Ο μετασχηματισμός Laplace

(ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4)

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Ι. ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2014

Ο μετασχηματισμός Laplace επιτρέπει την αναπαράσταση ενός συνεχούς σήματος $x(t)$ στο μιγαδικό επίπεδο και ορίζεται από τη σχέση

$$\boxed{\mathcal{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt}$$

όπου s μιγαδική μεταβλητή της μορφής $s = \sigma + j\omega$ που ονομάζεται μιγαδική συχνότητα.

Πράγματι, αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τη μεταβλητή s από την έκφραση $\sigma + j\omega$ έχουμε

$$\mathcal{X}(s) = \mathcal{X}(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ x(t)\, e^{-\sigma t} \right\} e^{-j\omega t} dt$$

που αποτελεί το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $y(t) = x(t)\, e^{-\sigma t}$. Ο εκθετικός όρος $e^{-\sigma t}$ επιτρέπει τη σύγκλιση του ολοκληρώματος ακόμη και εάν ο μετασχηματισμός Fourier δεν υφίσταται

Ο μετασχηματισμός Laplace
Εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

Ειδική μορφή του μετασχηματισμού Laplace είναι αυτή στην οποία το κάτω όριο του ολοκληρώματος είναι $\alpha = 0$ και όχι $\alpha = -\infty$, δηλαδή

$$\boxed{\mathcal{X}(s) \equiv \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\varepsilon}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt}$$

Αυτός ο μετασχηματισμός χαρακτηρίζεται ως μονόπλευρος για να τον διακρίνουμε από τον προηγούμενο που είναι γνωστός ως αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace.

Εάν το πρόβλημα περιλαμβάνει κρουστικές συναρτήσεις για $t = 0$, ως κάτω όριο χρησιμοποιούμε το 0^-, προκειμένου να τις συμπεριλάβουμε στο πρόβλημα μαζί με τις σχετιζόμενες αρχικές συνθήκες.

Δύο σήματα που διαφέρουν μόνο στην περιοχή τιμών $t < 0$ ενώ είναι ταυτόσημα για $t > 0$, έχουν διαφορετικό αμφίπλευρο αλλά ίδιο μονόπλευρο μετασχηματισμό.

Ένα αιτιατό σήμα $x(t)$ - με τιμές $x(t) = 0$ για $t < 0$ - έχει μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace ο οποίος ταυτίζεται με τον αντίστοιχο αμφίπλευρο μετασχηματισμό όσον αφορά τόσο τη συναρτησιακή τους αναπαράσταση όσο και τις ιδιότητές τους.

Ο μετασχηματισμός Laplace
Γενικευμένοι ολοκληρωτικοί γραμμικοί μετασχηματισμοί

Όνομα	$k(\xi, t)$	ξ_1	ξ_2	$k^{-1}(t, \xi)$	t_1	t_2
Fourier	$\frac{e^{-j\xi t}}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{e^{j\xi t}}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	$+\infty$
Mellin	$t^{\xi-1}$	0	$+\infty$	$\frac{t^{-\xi}}{2\pi j}$	$c-j\infty$	$c+j\infty$
Laplace	$e^{-\xi t}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{e^{\xi t}}{2\pi j}$	$c-j\infty$	$c+j\infty$
Hilbert	$\frac{1}{\pi(\xi-t)}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{\pi(\xi-t)}$	$-\infty$	$+\infty$
Hartley	$\frac{\cos(\xi t)+\sin(\xi t)}{2\pi}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{\cos(\xi t)+\sin(\xi t)}{2\pi}$	$-\infty$	$+\infty$
Identity	$\delta(\xi-t)$	$t_1 < \xi$	$t_2 > \xi$	$\delta(t-\xi)$	$\xi_1 < t$	$\xi_2 > t$
Hankel	$tJ_\nu(\xi t)$	0	$+\infty$	$\xi J_\nu(\xi t)$	0	$+\infty$
Abel	$\frac{2t}{\sqrt{t^2-\xi^2}}$	ξ	$+\infty$	$-\frac{1}{\pi\sqrt{\xi^2-t^2}}\frac{d}{d\xi}$	t	$+\infty$

Θεώρημα

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\alpha}^{\infty} x(t)\, dt$$

συγκλίνει προς κάποια πεπερασμένη τιμή, όταν πληρούνται ταυτόχρονα οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

- *Η συνάρτηση σήματος $x(t)$ είναι τμηματικά συνεχής για κάθε $t \geq \alpha$.*
- *Υπάρχει συνάρτηση $y(t)$ τέτοια ώστε $|x(t)| \leq y(t)$ για κάθε $t \geq M$ όπου M θετική σταθερά.*
- *Το γενικευμένο ολοκλήρωμα*

$$J = \int_{M}^{\infty} y(t)\, dt$$

υφίσταται και συγκλίνει προς κάποια πεπερασμένη τιμή.

Αντίθετα, το ολοκλήρωμα I δεν υφίσταται, δηλαδή αποκλίνει, εάν για κάθε $t \geq M$ ισχύει η ιδιότητα $x(t) \geq y(t) \geq 0$ και το ολοκλήρωμα J αποκλίνει επίσης.

Ορισμός

Μία συνάρτηση σήματος $x(t)$ λέγεται εκθετικής τάξης α στο όριο $t \to \infty$, εάν υπάρχουν πραγματικές σταθερές $M \geq 0$ και $K > 0$ καθώς και πραγματική παράμετρος α, ώστε

$$|x(t)| \leq Ke^{\alpha t}$$

για τιμές $t \geq M$. Ας σημειωθεί, πως στην πράξη για να χαρακτηρίσουμε μία συνάρτηση ως εκθετικής τάξης α αρκεί να αποδείξουμε πως η συνάρτηση $x(t)e^{-\alpha t}$ είναι φραγμένη για μεγάλες τιμές της παραμέτρου t, ιδιότητα, ή σε μαθηματική διατύπωση,

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ x(t)\, e^{-\alpha t} \right\} = 0$$

Θεώρημα

Ας θεωρήσουμε ένα συνεχές σήμα $x(t)$ το οποίο πληροί τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

- *Είναι τμηματικά συνεχές στο διάστημα $0 \leq t \leq A$ για κάθε τιμή της θετικής παραμέτρου A.*
- *Είναι εκθετικής τάξης α, δηλαδή υπάρχουν πραγματικές σταθερές $M \geq 0$ και $K > 0$ και θετική πραγματική παράμετρος α τέτοια ώστε*

  $$|x(t)| \leq Ke^{\alpha t}$$

  για κάθε $t \geq M$.

Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{X}(s)$$

με περιοχή σύγκλισης $\sigma > \alpha$ όπου το σύμβολο σ εκφράζει το πραγματικό μέρος της μιγαδικής μεταβλητής s.

