Συστήματα διακριτού χρόνου

(ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7)

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Ι. ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2014

Συστήματα διακριτού χρόνου
Βασικοί ορισμοί

Τα συστήματα διακριτού χρόνου ορίζονται ως ειδικές μονάδες υλικού ή λογισμικού που μετασχηματίζουν διακριτά σήματα.

Το διακριτό σήμα επί του οποίου εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός, ονομάζεται είσοδος ενώ το σήμα που προκύπτει ονομάζεται έξοδος ή απόκριση.

Εάν τα σήματα εισόδου και εξόδου του συστήματος περιγράφονται από τις ακολουθίες $x[n]$ και $y[n]$, αυτές σχετίζονται ως

$$y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} \quad \text{ή εναλλακτικά ως} \quad x[n] \rightarrowtail y[n]$$

όπου $\mathcal{T}$ τελεστής που συμβολίζει το μετασχηματισμό που υλοποιεί το σύστημα.

Η περιγραφή εισόδου / εξόδου του συστήματος συνίσταται στον προσδιορισμό της μαθηματικής έκφρασης που συσχετίζει τα σήματα $x[n]$ και $y[n]$.

Αντίθετα η εσωτερική δομή του συστήματος σχετίζεται με την περιγραφή του συστήματος στο χώρο κατάστασης.

Η γενική μορφή της εξίσωσης εισόδου / εξόδου ενός διακριτού συστήματος LTI περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$\alpha_0 y[n] + \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] + \cdots + \alpha_N y[n-N] = \beta_0 x[n] + \beta_1 x[n-1] + \beta_2 x[n-2] + \cdots + \beta_M x[n-M]$$

ή σε συνεπτυγμένη γραφή

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} \beta_k x[n-k]$$

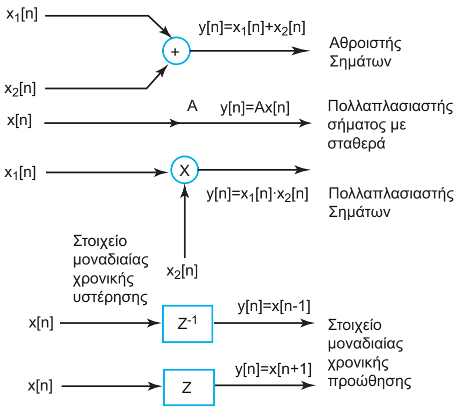
Η τάξη μίας εξίσωσης διαφορών ορίζεται ως η μέγιστη τιμή της χρονικής υστέρησης που εμφανίζεται στις καθυστερημένες εκδόσεις της εξόδου του συστήματος $y[n]$. Επιλύοντας ως προς $y[n]$ βρίσκουμε

$$y[n] = \frac{1}{\alpha_0} \left(\sum_{k=0}^{M} \beta_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y[n-k] \right)$$

Οι συντελεστές $\{\alpha_i\}_0^N$ και $\{\beta_i\}_0^M$ που εμφανίζονται στη γενική εξίσωση διαφορών, είναι πάντοτε πραγματικοί αριθμοί, ορισμένοι εκ των οποίων μπορεί να έχουν και μηδενική τιμή.

Συνήθως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $\alpha_N \neq 0$.

Τα σχηματικά διαγράμματα χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των δομικών μονάδων των διακριτών συστημάτων που είναι οι εξής:



Δομικές μονάδες διακριτού συστήματος

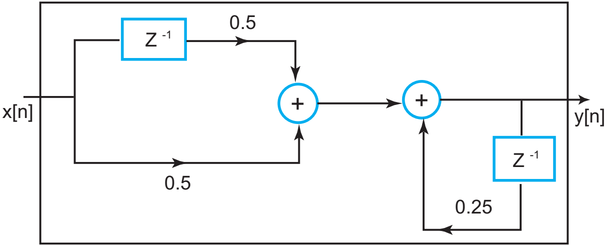
Συστήματα διακριτού χρόνου

Σχηματικά διαγράμματα - Παράδειγμα

Το σχηματικό διάγραμμα του διακριτού συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

είναι αυτό που αναπαρίσταται στο επόμενο σχήμα.



Είδη και κατηγορίες διακριτών συστημάτων
Στατικά και δυναμικά συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται στατικό όταν η έξοδός του $y[n]$ εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα είσοδο $x[n]$ και όχι από εισόδους που αντιστοιχούν σε προγενέστερες ή μεταγενέστερες χρονικές στιγμές.

Στην αντίθετη περίπτωση, το σύστημα ονομάζεται δυναμικό.

Εάν η έξοδος $y[n]$ εξαρτάται από τις N προηγούμενες εισόδους του, το σύστημα χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη μνήμης χρονικής διάρκειας N.

Τα στατικά συστήματα χαρακτηρίζονται από απουσία μνήμης.

Εάν το N παίρνει πεπερασμένες τιμές, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως δυναμικό σύστημα πεπερασμένης μνήμης ενώ στην αντίθετη περίπτωση το σύστημα διαθέτει άπειρη μνήμη. Τα συστήματα

$$y_[n] = x[n] + 5x[n-1], \quad y_2[n] = \sum_{k=1}^{n} x[n-k], \quad y_3[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]$$

είναι δυναμικά με τα δύο πρώτα να διαθέτουν πεπερασμένη μνήμη - διάρκειας $N = 1$ και $N = n$ αντίστοιχα - ενώ το τρίτο είναι σύστημα άπειρης μνήμης.

Είδη και κατηγορίες διακριτών συστημάτων
Χρονικώς μεταβαλλόμενα και χρονικώς αμετάβλητα συστήματα

Ένα διακριτό σύστημα χαρακτηρίζεται ως χρονικώς αμετάβλητο, όταν η συσχέτιση ανάμεσα στην είσοδο και στην έξοδό του δεν μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου.

Στην αντίθετη περίπτωση, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως χρονικώς μεταβαλλόμενο.

Σε ένα χρονικώς αμετάβλητο σύστημα ισχύει ότι

$$\boxed{\text{εάν} \quad y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} \quad \text{τότε} \quad y[n-k] = \mathcal{T}\{x[n-k]\}}$$

Έστω το σύστημα του συσσωρευτή που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Παρατηρώντας ότι η έξοδος $y[k-n]$ ορίζεται ως

$$y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n-k} x[k] = \mathcal{T}\{x[n-k]\}$$

διαπιστώνουμε πως αυτό το σύστημα είναι χρονικώς αμετάβλητο.

Είδη και κατηγορίες διακριτών συστημάτων
Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα

Ένα διακριτό σύστημα είναι γραμμικό, αν και μόνο αν υπακούει στην αρχή της επαλληλίας.

Δηλαδή, η απόκρισή του στο γραμμικό συνδυασμό συνόλου στοιχειωδών σημάτων, είναι ο γραμμικός συνδυασμός των αποκρίσεων στο κάθε στοιχειώδες σήμα ξεχωριστά.

