνου

Ένας άλλος τρόπος περιγραφής συστημάτων, είναι τα **σχηματικά διαγράμματα** που απεικονίζουν τη δομή του συστήματος με τρόπο κατάλληλο για την υλοποίηση του.

Οι στοιχειώδεις δομικές μονάδες υλοποιούν τις βασικές πράξεις (πρόσθεση σημάτων  $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$ , πολλαπλασιασμός σημάτων  $y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$ , κλιμάκωση πλάτους  $y[n] = Ax[n]$ , μοναδιαία χρονική προώθηση  $y[n] = x[n + 1]$  και μοναδιαία χρονική υστέρηση  $y[n] = x[n - 1]$ ).



**Σχήμα:** Οι **θεμελιώδεις δομικές μονάδες** ενός τυπικού διακριτού συστήματος.

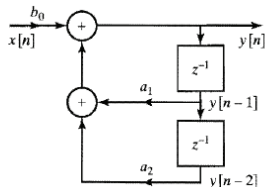
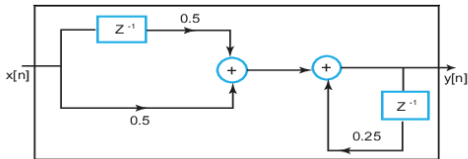
# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα διακριτού χρόνου

Τα σχηματικά διαγράμματα των συστημάτων

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] \quad \text{και} \quad \text{και} \quad y[n] = \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] + \beta_0 x[n]$$

στην αριστερή και στη δεξιά εικόνα του επόμενου σχήματος, αντίστοιχα.



**Σχήμα:** Σχηματικό διάγραμμα τυπικού διακριτού συστήματος.

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα διακριτού χρόνου

Το **σχηματικό διάγραμμα** για τη γενική περίπτωση της εξίσωσης διαφορών

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \alpha_k y[n-k] + \sum_{k=0}^N \beta_k x[n-k]$$

και για τη **μη κανονική μορφή**, παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα. Το σύστημα αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η συνένωση ενός **μη αναδρομικού συστήματος** που περιγράφεται από μία εξίσωση διαφορών της μορφής

$$u[n] = \sum_{k=0}^M \beta_k x[n-k]$$

και ενός **αναδρομικού συστήματος** που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \alpha_k y[n-k] + u[n]$$

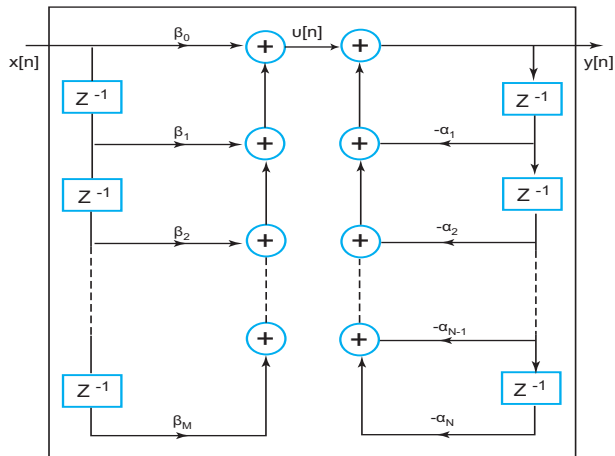
**Αντιστρέφοντας** τη σειρά διασύνδεσης αυτών των δύο υποσυστημάτων, μπορούμε να κατασκευάσουμε την **κανονική μορφή (Direct Form II Structure)** του **γενικευμένου** διακριτού συστήματος η οποία παρουσιάζεται στο μεθεπόμενο σχήμα.

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα διακριτού χρόνου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



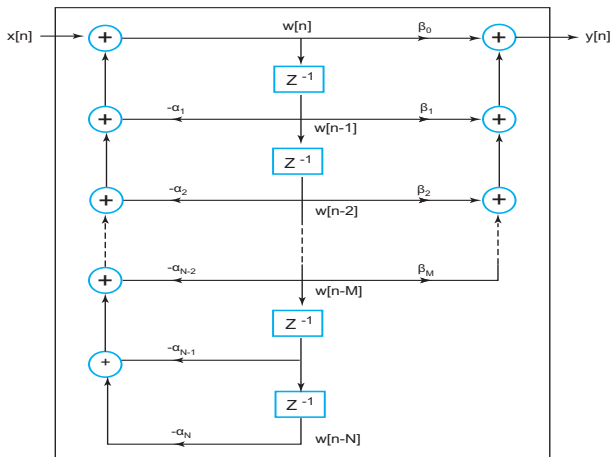
**Σχήμα:** Η μη κανονική μορφή (Direct Form I realization) για τη γενική περίπτωση διακριτού αναδρομικού συστήματος LTI

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα διακριτού χρόνου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Η κανονική μορφή (Direct Form II realization) για τη γενική περίπτωση διακριτού αναδρομικού συστήματος LTI.

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα διακριτού χρόνου

Η τελευταία δομή περιγράφει τη συνένωση ενός **αναδρομικού** και ενός **μη αναδρομικού συστήματος** με εξισώσεις

$$w[n] = - \sum_{k=1}^N \alpha_k w[n-k] + x[n] \quad \text{και} \quad y[n] = \sum_{k=0}^M \beta_k w[n-k]$$

Εάν στη γενική εξίσωση διαφορών θέσουμε  $\alpha_k = 0$ , αυτή γίνεται

$$y(n) = \sum_{k=0}^M \beta_k x[n-k]$$

που περιγράφει το σύστημα FIR του **κινούμενου μέσου**, με κρουστική απόκριση

$$h(k) = \begin{cases} \beta_k & 0 \leq k \leq M \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

ενώ εάν θέσουμε  $M = 0$ , αυτή θα λάβει τη μορφή

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \alpha_k y[n-k] + \beta_0 x[n]$$

που περιγράφει ένα **πλήρως αναδρομικό σύστημα**, με έξοδο έναν σταθμισμένο γραμμικό συνδυασμό των  $N$  **προηγούμενων** εξόδων του και της **τρέχουσας** εισόδου του.

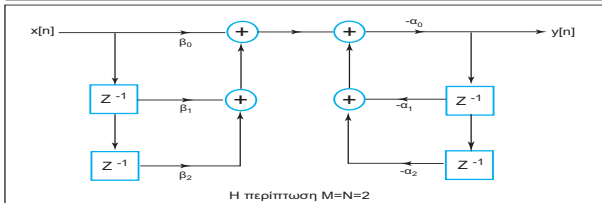
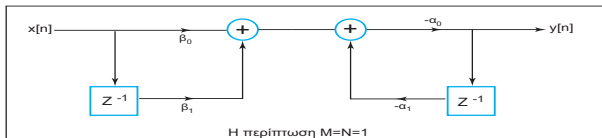
# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα διακριτού χρόνου

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζονται η μη κανονική μορφή διακριτών αναδρομικών συστημάτων LTI για τιμές  $M = N = 1$  και  $M = N = 2$  και εξισώσεις

$$\alpha_0 y[n] + \alpha_1 y[n-1] = \beta_0 x[n] + \beta_1 x[n-1] \quad \text{και}$$

$$\alpha_0 y[n] + \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] = \beta_0 x[n] + \beta_1 x[n-1] + \alpha_2 x[n-2]$$



**Σχήμα:** Η μη κανονική μορφή των αναδρομικών διακριτών συστημάτων LTI που αντιστοιχούν στις τιμές παραμέτρων  $M = N = 1$  και  $M = N = 2$ .

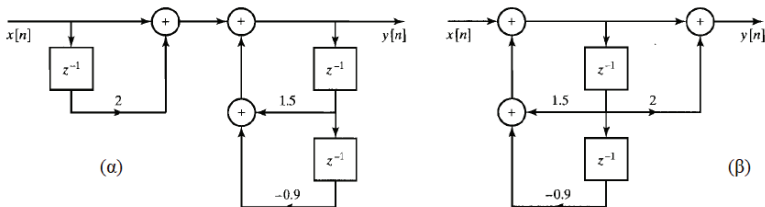
# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα διακριτού χρόνου

Ως ένα παράδειγμα αυτών των δύο τύπων διαγραμμάτων, το επόμενο απεικονίζει την μη κανονική μορφή [εικόνα (α)] και τη μη κανονική μορφή [εικόνα (β)] του συστήματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.9z^{-2}}$$

η οποία προκύπτει από τη γενική εξίσωση για τιμές παραμέτρων  $\alpha_1 = 1.5$ ,  $\alpha_2 = -0.9$ ,  $\beta_0 = 1$  και  $\beta_1 = 2$ .



Σχήμα: Παράδειγμα μη κανονικής και κανονικής μορφής.



# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

## Γραφήματα ροής σημάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ένα **γράφημα ροής σημάτων** αποτελεί μία αναπαράσταση εξισώσεων διαφορών **εντελώς ισοδύναμη** με τα δομικά διαγράμματα.

Ορίζεται ως ένα **δίκτυο**, αποτελούμενο από **κατευθυνόμενους κλάδους** και **κόμβους** οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους μέσω των **κλάδων**, με τον κάθε κλάδο να σχετίζεται με μία **τιμή βάρους**  $w_k[n]$ .

Ένας κλάδος περιγράφεται πλήρως **από ένα σήμα εισόδου και ένα σήμα εξόδου**, με τη φορά του σήματος να καταδεικνύεται με ένα μικρό **βέλος**.

Στα **γραμμικά** γραφήματα ροής σημάτων, η έξοδος του κάθε κλάδου προκύπτει από την εφαρμογή στην είσοδό του ενός **γραμμικού μετασχηματισμού**.

Σε έναν **κόμβο πηγή** υπάρχουν μόνο κλάδοι που ξεκινούν από αυτόν, ενώ σε έναν **κόμβο καταβόθρα** υπάρχουν μόνο κλάδοι που καταλήγουν σε αυτόν.

Οι παραπάνω έννοιες επιδεικνύονται διαγραμματικά στο επόμενο σχήμα.