Ο μετασχηματισμός Laplace
Ιδιότητες της περιοχής σύγκλισης

- Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace αποτελείται από ζώνες που είναι παράλληλες προς τον φανταστικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου.
- Η περιοχή σύγκλισης δεν μπορεί να περιέχει πόλους.
- Εάν το συνεχές σήμα $x(t)$ έχει πεπερασμένη διάρκεια και είναι απολύτως ολοκληρώσιμο, τότε η περιοχή σύγκλισης είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο.
- Εάν το συνεχές σήμα $x(t)$ είναι σήμα δεξιάς πλευράς - δηλαδή υπάρχει χρονική στιγμή T_1 τέτοια ώστε να είναι $x(t) = 0$ για $t < T_1 < \infty$ - και η ευθεία $\Re(s) = \sigma_0$ ανήκει στην περιοχή σύγκλισης τότε όλα τα σημεία s του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση $\Re(s) > \sigma_0$ θα ανήκουν στην περιοχή σύγκλισης.
- Εάν το συνεχές σήμα $x(t)$ είναι σήμα αριστερής πλευράς - δηλαδή υπάρχει χρονική στιγμή T_2 τέτοια ώστε να είναι $x(t) = 0$ για $t > T_2 > -\infty$ - και η ευθεία $\Re(s) = \sigma_0$ ανήκει στην περιοχή σύγκλισης τότε όλα τα σημεία s του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση $\Re(s) < \sigma_0$ θα ανήκουν στην περιοχή σύγκλισης.

Ο μετασχηματισμός Laplace
Ιδιότητες της περιοχής σύγκλισης

- Εάν το συνεχές σήμα $x(t)$ έχει άπειρη διάρκεια και ορίζεται τόσο για $t \geq 0$ όσο και για $t < 0$ ενώ η ευθεία $\sigma_0 = \Re(s)$ ανήκει στην περιοχή σύγκλισης, τότε αυτή είναι μία ζώνη του μιγαδικού επιπέδου που περιέχει την ευθεία $\sigma_0 = \Re(s)$.

- Εάν ο μετασχηματισμός $\mathcal{L}\{x(t)\}$ του σήματος $x(t)$ είναι ρητή συνάρτηση, η περιοχή σύγκλισης θα περιορίζεται από πόλους ή θα εκτείνεται στο άπειρο αν δεν υπάρχουν πόλοι. Εάν υπάρχουν πόλοι, αυτοί δεν θα ανήκουν στην περιοχή σύγκλισης.

- Εάν ο μετασχηματισμός $\mathcal{L}\{x(t)\}$ του σήματος $x(t)$ είναι ρητή συνάρτηση, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
  - εάν το σήμα $x(t)$ είναι σήμα δεξιάς πλευράς, τότε η περιοχή σύγκλισης θα περιγράφεται από την εξίσωση $\sigma > \sigma_{max}$ όπου η ποσότητα σ_{max} αναφέρεται στον πόλο με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος.
  - εάν το σήμα $x(t)$ είναι σήμα αριστερής πλευράς, τότε η περιοχή σύγκλισης θα περιγράφεται από την εξίσωση $\sigma < \sigma_{min}$ όπου η ποσότητα σ_{min} αναφέρεται στον πόλο με το μικρότερο πραγματικό μέρος.

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\delta(t)$.

Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Laplace θα έχουμε

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st} dt = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει δια της εφαρμογής *της ιδιότητας της επιλογής* της συνάρτησης $\delta(t)$ για τη συνάρτηση $x(t) = e^{-st}$ η οποία περιγράφεται από την εξίσωση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, x(t)\, dt = x(0)$$

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace του συνεχούς σήματος $x(t) = e^t u(t)$.

Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Laplace θα έχουμε

$$\mathcal{X}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^t u(t)\, e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(1-s)t} dt$$

Προκειμένου να ισχύει η ιδιότητα σύγκλισης $\lim_{t\to\infty}[e^{(1-s)t}] = 0$ θα πρέπει να είναι $\sigma \equiv \Re(s) > 1$ αφού ως γνωστόν θα έχουμε $|e^{(1-s)t}| = |e^{(1-\sigma)t}| \cdot |e^{-j\omega t}| = e^{(1-\sigma)t}$. Για αυτή την περιοχή τιμών της μιγαδικής μεταβλητής s, το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως

$$\mathcal{X}(s) = \int_0^{\infty} e^{(1-s)t} dt = \left[\frac{e^{(1-s)t}}{1-s} \right]_0^{\infty} = 1$$

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace του συνεχούς σήματος $x(t) = \cos(\omega t)u(t)$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler $\cos(\omega t) = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$ και τον ορισμό της συνάρτησης $u(t)$, μετά από απλές πράξεις βρίσκουμε

$$\mathcal{X}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(j\omega - s)t}}{j\omega - s}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-(j\omega+s)t}}{j\omega + s}\right]_0^{\infty}$$

Η περιοχή σύγκλισης του παραπάνω μετασχηματισμού θα προκύψει από την απαίτηση

$$\lim_{t\to\infty} [e^{(j\omega - s)t}] = \lim_{t\to\infty} [e^{(j\omega - \sigma - j\omega)t}] = \lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} [e^{-(j\omega+s)t}] = \lim_{t\to\infty} [e^{(-j\omega - \sigma - j\omega)t}] = \lim_{t\to\infty} [e^{-\sigma t} e^{-2j\omega}] = e^{-2j\omega} \lim_{t\to\infty} [e^{-\sigma t}] = 0$$

Οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν για θετικές τιμές της παραμέτρου σ. Θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{X}(s) = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{j\omega + s} - \frac{1}{j\omega - s}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace
Παραδείγματα στοιχειωδών μετασχηματισμών Laplace

$x(t)$	$\mathcal{L}\{x(t)\}$	ROC
$\delta(t)$	1	$\Re(s) > -\infty$
$u(t)$	$1/s$	$\Re(s) > 0$
$tu(t)$	$1/s^2$	$\Re(s) > 0$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re(s) > -\Re(\alpha)$
$e^{+\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$\Re(s) < \Re(\alpha)$
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\Re(s) > 0$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\Re(s) > 0$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$\Re(s) > -\Re(\alpha)$
$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$\Re(s) > -\Re(\alpha)$

Ο μετασχηματισμός Laplace
Πόλοι και μηδενικές τιμές

Στη γενική περίπτωση ο μετασχηματισμός Laplace είναι ρητή συνάρτηση της μορφής

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 s^{-1} + \beta_2 s^{-2} + \cdots + \beta_M s^{-M}}{\alpha_0 + \alpha_1 s^{-1} + \alpha_2 s^{-2} + \cdots + \alpha_N s^{-N}}$$

$$= \frac{\beta_0}{\alpha_0} \frac{(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_M)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_N)} = \frac{\beta_0}{\alpha_0} \frac{\prod_{k=1}^{M}(s - z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(s - p_k)} s^{M-N}$$

όπου α_i και β_j $(i = 1, 2, \ldots, N$ και $j = 1, 2, \ldots, M)$ πραγματικές σταθερές.