Θεωρώντας δύο σήματα εισόδου $x_1[n]$ και $x_2[n]$, η αρχή της επαλληλίας διατυπώνεται ως

$$\mathcal{T}\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \alpha_1 \mathcal{T}\{x_1[n]\} + \alpha_2 \mathcal{T}\{x_2[n]\}$$

Εάν η παραπάνω ιδιότητα δεν ικανοποιείται, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως μη γραμμικό.

Παράδειγμα γραμμικού διακριτού συστήματος, είναι το σύστημα του συσσωρευτή αφού η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ είναι η

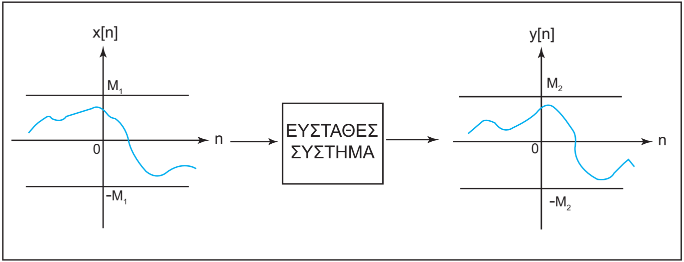
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \left\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\right\} = \alpha \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[n] + \beta \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

Το σύστημα υπακούει στην αρχή της επαλληλίας και επομένως είναι γραμμικό.

Παράδειγμα μη γραμμικού συστήματος είναι το σύστημα $y[n] = \log_{10}(|x[n]|)$ (γιατί;).

Ένα διακριτό σύστημα θεωρείται ευσταθές κατά BIBO όταν είναι φραγμένο και ως προς την είσοδο και ως προς την έξοδο, δηλαδή όταν για κάθε φραγμένη είσοδο που διαβιβάζεται σε αυτό, η έξοδος που παράγεται από το σύστημα είναι πάντα φραγμένη.

Τα σήματα $x[n]$ και $y[n]$ είναι φραγμένα, όταν υπάρχουν πεπερασμένοι αριθμοί M_1 και M_2, τέτοιοι ώστε $|x[n]| \leq M_1 < \infty$ και $|y[n]| \leq M_2 < \infty$ (για κάθε n).



Η διαβίβαση φραγμένης εισόδου σε ένα ευσταθές σύστημα οδηγεί σε φραγμένη έξοδο.

Ένα διακριτό σύστημα λέγεται αιτιατό, όταν η έξοδος $y[n]$ (για κάθε n) εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα είσοδο $x[n]$, καθώς και προγενέστερες εισόδους

$$\{x[n-1], x[n-2], x[n-3], \ldots\}$$

όχι όμως και από μεταγενέστερες εισόδους της μορφής

$$\{x[n+1], x[n+2], x[n+3], \ldots\}$$

Θα είναι λοιπόν

$$y[n] = F(x[n], x[n-1], x[n-2], x[n-3], \ldots)$$

Ένα σύστημα που δεν ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα, ονομάζεται μη αιτιατό.

Άσκηση

Για κάθε ένα από τα ακόλουθα διακριτά συστήματα

$$(\alpha) \quad y[n] = [\cos(\pi n)]x[n] \quad \textit{και} \quad (\beta) \quad y[n] = \sum_{k=n-1}^{\infty} x[n]$$

να προσδιορίσετε εάν είναι ευσταθές, αιτιατό, γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο.

Ορισμός

Κρουστική απόκριση $h[n]$ ενός γραμμικού συστήματος διακριτού χρόνου, ονομάζουμε την έξοδο που παράγεται από το σύστημα όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί η μοναδιαία διακριτή κρουστική συνάρτηση, ή σε μαθηματική γραφή

$$h[n] = \mathcal{T}\{\delta[n]\}$$

Ορισμός

Βηματική απόκριση $s[n]$ ενός γραμμικού συστήματος διακριτού χρόνου, ονομάζουμε την έξοδο που παράγεται από το σύστημα όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί η μοναδιαία διακριτή βηματική συνάρτηση, ή σε μαθηματική γραφή

$$s[n] = \mathcal{T}\{u[n]\}$$

Συχνοτική απόκριση
Ορισμός

Ορισμός

Συχνοτική απόκριση $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ ενός γραμμικού συστήματος διακριτού χρόνου, ονομάζουμε το λόγο του σήματος εξόδου που παράγεται από το σύστημα όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί ένα στοιχειώδες διακριτό μιγαδικό εκθετικό σήμα με πλάτος ίσο με A και αυθαίρετη συχνότητα ω προς αυτό το σήμα εισόδου, ή σε μαθηματική γραφή[7]

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \frac{\mathcal{T}\{Ae^{j\omega n}\}}{Ae^{j\omega n}}$$

Σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις, η συχνοτική απόκριση είναι μιγαδική συνάρτηση και εάν διατυπωθεί στην πολική της μορφή

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = |\mathcal{H}(e^{j\omega})| \exp[j\measuredangle\mathcal{H}(e^{j\omega})]$$

τότε το μέτρο της $|\mathcal{H}(e^{j\omega})|$ είναι γνωστό ως απόκριση πλάτους, ενώ η φάση της $\measuredangle\mathcal{H}(e^{j\omega})$ είναι γνωστή ως απόκριση φάσης.

Διακριτά συστήματα LTI
Βασικοί Ορισμοί

Ικανοποιούν τόσο την ιδιότητα της γραμμικότητας όσο και την ιδιότητα της χρονικής αμεταβλητότητας.

Σε πλήρη αναλογία με τα συνεχή ισοδύναμά τους, η έξοδος ενός διακριτού συστήματος LTI προκύπτει από τη συνέλιξη ανάμεσα στην κρουστική απόκριση και την είσοδο του συστήματος.

Χρησιμοποιώντας για το σήμα εισόδου $x[n]$ τη γενική διατύπωση

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

η έξοδος του συστήματος $y[n]$ θα είναι η

$$y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} = \mathcal{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\}$$

Υποθέτοντας πως το σύστημα είναι γραμμικό η αρχή της επαλληλίας θα μας δώσει

$$\mathcal{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\mathcal{T}\left\{\delta[n-k]\right\}$$

Διακριτά συστήματα LTI
Βασικοί Ορισμοί

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν το σύστημα είναι ταυτόχρονα και χρονικώς αμετάβλητο, από τον ορισμό της κρουστικής απόκρισης $\mathcal{T}\{\delta[n]\} = h[n]$ θα λάβουμε $\mathcal{T}\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$.