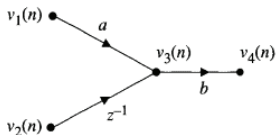
# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Γραφήματα ροής σημάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

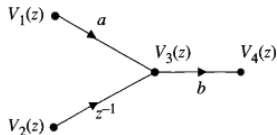
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Πεδίο διακριτού χρόνου



$$\begin{aligned}v_3(n) &= a v_1(n) + v_2(n-1) \\v_4(n) &= b v_3(n)\end{aligned}$$

Πεδίο συχνότητας



$$\begin{aligned}V_3(z) &= a V_1(z) + z^{-1} V_2(z) \\V_4(z) &= b V_3(z)\end{aligned}$$

**Σχήμα:** Παραδείγματα γραφήματος ροής σημάτων στα πεδία του **χρόνου** και της **συχνότητας**.

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

## Γραφήματα ροής σημάτων

Η **ισοδυναμία** των σχηματικών διαγραμμάτων και των γραφημάτων ροής σημάτων επιδεικνύεται στο επόμενο σχήμα. Από τη μελέτη του γραφήματος ροής σημάτων διαπιστώνεται πως οι εξισώσεις διαφορών που αναπαριστάνονται σε αυτό είναι οι

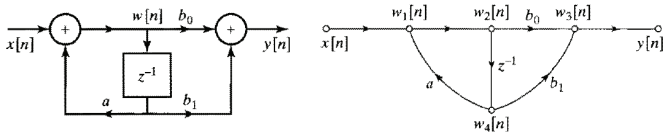
$$w_1[n] = \alpha w_4[n] + x[n]$$

$$w_2[n] = w_1[n]$$

$$w_3[n] = \beta_0 w_2[n] + \beta_1 w_4[n]$$

$$w_4[n] = w_2[n - 1]$$

$$y[n] = w_3[n]$$



**Σχήμα:** Παράδειγμα ισοδυναμίας των **σχηματικών διαγραμμάτων** και των **γραφημάτων ροής σημάτων**.

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Γραφήματα ροής σημάτων

Παρατηρούμε πως η πρώτη, η δεύτερη και η τέταρτη εξίσωση συνδυάζονται ως

$$w_2[n] = \alpha w_2[n-1] + x[n]$$

ενώ η τρίτη και η πέμπτη εξίσωση μπορούν να συνδυαστούν στην εξίσωση

$$y[n] = \beta_0 w_2[n] + \beta_1 w_2[n-1]$$

Λαμβάνοντας το **μετασχηματισμό  $\mathcal{Z}$**  της πρώτης εξίσωσης παίρνουμε

$$\mathcal{W}_2(z) = \alpha z^{-1} \mathcal{W}_2(z) + \mathcal{X}(z) \implies (1 - \alpha z^{-1}) \mathcal{W}_2(z) = \mathcal{X}(z) \implies \mathcal{W}_2(z) = \frac{\mathcal{X}(z)}{1 - \alpha z^{-1}}$$

ενώ η ίδια διαδικασία για τη δεύτερη εξίσωση μας δίνει

$$\mathcal{Y}(z) = \beta_0 \mathcal{W}_2(z) + \beta_1 z^{-1} \mathcal{W}_2(z) = (\beta_0 + \beta_1 z^{-1}) \mathcal{W}_2(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \mathcal{X}(z)$$

Κατά συνέπεια, η **συνάρτηση μεταφοράς** του συστήματος θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{X}(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Έχοντας υπολογίσει τη συνάρτηση μεταφοράς, μπορούμε να υπολογίσουμε την **κρουστική απόκριση** και την **εξίσωση διαφορών** του συστήματος.

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Ευθείες μορφές

Οι **ευθείες μορφές**, εμφανίζονται σε δύο τύπους (τύπος I και τύπος II), που περιγράφονται αντίστοιχα από τα ονόματα, **μη κανονική** και **κανονική μορφή**).

Αυτές οι μορφές επιτρέπουν την διαγραμματική περιγραφή ενός γενικού συστήματος LTI που περιγράφεται από μία σχέση εισόδου - εξόδου της μορφής

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

η οποία οδηγεί στη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Αυτές οι μορφές χρησιμοποιώντας **γραφήματα ροής σημάτων**, απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα για την **μη κανονική μορφή** (αριστερή εικόνα) και την **κανονική μορφή** (δεξιά εικόνα). Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι είναι  $N = M$ .

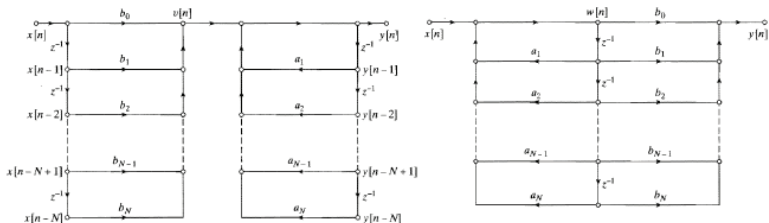
Ο κάθε κόμβος έχει **το πολύ δύο εισόδους**, αφού αυτό είναι κάτι που διευκολύνει σημαντικά τη διαδικασία κατασκευής αυτών των διαγραμμάτων σε επίπεδο υλικού.

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Ευθείες μορφές

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



**Σχήμα:** Η **μη κανονική μορφή** [αριστερή εικόνα] και η **κανονική μορφή** [δεξιά εικόνα] για τη γενική περίπτωση διακριτού αναδρομικού συστήματος LTI χρησιμοποιώντας γραφήματα ροής σημάτων για την περίπτωση  $M = N$

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Ευθείες μορφές

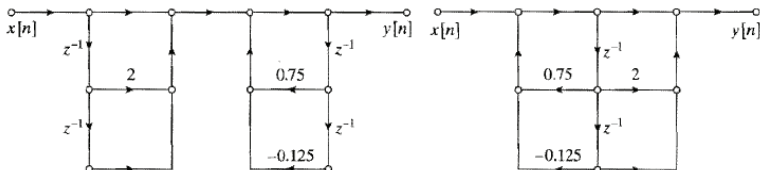
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

**Παράδειγμα:** Η μη κανονική και η κανονική μορφή του συστήματος που περιγράφεται από την συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$$

απεικονίζεται στην αριστερή και στη δεξιά εικόνα του Σχήματος 37.



**Σχήμα:** Η **μη κανονική μορφή** [αριστερή εικόνα] και η **κανονική μορφή** [δεξιά εικόνα] για την περίπτωση της συνάρτησης μεταφοράς που περιγράφεται από την παραπάνω εξίσωση

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Μορφή καταρράκτη

Η **μορφή καταρράκτη** προκύπτει διατυπώνοντας τη συνάρτηση μεταφοράς με τη μορφή

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - f_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - g_k z^{-1})(1 - g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

όπου  $M = M_1 + 2M_2$  και  $N = N_1 + 2N_2$ . Οι παράγοντες πρώτης τάξεως περιέχουν πραγματικά μηδενικά ( $f_k$ ) και πραγματικούς πόλους ( $c_k$ ), ενώ οι παράγοντες δευτέρας τάξεως περιέχουν μιγαδικώς συζυγή ζεύγη μηδενικών τιμών ( $g_k$  και  $g_k^*$ ) και μιγαδικώς συζυγή ζεύγη πόλων ( $d_k$  και  $d_k^*$ ).

Μία **δομή καταρράκτη** η οποία αποτελείται από την σειρά σύνδεση συστημάτων πρώτης και δεύτερης τάξεως με τον κατάλληλο σε κάθε περίπτωση τρόπο.

Εάν συνδυάσουμε μεταξύ τους, τους όρους των πραγματικών και των μιγαδικών συζυγών τιμών, λαμβάνουμε (μόνο για  $M \leq N$ ) και για  $N_s = \lfloor (N + 1)/2 \rfloor$ .

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$



# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Μορφή καταρράκτη

Για το κάθε υποσύστημα χρησιμοποιείται κάποια από τις ευθείες μορφές που παρουσιάσαμε προηγουμένως.

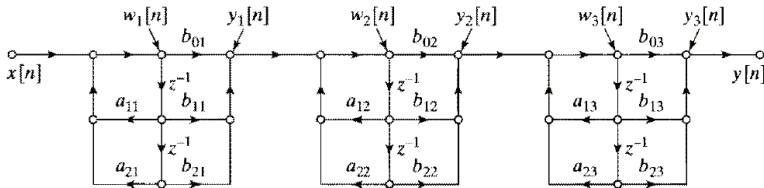
Το επόμενο σχήμα παρουσιάζει τη δομή καταρράκτη για ένα σύστημα **έκτης τάξεως**. Οι εξισώσεις διαφορών για δομή καταρράκτη και για ένα σύστημα **τάξεως  $N$**  που αναλύεται σε δομές **δευτέρας τάξεως**, είναι οι

$$y_0[n] = x[n]$$

$$w_k[n] = a_{1k} w_k[n-1] + a_{2k} w_k[n-2] + y_{k-1}[n], \quad k = 1, 2, \dots, N_s$$

$$y_k[n] = b_{0k} w_k[n-1] + b_{2k} w_k[n-2] + y_{k-1}[n], \quad k = 1, 2, \dots, N_s$$

$$y[n] = y_{N_s}[n]$$



Σχήμα: Δομή καταρράκτη για σύστημα **έκτης τάξεως**

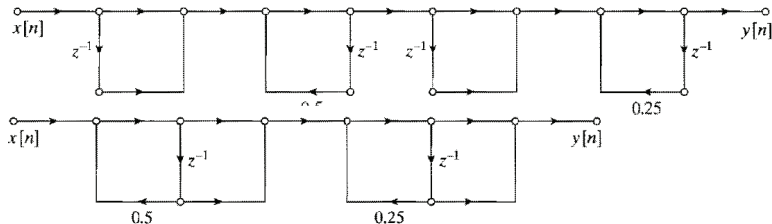
# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Μορφή καταρράκτη - Παράδειγμα

Εάν παραγοντοποιήσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του προηγούμενου παραδείγματος αυτή γράφεται ως

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})}$$

και οδηγεί στις **δομές καταρράκτη** του επόμενου σχήματος.



**Σχήμα:** Παράδειγμα **δομής καταρράκτη**. Στην επάνω εικόνα χρησιμοποιείται η μη κανονική μορφή, ενώ στην κάτω εικόνα χρησιμοποιείται η κανονική μορφή

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Παράλληλη μορφή

Στην παράλληλη μορφή, αναπτύσσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε άθροισμα μερικών κλασμάτων, δηλαδή ως

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

όπου  $N = N_1 + 2N_2$ . Εάν είναι  $M \geq N$ , τότε θα είναι  $N_p = M - N$  ενώ στην αντίθετη περίπτωση το πρώτο άθροισμα δεν εμφανίζεται.