- Οι ρίζες του αριθμητή $z_1, z_2, \ldots, z_M$ είναι γνωστές ως μηδενικές τιμές της συνάρτησης $\mathcal{L}\{x(t)\}$.
- Οι ρίζες του παρονομαστή $p_1, p_2, \ldots, p_N$ είναι γνωστοί ως πόλοι της συνάρτησης $\mathcal{L}\{x(t)\}$.

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace του συνεχούς σήματος $x(t) = e^{-\alpha|t|}$ και να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών για $\alpha > 0$ και $\alpha < 0$

Από την ιδιότητα της απόλυτης τιμής θα έχουμε

$$|t| = \begin{cases} +t & t > 0 \\ -t & t < 0 \end{cases}$$

και επομένως το συνεχές σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) + e^{(-\alpha)(-t)}u(-t) = e^{-\alpha t}u(t) + e^{\alpha t}u(-t)$$

με μετασχηματισμό Laplace

$$\boxed{\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}u(t)\} + \mathcal{L}\{e^{\alpha t}u(t)\} = \frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{s-\alpha} = -\frac{2\alpha}{s^2-\alpha^2}}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace
Πόλοι και μηδενικές τιμές

$\boldsymbol{\alpha > 0}$: οι περιοχές σύγκλισης των $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}u(t)\}$ και $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}u(t)\}$ είναι οι

$$\Re(s) > -\alpha \quad \text{και} \quad \Re(s) < \alpha$$

Επομένως η περιοχή σύγκλισης του $\mathcal{L}\{x(t)\}$ θα είναι η επικάλυψη των δύο περιοχών

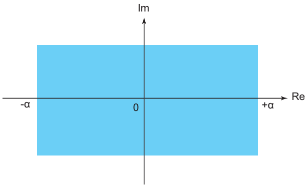
$$-\alpha < \Re(s) < \alpha$$

Η συνάρτηση $\mathcal{L}\{x(t)\}$ δεν διαθέτει μηδενικές τιμές ενώ διαθέτει δύο πόλους στις θέσεις $s = -\alpha$ και $s = +\alpha$ (δείτε το επισυναπτόμενο σχήμα).

$\boldsymbol{\alpha < 0}$: οι περιοχές σύγκλισης των $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}u(t)\}$ και $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}u(t)\}$ είναι οι

$$\Re(s) > \alpha \quad \text{και} \quad \Re(s) < -\alpha$$

Αυτές δεν επικαλύπτονται και ο μετασχηματισμός $\mathcal{L}\{x(t)\}$ δεν υφίσταται.



- Γραμμικότητα: Εάν οι μετασχηματισμοί Laplace των $x(t)$ και $y(t)$ είναι

$$\mathcal{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \quad \text{και} \quad \mathcal{Y}(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$$

με περιοχές σύγκλισης $\sigma > \alpha_x$ και $\sigma > \alpha_y$ με $\alpha_y > \alpha_x$, τότε, ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος

$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$$

είναι ο

$$\mathcal{Z}(s) = \mathcal{L}\{z(t)\} = \mathcal{L}\{\alpha x(t) + \beta y(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{x(t)\} + \beta\mathcal{L}\{y(t)\} = \alpha\mathcal{X}(s) + \beta\mathcal{Y}(s)$$

όπου α και β πραγματικοί αριθμοί.

- Μετατόπιση στο χρόνο: Εάν ο μετασχηματισμός Laplace του $x(t)$ είναι ο $\mathcal{X}(s)$ με περιοχή σύγκλισης κάποιο υποσύνολο R του μιγαδικού επιπέδου, τότε, ο μετασχηματισμός Laplace του $y(t) = x(t - t_0)$ θα είναι ο

$$\mathcal{Y}(s) = e^{-st_0}\mathcal{X}(s)$$

με την ίδια περιοχή σύγκλισης.

- Μετατόπιση στο μιγαδικό επίπεδο: Εάν ο μετασχηματισμός Laplace του $x(t)$ είναι ο $\mathcal{X}(s)$, τότε, ο μετασχηματισμός Laplace του $y(t) = e^{s_0 t}x(t)$ θα είναι ο

$$\mathcal{Y}(s) = \mathcal{X}(s - s_0)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

- Χρονική κλιμάκωση: Εάν ο μετασχηματισμός Laplace του $x(t)$ είναι ο $\mathcal{X}(s)$, τότε, ο μετασχηματισμός Laplace του $y(t) = x(\alpha t)$ θα είναι ο

$$\mathcal{Y}(s) = \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)\mathcal{X}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

- Μιγαδική συζυγία: Εάν ο μετασχηματισμός Laplace του $x(t)$ είναι ο $\mathcal{X}(s)$, τότε, ο μετασχηματισμός Laplace του $y(t) = x^*(t)$ θα είναι ο

$$\mathcal{Y}(s) = \mathcal{X}^*(s^*)$$

- Διαφόριση: εάν το σήμα $x(t)$ είναι
  - τμηματικά συνεχής συνάρτηση με τμηματικά συνεχή παράγωγο $x'(t)$ σε κάθε διάστημα $0 \leq t \leq T$
  - εκθετικής τάξης στο όριο $t \to \infty$

  τότε για την περιοχή $\Re(s) > \alpha$ υφίσταται ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}\{x'(t)\}$ της παραγώγου $x'(t)$ και ορίζεται ως

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0^+)$$

Θεώρημα

Έστω $x(t)$ τμηματικά συνεχής συνάρτηση με συνεχή παράγωγο $x^{(n-1)}(t)$ τάξεως $n-1$ και τμηματικά συνεχή παράγωγο $x^{(n)}(t)$ τάξεως n σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $0 \leq t \leq T$.

Έστω επίσης πως το $x(t)$ καθώς και όλες οι παράγωγοί του $x^{(i)}(t)$ τάξεως $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ είναι εκθετικής τάξης α στο όριο $t \to \infty$.

Εάν πληρούνται οι παραπάνω προϋποθέσεις, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $x^{(n)}(t)$ με περιοχή σύγκλισης $\Re(s) > \alpha$ ο οποίος δίδεται από τη σχέση

$$\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{x(t)\} - s^{n-1}x(0^+) - s^{n-2}x'(0^+) - \cdots - x^{(n-1)}(0^+)$$

- **Διαφόριση στο χώρο των s**: εάν το σήμα $x(t)$ είναι **τμηματικά συνεχής συνάρτηση** και διαθέτει μετασχηματισμό Laplace, τότε η **παράγωγος** του εν λόγω μετασχηματισμού ως προς τη μεταβλητή s είναι

$$\frac{d\mathcal{X}(s)}{ds} = \frac{d\mathcal{L}\{x(t)\}}{ds} = \mathcal{L}\{-tx(t)\}$$

- **Ολοκλήρωση**: εάν το σήμα $x(t)$ είναι **τμηματικά συνεχής συνάρτηση** και διαθέτει μετασχηματισμό Laplace, τότε ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος

$$y(t) = \int_0^t x(\xi)\, d\xi$$

υπάρχει και δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{Y}(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\xi)\, d\xi\right\} = \frac{\mathcal{L}\{x(t)\}}{s} + \frac{1}{s}x^{(-1)}(0^+) = \frac{\mathcal{X}(s)}{s} + \frac{1}{s}x^{(-1)}(0^+)$$

όπου η παράγωγος αρνητικής τάξης $x^{(-1)}(t)$ παραπέμπει σε διαδικασία **ολοκλήρωσης**.