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στην έκφραση

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{y[n] = \mathcal{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\}}_{\text{ισχύει για όλα τα συστήματα}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\mathcal{T}\left\{\delta[n-k]\right\}}_{\text{ισχύει μόνο για τα γραμμικά συστήματα}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] = h[n] * x[n]}_{\text{ισχύει μόνο για τα γραμμικά και χρονικώς αμετάβλητα συστήματα}}$$

Αλλά η τελευταία έκφραση αναγνωρίζεται εύκολα ως η συνέλιξη ανάμεσα στα σήματα $x[n]$ και $h[n]$. Επομένως

$$\boxed{\text{η απόκριση } y[n] \text{ ενός γραμμικού και χρονικώς αμετάβλητου συστήματος διακριτού χρόνου στο οποιοδήποτε σήμα εισόδου } x[n] \text{ προκύπτει από τη συνέλιξη ανάμεσα στην κρουστική απόκριση του συστήματος } h[n] \text{ και στο σήμα εισόδου } x[n]}$$

σε πλήρη αναλογία με τα όσα ισχύουν για τα συνεχή συστήματα.

Διακριτά συστήματα LTI
Βηματική απόκριση

Η βηματική απόκριση ενός διακριτού συστήματος ορίζεται ως η έξοδος του συστήματος $s[n]$ όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί η βηματική συνάρτηση $u[n]$

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία το θεωρούμενο σύστημα είναι LTI, η συνέλιξη ανάμεσα στα σήματα $u[n]$ και $h[n]$ θα μας δώσει

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, u[n-k]$$

Από τον ορισμό της βηματικής συνάρτησης προκύπτει εύκολα ότι

$$u[n-k] = \begin{cases} 1 & \text{για } n-k \geq 0 \\ 0 & \text{για } n-k < 0 \end{cases} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad u[n-k] = \begin{cases} 1 & \text{για } k \leq n \\ 0 & \text{για } k > n \end{cases}$$

και η παραπάνω σχέση λαμβάνει τη μορφή

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} h[k] + h[n] = s[n-1] + h[n]$$

Θα είναι λοιπόν

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \quad \text{και} \quad h[n] = s[n] - s[n-1]$$

Διακριτά συστήματα LTI
Κρουστική απόκριση

Θεωρώντας ένα διακριτό σύστημα LTI που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} \beta_k x[n-k]$$

$(N \geq M)$ αυτό μπορεί να θεωρηθεί πως αποτελείται από δύο υποσυστήματα LTI A και B που υλοποιούν το δεξί και το αριστερό μέλος της εξίσωσης διαφορών - θα είναι λοιπόν

$$w[n] = \mathcal{T}_1\{x[n]\} = \sum_{k=0}^{M} \beta_k x[n-k] \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{N} \alpha_k y[n-k] = w[n]$$

Εναλλάσσοντας τη σειρά των δύο συστημάτων και διαβιβάζοντας στο υποσύστημα B τη το σήμα $\delta[n]$, η έξοδος του A θα είναι η κρουστική απόκριση $h[n]$ και επομένως

$$\delta[n] = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k h_\beta[n-k] \quad \text{και} \quad h[n] \equiv h_\alpha[n] = \sum_{k=0}^{M} \beta_k h_\beta[n-k]$$

Σε πλήρη αναλογία λοιπόν με τα συνεχή συστήματα, μπορούμε να προσδιορίσουμε την κρουστική απόκριση ενός διακριτού συστήματος LTI, εφαρμόζοντας την ακόλουθη διαδικασία:

Διακριτά συστήματα LTI
Κρουστική απόκριση

- Υποθέτοντας ότι
$$y[-1] = y[-2] = y[-3] = \cdots = y[N-1] = y[-N] = 0$$
αντικαθιστούμε το δεξί μέλος της αρχικής μας εξίσωσης με τη συνάρτηση $\delta[n]$.

  Στην περίπτωση αυτή, η έξοδος του υποσυστήματος Β θα είναι η κρουστική απόκριση $h_\beta[n]$ έτσι ώστε να μπορούμε να γράψουμε ότι
$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k h_\beta[n-k] = \delta[n]$$

- Η παραπάνω εξίσωση θα πρέπει να λυθεί ως προς τη $h_\beta[n]$ έτσι ώστε αυτή να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της $h[n]$. Απαιτούνται N αρχικές συνθήκες.

  Αναπτύσσοντας την παραπάνω σχέση θα λάβουμε
$$\alpha_0 h_\beta[n] + \alpha_1 h_\beta[n-1] + \alpha_2 h_\beta[n-2] + \cdots + \alpha_N h_\beta[n-N] = \delta[n]$$
εξίσωση η οποία για $n=0$ λαμβάνει την απλή μορφή
$$\alpha_0 h_\beta[0] + \alpha_1 h_\beta[-1] + \alpha_2 h_\beta[-2] + \cdots + \alpha_N h_\beta[-N] = \delta[0] = 1$$
και θα πρέπει να λυθεί με αρχικές συνθήκες
$$h_\beta[-1] = h_\beta[-2] = h_\beta[-3] = \cdots = h_\beta[-N+1] = 0 \quad \text{και} \quad h_\beta[0] = 1/\alpha_0$$

Διακριτά συστήματα LTI
Κρουστική απόκριση

- Στο σημείο αυτό μπορούμε να επιλύσουμε την ομογενή εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k h_\beta[n-k] = 0$$

βρίσκοντας τη συνάρτηση $h_\beta[n]$. Θεωρώντας εκθετική λύση $h_\beta[n] = A\lambda^n$ $(n > 0)$ και αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\alpha_0 A\lambda^n + \alpha_1 A\lambda^{n-1} + \alpha_2 A\lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_N A\lambda^{n-N} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$A\lambda^{n-N}\left(\alpha_N + \alpha_{N-1}\lambda + \alpha_{N-2}\lambda^2 + \cdots + \alpha_1\lambda^{N-1} + \alpha_0\lambda^N\right) = 0$$

και τελικά

$$\alpha_N + \alpha_{N-1}\lambda + \alpha_{N-2}\lambda^2 + \cdots + \alpha_1\lambda^{N-1} + \alpha_0\lambda^N = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \lambda^{N-k} = 0$$

εξίσωση, που αποτελεί και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης διαφορών.

Αυτό το πολυώνυμο θα διαθέτει το πολύ N διακριτές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_N$.

Επομένως θα υπάρχουν N στοιχειώδεις λύσεις $h^k_\beta[n] = A_k\lambda_k^n$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, ενώ η γενική λύση είναι ο γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω στοιχειωδών λύσεων,

$$h_\beta[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k\lambda_k^n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n + \cdots + A_k\lambda_k^n$$

Χρησιμοποιώντας τις N αρχικές συνθήκες που προσδιορίσαμε στο προηγούμενο βήμα, θα καταλήξουμε στο σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους $(A_1, A_2, \ldots, A_N)$

$$h_\beta[0] = \sum_{k=1}^{N} A_k\lambda_k^n \Big|_{n=0} = \sum_{k=1}^{N} A_k = \frac{1}{\alpha_0}$$

$$h_\beta[-1] = \sum_{k=1}^{N} A_k\lambda_k^n \Big|_{n=-1} = \sum_{k=1}^{N} A_k\lambda_k^{-1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_\beta[-N+1] = \sum_{k=1}^{N} A_k\lambda_k^n \Big|_{n=-N+1} = \sum_{k=1}^{N} A_k\lambda_k^{-N+1} = 0$$

Διακριτά συστήματα LTI
Κρουστική απόκριση

το οποίο σε μορφή πίνακα διατυπώνεται ως

$$\begin{bmatrix} 1/\alpha_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1^{-1} & \lambda_2^{-1} & \cdots & \lambda_N^{-1} \\ \lambda_1^{-2} & \lambda_2^{-2} & \cdots & \lambda_N^{-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{1-N} & \lambda_2^{1-N} & \cdots & \lambda_N^{1-N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix}$$

Στην παραπάνω εξίσωση ο πίνακας διαστάσεων $N \times N$ είναι γνωστός ως πίνακας του Vandermonde· αυτός ο πίνακας είναι πάντοτε αντιστρέψιμος και κατά συνέπεια είναι πάντοτε δυνατός ο υπολογισμός των συντελεστών A_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ και κατ′ επέκτασιν της συνάρτησης $h_\beta[n]$.

- Στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας, υπολογίζουμε τη ζητούμενη κρουστική απόκριση από τη σχέση

$$h[n] \equiv h_\alpha[n] = \sum_{k=0}^{M} \beta_k h_\beta[n-k]$$

Διακριτά συστήματα LTI

Κρουστική απόκριση - Παράδειγμα υπολογισμού

Άσκηση

Να προσδιοριστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y[n] - y[n-1] - 2y[n-2] = x[n-1]$$

Η εξίσωση αντιστοιχεί σε τιμές $N = 2$, $M = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -2$, $\beta_0 = 0$ και $\beta_1 = 1$. Θέτοντας το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης στη συνάρτηση $\delta[n]$ θα έχουμε

$$h_\beta[n] - h_\beta[n-1] - 2h_\beta[n-2] = \delta[n]$$

Ας επιλύουμε την αντίστοιχη *ομογενή εξίσωση*

$$h_\beta[n] - h_\beta[n-1] - 2h_\beta[n-2] = 0$$

με αρχικές συνθήκες $h_\beta[0] = 1/\alpha_0 = 1$ και $h_\beta[-1] = 0$ για $n > 0$.

Θεωρώντας την εκθετική λύση $h_\beta[n] = A\lambda^n$ $(n > 0)$ θα είναι $h_\beta[n-1] = A\lambda^{n-1}$ και $h_\beta[n-2] = A\lambda^{n-2}$ και με αντικατάσταση καταλήγουμε στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$A\lambda^n + A\lambda^{n-1} + A\lambda^{n-2} = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

με ρίζες $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = -1$.

Επομένως, οι επιμέρους λύσεις είναι οι $h_\beta^1[n] = (2)^n u[n]$ και $h_\beta^2[n] = (-1)^n u[n]$, ενώ η γενική λύση διατυπώνεται ως

$$h_\beta[n] = A_1(2)^n u[n] + A_2(-1)^n u[n]$$

Οι τιμές των A_1 και A_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες η εφαρμογή των οποίων οδηγεί στο σύστημα

$$h_\beta[0] = A_1 + A_2 = 1 \quad \text{και} \quad h_\beta[-1] = \frac{A_1}{2} - A_2 = 0$$

με λύση $(A_1, A_2) = (2/3, 1/3)$ από όπου προκύπτει ότι

$$h_\beta[n] = \left[\frac{2}{3}(2)^n + \frac{1}{3}(-1)^n\right] u[n]$$

Επομένως το ζητούμενο αποτέλεσμα έχει τη μορφή

$$h[n] = \sum_{k=0}^{1} \beta_k h_\beta[n-k] = \beta_0 h_\beta[n] + \beta_1 h_\beta[n-1] = \left[\frac{2}{3}(2)^{n-1} + \frac{1}{3}(-1)^{n-1}\right] u[n-1]$$

Διακριτά συστήματα LTI
Συχνοτική απόκριση

Θεωρώντας πως στην είσοδό ενός διακριτού συστήματος LTI διαβιβάζεται η ακολουθία $x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$ $(-\infty < n < \infty)$, η έξοδός του θα έχει τη μορφή

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k] = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} = Ae^{i\omega_0 n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} \right)$$
$$= A\mathcal{H}(e^{j\omega_0}) e^{j\omega n} = \mathcal{H}(e^{j\omega_0}) x[n]$$

με τη συνάρτηση $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ να ορίζεται από την εξίσωση

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

Επομένως, το εκθετικό σήμα $e^{j\omega_0 n}$ αποτελεί ιδιοσυνάρτηση του συστήματος με ιδιοτιμή τη συνάρτηση $\mathcal{H}(e^{j\omega})$, υπολογισμένη στη θέση της συχνότητας ω_0 του σήματος εισόδου.

Αυτή η συνάρτηση περιγράφει τη μεταβολή του μιγαδικού πλάτους του εκθετικού μιγαδικού σήματος εισόδου συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας ω και ονομάζεται συχνοτική απόκριση του συστήματος.

Η συνάρτηση είναι περιοδική ως προς ω, με περίοδο $T = 2\pi$, αφού ($A = 1$)

$$\mathcal{H}\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j(\omega+2\pi)k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k} e^{-j2\pi k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k} = \mathcal{H}(e^{j\omega})$$

Γενικεύοντας και χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας, η απόκριση του συστήματος στο σήμα εισόδου

$$x(n) = \sum_k \alpha_k\, e^{j\omega_k n} \quad \text{θα έχει τη μορφή} \quad y[n] = \sum_k \alpha_k H(e^{j\omega_k})\, e^{j\omega_k n}$$

Η συνάρτηση συχνοτικής απόκρισης $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ είναι μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής και εάν γραφεί στην εκθετική της μορφή

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = |\mathcal{H}(e^{j\omega})| e^{j\measuredangle \mathcal{H}(e^{j\omega})}$$

η έξοδος του συστήματος διατυπώνεται ως

$$y[n] = \mathcal{H}(e^{j\omega_0})\, x[n] = \left(|\mathcal{H}(e^{j\omega_0})| e^{j\measuredangle \mathcal{H}(e^{j\omega_0})}\right) \left(A e^{j\omega_0 n}\right) = \Big[A|\mathcal{H}(e^{j\omega_0})|\Big]\, e^{j[\omega_0 n + \measuredangle \mathcal{H}(e^{j\omega_0})]}$$

Επομένως η επίδραση του συστήματος στο σήμα $x[n] = A e^{j\omega_0 n}$, είναι η κλιμάκωση του πλάτους του κατά $|\mathcal{H}(e^{j\omega_0})|$ και η μετατόπιση της φάσης του κατά $\measuredangle \mathcal{H}(e^{j\omega_0})$. Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει μόνο για ευσταθή συστήματα LTI.