Εάν τα  $a_k$  και  $b_k$  είναι πραγματικοί, το ίδιο ισχύει και για τα  $A_k, B_k, C_k, c_k$  και  $e_k$ .

Αυτή η συνάρτηση μεταφοράς περιγράφει ένα σύστημα που προκύπτει από την παράλληλη σύνδεση συστημάτων 1ης και 2ης τάξεως και ενδεχομένως  $N_p$  στοιχείων χρονικής υστέρησης, κλιμακωμένα κατά τον κατάλληλο συντελεστή.

Εναλλακτικά, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τους πραγματικούς πόλους σε ζεύγη τιμών και να εκφράσουμε τη συνάρτηση με τη μορφή

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_0 k + e_1 k z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

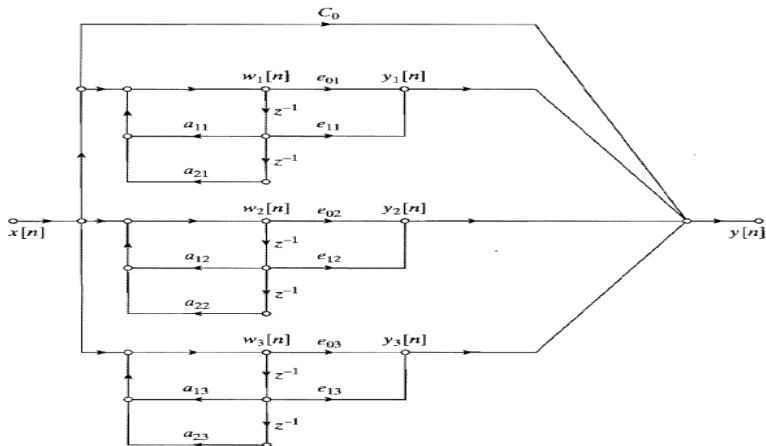
όπου  $N_s = \lfloor (N + 1)/2 \rfloor$ . Εάν είναι  $N_p = M - N < 0$ , το πρώτο άθροισμα δεν εμφανίζεται.

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Παράλληλη μορφή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Παράλληλη μορφή για την περίπτωση  $M = N = 6$ .

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Παράλληλη μορφή

Στη γενική περίπτωση, οι εξισώσεις διαφορών για την παράλληλη μορφή και για υποσυστήματα δευτέρας τάξεως σε κανονική μορφή είναι οι

$$w_k[n] = a_{1k} w_k[n-1] + a_{2k} w_k[n-2] + x[n] \quad k = 1, 2, \dots, N_s$$

$$y_k[n] = e_{0k} w_k[n] + e_{1k} w_k[n-1] \quad k = 1, 2, \dots, N_s$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N_p} C_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{N_s} y_k[n]$$

Το πρώτο άθροισμα δεν περιλαμβάνεται εάν  $N_p < 0$ .

Εάν η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω παραδείγματος αναπτυχθεί σε **σειρά μερικών κλασμάτων**, λαμβάνει τη μορφή

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}} = 8 + \frac{-7 + 8z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$$

ενώ εναλλακτικά μπορεί να γραφεί και ως

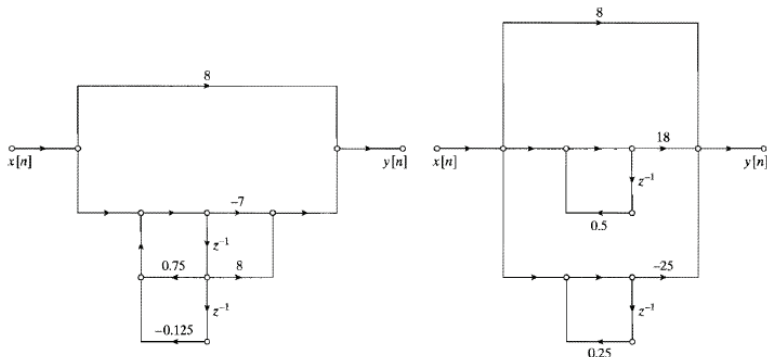
$$H(z) = 8 + \frac{18}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{25}{1 - 0.25z^{-1}}$$

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Παράλληλη μορφή - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



**Σχήμα:** Παράλληλη μορφή τις δύο εκδοχές της συνάρτησης μεταφοράς του προηγούμενου παραδείγματος.

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Παράλληλη μορφή - Βρόχοι ανάδρασης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ένας **βρόχος ανάδρασης** είναι μία κλειστή διαδρομή που ξεκινά από ένα κόμβο του γραφήματος και επιστρέφει **στον ίδιο** κόμβο.

Αποτελεί **αναγκαία αλλά όχι και ικανή συνθήκη** για τη δημιουργία κρουστικών αποκρίσεων με άπειρο μήκος.

Εάν ένα γράφημα ροής σημάτων δεν διαθέτει βρόχους ανάδρασης, η **μεγαλύτερη δυνατή** υστέρηση που μπορεί να εμφανιστεί σε ένα τέτοιο σύστημα, ισούται **με το πλήθος των διαφορετικών στοιχείων χρονικής υστέρησης** και αντιστοιχεί σε μία διαδρομή η οποία διέρχεται από όλα αυτά τα στοιχεία χρονικής υστέρησης.

Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση μεταφοράς θα περιέχει **μόνο μηδενικές τιμές**, με το πλήθος αυτών των μηδενικών τιμών να **μην είναι** μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων χρονικής υστέρησης.

Προκειμένου να επιτύχουμε μεγαλύτερες χρονικές υστερήσεις και τελικά να οδηγηθούμε σε κρουστικές αποκρίσεις με **άπειρο μήκος**, θα πρέπει υποχρεωτικά το γράφημα ροής σημάτων να διαθέτει **βρόχους ανάδρασης**.

Παραδείγματα βρόχων ανάδρασης επιδεικνύονται στο επόμενο σχήμα. Η αριστερή εικόνα απεικονίζει το διάγραμμα ροής σημάτων για το σύστημα

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$

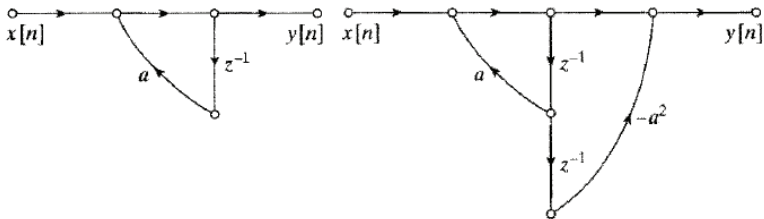
και η κρουστική απόκριση του οποίου είναι η  $h[n] = \alpha^n u[n]$ .

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Παράλληλη μορφή - Βρόχοι ανάδρασης

Η δεξιά εικόνα αναφέρεται στο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - a^2 z^{-2}}{1 - az^{-1}} = \frac{(1 - az^{-1})(1 + az^{-1})}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1}$$



**Σχήμα:** Παραδείγματα γραφημάτων ροής σημάτων με βρόχους ανάδρασης.



# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Αντεστραμμένες δομές

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

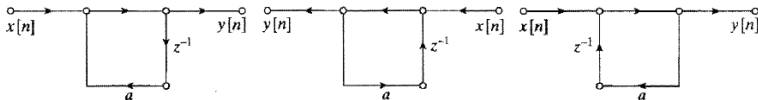
Αποτελούν έναν **ισοδύναμο τρόπο** διαγραμματικής αναπαράστασης και συνίστανται στην **αντιστροφή** της φοράς των κλάδων και του ρόλου της εισόδου και της εξόδου σε κάθε κλάδο: **ένας κόμβος - πηγή μετασχηματίζεται σε κόμβο - καταβόθρα και το αντίστροφο.**

Για τα **συστήματα SISO**, το γράφημα που προκύπτει έχει **την ίδια** συνάρτηση μεταφοράς με το αρχικό σύστημα εάν εναλλάξουμε με τους ρόλους της εισόδου και της εξόδου.

Αυτή η διαδικασία για ένα **σύστημα πρώτης τάξεως** χωρίς μηδενικές τιμές και με συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα με την αριστερή εικόνα να απεικονίζει το **αρχικό** και την **δεξιά** εικόνα το τελικό διάγραμμα.



**Σχήμα:** Κατασκευή **αντεστραμμένης δομής** για σύστημα πρώτης τάξεως.

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Αντεστραμμένες δομές

Η κατάσταση για το **σύστημα 2ας τάξεως** με εξισώσεις διαφορών

$$w[n] = a_1 w[n-1] + a_2 w[n-2] + x[n]$$

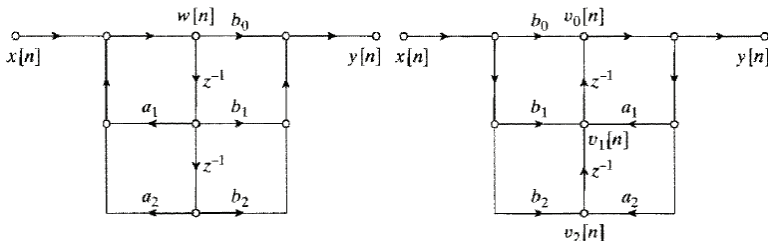
$$y[n] = b_0 w[n-1] + b_1 w[n-1] + b_2 w[n-2]$$

απεικονίζεται στη συνέχεια. Οι εξισώσεις του μετασχηματισμένου συστήματος είναι οι

$$v_0[n] = b_0 x[n] + v_1[n-1], \quad y[n] = v_0[n]$$

$$v_1[n] = a_1 y[n] + b_1 x[n] + v_2[n-1] \quad v_2[n] = a_2 y[n] + b_2 x[n]$$

Αυτά τα σύνολα εξισώσεων είναι **ισοδύναμα** αφού οδηγούν **στην ίδια** συνάρτηση  $\mathcal{H}(z)$ .



**Σχήμα:** Κατασκευή **αντεστραμμένης δομής** για σύστημα δευτέρας τάξεως.

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Συστήματα FIR

Οι παραπάνω δομές χρησιμοποιούνται και για τα **συστήματα FIR** των οποίων η **εξίσωση διαφορών** και η **κρουστική απόκριση** έχουν τη μορφή

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad \text{και} \quad h[n] = \begin{cases} b_n & n = 0, 1, \dots, M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Η κατάσταση παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.