Θεώρημα

Εάν το συνεχές σήμα $x(t)$ διαθέτει μετασχηματισμό Laplace και υπάρχει το όριο της συνάρτησης $x(t)/t$ για $t \to 0^+$ τότε θα είναι

$$\mathcal{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\} = \int_0^{\infty} \mathcal{L}\{x(t)\}ds = \int_0^{\infty} \mathcal{X}(s)\, ds$$

- Συνέλιξη: Έστω $x(t)$ και $y(t)$ σήματα με μετασχηματισμούς $\mathcal{X}(s) \equiv \mathcal{L}\{x(t)\}$ και $\mathcal{Y}(s) \equiv \mathcal{L}\{y(t)\}$. Ο μετασχηματισμός του σήματος $z(t) = x(t) * y(t)$, δίδεται από τη σχέση

$$\mathcal{Z}(s) = \mathcal{L}\{z(t)\} = \mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\}\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{X}(s)\mathcal{Y}(s)$$

- Περιοδικότητα: εάν το σήμα $x(t)$ είναι τμηματικά συνεχής και περιοδική συνάρτηση εκθετικής τάξης με περίοδο T, τότε

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^{T} x(t)\, e^{-st} dt$$

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace του συνεχούς σήματος $x(t) = t^2\cos(\omega t)$

Χρησιμοποιώντας δύο φορές την ιδιότητα της διαφόρισης στο χώρο των s έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2\cos(\omega t)\} &= \mathcal{L}\{(-t)[(-t)\cos(\omega t)]\} = -\frac{d}{ds}\left\{\mathcal{L}\{-t\cos(\omega t)\}\right\} \\
&= -\frac{d}{ds}\left[\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}\right] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)\right] \\
&= -\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \frac{2s^3-6s\omega^2}{(s^2+\omega^2)^3}
\end{aligned}$$

Για την επίλυση της άσκησης χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = s/(s^2+\omega^2)$$

που ανακτήθηκε από πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών.

Ο μετασχηματισμός Laplace

Εφαρμογή των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace του συνεχούς σήματος $x(t) = te^{\alpha t}\cos(\beta t)$.

Συνδυάζοντας τις ιδιότητες της μετατόπισης και διαφόρισης στο μιγαδικό επίπεδο

$$\mathcal{L}\{e^{s_0 t}x(t)\} \leftrightarrows \mathcal{X}(s-s_0) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\{tx(t)\} = -\frac{d\mathcal{L}\{x(t)\}}{ds}$$

θα λάβουμε

$$\mathcal{L}\{te^{\alpha t}\cos(\beta t)\} = \mathcal{L}\{t\cos(\beta t)\}_{s\to s-\alpha} = \left(-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\cos(\beta t)\}\right)\Bigg|_{s\to s-\alpha} =$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)\Bigg|_{s\to s-\alpha} = \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}\Bigg|_{s\to s-\alpha} = \frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}$$

Για την επίλυση της άσκησης χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t)\} = s/(s^2+\beta^2)$$

που ανακτήθηκε από πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών.

Ο μετασχηματισμός Laplace

Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

Θεώρημα

Έστω αιτιατό σήμα $x(t)$ που να μην περιέχει κρουστικές συναρτήσεις ή ανωμαλίες ανωτέρας τάξεως τη χρονική στιγμή $t = 0$. Εάν οι συναρτήσεις $x(t)$ και $x'(t)$ διαθέτουν μετασχηματισμό Laplace, τότε

$$\lim_{s\to\infty}\left[s\mathcal{L}\{x(t)\}\right] = \lim_{t\to 0^+} x(t) \equiv x(0^+)$$

*Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως **θεώρημα αρχικής τιμής**.*

Θεώρημα

Έστω αιτιατό σήμα $x(t)$ που έχει πεπερασμένη τιμή στο όριο $t \to \infty$. Εάν οι συναρτήσεις $x(t)$ και $x'(t)$ διαθέτουν μετασχηματισμό Laplace, τότε

$$\lim_{s\to 0}\left[s\mathcal{L}\{x(t)\}\right] = \lim_{t\to\infty} x(t) \equiv x(\infty)$$

*Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως **θεώρημα τελικής τιμής**.*

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
Η βασική εξίσωση υπολογισμού

Αποτελεί έναν τελεστή που όταν εφαρμοσθεί επί της μιγαδικής συνάρτησης $\mathcal{X}(s)$, επιστρέφει το σήμα $x(t)$ από το οποίο αυτή προήλθε. Θα είναι λοιπόν

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{X}(s)\}$$

Αποδεικνύεται πως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace δίδεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα των Fourier-Mellin

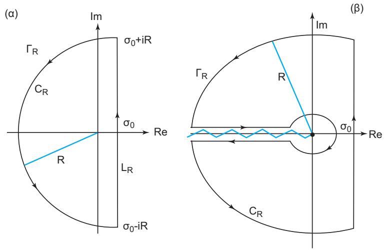
$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st}\mathcal{X}(s)ds$$

που υπολογίζεται κατά μήκος μιας ευθείας $\Re(s) = c$ παράλληλης προς το φανταστικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου με την τιμή του c να επιλέγεται αρκετά μεγάλη έτσι ώστε να διασφαλίζεται η ύπαρξη του ολοκληρώματος.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα συγκλίνει όταν η παραπάνω ευθεία περικλείει όλους τους πόλους του μετασχηματισμού, δηλαδή όταν η τιμή της σταθεράς c είναι μεγαλύτερη από το πραγματικό μέρος όλων των πόλων της συνάρτησης $\mathcal{X}(s)$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
Η μέθοδος της μιγαδικής ολοκλήρωσης

Συνίσταται στον απευθείας υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος στο μιγαδικό επίπεδο. Έστω πως η $\mathcal{X}(s)$ είναι η ρητή συνάρτηση $P(s)/Q(s)$ που διαθέτει το πολύ n πόλους στα σημεία $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ενώ ο δρόμος Γ_R είναι αυτός αριστερής εικόνας του επόμενου σχήματος



Αυτός ο δρόμος αποτελείται από

- την κατακόρυφη γραμμή $L_R : \{\Re(s) = \sigma_0\}$ που έχει επιλεγεί έτσι ώστε οι πόλοι $s_1, s_2, \ldots, s_n$ να βρίσκονται στα αριστερά της
- το αριστερό ημικύκλιο $C_R : \{s = \sigma_0 + Re^{j\vartheta}, [\pi/2 \leq \vartheta \leq (3\pi/2)]\}$ ακτίνας R