Άσκηση

Να προσδιοριστεί η απόκριση $y[n]$ ενός διακριτού συστήματος LTI στο σήμα εισόδου $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler, το διακριτό σήμα εισόδου $x[n]$ διατυπώνεται ως

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi) = A\,\frac{e^{j(\omega_0 n+\varphi)} + e^{-j(\omega_0 n+\varphi)}}{2} = \frac{1}{2}Ae^{j\varphi}\,e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}Ae^{-j\varphi}\,e^{-j\omega_0 n}$$

και επομένως η έξοδος του συστήματος θα είναι η

$$y[n] = \frac{1}{2}Ae^{j\varphi}\mathcal{H}(e^{j\omega_0})\,e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}Ae^{-j\varphi}\mathcal{H}(e^{-j\omega_0})\,e^{-j\omega_0 n}$$

με τις συναρτήσεις $\mathcal{H}(e^{j\omega_0})$ και $\mathcal{H}(e^{-j\omega_0})$ να ορίζονται ως

$$\mathcal{H}(e^{j\omega_0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,e^{-j\omega_0 k} \quad \text{και} \quad \mathcal{H}(e^{-j\omega_0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,e^{j\omega_0 k}$$

Υποθέτοντας πως η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος είναι πραγματική θα είναι $h[n] = h^*[n]$ και η παραπάνω σχέση γράφεται

Διακριτά συστήματα LTI
Συχνοτική απόκριση

$$\mathcal{H}(e^{j\omega_0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega_0 k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^*[k]\, e^{-j\omega_0 k} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{j\omega_0 k}\right)^* = \mathcal{H}^*(e^{-j\omega_0})$$

ή ισοδύναμα $\mathcal{H}(e^{-j\omega_0}) = \mathcal{H}^*(e^{j\omega_0})$. Θα είναι λοιπόν

$$y[n] = \frac{1}{2}Ae^{j\varphi}\mathcal{H}(e^{j\omega_0})\, e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}Ae^{-j\varphi}\mathcal{H}^*(e^{j\omega_0})\, e^{-j\omega_0 n}$$

Εκφράζοντας τις συναρτήσεις $\mathcal{H}(e^{j\omega_0})$ και $\mathcal{H}^*(e^{j\omega_0})$ στην εκθετική τους μορφή, θα έχουμε

$$\mathcal{H}(e^{j\omega_0}) = |\mathcal{H}(e^{j\omega_0})|e^{j\measuredangle\mathcal{H}(e^{j\omega_0})} \quad \text{και} \quad \mathcal{H}^*(e^{j\omega_0}) = |\mathcal{H}(e^{j\omega_0})|e^{-j\measuredangle\mathcal{H}(e^{j\omega_0})}$$

και επομένως η έξοδος του συστήματος διατυπώνεται ως

$$y[n] = \frac{1}{2}A|\mathcal{H}(e^{j\omega_0})|e^{j\varphi}\, e^{j\measuredangle\mathcal{H}(e^{j\omega_0})}\, e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}A|\mathcal{H}(e^{j\omega_0})|e^{-j\varphi}\, e^{-j\measuredangle\mathcal{H}(e^{j\omega_0})}\, e^{-j\omega_0 n} =$$

$$= A\,\frac{e^{j[\omega_0 n+\varphi+\measuredangle\mathcal{H}(e^{j\omega_0})]} + e^{-j[\omega_0 n+\varphi+\measuredangle\mathcal{H}(e^{j\omega_0})]}}{2} = A|\mathcal{H}(e^{j\omega_0})|\cos\left[\omega_0 + \varphi + \measuredangle\mathcal{H}(e^{j\omega_0})\right]$$

Επομένως η επίδραση ενός συστήματος LTI στο σήμα $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$, είναι η κλιμάκωση του πλάτους του κατά το μέτρο της συχνοτικής απόκρισης του συστήματος υπολογισμένης στη θέση της συχνότητας του σήματος εισόδου και η μετατόπιση της φάσης κατά τη φάση της συχνοτικής απόκρισης υπολογισμένης στην ίδια τιμή.

Διακριτά συστήματα LTI

Η έξοδος των συστημάτων LTI

Η γενική εξίσωση διαφορών ενός διακριτού συστήματος τάξεως N, είναι μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} \beta_k x[n-k]$$

με τους συντελεστές $\{\alpha_k\}_0^{\mathrm{N}}$ και $\{\beta_k\}_0^{\mathrm{M}}$ να παίρνουν μόνο πραγματικές τιμές (μερικές εκ των οποίων ίσως είναι μηδενικές) ενώ γενικά επιβάλλουμε την απαίτηση να είναι $M \leq N$.

Οι μέθοδοι επίλυσής των εξισώσεων διαφορών είναι παρόμοιες με τις μεθόδους επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων.

Για να είναι δυνατή η επίλυση μιας εξίσωσης διαφορών θα πρέπει να γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Η απόκριση ενός διακριτού συστήματος LTI αποτελείται από δύο συνιστώσες:

- Την απόκριση του συστήματος που οφείλεται στην ύπαρξη των αρχικών συνθηκών και είναι γνωστή ως απόκριση στη μηδενική είσοδο
- Την απόκριση του συστήματος στο σήμα εισόδου που διαβιβάζεται σε αυτό και είναι γνωστή ως απόκριση στη μηδενική κατάσταση

Διακριτά συστήματα LTI
Αναδρομικός υπολογισμός της εξόδου του συστήματος

Επιλύοντας την εξίσωση διαφορών ως προς $y[n]$ θα λάβουμε

$$y[n] = \frac{1}{\alpha_0}\left(\sum_{k=0}^{M}\beta_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N}\alpha_k y[n-k]\right)$$

Γνωρίζοντας το σήμα $x[n]$ και τις αρχικές συνθήκες υπολογίζουμε τις τιμές του $y[n]$.

Θεωρώντας για παράδειγμα την εξίσωση $y[n] = \alpha y[n-1] + x[n]$ έχουμε:

- Για $\boldsymbol{k=0}$: $y[0] = \alpha y[-1] + x[0]$
- Για $\boldsymbol{k=1}$: $y[1] = \alpha y[0] + x[1] = \alpha^2 y[-1] + \alpha x[0] + x[1]$
- Για $\boldsymbol{k=2}$: $y[2] = \alpha y[1] + x[2] = \alpha^3 y[-1] + \alpha^2 x[0] + \alpha x[1] + x[2]$
- Για $\boldsymbol{k=n}$: γενικεύοντας την παραπάνω διαδικασία προκύπτει εύκολα ότι

$$y[n]=\alpha y[n-1]+x[n]=\alpha^{n+1}y[-1]+\alpha^n x[0]+\alpha^{n-1}x[1]+\ldots+\alpha x[n-1]+x[n]$$

εξίσωση, που σε πιο συνοπτική γραφή, διατυπώνεται ως

$$y[n] = \alpha^{n+1}y[-1] + \sum_{k=0}^{n}\alpha^k x[n-k] \quad (n \geq 0)$$

Διακριτά συστήματα LTI

Αναδρομικός υπολογισμός της εξόδου του συστήματος

Άσκηση

Να προσδιοριστούν τα 5 πρώτα δείγματα της εξόδου $y[n]$ του γραμμικού και χρονικώς αμετάβλητου διακριτού συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = y[n-1] - 0.24y[n-2] + x[n] - 2x[n-1]$$

για αρχικές συνθήκες $y[-1] = 2$, $y[-2] = 1$ και σήμα εισόδου της μορφής $x[n] = n$.