Σε αυτό το σχήμα η επάνω και τη μεσαία εικόνα απεικονίζουν την **ευθεία** και την **ανάστροφη** μορφή ενός τέτοιου φίλτρου, ενώ η τελευταία εικόνα παρουσιάζει την αντίστοιχη **μορφή καταρράκτη** για τη συνάρτηση μεταφοράς

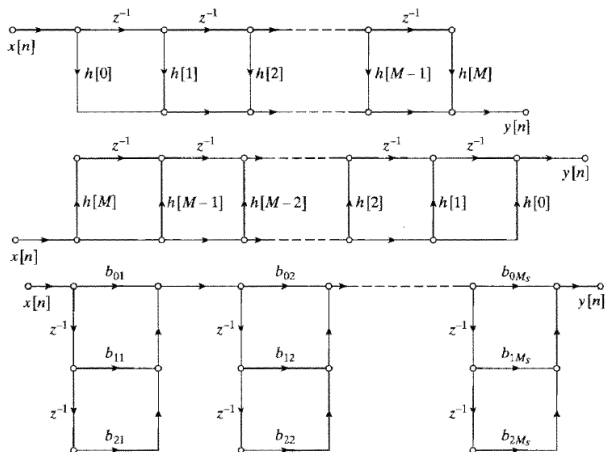
$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2})$$

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Συστήματα FIR

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Δομές για συστήματα τύπου FIR.

# Τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών φίλτρων

Δομές για συστήματα IIR και FIR - Συστήματα FIR

Οι παραπάνω δομές χρησιμοποιούνται και για τα **συστήματα FIR** των οποίων η **εξίσωση διαφορών** και η **κρουστική απόκριση** έχουν τη μορφή

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad \text{και} \quad h[n] = \begin{cases} b_n & n = 0, 1, \dots, M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Η κατάσταση παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.

Σε αυτό το σχήμα η επάνω και τη μεσαία εικόνα απεικονίζουν την **ευθεία** και την **ανάστροφη** μορφή ενός τέτοιου φίλτρου, ενώ η τελευταία εικόνα παρουσιάζει την αντίστοιχη **μορφή καταρράκτη** για τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2})$$

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

## Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Κατά τη συνήθη ανάλυση σημάτων θεωρούμε πως τα χαρακτηριστικά των ημιτονοειδών συνιστωσών του σήματος (πλάτος, συχνότητα και φάση), **δεν μεταβάλλονται με το χρόνο** και ειδικότερα, κατά τη χρονική διάρκεια του εφαρμοζόμενου παραθύρου.

Ωστόσο, στην πράξη, αυτή η παραδοχή **δεν ικανοποιείται πάντοτε** όπως συμβαίνει με τα σήματα των **radar**, της **ανθρώπινης ομιλίας** και των **δικτύων μετάδοσης δεδομένων**.

Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε τον **χρονοεξαρτώμενο μετασχηματισμό Fourier**

$$\mathcal{X}[n, \lambda] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\lambda m}$$

όπου  $w[m]$  είναι η ακολουθία του χρησιμοποιούμενου **παραθύρου**. Εάν είναι  $w[n] \neq 0$  για  $n > 0$ , το παράθυρο είναι **μη αιτιατό**.

Η ακολουθία  $w[m]$  έχει **πεπερασμένο μήκος** και υποτίθεται πως είναι **κεντραρισμένη** ως προς την τιμή  $m = 0$ , οπότε ο μετασχηματισμός  $\mathcal{X}[n, \lambda]$  εμφανίζει τα συχνοτικά χαρακτηριστικά του σήματος κεντραρισμένα ως προς την τιμή  $n$ .

Η ακολουθία  $x[n]$  δεν αποτελεί πλέον συνάρτηση **μόνο** του  $n$ , αλλά και της συνεχούς μεταβλητής  $\lambda$ , η οποία αναπαριστά **συχνότητα**.

Ο μετασχηματισμός **TDFT (Time Dependent Fourier Transform)** είναι **περιοδικός** ως προς τη συχνότητα  $\lambda$  με περίοδο  $2\pi$ .

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

## Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Πραγματοποιώντας στην εξίσωση ορισμού του  $\mathcal{X}[n, \lambda]$  την αντικατάσταση  $m' = n + m$  οπότε είναι  $-m = n - m'$ , αυτή λαμβάνει την ισοδύναμη μορφή

$$\mathcal{X}[n, \lambda] = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} x[m']w[-(n - m')]e^{j\lambda(n-m')}$$

η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως η **συνέλιξη**

$$\mathcal{X}[n, \lambda] = x[n] * h_{\lambda}[n] \quad \text{όπου} \quad h_{\lambda}[n] = w[-n]e^{j\lambda n}$$

Ο **μετασχηματισμός TDFT** είναι λοιπόν η έξοδος ενός συστήματος LTI με **κρουστική απόκριση**  $h_{\lambda}[n]$  και **συνάρτηση μεταφοράς**

$$\mathcal{H}_{\lambda}(e^{j\omega}) = \mathcal{W}(e^{j(\lambda-\omega)})$$

Εάν είναι  $w[n] = 0$  για  $n < 0$  το σήμα  $h_{\lambda}[n]$  είναι **μη αιτιατό**, ενώ εάν είναι  $w[n] \neq 0$  για  $n \leq 0$ , έχουμε ένα **αιτιατό** σύστημα.

Η συνάρτηση  $\mathcal{W}(e^{j\omega})$  χαρακτηρίζεται από το σύνθηες **χαμηλοπερατό** φάσμα της επάνω εικόνας του επόμενου σχήματος για ένα **παράθυρο Bartlett**.

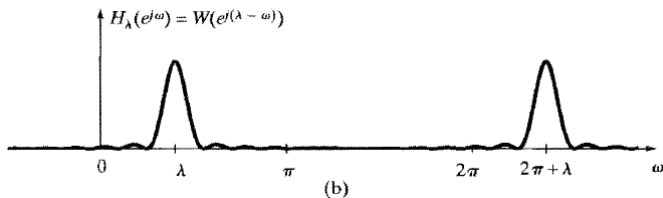
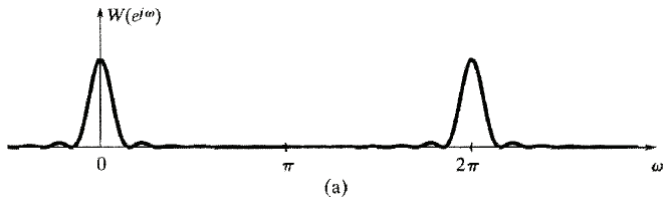
Η συνάρτηση  $\mathcal{H}_{\lambda}(e^{j\omega})$  περιγράφει λοιπόν ένα **ζωνοπερατό φίλτρο** η ζώνη διέλευσης του οποίου είναι κεντραρισμένη ως προς τη συχνότητα  $\omega = \lambda$ , όπως απεικονίζεται στην κάτω εικόνα του σχήματος.

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



**Σχήμα:** Ο μετασχηματισμός Fourier ενός **παραθύρου Bartlett** για τη χρήση του στην **χρονοεξαρτώμενη ανάλυση Fourier** [(α)] και το **ισοδύναμο ζωνοπερατό φίλτρο** [(β)].



# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

## Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ο βασικός ρόλος της συνάρτησης  $w[n]$  είναι ο **περιορισμός της χρονικής διάρκειας** του διακριτού σήματος για το οποίο υπολογίζεται ο μετασχηματισμός, έτσι ώστε τα φασματικά του χαρακτηριστικά **να είναι όσο το δυνατόν πιο σταθερά** σε όλη τη χρονική διάρκεια του παραθύρου.

**Όσο πιο ταχύς** είναι ο ρυθμός μεταβολής των χαρακτηριστικών του σήματος, **τόσο πιο μικρή** θα πρέπει να είναι και η διάρκειά αυτού του παραθύρου.

Η πολύ μικρή διάρκεια του παραθύρου, οδηγεί

**σε μείωση της διακριτικής ικανότητας** δηλαδή της ικανότητας μας να διακρίνουμε διαφορετικές συχνότητες που είναι γειτονικές η μία ως προς την άλλη

**σε αύξηση της ικανότητάς μας** να διακρίνουμε μεταβολές οι οποίες **πραγματοποιούνται στο πεδίο του χρόνου.**

Επομένως, θα πρέπει να καταφύγουμε σε ένα είδος **συμβιβασμού** ανάμεσα στην διακριτική ικανότητα ως προς το χρόνο και ως προς τη συχνότητα.

Εάν επιθυμούμε να χρησιμοποιήσουμε τον DTFT για μία χρονικά εξαρτώμενη εκτίμηση του φάσματος, θα πρέπει **να μειώσουμε** το εύρος του παραθύρου για να μειωθεί και το ύψος των παράπλευρων λοβών κατασκευάζοντας το παράθυρο **όσο πιο αποδοτικό γίνεται** για να βελτιώσουμε τη διακριτική ικανότητα στο πεδίο της συχνότητας.

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

## Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

### Αντίστροφος μετασχηματισμός

Εάν η συνάρτηση του παραθύρου  $w[m]$  έχει **τουλάχιστον ένα μη μηδενικό δείγμα**, ο μετασχηματισμός TDFT είναι **αντιστρέψιμος**. Ειδικότερα, από την **εξίσωση σύνθεσης** του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε

$$x[n+m]w[m] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X[n, \lambda] e^{j\lambda m} d\lambda, \quad -\infty < m < \infty$$

ή ισοδύναμα,

$$x[n+m] = \frac{1}{2\pi w[m]} \int_0^{2\pi} X[n, \lambda] d\lambda$$

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

## Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ας θεωρήσουμε το απλό συνημίτονο

$$x_c(t) = \cos(\theta(t)) = \cos(A_0 t^2)$$

με συχνότητα που **μεταβάλλεται** με το χρόνο. Αυτά τα σήματα χρησιμοποιούνται για **διαμόρφωση συχνότητας** και χαρακτηρίζονται από μία τιμή **στιγμιαίας συχνότητας** που υπολογίζεται ως η **πρώτη χρονική παράγωγος** της συνάρτησης  $\theta(t)$ .