Στην περίπτωση αυτή, ο υπολογισμός του ολοκληρώματος του αντίστροφου μετασχηματισμού οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} e^{st}\mathcal{X}(s)\,ds = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{P(s)}{Q(s)}\, e^{st}\,ds + \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} \frac{P(s)}{Q(s)}\, e^{st}\,ds$$

Ωστόσο, όπως προκύπτει από το λήμμα του Jordan, το ολοκλήρωμα κατά μήκος του ημικυκλίου C_R είναι ίσο με το μηδέν

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{P(s)}{Q(s)}\, e^{st}\,ds = 0 \quad \text{και επομένως}$$

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} e^{st}\mathcal{X}(s)\,ds = \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} \frac{P(s)}{Q(s)}\, e^{st}\,ds = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_0-jR}^{\sigma_0+jR} \frac{P(s)}{Q(s)}\, e^{st}\,ds$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του λογισμού υπολοίπων η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_0-jR}^{\sigma_0+jR} \frac{P(s)}{Q(s)}\, e^{st}\,ds = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st}\mathcal{X}(s)\,ds = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left[\mathcal{X}(s)\,e^{st}\right]_{s=s_k} \quad \text{και τελικά}$$

$$x(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{X}(s)\} = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left[\mathcal{X}(s)\,e^{st}\right]_{s=s_k}$$

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μιγαδικής ολοκλήρωσης να προσδιορίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s}{s^2 - k^2}$$

Η συνάρτηση

$$\mathcal{X}(s)\, e^{st} = \frac{s e^{st}}{s^2 - k^2} = \frac{s e^{st}}{(s+k)(s-k)}$$

διαθέτει δύο απλούς πόλους στις θέσεις $s = k$ και $s = -k$. Θεωρώντας πως ο Γ_R αποτελείται από την ευθεία $L_R : \Re(s) = \delta > k$ και το κυκλικό τόξο C_R ακτίνας $R \to \infty$ το οποίο κλείνει προς τα αριστερά έτσι ώστε να περικλείει τους δύο πόλους, η εφαρμογή του λήμματος του Jordan οδηγεί σε μηδενισμό του ολοκληρώματος κατά μήκος της καμπύλης C_R.

Επομένως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace θα δίδεται από τη σχέση

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty}\frac{se^{st}}{(s+k)(s-k)}ds = \text{Res}\left[\frac{se^{st}}{s^2-k^2}\right]_{s=-k} + \text{Res}\left[\frac{se^{st}}{s^2-k^2}\right]_{s=k}$$

όπως προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος των υπολοίπων. Είναι όμως

$$\text{Res}\left[\frac{se^{st}}{s^2-k^2}\right]_{s=-k} = \lim_{s\to -k}\left[(s+k)\frac{se^{st}}{(s+k)(s-k)}\right] = \lim_{s\to -k}\left[\frac{se^{st}}{(s-k)}\right] = -\frac{e^{-kt}}{2}$$

$$\text{Res}\left[\frac{se^{st}}{s^2-k^2}\right]_{s=+k} = \lim_{s\to +k}\left[(s-k)\frac{se^{st}}{(s+k)(s-k)}\right] = \lim_{s\to -k}\left[\frac{se^{st}}{(s+k)}\right] = \frac{e^{kt}}{2}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$x(t) = \frac{e^{kt}-e^{-kt}}{2} = \cosh(kt)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Συνέλιξη στο μιγαδικό επίπεδο: ο μετασχηματισμός Laplace του γινομένου δύο τμηματικά συνεχών σημάτων $x_1(t)$ και $x_2(t)$ δίδεται από τη σχέση

$$\mathcal{L}\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\left[\mathcal{X}_1(s) * \mathcal{X}_2(s)\right]$$

όπου $\mathcal{X}_1(s) \equiv \mathcal{L}\{x_1(t)\}$ και $\mathcal{X}_2(s) \equiv \mathcal{L}\{x_2(t)\}$.

Μιγαδική συζυγία: εάν ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ τότε θα είναι

$$\mathcal{X}(s) = \mathcal{X}^*(s^*)$$

όπου $*$ ο τελεστής της μιγαδικής συζυγίας.

Συνέπεια αυτής της ιδιότητας είναι η πρόταση πως οι πόλοι και οι μηδενικές τιμές του μετασχηματισμού Laplace ενός πραγματικού σήματος $x(t)$ εμφανίζονται σε ζεύγη μιγαδικών συζυγών.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
Η μέθοδος του αναπτύγματος σε δυναμοσειρά

Εάν ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{X}(s)$ μπορεί να γραφεί ως δυναμοσειρά άπειρων όρων

$$\mathcal{X}(s) = \frac{\alpha_0}{s} + \frac{\alpha_1}{s^2} + \frac{\alpha_2}{s^3} + \frac{\alpha_3}{s^4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^{n+1}}$$

τότε η συνάρτηση του αντίστροφου μετασχηματισμού $x(t)$, υπολογίζεται ως

$$x(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{X}(s)\} = \alpha_0 + \alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{2!}t^2 + \frac{\alpha_3}{3!}t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n t^n}{n!}$$

Η παραπάνω ιδιότητα στηρίζεται στη γραμμικότητα του μετασχηματισμού και στην ιδιότητα

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{από όπου προκύπτει ότι} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}$$

Θα είναι λοιπόν

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{X}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^{n+1}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n t^n}{n!}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Η μέθοδος του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα

Χρησιμοποιείται ιδιαίτερα για την αντιστροφή μετασχηματισμών εκπεφρασμένων σε ρητή μορφή και στηρίζεται στη γραμμικότητα και στη γραφή της συνάρτησης $\mathcal{X}(s) \equiv \mathcal{L}\{x(t)\}$ ως γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών μετασχηματισμών

$$\boxed{\mathcal{X}(s) = \alpha_1 \mathcal{X}_1(s) + \alpha_2 \mathcal{X}_2(s) + \cdots + \alpha_n \mathcal{X}_n(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{X}_i(s)}$$

όπου $\mathcal{X}_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ μετασχηματισμοί Laplace στοιχειωδών συναρτήσεων της μορφής $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ που υπάρχουν σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών.