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που παρουσιάσαμε προηγουμένως, διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n=0}: &\quad y[0] = y[-1] - 0.24y[-2] + x[0] - 2x[-1] = 1.76 \\
\boldsymbol{n=1}: &\quad y[1] = y[0] - 0.24y[-1] + x[1] - 2x[0] = 2.28 \\
\boldsymbol{n=2}: &\quad y[2] = y[1] - 0.24y[0] + x[2] - 2x[1] = 1.8576 \\
\boldsymbol{n=3}: &\quad y[3] = y[2] - 0.24y[1] + x[3] - 2x[2] = 0.3104 \\
\boldsymbol{n=4}: &\quad y[4] = y[3] - 0.24y[2] + x[4] - 2x[3] = -2.1354
\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε όσα δείγματα επιθυμούμε.

Η απόκριση του συστήματος στη μηδενική είσοδο οφείλεται στην ύπαρξη των αρχικών συνθηκών και προσδιορίζεται επιλύοντας την ομογενή εξίσωση διαφορών η οποία είναι η

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k y[n-k] = \alpha_0 y[n] + \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] + \cdots + \alpha_N y[n-N] = 0$$

Θεωρώντας λύση της μορφής $y[n] = \lambda^n$ όπου λ πραγματική, φανταστική ή μιγαδική ποσότητα θα είναι

$$y[n-N] = \lambda^{n-N}, \quad y[n-N+1] = \lambda^{n-N+1} = \lambda\lambda^{n-N}, \quad \ldots$$
$$y[n-2] = \lambda^{n-2} = \lambda^{N-2}\lambda^{n-N}, \; y[n-1] = \lambda^{n-1} = \lambda^{N-1}\lambda^{n-N}, \; y[n] = \lambda^n = \lambda^N\lambda^{n-N}$$

Αντικαθιστώντας στην ομογενή εξίσωση και βγάζοντας κοινό παράγοντα τη μη μηδενική έκφραση λ^{n-N} τελικά παίρνουμε

$$Q(\lambda) = \lambda^N + \alpha_1\lambda^{N-1} + \alpha_2\lambda^{N-2} + \cdots + \alpha_{N-2}\lambda^2 + \alpha_{N-1}\lambda + \alpha_N = 0$$

που δεν είναι παρά η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος, με πραγματικές ή μιγαδικές ρίζες που μπορεί να είναι διακριτές ή όχι. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- Το $Q(\lambda)$ διαθέτει N διακριτές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ που οδηγούν σε ισάριθμες γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις $y_k[n] = \lambda_k^n$ (όπου $k = 1, 2, \ldots, N$). Η γενική λύση της εξίσωσης είναι ο γραμμικός συνδυασμός

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^{N} C_k \lambda_k^n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \cdots + C_N \lambda_N^n$$

  με τις σταθερές $C_1, C_2, \ldots, C_N$ να προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

- Το $Q(\lambda)$ διαθέτει επαναλαμβανόμενες ρίζες. Θεωρώντας μία ρίζα λ_ξ με τιμή πολλαπλότητας q, υπάρχουν q ίσες μεταξύ τους ρίζες με τιμή ίση με λ_ξ, έτσι ώστε να μπορούμε να γράψουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{q-1} = \lambda_\xi$ και να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο $Q(\lambda)$ ως

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_\xi)^q (\lambda - \lambda_{q+1})(\lambda - \lambda_{q+2}) \ldots (\lambda - \lambda_N)$$

  Οι $N - q$ διακριτές ρίζες $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \ldots, \lambda_N$ θα δώσουν τις λύσεις $\lambda_{q+1}^n, \lambda_{q+2}^n, \ldots, \lambda_N^n$, ενώ η ρίζα λ_ξ με πολλαπλότητα q θα δώσει q λύσεις $\lambda_\xi, n\lambda_\xi, n^2\lambda_\xi, \ldots n^{q-1}\lambda_\xi$. Η γενική λύση της $Q(\lambda) = 0$ είναι η

$$y_{zi}[n] = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \cdots + C_q n^{q-1})\lambda_\xi^n + C_{q+1}\lambda_{q+1}^n + C_{q+2}\lambda_{q+2}^n + \ldots + C_N \lambda_N^n$$

- Το $Q(\lambda)$ διαθέτει μιγαδικές ρίζες. Εφόσον οι συντελεστές που εμφανίζονται σε αυτό είναι πραγματικοί αριθμοί, οι ρίζες εμφανίζονται σε ζεύγη μιγαδικών συζυγών και επομένως εάν το πολυώνυμο διαθέτει τη ρίζα $\lambda = |\lambda| e^{j\vartheta}$, θα διαθέτει υποχρεωτικά και τη ρίζα $\lambda^* = |\lambda| e^{-j\vartheta}$.

  Η συνεισφορά αυτών των δύο ριζών στην απόκριση μηδενικής εισόδου είναι

$$C_1 \lambda^n + C_2 (\lambda^*)^n = C_1 |\lambda|^n e^{jn\vartheta} + C_2 |\lambda|^n e^{-jn\vartheta}$$

  Εάν το διακριτό σύστημα που πραγματευόμαστε δημιουργεί πραγματικές εξόδους $y[n]$, θα πρέπει οι συντελεστές C_1 και C_2 να σχετίζονται με μία σχέση μιγαδικής συζυγίας. Θέτοντας

$$C_1 = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \quad \text{και} \quad C_2 = \frac{A}{2} e^{-j\varphi}$$

  η παραπάνω παράσταση θα λάβει τη μορφή

$$C_1 |\lambda|^n e^{jn\vartheta} + C_2 |\lambda|^n e^{-jn\vartheta} = A|\lambda|^n \frac{e^{j(n\vartheta+\varphi)} + e^{-j(n\vartheta+\varphi)}}{2} = A|\lambda|^n \cos(n\vartheta + \varphi)$$

  με τις C_1 και C_2 ή ισοδύναμα τις A και φ, να προσδιορίζονται με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών.