Αυτή η **στιγμιαία συχνότητα** για την περίπτωση του παραπάνω σήματος υπολογίζεται ως

$$\Omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (A_0 t^2) = 2A_0 t$$

και χαρακτηρίζεται από μία **σχέση αναλογίας** ως προς τη μεταβλητή του χρόνου  $t$ . Η **δευματοληψία** αυτού του σήματος οδηγεί στο διακριτό σήμα

$$x[n] = x_c(nT) = \cos(A_0 T^2 n^2) = \cos(\alpha_0 n^2)$$

(όπου  $\alpha_0 = A_0 T^2$ ) η **στιγμιαία συχνότητα** του οποίου προκύπτει από τη **δευματοληψία** της στιγμιαίας συχνότητας του συνεχούς σήματος και υπολογίζεται ως

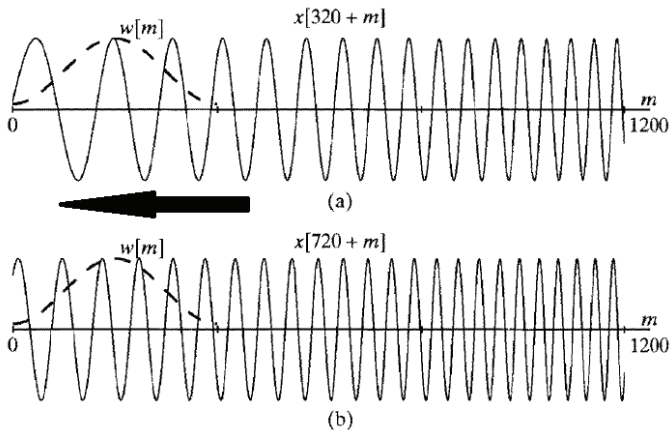
$$\omega_i[n] = \Omega_i(nT) \cdot T = 2A_0 T^2 n = 2\alpha_0 n$$

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



**Σχήμα:** Παράδειγμα σήματος με χρονικώς μεταβαλλόμενη συχνότητα. Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier τις χρονικές στιγμές  $n = 320$  και  $n = 720$  είναι ο DTFT των σημάτων  $w[m]x[320 + m]$  (α) και  $w[m]x[720 + m]$  (β).

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

## Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Για τους σκοπούς υπολογισμού του μετασχηματισμού TDFT το παράθυρο που χρησιμοποιείται θεωρείται πως είναι ακίνητο, ενώ το σήμα ολισθαίνει προοδευτικά από δεξιά προς τα αριστερά διερχόμενο μέσα από το παράθυρο.

Με άλλα λόγια σε κάθε χρονική στιγμή, ενός του παραθύρου βρίσκεται διαφορετικό τμήμα του σήματος και αυτό είναι που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του TDFT

Μία άλλη δυνατότητα είναι αυτή κατά την οποία λαμβάνει χώρα ολίσθηση όχι του σήματος σε σχέση με το σταθερό παράθυρο, αλλά του παραθύρου σε σχέση με το σήμα και διατηρώντας την αρχή μέτρησης του χρόνου του σήματος σταθερή.

Αυτό είναι κάτι που οδηγεί στην εναλλακτική εξίσωση του μετασχηματισμού TDFT

$$\check{X}[n, \lambda] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]w[m - n]e^{-j\lambda m}$$

η οποία σχετίζεται με την αρχική εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού ως

$$\check{X}[n, \lambda] = e^{-j\lambda n} X[n, \lambda]$$

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

## Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Το επόμενο σχήμα απεικονίζει τη μεταβολή του μέτρου του DTFT ως συνάρτηση της κανονικοποιημένης στιγμιαίας συχνότητας

$$f_i[n] = \omega_i[n]/(2\pi) = 2\alpha_0 n/(2\pi)$$

για τις επόμενες περιπτώσεις:

ορθογώνιο παράθυρο 2000 δειγμάτων [εικόνα (α)],

παράθυρο Hamming 401 δειγμάτων στη θέση  $n = 5000$  [εικόνα (β)]

παράθυρο Hamming 401 δειγμάτων στη θέση  $n = 15000$  [εικόνα (γ)]

[δηλαδή οι εικόνες (β) και (γ) σχετίζονται με το μέτρο του TDFT

$$\mathcal{X}[5000, \lambda] \text{ και } \mathcal{X}[15000, \lambda]]$$

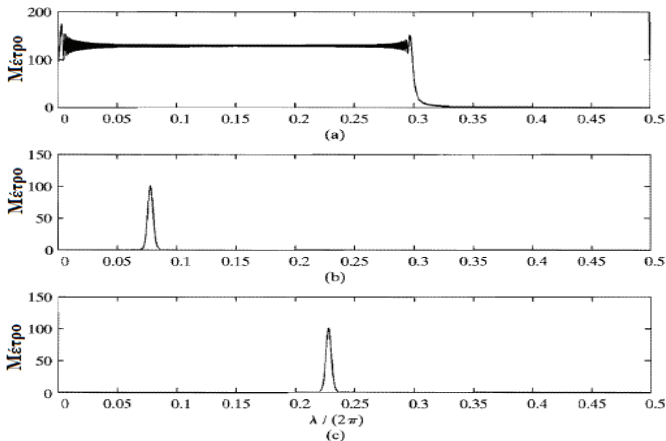
Επειδή το μήκος του παραθύρου στις δύο τελευταίες εικόνες είναι σχετικά μικρό, η μεταβολή της συχνότητας του σήματος σε αυτή την περιοχή συλλαμβάνεται σε πολύ καλό βαθμό από το μετασχηματισμό, σε αντίθεση με την εικόνα (α) όπου το μήκος του παραθύρου είναι πάρα πολύ μεγάλο.

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



**Σχήμα:** Μεταβολή του μέτρου του μετασχηματισμού DTFT ως συνάρτηση της κανονικοποιημένης στιγμιαίας συχνότητας.

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

## Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το **φασματόγραμμα** αποτελεί ένα διάγραμμα ο οριζόντιος άξονας του οποίου είναι ο **δείκτης** του χρόνου  $n$  ενώ ο κατακόρυφος άξονας είναι η ποσότητα  $20 \log_{10} |\mathcal{X}[n, \lambda]|$ .

Το επόμενο σχήμα απεικονίζει αυτόν τον ειδικό τύπο διαγράμματος για το διακριτό σήμα

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \cos(\alpha_0 n^2) & 0 \leq n \leq 20000 \\ \cos(0.2\pi n) & 20000 < n \leq 25000 \\ \cos(0.2\pi n) + \cos(0.23\pi n) & 25000 < n \end{cases}$$

και για παράθυρο Hamming μήκους  $L = 401$  (επάνω) και μήκους  $L = 101$  (κάτω).

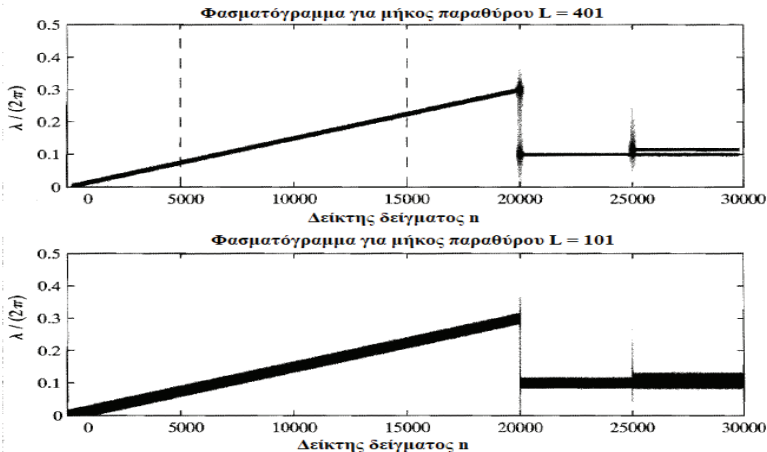


# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Σχήμα: Φασματογράμμο.

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο χρόνο και στη συχνότητα

Όπως και με το μετασχηματισμό DTFT, η χρήση του TDFT απαιτεί δειγματοληψία στο πεδίο της συχνότητας, αφού η συχνότητα  $\lambda$  που εμφανίζεται στην εξίσωση ορισμού του αποτελεί συνεχή μεταβλητή.

Θεωρώντας πως η συνάρτηση  $w[n]$  περιέχει  $L$  δείγματα και ορίζεται ως  $w[m] = 0$  για  $m < 0$  και  $m > L - 1$ , αυτή η δειγματοληψία συνίσταται στην καταγραφή της τιμής του  $\mathcal{X}[n, \lambda]$  στις συχνότητες  $\lambda_k = 2\pi k/N$  όπου  $N \geq L$ . Ορίζοντας την ποσότητα

$$\mathcal{X}[n, k] = X[n, 2\pi k/N] = \sum_{m=0}^{L-1} x[n+m]w[m]e^{-j(2\pi/N)km} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

αυτή, για σταθερό  $n$ , αναγνωρίζεται ως ο μετασχηματισμός DFT της ακολουθίας  $x[n+m]w[m]$  και επομένως θα έχουμε

$$x[n+m]w[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[n, k]e^{j(2\pi/N)km} \quad 0 \leq m \leq L-1$$

Στην περίπτωση αυτή, τα δείγματα της ακολουθίας μπορούν να ανακτηθούν για την περιοχή  $n$  έως  $(n+L-1)$  ως

$$x[n+m] = \frac{1}{Nw[m]} \sum_{k=0}^{N-1} X[n, k]e^{j(2\pi/N)km} \quad 0 \leq m \leq L-1$$

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

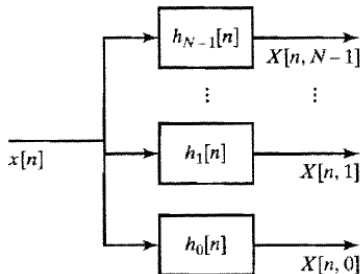
Δειγματοληψία στο χρόνο και στη συχνότητα

Παρατηρώντας τώρα ότι

$$\mathcal{X}[n, k] = x[n] * h_k[n] \quad (0 \leq k \leq N-1) \quad \text{όπου} \quad h_k[n] = w[-n]e^{j(2\pi/N)kn}$$

ο μετασχηματισμός TDFT περιγράφεται ως μία συστοιχία από  $N$  φίλτρα με το υπ αριθμόν  $k$  φίλτρο να χαρακτηρίζεται από συχνοτική απόκριση

$$\mathcal{H}_k(e^{j\omega}) = \mathcal{W}(e^{j[(2\pi k/N) - \omega]})$$



Σχήμα: Αναπαράσταση του μετασχηματισμού TDFT από συστοιχία φίλτρων.