Έχοντας υπολογίσει αυτές τις συναρτήσεις, το σήμα $x(t)$ βρίσκεται στηριζόμενοι στη γραμμικότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού και χρησιμοποιώντας την εξίσωση

$$\boxed{x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \cdots + \alpha_k x_k(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i(t)}$$

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα, να προσδιορίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s^2 + 2s - 4}{s^4 + 2s^3 + s^2}$$

Διατυπώνοντας τη συνάρτηση του μετασχηματισμού Laplace με τη μορφή

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s^2 + 2s - 4}{s^4 + 2s^3 + s^2} = \frac{s^2 + 2s - 4}{s^2(s^2 + 2s + 1)} = \frac{s^2 + 2s - 4}{s^2(s + 1)^2}$$

η εφαρμογή της μεθόδου του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα μας δίνει

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s^2 + 2s - 4}{s^4 + 2s^3 + s^2} = \frac{10}{s} - \frac{4}{s^2} - \frac{10}{s + 1} - \frac{5}{(s + 1)^2}$$

Εκφράζοντας λοιπόν τη ζητούμενη συνάρτηση ως

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{X}(s)\} = 10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 1)^2}\right\}$$

και ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών, τελικά βρίσκουμε

$$x(t) = (10 - 4t - 10e^{-t} - 5te^{-t})u(t)$$

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα, να προσδιορίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$\mathcal{X}(s) = (s^3 + 2s^2 + 6)/(s^2 + 3s)$$

Η εφαρμογή της πολυωνυμικής διαίρεσης θα μας δώσει

$$\begin{array}{r|llll}
 & s & -1 & & \\
\hline
s^2 + 3s & s^3 & +2s^2 & & +6 \\
 & s^3 & +3s^2 & & \\
\hline
 & & -1s^2 & & +6 \\
 & & -1s^2 & -3s & \\
\hline
 & & & +3s & +6
\end{array}$$

Αναπτύσσοντας τη ρητή συνάρτηση που προέκυψε σε άθροισμα μερικών κλασμάτων,

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6}{s^2 + 3s} = s - 1 + \frac{36 + 6}{s^2 + 3s} = s - 1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s+3}$$

και ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών θα λάβουμε

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{s\} - \mathcal{L}^{-1}\{1\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = \delta'(t) - \delta(t) + 2u(t) + e^{-3t}u(t)$$

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία ο μετασχηματισμός $\mathcal{X}(s)$ είναι ρητή συνάρτηση της μορφής

$$\mathcal{X}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n)}$$

με το πολυώνυμο $Q(s)$ να είναι μεγαλύτερου βαθμού από το πολυώνυμο $P(s)$ και να διαθέτει n διακριτές ρίζες $s_1, s_2, \ldots, s_n$, αποδεικνύεται πως ο αντίστροφος μετασχηματισμός $x(t)$ δύναται να υπολογιστεί από την εξίσωση

$$\boxed{x(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{X}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(s_i)}{Q'(s_i)} e^{s_i t}}$$

Το παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό ως θεώρημα του Heaviside και διατυπώθηκε από τον Άγγλο μαθηματικό Oliver Heaviside (1850-1925).

Ας θεωρήσουμε την πλήρη γραμμική διαφορική εξίσωση τάξεως n με σταθερούς συντελεστές

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^{(i)}(t) = \alpha_0 x(t) + \alpha_1 x'(t) + \alpha_2 x''(t) + \cdots + \alpha_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \alpha_n x^{(n)}(t) = \varphi(t)$$

με λύση τη συνάρτηση $x = x(t)$. Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας έχουμε

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^{(i)}(t)\right\} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathcal{L}\{x^{(i)}(t)\} = \mathcal{L}\{\varphi(t)\}$$

Στη συνέχεια καταφεύγουμε στην ιδιότητα της διαφόρισης σύμφωνα με την οποία ο μετασχηματισμός Laplace των παραγώγων $x'(t)$ και $x''(t)$ δίδεται από τις σχέσεις

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - x'(0)$$

ενώ στη γενική περίπτωση ισχύει η ιδιότητα

$$\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{x(t)\} - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \cdots - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
Επίλυση διαφορικών εξισώσεων

Θα είναι λοιπόν

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{L}\{x^{(i)}(t)\} = \alpha_0 \mathcal{L}\{x(t)\} + \alpha_1 \mathcal{L}\{x'(t)\} + \alpha_2 \mathcal{L}\{x''(t)\} + \cdots + \alpha_n \mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\}$$

$$= \alpha_0 \mathcal{L}\{x(t)\} + \alpha_1 s \mathcal{L}\{x(t)\} - \alpha_1 x(0) + \alpha_2 s^2 \mathcal{L}\{x(t)\} - \alpha_2 s x(0) - \alpha_2 x'(0) + \cdots$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i\right) \mathcal{F}\{x(t)\} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{i} s^{i-j} x^{(i-j)}(0)\right)$$

και αντικαθιστώντας στην αρχική μας εξίσωση θα λάβουμε

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i\right) \mathcal{F}\{x(t)\} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{i} s^{i-j} x^{(i-j)}(0)\right) = \mathcal{L}\{\varphi(t)\}$$

από όπου τελικά προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \left\{\mathcal{L}\{\varphi(t)\} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{i} s^{i-j} x^{(i-j)(0)}\right)\right\} \Big/ \left\{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i\right\} = \mathcal{X}(s)$$

οπότε $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{X}(s)\}$

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace να επιλύσετε την εξίσωση

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 5\frac{dx(t)}{dt} + 6x(t) = g(t)$$

με αρχικές συνθήκες $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$ *και* $g(t) = e^{-t}u(t)$.

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x''(t)\} &= s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) = s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - 2s - 1 \\
\mathcal{L}\{x'(t)\} &= s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0) = s\mathcal{L}\{x(t)\} - 2 \quad \text{και} \\
\mathcal{L}\{g(t)\} &= \mathcal{L}\{e^{-t}u(t)\} = 1/(s+1)
\end{aligned}$$

Θα είναι λοιπόν

$$s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - 2s - 1 + 5\left(s\mathcal{L}\{x(t)\} - 2\right) + 6\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s+1}$$

και επιλύοντας την παραπάνω σχέση ως προς $\mathcal{L}\{f(t)\}$ προκύπτει εύκολα ότι

$$\mathcal{X}(s) \equiv \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s^2+5s+6)}$$

Αναπτύσσοντας τη συνάρτηση $\mathcal{X}(s)$ σε σειρά μερικών κλασμάτων θα λάβουμε

$$\mathcal{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s^2+5s+6)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{6}{s+2} - \frac{9}{2}\frac{1}{s+3}$$

και ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{X}(s)\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s+2}\right\} - \frac{9}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} \\ &= \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + 6e^{-2t}u(t) - \frac{9}{2}e^{-3t}u(t) \end{aligned}$$

Περιγράφονται από μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_0 y(t) = \beta_0 x(t) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \kappa x(t)$$

όπου $\tau = \alpha_1/\alpha_0$ και $\kappa = \beta_0/\alpha_0$. Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace της τελευταίας σχέσης θα πάρουμε

$$\tau \mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \kappa \mathcal{L}\{x(t)\}$$

όπου $\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{Y}(s)$, $\mathcal{L}\{y'(t)\} = s\mathcal{Y}(s)$ και αντικαθιστώντας αυτές τις σχέσεις στην παραπάνω εξίσωση, αυτή θα λάβει τη μορφή

$$\tau s\mathcal{Y}(s) + \mathcal{Y}(s) = \kappa \mathcal{X}(s) \quad \text{και τελικά} \quad \mathcal{Y}(s) = \frac{\kappa \mathcal{X}(s)}{\tau s + 1}$$

με περιοχή σύγκλισης της μορφής $\Re(s) > -1/\tau$.