Διακριτά συστήματα LTI

Η απόκριση στη μηδενική είσοδο ή φυσική απόκριση - Παράδειγμα υπολογισμού

Άσκηση

Να βρεθεί η φυσική απόκριση του διακριτού συστήματος

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = 0$$

Η εξίσωση διαφορών είναι ομογενής. Θεωρώντας λύση $y[n] = \lambda^n$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = 4$ και $\lambda_2 = -1$ και επομένως

$$y[n] = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1(4)^n + C_2(-1)^n$$

με τις σταθερές C_1 και C_2 να προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Αναλυτικά λοιπόν θα έχουμε:

- Από την ομογενή εξίσωση: εάν στην εξίσωση διαφορών του συστήματος θέσουμε διαδοχικά $n = 0$ και $n = 1$ θα λάβουμε

$$y[0] = 3y[-1] + 4y[-2] \quad \text{και} \quad y[1] = 3y[0] + 4y[-1] = 13y[-1] + 12y[-2]$$

- Από τη γενική λύση: εάν στη σχέση $y[n] = C_1(4)^n + C_2(-1)^n$ θέσουμε $n=0$ και $n=1$ θα λάβουμε

$$y[0] = C_1 + C_2 \quad \text{και} \quad y[1] = 4C_1 - C_2$$

Διακριτά συστήματα LTI

Η απόκριση στη μηδενική είσοδο ή φυσική απόκριση - Παράδειγμα υπολογισμού

Εξισώνοντας λοιπόν τις αντίστοιχες ποσότητες θα λάβουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$C_1 + C_2 = 3y[-1] + 4y[-2] \quad \text{και} \quad 4C_1 - C_2 = 13y[-1] + 12y[-2]$$

με αγνώστους τις σταθερές C_1 και C_2. Η λύση αυτού του συστήματος είναι η

$$C_1 = \frac{16}{5}y[-1] + \frac{16}{5}y[-2] \quad \text{και} \quad C_2 = -\frac{1}{5}y[-1] + \frac{4}{5}y[-2]$$

και επομένως, η φυσική απόκριση του θεωρούμενου διακριτού συστήματος είναι η

$$y_{\text{zi}}[n] = \left[\frac{16}{5}y(-1) + \frac{16}{5}y(-2)\right](4)^n + \left[-\frac{1}{5}y(-1) + \frac{4}{5}y(-2)\right](-1)^n$$

Υποθέτοντας ότι $y[-1] = 5$ και $y[-2] = 0$, θα είναι $C_1 = 16$ και $C_2 = -1$ και η παραπάνω σχέση μας δίνει

$$y_{\text{zi}}[n] = 16(4)^n + (-1)(-1)^n = (4)^2(4)^n + (-1)(-1)^n = (4)^{n+2} + (-1)^{n+1}$$

Διακριτά συστήματα LTI

Η απόκριση στη μηδενική κατάσταση ή εξαναγκασμένη απόκριση

Η απόκριση στη μηδενική κατάσταση είναι η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x[n]$, θεωρώντας πως οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος έχουν μηδενικές τιμές.

Αυτή η απόκριση υπολογίζεται από τη συνέλιξη ανάμεσα στην κρουστική απόκριση $h[n]$ και στο σήμα εισόδου $x[n]$ - θα είναι λοιπόν

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$$

Στα αναδρομικά διακριτά συστήματα LTI, η κρουστική απόκριση ορίζεται ως η απόκριση της μηδενικής του κατάστασης, $y_{zs}[n]$ όταν ως είσοδος στο σύστημα διαβιβαστεί η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση, με το σύστημα να βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας.

Θεωρώντας για παράδειγμα ένα σύστημα με απόκριση στη μηδενική κατάσταση

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k x[n-k]$$

η διαβίβαση στην είσοδό του διακριτού σήματος $x[n] = \delta[n]$ θα οδηγήσει στην έξοδο

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \delta[n-k] = \alpha^n \quad (n \geq 0) \quad \text{και επομένως} \quad h[n] = \alpha^n u[n]$$

Η ολική απόκριση ενός διακριτού συστήματος LTI ορίζεται ως το άθροισμα της απόκρισης στη μηδενική κατάσταση και της απόκρισης στη μηδενική είσοδο, οι οποίες θα πρέπει να υπολογιστούν ξεχωριστά και στη συνέχεια να προστεθούν μεταξύ τους.

Εναλλακτικά, μπορούμε να επιλύσουμε την πλήρη εξίσωση διαφορών, χρησιμοποιώντας το σήμα εισόδου που έχει δοθεί και τις εκάστοτε σε κάθε περίπτωση αρχικές συνθήκες.

Η γενική λύση μιας πλήρους εξίσωσης διαφορών ισούται με το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης καθώς και μιας μερικής λύσης της πλήρους

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η απόκριση στη μηδενική είσοδο του συστήματος. Η μερική λύση εξαρτάται από το σήμα εισόδου (δείτε τον επόμενο πίνακα).

Είσοδος $x[n]$	**Μερική Λύση $y_p[n]$**
C	C_1
Cn	$C_1 n + C_2$
$C\alpha^n$	$C_1 \alpha^n$
$C\cos(\omega n)$	$C_1\cos(\omega n) + C_2\sin(\omega n)$
$C\sin(\omega n)$	$C_1\cos(\omega n) + C_2\sin(\omega n)$
$C\alpha^n\cos(\omega n)$	$C_1\alpha^n\cos(\omega n) + C_2\alpha^n\sin(\omega n)$
$C\delta[n]$	δεν υπάρχει μερική λύση

Διακριτά συστήματα LTI
Η ολική απόκριση - Παράδειγμα

Άσκηση

Να επιλυθεί η πλήρης εξίσωση διαφορών δευτέρας τάξεως

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=\frac{5}{8}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)u[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-1]=y[-2]=1$.

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=0$$

είναι η $\lambda^2-(3/4)\lambda+(1/8)=0$ με ρίζες $\lambda_1=(1/2)$ και $\lambda_2=(1/4)$ και επομένως η γενική της λύση διατυπώνεται ως

$$y_{\mathrm{zi}}[n]=C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

με τις σταθερές C_1 και C_2 να προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες.

Παρατηρώντας τη μορφή του σήματος $x[n]$ η μερική λύση της πλήρους διαφορικής εξίσωσης θα πρέπει να έχει τη μορφή

Διακριτά συστήματα LTI

Η ολική απόκριση - Παράδειγμα

$$y_{zs}[n] = C_3 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + C_4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \text{και} \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

προκύπτει εύκολα ότι

$$\begin{aligned} y_{zs}[n-1] &= C_3 \cos\left[\frac{\pi(n-1)}{2}\right] + C_4 \sin\left[\frac{\pi(n-1)}{2}\right] = +C_3 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - C_4 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \\ y_{zs}[n-2] &= C_3 \cos\left[\frac{\pi(n-2)}{2}\right] + C_4 \sin\left[\frac{\pi(n-2)}{2}\right] = -C_3 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - C_4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των συναρτήσεων $y_{zs}[n]$, $y_{zs}[n-1]$ και $y_{zs}[n-2]$ στην πλήρη εξίσωση έχουμε

$$\left\{C_3 \cos\left(\frac{\pi n}{2} + C_4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\right\} - \frac{3}{4}\left\{C_3 \sin\left(\frac{\pi n}{2} - C_4 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\right\} + \frac{1}{8}\left\{-C_3 \cos\left(\frac{\pi n}{2} - C_4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\right\} = \frac{5}{8}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

και εξισώνοντας τις αντίστοιχες ποσότητες προκύπτει το σύστημα των δύο εξισώσεων

$$C_3 - \frac{3C_4}{4} - \frac{C_3}{8} = 0 \quad \text{και} \quad C_4 - \frac{3C_3}{4} - \frac{C_4}{8} = 0$$

με αγνώστους τις C_3 και C_4 και λύση $C_3 = -6/17$ και $C_4 = 7/17$. Θα είναι λοιπόν

$$y_{zs}[n] = -\frac{6}{17}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{7}{17}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Η γενική λύση της εξίσωσης έχει τη μορφή

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{6}{17}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{7}{17}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

με τις τιμές των C_1 και C_2 να προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες και να βρίσκονται ίσες με $C_1 = 5/4$ και $C_2 = -37/136$. Κατά συνέπεια,

$$y[n] = \underbrace{\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{37}{136}\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{μεταβατική απόκριση}} \underbrace{- \frac{6}{17}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{7}{17}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}_{\text{απόκριση σταθεράς κατάστασης}}$$

Εάν η μεταβατική απόκριση τείνει στο μηδέν το σύστημα είναι ευσταθές ενώ στην αντίθετη περίπτωση το σύστημα είναι ασταθές.