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο χρόνο και στη συχνότητα

Η **ανακατασκευή** του σήματος  $x[n]$  για την περιοχή  $-\infty < n < \infty$  μπορεί να πραγματοποιηθεί εάν οι συναρτήσεις  $\mathcal{X}[n, \lambda]$  και  $\mathcal{X}[n, k]$  υποστούν **δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου**.

Στην περίπτωση αυτή, η αντίστοιχη συνάρτηση είναι η

$$\mathcal{X}[rR, k] = \mathcal{X}[rR, 2\pi k/N] = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR + m]w[m]e^{-j(2\pi/N)km}$$

όπου  $r$  και  $k$  ακέραιες ποσότητες με τιμές  $-\infty < r < \infty$  και  $0 \leq k \leq N - 1$ . Ορίζοντας την ποσότητα

$$\mathcal{X}_r[k] = \mathcal{X}[rR, k] = \mathcal{X}[rR, \lambda_k), \quad -\infty < r < \infty \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

όπου  $\lambda_k = 2\pi k/N$ , η ακολουθία που προκύπτει από τη **δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου** του TDFT είναι ο DFT μήκους  $N$  των ακολουθιών

$$x_r[m] = x[rR + m]w[m], \quad -\infty < r < \infty \quad 0 \leq m \leq L - 1$$

με τη θέση του παραθύρου να κινείται στο χρόνο πραγματοποιώντας **άλματα μήκους  $R$** .

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Η μέθοδος ανακατασκευής της επικάλυψης - άθροισης

Εάν είναι  $R = L = N$ , είναι δυνατή η πλήρης ανακατασκευή του σήματος από τα  $N$  δείγματα του μετασχηματισμού TDFT. Το σήμα  $x[rR + m]w[m]$  ( $0 \leq m \leq N - 1$ ) ανακτάται μέσω του υπολογισμού του αντίστροφου DFT της συνάρτησης  $X_r[k]$ .

Επομένως, μπορούμε να εκφράσουμε το διακριτό σήμα  $x[n]$  για την περιοχή τιμών  $rR \leq n \leq [(r + 1)R - 1]$  συναρτήσει των ποσοτήτων  $x_r[m]$  ως

$$x[n] = \frac{X_r[n - rR]}{w[n - rR]} \quad rR \leq n \leq [(r + 1)R - 1]$$

δηλαδή να πραγματοποιήσουμε την επόμενη διαδικασία τριών βημάτων να ανακτήσουμε τα τμήματα του σήματος μήκους  $N$  επί των οποίων έχει εφαρμοσθεί η συνάρτηση του παραθύρου να απομακρύνουμε την επίδραση του παραθύρου πραγματοποιώντας διαίρεση και να συνενώσουμε τα τμήματα για να κατασκευάσουμε το σήμα  $x[n]$

Ωστόσο, αυτό γίνεται μόνο θεωρητικά αφού στην πράξη ο μετασχηματισμός TDFT τροποποιείται συνεχώς.

Στην πράξη, η απομάκρυνση του παραθύρου οδηγεί σε αύξηση του σφάλματος στα άκρα των τμημάτων και κατά συνέπεια, όταν στο τελευταίο στάδιο προσπαθήσουμε να τα συνενώσουμε, θα διαπιστώσουμε πως αυτά δεν ταιριάζουν ακριβώς.

Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται για το  $R$ , μία τιμή μικρότερη από εκείνη των  $L$  και  $N$ , έτσι ώστε τα διαδοχικά τμήματα να επικαλύπτονται.

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Η μέθοδος ανακατασκευής της επικάλυψης - άθροισης

Εάν οι τιμές των παραμέτρων είναι τέτοιες ώστε  $R \leq L \leq N$ , θα έχουμε

$$x_r[m] = x[rR + m]w[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_r[k] e^{j(2\pi k/N)m} \quad 0 \leq m \leq L-1$$

με τα τμήματα του σήματος να έχουν διαμορφωθεί από το παράθυρο, με την αρχή μέτρησης του χρόνου να ταυτίζεται με την αρχή του παραθύρου.

Εναλλακτικά, μπορούμε να μετατοπίσουμε στο χρόνο τα παραπάνω τμήματα, έτσι ώστε αυτά να επιστρέψουν στις αρχικές τους θέσεις  $rR$  και στη συνέχεια, να τα προσθέσουμε μεταξύ τους, οπότε το ανακατασκευασμένο σήμα θα έχει τη μορφή

$$\hat{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_r[n - rR]$$

Εάν το σήμα  $\hat{x}[n]$  ταυτίζεται με το  $x[n]$  για κάθε  $n$ , οι παραπάνω εξισώσεις επιτρέπουν την τέλεια ανακατασκευή του σήματος  $x[n]$ . Συνδυάζοντας τις εξισώσεις λαμβάνουμε

$$\hat{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[rR + n - rR]w[n - rR] = x[n] \sum_{r=-\infty}^{\infty} w[n - rR]$$

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Η μέθοδος ανακατασκευής της επικάλυψης - άθροισης

και ορίζοντας την ακολουθία

$$\hat{w}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} w[n - rR]$$

το ανακατασκευασμένο σήμα που δίνεται από την παραπάνω έκφραση, διατυπώνεται ως

$$\hat{x}[n] = x[n]\bar{w}[n]$$

Η τέλεια ανακατασκευή του σήματος είναι δυνατή, όταν ικανοποιείται η συνθήκη

$$\bar{w}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} w[n - rR] = C \quad -\infty < n < \infty$$

Δύο συναρτήσεις παραθύρου οι οποίες επιτρέπουν την παραπάνω τέλεια ανακατασκευή, είναι τα παράθυρα **Bartlett** και **Hann** που περιγράφονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις

$$w_{\text{Bart}}[n] = \begin{cases} 2n/M & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - 2n/M & M/2 < n \leq M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{και}$$

$$w_{\text{Hann}}[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/M) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

Αμφότερα τα παράθυρα αυτά έχουν μήκος  $L = M + 1$  με τα δύο δείγματα στα δύο άκρα τους να έχουν τιμή **ίση με το μηδέν**.

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Η μέθοδος ανακατασκευής της επικάλυψης - άθροισης

Τα παράθυρα **Bartlett** και **Hann** με μήκος  $M = 2^ν$  οδηγούν σε **τέλεια ανακατασκευή** για τιμές  $R = M/2, M/4, \dots, 1$  και με κέρδος  $M/(2R)$ .

Πράγματι η ακολουθία  $\bar{w}[n]$  είναι **περιοδική** με περίοδο  $R$  και αναπαρίσται ως

$$\bar{w}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} w[n - rR] = \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{R-1} \mathcal{W}(e^{j(2\pi k/R)}) e^{j(2\pi k/R)n}$$

όπου  $\mathcal{W}(e^{j(2\pi k/R)})$  ο μετασχηματισμός DFT του  $w[n]$ . Η συνθήκη για την τέλεια ανακατασκευή είναι η

$$\mathcal{W}(e^{j(2\pi k/R)}) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, R-1$$

(αφού τότε θα είναι  $\bar{w}[n] = 1$  και επομένως  $\hat{x}[n] = x[n]$ ) με κέρδος ανακατασκευής

$$C = \frac{W(e^{j0})}{R}$$

Για την περίπτωση του παραθύρου Bartlett αποδεικνύεται ότι

$$W_{\text{Bart}}(e^{j\omega}) = \left(\frac{2}{M}\right) \left(\frac{\sin(\omega M/4)}{\sin(\omega/2)}\right) e^{-j\omega M/2}$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier έχει μηδενικά στις θέσεις  $4\pi k/M$  ( $k = 1, 2, \dots, M-1$ ). Επιλέγοντας για το  $R$  την τιμή  $R = M/2$ , η συνθήκη ανακατασκευής ικανοποιείται οδηγώντας σε κέρδος  $C = 1$ .

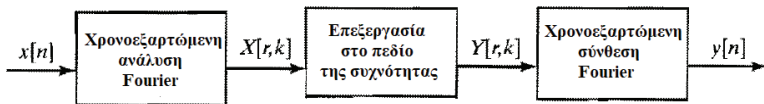


# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Επεξεργασία σήματος με τον μετασχηματισμό TDFT

Ένα **σύστημα επεξεργασίας σήματος** που στηρίζεται στη χρήση του μετασχηματισμού TDFT απεικονίζεται στη συνέχεια.

Αυτό το σύστημα αποτελείται από τρία υποσυστήματα, εκ των οποίων το πρώτο και το τρίτο πραγματοποιούν **ανάλυση** και **σύνθεση** ενώ το μεσαίο πραγματοποιεί την κατάλληλη σε κάθε περίπτωση **επεξεργασία** στο πεδίο της **συχνότητας**.



**Σχήμα:** Ένα σύστημα επεξεργασίας που χρησιμοποιεί το μετασχηματισμό TDFT.

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Επεξεργασία σήματος με τον μετασχηματισμό TDFT

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Έστω **αιτιατό διακριτό σήμα** και ας υποθέσουμε πως υπολογίζουμε τον **χρονοεξαρτώμενο μετασχηματισμό Fourier**, χρησιμοποιώντας ένα ορθογώνιο παράθυρο.