Η παράμετρος τ είναι γνωστή ως σταθερά χρόνου ενώ η παράμετρος κ είναι γνωστή ως στατικό κέρδος.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
Συνεχή συστήματα πρώτης τάξης

Χρησιμοποιώντας το σήμα εισόδου $x(t) = \alpha u(t)$ όπου α γνωστή σταθερά θα είναι

$$\mathcal{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{\alpha}{s}$$

και επομένως ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου του συστήματος (που είναι η βηματική απόκριση) θα λάβει τη μορφή

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\kappa}{\tau s + 1}\,\frac{\alpha}{s} = -\alpha\kappa\frac{\tau}{\tau s + 1} + \alpha\kappa\frac{1}{s} = -\alpha\kappa\frac{1}{s + (1/\tau)} + \alpha\kappa\frac{1}{s}$$

από όπου τελικά προκύπτει ότι

$$\boxed{y(t) = -\alpha\kappa\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + (1/\tau)}\right\} + \alpha\kappa\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \alpha\kappa e^{-t/\tau}u(t) + \alpha\kappa u(t)}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στα επόμενα συμπεράσματα:

- Η απόκριση του συστήματος σε κάθε βηματική αλλαγή που πραγματοποιείται στην είσοδό του, είναι η προσέγγιση μιας νέας σταθεράς κατάστασης.
- Η μέγιστη τιμή της εξόδου $y(t)$ του συστήματος είναι η $y(t) = \alpha\kappa$ η οποία προσεγγίζεται στο όριο $t \to \infty$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
Συνεχή συστήματα πρώτης τάξης

- Η έξοδος του συστήματος τη χρονική στιγμή $t = \tau$ θα έχει τιμή

$$y(\tau) = \alpha\kappa \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.632\alpha\kappa$$

  Επομένως η σταθερά χρόνου τ ορίζεται ως το χρονικό διάστημα που απαιτείται προκειμένου η έξοδος του συστήματος να προσεγγίσει το 63.2% της μέγιστης τιμής.

- Όσο πιο μικρή είναι η τιμή της σταθεράς χρόνου τ, τόσο πιο απότομη θα είναι η αρχική απόκριση της εισόδου του συστήματος.

- Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του κέρδους κ τόσο πιο μεγάλη θα είναι και η τιμή της σταθεράς κατάστασης της εξόδου $y(t)$ για την ίδια μεταβολή του σήματος εισόδου.

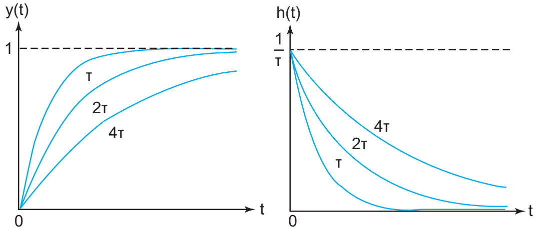
Η κρουστική απόκριση $h(t)$ υπολογίζεται ως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης μεταφοράς και έχει τη μορφή

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{H}(s)\} = \frac{\kappa}{\tau}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + (1/\tau)}\right\} = \frac{\kappa}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)$$

Η μεταβολή της εξόδου $y(t)$ και της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ για $\alpha = \kappa = 1$

απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
Συνεχή συστήματα πρώτης τάξης



Εάν είναι α_0 η διαφορική εξίσωση γράφεται $y'(t) = \lambda x(t)$ όπου $\lambda = \beta_0/\alpha_1$. Εργαζόμενοι όπως και πριν διαπιστώνουμε ότι $\mathcal{Y}(s) = \lambda \mathcal{X}(s)$ και τελικά

$$\mathcal{Y}(s) \equiv \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{\lambda}{s}\mathcal{X}(s)$$

όπου $\mathcal{X}(s) \equiv \mathcal{L}\{x(t)\}$. Χρησιμοποιώντας το σήμα $x(t) = \alpha u(t)$ τελικά βρίσκουμε

$$\mathcal{Y}(s) = \alpha\lambda/s^2 \quad \text{από όπου προκύπτει ότι} \quad y(t) = \alpha\lambda\mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\} = \alpha\lambda t u(t)$$

με κρουστική απόκριση $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{H}(s)\} = \lambda\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = \lambda u(t)$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Συνεχή συστήματα δεύτερης τάξης

Περιγράφονται από τη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\alpha_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_0 y(t) = \beta_0 x(t)$$

Διαιρώντας όλα τα μέλη με το α_0 και ορίζοντας τις ποσότητες

$$\tau = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}, \qquad \zeta = \frac{\alpha_1}{2}\sqrt{\frac{1}{\alpha_0 \alpha_2}}, \qquad \kappa = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$$

η παραπάνω σχέση διατυπώνεται ως

$$\tau^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\tau\zeta \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \kappa x(t)$$

με τις ποσότητες τ, ζ και κ να είναι γνωστές ως σταθερά χρόνου, λόγος απόσβεσης και στατικό κέρδος.

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της παραπάνω σχέσης έχουμε

$$\tau^2 \mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} + 2\tau\zeta \mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \kappa \mathcal{L}\{x(t)\}$$

όπου $\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{X}(s)$, $\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{Y}(s)$, ενώ από το θεώρημα της διαφόρισης του μετασχηματισμού Laplace θα λάβουμε κατά τα γνωστά $\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\mathcal{Y}(s)$ και $\mathcal{L}\{y'(t)\} = s\mathcal{Y}(s)$.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω ποσότητες στη διαφορική εξίσωση και επιλύοντας ως προς τη συνάρτηση $\mathcal{Y}(s)$ βρίσκουμε

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\kappa}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1} X(s)$$

Χρησιμοποιώντας το σήμα εισόδου $x(t) = u(t)$ θα είναι $\mathcal{X}(s) = \alpha/s$ και επομένως

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\kappa}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1} \, \frac{\alpha}{s} = \frac{\kappa\alpha}{\tau^2} \, \frac{1}{s\left(s^2 + \frac{2\zeta}{\tau}s + \frac{1}{\tau^2}\right)}$$

Το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο του παρονομαστή έχει διακρίνουσα

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4\zeta^2}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = \frac{4}{\tau^2}(\zeta^2 - 1)$$

και ρίζες

$$s_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{\zeta}{\tau} + \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} \quad \text{και} \quad s_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{\zeta}{\tau} - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

οι οποίες αποτελούν τους δύο από τους τρεις πόλους του μετασχηματισμού Laplace $\mathcal{Y}(s)$ (ο τρίτος πόλος είναι ο $s = 0$) - ο οποίος πλέον μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\kappa\alpha}{\tau^2} \, \frac{1}{s(s - s_1)(s - s_2)}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
Συνεχή συστήματα δεύτερης τάξης

Επομένως η συναρτησιακή μορφή και η χρονική εξέλιξη της βηματικής απόκρισης του συστήματος $y(t)$ εξαρτάται από την τιμή του λόγου απόσβεσης ζ. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η ($\boldsymbol{\zeta > 1}$, συστήματα μεγάλης απόσβεσης): Η αντιστροφή του μετασχηματισμού $\mathcal{Y}(s)$ δια της εφαρμογής *της μεθόδου αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα* οδηγεί μετά από απλές πράξεις στο αποτέλεσμα

$$y(t) = \kappa\alpha \left\{ 1 - e^{-\frac{\zeta}{\tau}t} \left[\cosh\left(\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} t \right) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh\left(\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} t \right) \right] \right\} u(t)$$