Στην περίπτωση αυτή, ο μετασχηματισμός  $\mathcal{X}_r[k]$  θα ορίζεται ως **ένα σύνολο διακριτών μετασχηματισμών Fourier** μήκους  $N$  δειγμάτων της ακολουθίας

$$x_r[m] = x[rL + m], \quad 0 \leq m \leq L - 1$$

Επειδή εδώ χρησιμοποιούνται **όλα τα δείγματα** της διακριτής ακολουθίας  $x[n]$ , ενώ τα διαδοχικά τμήματα του σήματος δεν επικαλύπτονται, προκύπτει ότι

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL]$$

Ας ορίσουμε τώρα έναν **χρονοεξαρτώμενο μετασχηματισμό Fourier** της μορφής

$$\mathcal{Y}_r[k] = \mathcal{H}[k]\mathcal{X}_r[k], \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

όπου  $\mathcal{H}[k]$  είναι ο **διακριτός μετασχηματισμός Fourier** μίας αιτιατής ακολουθίας μοναδιαίων δειγμάτων  $h[n]$  πεπερασμένου μήκους  $P$ . Εάν υπολογίσουμε τον **αντίστροφο DFT** του παραπάνω μετασχηματισμού, θα λάβουμε

$$y_r[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{Y}_r[k] e^{j(2\pi/N)km} = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_r[\ell] h[((m - \ell))_N]$$

# Ο χρονοεξαρτώμενος μετασχηματισμός Fourier

Επεξεργασία σήματος με τον μετασχηματισμό TDFT

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Με άλλα λόγια, το σήμα  $y_r[m]$  είναι η **κυκλική συνέλιξη** των ακολουθιών  $h[m]$  και  $x_r[m]$ .

Επομένως, εάν το σήμα  $x_r[m]$  έχει **πεπερασμένο μήκος** ίσο με  $L$  δείγματα, τότε, εάν είναι  **$N \geq L + P - 1$** , το σήμα  $y_r[m]$  θα **ταυτίζεται** με τη γραμμική συνέλιξη των σημάτων  $h[m]$  και  $x_r[m]$  στην περιοχή τιμών  $0 \leq m \leq L + P - 2$  ενώ θα έχει τιμή μηδέν, οπουδήποτε αλλού.

Στην περίπτωση αυτή, το σήμα εξόδου

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL]$$

θα αποτελεί την έξοδο ενός **γραμμικού και χρονικώς ανεξάρτητου διακριτού συστήματος** με κρουστική απόκριση  $h[n]$ .

Αυτή η μέθοδος αντιστοιχεί ακριβώς στη **μέθοδο επικάλυψης άθροισης** που παρουσιάσαμε προηγουμένως.

# Ανάλυση Fourier των στάσιμων τυχαίων σημάτων

## Ανάλυση Fourier των στάσιμων τυχαίων σημάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στις πιο συνηθισμένες περιπτώσεις, ένα σήμα περιγράφεται, είτε ως **άθροισμα ημίτονων με χρονικώς αμετάβλητα χαρακτηριστικά**, είτε ως **στάσιμα σήματα**, όπως είναι τα σήματα της **ανθρώπινης ομιλίας** και των **συστημάτων ραντάρ**.

Ωστόσο, υπάρχουν σήματα με **υπερβολικά περίπλοκα χαρακτηριστικά** παρόμοια με εκείνα του **θορύβου**, που μοντελοποιούνται θεωρώντας τα ως **τυχαία σήματα** αφού είναι αδύνατο να περιγραφούν με ντετερμινιστικό τρόπο.

Εάν η είσοδος ενός συστήματος LTI θεωρηθεί **τυχαία διεργασία**, χρησιμοποιούνται **στατιστικά μεγέθη**, όπως είναι η **μέση τιμή**, η **διακύμανση** ή **μεταβλητότητα**, η **συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** και το **φάσμα πυκνότητας ισχύος**.

Μία εκτίμηση της **μέσης τιμής** μιας στατικής τυχαίας διαδικασίας από ένα δείγμα δεδομένων πεπερασμένου μήκους, ορίζεται από την εξίσωση

$$\hat{m}_x = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n]$$

ενώ η αντίστοιχη εξίσωση για την μεταβλητότητα του δείγματος, έχει τη μορφή

$$\hat{\sigma}_x = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (x[n] - \hat{m}_x)^2$$

# Ανάλυση Fourier των στάσιμων τυχαίων σημάτων

## Ανάλυση Fourier των στάσιμων τυχαίων σημάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το **φάσμα πυκνότητας ισχύος**  $P_{ss}(\Omega)$  τυχαίου σήματος, υπολογίζεται μέσω του DFT και της **ανάλυσης περιοδογράμματος**.

Ισχύει **ό,τι και πριν** με τη διαφορά πως το αρχικό σήμα εισόδου  $s_c(t)$  είναι ένα **στάσιμο τυχαίο σήμα**.

Επομένως, το χαμηλοπερατό φίλτρο antialiasing δημιουργεί ένα **νέο στάσιμο τυχαίο σήμα**, με φάσμα ισχύος **περιορισμένου εύρους ζώνης** έτσι ώστε να είναι δυνατή η **δειγματοληψία** του σήματος χωρίς την εμφάνιση του φαινομένου της **αναδίπλωσης**.

Με άλλα λόγια, το διακριτό σήμα  $x[n]$  είναι ένα **στάσιμο τυχαίο σήμα διακριτού χρόνου**, του οποίου η **φασματική συχνότητα ισχύος**  $P_{xx}(\Omega)$  είναι ανάλογη της ισχύος  $P_{ss}(\Omega)$  **για όλη την έκταση του εύρους ζώνης** του φίλτρου antialiasing. Ειδικότερα, θα είναι

$$P_{xx}(\omega) = \frac{1}{T} P_{ss}\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi$$

όπου έχουμε υποθέσει πως η συχνότητα αποκοπής του φίλτρου antialiasing είναι ίση με  $\pi/T$  όπου  $T$  είναι η **περίοδος δειγματοληψίας**. Τέλος, ο **μετασχηματισμός Fourier** του σήματος  $v[n] = x[n]w[n]$  έχει τη μορφή

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]x[n]e^{-j\omega n}$$

# Ανάλυση Fourier των στάσιμων τυχαίων σημάτων

## Περιοδόγραμμα

Θεωρώντας ως μία **εκτίμηση** για το φάσμα ισχύος την ποσότητα

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} |V(e^{j\omega})|^2$$

όπου  $U$  **βοηθητική σταθερά** και χρησιμοποιώντας **ορθογώνιο παράθυρο**, η ποσότητα  $I(\omega)$  είναι γνωστή ως **περιοδόγραμμα**, ενώ εάν χρησιμοποιηθεί άλλο παράθυρο, ως **τροποποιημένο περιοδόγραμμα**. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} c_{vv}[m] e^{-j\omega m}$$

όπου η ακολουθία  $c_{vv}[m]$  αποτελεί **απεριοδική ακολουθία συσχέτισης** για το πεπερασμένου μήκους σήμα  $v[n] = w[n]x[n]$  το ορίζεται ως

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]w[n]x[n+m]w[n+m]$$

Το περιοδογραμμα λοιπόν, αποτελεί **τον μετασχηματισμό Fourier της απεριοδικής ακολουθίας συσχέτισης του διακριτού σήματος  $v[n]$  πεπερασμένου μήκους**, που προέκυψε μετά την εφαρμογή του παράθυρου.

Είναι σημαντικό να γίνει κατανοητό, πως για κάθε τιμή της συχνότητας  $\omega$ , η τιμή  $I(\omega)$  θεωρείται **τυχαία μεταβλητή**.

# Ανάλυση Fourier των στάσιμων τυχαίων σημάτων

## Περιοδογράμμα

Ο **επακριβής υπολογισμός** του περιοδογράμματος μπορεί να πραγματοποιηθεί **μόνο στις διακριτές συχνότητες**  $\omega_k = 2\pi k/N$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ), με τα δείγματά του να ορίζονται ως

$$I[k] = I(\omega_k) = \frac{1}{LU} |V[k]|^2 = \frac{1}{LU} \left| \sum_{n=0}^{L-1} w[n]x[n]e^{-j(2\pi/N)kn} \right|^2$$

όπου  $V[k]$  ο μετασχηματισμός DFT  $N$  σημείων της ακολουθίας  $x[n]w[n]$ .

Εάν ένα **τυχαίο** σήμα χαρακτηρίζεται από **μηδενικό μέσο όρο**, το φάσμα ισχύος εμφανίζει **κρουστική συνάρτηση** στη θέση **μηδενικής** συχνότητας.

Εάν αυτή η μέση τιμή είναι **αρκετά μεγάλη**, αυτή η συνιστώσα **κυριαρχεί** στην εκτίμησή του φάσματος, με τις φασματικές συνιστώσες μικρού πλάτους να καθίσταται **δυσδιάκριτες** λόγω **φασματικής διαρροής**.

Για το λόγο αυτό, στην πράξη αρχικά υπολογίζεται ο μέσος όρος ο οποίος **αφαιρείται** από το σήμα, **πριν** τον υπολογισμό του φάσματος, κάτι που οδηγεί σε **καλύτερα** αποτελέσματα στις θέσεις των γειτονικών συχνοτήτων.

Από την εξίσωση ορισμού του περιοδογράμματος, η **αναμενόμενη τιμή** του είναι

$$\mathcal{E}\{I(\omega)\} = \frac{1}{LU} \sum_{m=0}^{L-1} \mathcal{E}\{c_{vv}[m]\}e^{-j\omega m}$$

# Ανάλυση Fourier των στάσιμων τυχαίων σημάτων

## Περιοδογράμμο

ενώ η αναμενόμενη τιμή των συντελεστών  $c_{\nu\nu}[m]$  έχει τη μορφή

$$\mathcal{E}\{c_{\nu\nu}[m]\} = \sum_{n=0}^{L-1} \mathcal{E}\{x[n]w[n]x[n+m]w[n+m]\} = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]w[n+m]\mathcal{E}\{x[n]x[n+m]\}$$

Επειδή το σήμα  $x[n]$  θεωρείται **στάσιμο σήμα**, θα έχουμε

$$\mathcal{E}\{x[n]x[n+m]\} = \phi_{xx}[m]$$

και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\mathcal{E}\{c_{\nu\nu}[m]\} = c_{ww}[m]\phi_{xx}[m]$$

όπου

$$c_{\nu\nu}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]w[n+m]$$

Επομένως, η μέση τιμή της περιοδικής αυτοσυσχέτισης που έχει πολλαπλασιαστεί με συνάρτηση παραθύρου, είναι ίση με την περιοδική αυτοσυσχέτιση του παραθύρου επί την πραγματική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{E}\{I(\omega)\} = \frac{1}{2\pi LU} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\theta) C_{ww}(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$



# Ανάλυση Fourier των στάσιμων τυχαίων σημάτων

## Περιοδογράμμα

όπου  $C_{ww}(e^{j\omega})$  είναι ο **μετασχηματισμός Fourier** της απεριοδικής αυτοσυσχέτισης του παραθύρου - θα είναι δηλαδή

$$C_{ww}(e^{j\omega}) = |W(e^{j\omega})|^2$$

Ο συντελεστής  $1/LU$  επιλέγεται έτσι ώστε η τιμή της  $\mathcal{E}\{I(\omega)\}$  να προσεγγίσει την  $P_{xx}(\omega)$ .

$$\frac{1}{2\pi LU} \int_{-\pi}^{\pi} |W(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{LU} \sum_{n=0}^{L-1} (w[n])^2 = 1$$

ή ισοδύναμα,

$$U = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (w[n])^2$$

Για το **ορθογώνιο παράθυρο** θέτουμε  $U = 1$ , ενώ για τα άλλα παράθυρα επιλέγουμε μία τιμή  $0 < U < 1$ , εάν η συνάρτηση  $w[n]$  κανονικοποιηθεί έτσι ώστε η μέγιστη τιμή της να είναι ίση με τη μονάδα.

Τέλος η **μεταβλητότητα** του περιοδογράμματος υπολογίζεται από την έκφραση

$$\text{var}[I(\omega)] \simeq P_{xx}^2(\omega)$$

δηλαδή είναι περίπου ίση σε μέγεθος με **το τετράγωνο του φάσματος ισχύος**.

Επειδή η μεταβλητότητα **δεν προσεγγίζει** ασυμπτωτικά το 0 με την αύξηση του μήκους του  $w[n]$ , το περιοδογράμμα **δεν αποτελεί** συνεπή εκτίμηση του φάσματος.

# Ανάλυση Fourier των στάσιμων τυχαίων σημάτων

## Μεσοτίμηση περιοδογράμματος

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στη **μεσοτίμηση περιοδογράμματος**, μία ακολουθία  $x[n]$  ( $0 \leq n \leq Q - 1$ ) διαιρείται σε τμήματα μήκους  $L$ , στο καθένα των οποίων εφαρμόζεται ένα παράθυρο  $w[n]$  μήκους  $L$ .

Με τον τρόπο αυτό, σχηματίζουμε τις ακολουθίες

$$x_r[n] = x[rR + n]w[n], \quad 0 \leq n \leq L - 1$$

Εάν είναι  $R < L$ , οι ακολουθίες **επικαλύπτονται**, ενώ για  $R = L$ , οι ακολουθίες είναι **διαδοχικές η μία μετά την άλλη χωρίς επικάλυψη**.

Η παράμετρος  $Q$  εκφράζει το **πλήθος των δεδομένων**, ενώ το συνολικό πλήθος των τμημάτων, εξαρτάται από τη σχέση ανάμεσα στα  $R$ ,  $L$  και  $Q$  και είναι ίσο με  $K$ , όπου  $K$  ο μέγιστος ακέραιος τέτοιος ώστε  $(K - 1)R + (L - 1) \leq Q - 1$ .

Ειδικότερα, το **περιοδόγραμμα** του υπ' αριθμόν  $k$  τμήματος δίδεται από την εξίσωση

$$I_r(\omega) = \frac{1}{LU} |\mathcal{X}_r(e^{j\omega})|^2$$

όπου  $\mathcal{X}_r(e^{j\omega})$  ο **μετασχηματισμός DTFT** του τμήματος  $x_r[n]$ . Η **μεσοτίμηση περιοδογράμματος**, συνίσταται στον υπολογισμό του **μέσου όρου** των  $K$  εκτιμήσεων περιοδογράμματος  $I_r(\omega)$  και οδηγεί στον υπολογισμό του μεγέθους

$$\bar{I}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} I_r(\omega)$$

# Ανάλυση Fourier των στάσιμων τυχαίων σημάτων

Μεσοτίμηση περιοδογράμματος

η **αναμενόμενη τιμή** του οποίου δίδεται από την έκφραση

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} \mathcal{E}\{I_r(\omega)\}$$

ή επειδή τα περιοδογράμματα είναι **ανεξάρτητα** και **ομοιόμορφα κατανεμημένα**,

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \mathcal{E}\{I_r(\omega)\} \quad \text{για κάθε } r$$

Ειδικότερα, από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \mathcal{E}\{I_r(\omega)\} = \frac{1}{2\pi LU} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\theta) C_{ww}(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

όπου  $L$  είναι το μήκος του παραθύρου. Για το **ορθογώνιο παράθυρο**, αυτή η μέθοδος λέγεται **διαδικασία του Bartlett** και ισχύει

$$c_{ww}[m] = \begin{cases} L - |m| & |m| \leq (L - 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

από όπου προκύπτει

$$C_{ww}(e^{j\omega}) = \left( \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right)^2$$

# Ανάλυση Fourier των στάσιμων τυχαίων σημάτων

## Μεσοτίμηση περιοδογράμματος

Η **αναμενόμενη τιμή** της μέσης εκτίμησης του φάσματος του περιοδογράμματος, αποτελεί λοιπόν **τη συνέλιξη** του πραγματικού φάσματος ισχύος με το μετασχηματισμό Fourier της τριγωνικής ακολουθίας  $c_{ww}[n]$  που προκύπτει ως η αυτοσυσχέτιση του ορθογώνιου παραθύρου.

Από την άλλη πλευρά, η **μεταβλητότητα** του μέσου περιοδογράμματος είναι

$$\text{var}[\bar{I}(\omega)] = \frac{1}{K} \text{var}[I_r(\omega)] \simeq \frac{1}{K} P_{xx}^2(\omega)$$

και αντιστρόφως ανάλογη του πλήθους των περιοδογραμμάτων για τα οποία υπολογίζουμε το μέσο όρο.

Καθώς η τιμή του  $K$  αυξάνεται, η μεταβλητότητα **τείνει στο μηδέν**.

Όπως και με το σύνηθες περιοδόγραμμα, το **μέσο περιοδόγραμμα** μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια μόνο **σε ένα διακριτό σύνολο συχνοτήτων**  $\omega_k = 2\pi k/N$  για μία κατάλληλη τιμή του  $N$ . Οι σχετικές εξισώσεις είναι οι

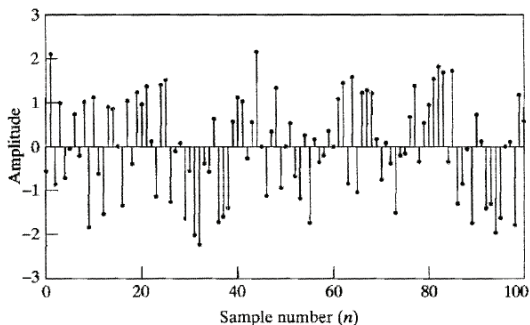
$$I_r[k] = I_r(\omega_k) = \frac{1}{LU} |X_r[k]|^2 \quad \text{και} \quad \bar{I}[k] = \bar{I}(\omega_k) = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} I_r[k]$$

# Ανάλυση Fourier των στάσιμων τυχαίων σημάτων

Μεσοτίμηση περιοδογράμματος - Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τη διακριτή ακολουθία του επόμενου σχήματος

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \theta) + e[n]$$



Σχήμα: Ημιτονοειδής ακολουθία αλλοιωμένη από λευκό θόρυβο.

# Ανάλυση Fourier των στάσιμων τυχαίων σημάτων

Μεσοτίμηση περιοδογράμματος - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

όπου  $\theta$  είναι μία **τυχαία μεταβλητή** ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα από 0 έως  $2\pi$  και **ανεξάρτητη** από το σήμα  $e[n]$ , το οποίο αναπαριστά ένα **λευκό θόρυβο** με μηδενικό μέσο όρο που χαρακτηρίζεται από **σταθερό φάσμα ισχύος** της μορφής  $P_{ee}(\omega) = \sigma_e^2$  για κάθε συχνότητα  $\omega$ .

Στα μοντέλα σημάτων αυτού του τύπου, συνήθως το ημιτονοειδές σήμα αποτελεί την **επιθυμητή συνιστώσα**, ενώ το σήμα  $e[n]$  αποτελεί την **ανεπιθύμητη συνιστώσα θορύβου**.

Για την περιοχή συχνοτήτων  $|\omega| \leq \pi$ , το φάσμα ισχύος του σήματος δίνεται από την εξίσωση

$$P_{xx}(\omega) = \frac{A^2\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \sigma_e^2 \quad \text{for } |\omega| \leq \pi$$

και πως η **αναμενόμενη τιμή** για το μέσο περιοδόγραμμα έχει τη μορφή

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \frac{A^2}{4LU} [C_{ww}(e^{j(\omega - \omega_0)}) + C_{ww}(e^{j(\omega + \omega_0)})] + \sigma_e^2$$

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται εκτιμήσεις του φάσματος ισχύος με βάση το μέσο περιοδόγραμμα για **ορθογώνια παράθυρα μοναδιαίου πλάτους**, οπότε θα είναι  $U = 1$  και με μήκη  $L = 1024, 256$  και  $64$ , με συνολικό πλήθος δειγμάτων  $Q = 1024$ .

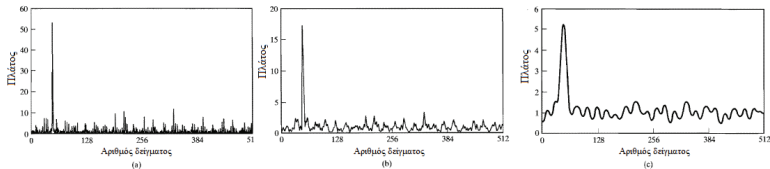
Με εξαίρεση την εικόνα ( $\alpha$ ), τα παράθυρα επικαλύπτονται κατά το ήμισυ του μήκους του παραθύρου.

# Ανάλυση Fourier των στάσιμων τυχαίων σημάτων

Μεσοτίμηση περιοδογράμματος - Παράδειγμα

Στην εικόνα (α) απεικονίζεται το περιοδογράμμα για ολόκληρο το σύνολο των δεδομένων, ενώ στις εικόνες (β) και (γ) απεικονίζεται το μέσου περιοδογράμμα για  $K = 7$  και 31 τμήματα αντίστοιχα. Η αναμενόμενη τιμή του μέσου περιοδογράμματος στη συχνότητα  $\omega_0$  υπολογίζεται ως

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega_0)\} = \frac{A^2 L}{4} + \sigma_e^2$$



Σχήμα: Τα αποτελέσματα των υπολογισμών.