Περίπτωση 2η ($\boldsymbol{\zeta = 1}$, συστήματα κρίσιμης απόσβεσης): Στην προκειμένη περίπτωση το αποτέλεσμα υπολογίζεται ως

$$y(t) = \frac{\kappa\alpha}{\tau^2} \left[\tau^2 - \tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau t e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u(t) = \kappa\alpha \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u(t)$$

Περίπτωση 3η ($\boldsymbol{0 < \zeta < 1}$, συστήματα μικρής απόσβεσης): Η βηματική απόκριση $y(t)$ δίδεται από τη σχέση

$$y(t) = \kappa\alpha \left[1 - \frac{e^{-\frac{\zeta}{\tau}t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega t + \varphi) \right] u(t)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Δείκτες απόκρισης συστημάτων δευτέρας τάξεως

Τα συνεχή γραμμικά συστήματα δεύτερης τάξης χαρακτηρίζονται από ορισμένους δείκτες απόκρισης οι οποίοι σε γενικές γραμμές είναι οι εξής:

Μέγιστη υπερύψωση M_p: η μέγιστη απόκλιση της εξόδου του συστήματος από τη βηματική είσοδο κατά τη διάρκεια της μετάπτωσης.

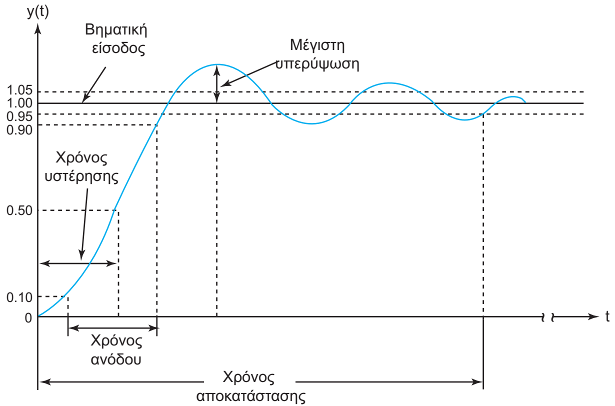
Χρόνος καθυστέρησης τ: το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να προσεγγίσει η βηματική απόκριση το 50% της τελικής της τιμής για πρώτη φορά.

Χρόνος ανόδου ή υπερύψωσης τ_r: για $\zeta > 1$ εκφράζει το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μεταβληθεί η βηματική απόκριση από το 10% στο 90% ή από το 0% στο 100% της μέγιστης τιμής της. Για $\zeta < 1$ ορίζεται ως το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να προσεγγίσει η βηματική απόκριση τη μέγιστη τιμή της για πρώτη φορά.

Χρόνος αποκατάστασης τ_s: το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να πέσει η βηματική απόκριση κάτω από ένα προκαθορισμένο ποσοστό - περίπου $2\% - 5\%$ - *της τελικής της τιμής* και να παραμείνει εκεί.

Χρόνος κορυφής τ_p: το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να προσεγγίσει η βηματική απόκριση του συστήματος την πρώτη κορυφή της υπερύψωσης.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
Δείκτες απόκρισης συστημάτων δευτέρας τάξεως

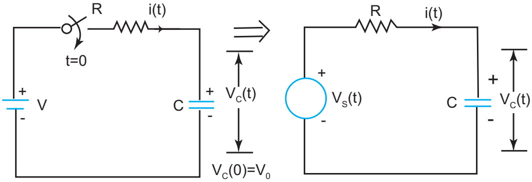


Οι πιο σημαντικοί δείκτες απόκρισης ενός συνεχούς γραμμικού συστήματος δευτέρας τάξεως

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
Παράδειγμα

Άσκηση

Για το κύκλωμα της αριστερής εικόνας του σχήματος, έστω πως ο πυκνωτής C έχει αρχική τάση υ_c με $\upsilon_c(0^-) = \upsilon_0$. Εάν τη στιγμή $t = 0$ κατεβάσουμε το διακόπτη, το κύκλωμα (δεξιά εικόνα) θα αρχίσει να διαρρέεται από ρεύμα ενώ η τάση $\upsilon_c(t)$ θα αρχίσει να μεταβάλλεται. Να προσδιορίσετε (α) το ρεύμα $i(t)$ και (β) την τάση $\upsilon_c(t)$ κατά μήκος του πυκνωτή.



Εφαρμόζοντας το νόμο του Kirchhoff έχουμε

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,d\tau = \upsilon_s(t) = Vu(t)$$

Λαμβάνοντας το *μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace* έχουμε

$$R\mathcal{L}^{+}\{i(t)\} + \frac{1}{C}\mathcal{L}^{+}\left\{\int_{-\infty}^{t} i(t)\, d\tau\right\} = V\mathcal{L}^{+}\{u(t)\}$$

όπου $\mathcal{L}^{+}\{i(t)\} = \mathcal{I}(s)$, $\mathcal{L}^{+}\{u(t)\} = 1/s$ και

$$\mathcal{L}^{+}\left\{\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{I}(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} i(\tau)\, d\tau$$

Λαμβάνοντας όμως υπ' όψιν τον ορισμό του ρεύματος $i(t)$ ως την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $\upsilon_c(t)$ και την περιγραφή του προβλήματος, διαπιστώνουμε ότι

$$\upsilon_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau \quad \longrightarrow \quad \upsilon_c(0^-) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} i(\tau)\, d\tau = \upsilon_0$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω ποσότητες στην τελική μας εξίσωση αυτή γράφεται

$$R\mathcal{I}(s) + \frac{1}{C}\left[\frac{1}{s}\mathcal{I}(s) + \frac{C}{s}\upsilon_0\right] = \frac{V}{s}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
Παράδειγμα

Επιλύοντας ως προς $\mathcal{I}(s)$ καταλήγουμε στην έκφραση

$$\mathcal{I}(s) = \frac{V - \upsilon_0}{s} \frac{1}{R + (1/Cs)} = \frac{V - \upsilon_0}{s} \frac{1}{s + (1/RC)}$$

και λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της παραπάνω σχέσης,

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{I}(s)\} = \frac{V - \upsilon_0}{s} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + (1/RC)}\right\} = \frac{V - \upsilon_0}{s} e^{-t/RC} u(t)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την τάση $\upsilon_c(t)$ ξεκινούμε από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\upsilon_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\upsilon_c(t) = \frac{1}{RC}\upsilon_s(t) = \frac{V}{RC}u(t)$$

και εργαζόμενοι όπως και πριν βρίσκουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} \upsilon_c(t) &= V\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + (1/RC)}\right\}\right) + \upsilon_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + (1/RC)}\right\} \\ &= V(1 - e^{-t/RC})\, u(t) + \upsilon_0 e^{-t/RC} u(t) \end{aligned}$$