Διατυπώνοντας την έξοδο ενός συστήματος LTI ως

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

και υποθέτοντας πως αυτό είναι αιτιατό, θα είναι $h[k] = 0$ για $k < 0$ οπότε

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]$$

Εάν η είσοδος $x[n]$ είναι αιτιατό σήμα, δηλαδή $x[n] = 0$ για $n < 0$ θα έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$$

Από την άλλη πλευρά, εάν το σύστημα είναι ευσταθές τότε

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \Rightarrow |y[n]| \leq M_y < \infty$$

Διακριτά συστήματα LTI
Αιτιατά και ευσταθή διακριτά συστήματα LTI

Εάν το ευσταθές σύστημα είναι LTI, από την εξίσωση της συνέλιξης θα έχουμε

$$|y[n]|| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x[n-k]| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

και επομένως

ένα διακριτό σύστημα LTI είναι ευσταθές όταν το άθροισμα των απόλυτων τιμών των στοιχείων της κρουστικής του απόκρισης είναι πεπερασμένο

Αποδεικνύεται πως αυτή η συνθήκη είναι τόσο ικανή όσο και αναγκαία (ανατρέξτε στις σελίδες 429-430).

Άσκηση

Να προσδιορίσετε την περιοχή τιμών της παραμέτρου α για την οποία το γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο διακριτό σύστημα με κρουστική απόκριση της μορφής $h[n] = \alpha^n u[n]$ είναι ευσταθές.

(δείτε τη λύση στη σελίδα 430 του βιβλίου).

Διακριτά συστήματα LTI
Διακριτά αναδρομικά συστήματα LTI

Ο χαρακτηρισμός ενός αναδρομικού διακριτού συστήματος ως γραμμικό απαιτεί την ισχύ των τριών επόμενων συνθηκών (το σύστημα υποτίθεται πως είναι ταυτόχρονα και χρονικώς αμετάβλητο).

- Η συνολική απόκριση του συστήματος θα πρέπει να ισούται με το άθροισμα της απόκρισης στη μηδενική κατάσταση και της απόκρισης στη μηδενική είσοδο, δηλαδή

$$y[n] = y_{\text{zs}}[n] + y_{\text{zi}}[n]$$

- Η απόκριση στη μηδενική κατάσταση θα πρέπει να υπακούει στην αρχή της επαλληλίας. Δηλαδή, εάν στο σύστημα διαβιβαστεί το σήμα $x[n] = c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n]$ η έξοδός του θα πρέπει να έχει τη μορφή

$$y_{\text{zs}}[n] = c_1 y_{\text{zs}}^{(1)}[n] + c_2 y_{\text{zs}}^{(2)}[n]$$

- Η απόκριση στη μηδενική είσοδο θα πρέπει να υπακούει στην αρχή της επαλληλίας. Δηλαδή εάν στο σύστημα διαβιβαστεί το σήμα $x[n] = c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n]$ η έξοδός του θα πρέπει να έχει τη μορφή

$$y_{\text{zi}}[n] = c_1 y_{\text{zi}}^{(1)}[n] + c_2 y_{\text{zi}}^{(2)}[n]$$

Εάν έστω και μία από τις παραπάνω ιδιότητες δεν ισχύει, το σύστημα είναι μη γραμμικό.

Άσκηση

Να προσδιοριστεί εάν είναι γραμμικό και ευσταθές το διακριτό σύστημα LTI

$$y[n] = \alpha y[n-1] + x[n]$$

Η συνολική έξοδος του συστήματος είναι (δείτε τις διαφάνειες 28 και 29)

$$y[n] = \alpha^{n+1} y[-1] + \sum_{k=0}^{n} \alpha^k x[n-k]$$

και επομένως, οι αποκρίσεις του συστήματος στη μηδενική κατάσταση και στη μηδενική είσοδο ορίζονται ως

$$y_{\text{zs}}[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x[n-k] \quad \text{και} \quad y_{\text{zi}}[n] = \alpha^{k+1} y[-1]$$

όπως προκύπτει θέτοντας $y[-1] = 0$ και $x[n] = 0$. Επομένως η πρώτη ιδιότητα ικανοποιείται, αφού ισχύει η σχέση

$$y[n] = y_{\text{zs}}[n] + y_{\text{zi}}[n]$$

Διαβιβάζοντας στο σύστημα τη συνδυασμένη είσοδο $x[n] = c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n]$, η απόκριση στη μηδενική κατάσταση γίνεται

$$y_{\text{zs}}[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k x[n-k] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \Big[c_1 x_1[n-k] + c_2 x_2[n-k] \Big] =$$

$$= c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x_1[n-k] + c_2 \sum_{k=0}^{n} \alpha^k x_2[n-k] = c_1 y_{\text{zs}}^{(1)}[n] + c_2 y_{\text{zs}}^{(1)}[n]$$

και επομένως υπακούει στην αρχή της επαλληλίας. Ομοίως, η διαβίβαση στο σύστημα της συνδυασμένης εισόδου

$$y[-1] = c_1 y_1[-1] + c_2 y_2[-1]$$

θα οδηγήσει σε απόκριση στη μηδενική είσοδο της μορφής

$$y_{\text{zi}}[n] = \alpha^{n+1} y[-1] = \alpha^{n+1} \Big[c_1 y_1[-1] + c_2 y_2[-1] \Big] = c_1 \alpha^{n+1} y_1[-1] + c_2 \alpha^{n+1} y_2[-1]$$

$$= c_1 y_{\text{zi}}^{(1)}[n] + c_2 y_{\text{zi}}^{(2)}[n]$$

ήτοι, η απόκριση στη μηδενική είσοδο υπακούει επίσης στην αρχή της επαλληλίας.

Επομένως το σύστημα υπακούει και στις τρεις παραπάνω ιδιότητες και κατά συνέπεια είναι γραμμικό.

Διακριτά συστήματα LTI

Διακριτά αναδρομικά συστήματα LTI - Παράδειγμα

Προκειμένου να ελέγξουμε εάν το σύστημα είναι ευσταθές, έστω το φραγμένο σήμα εισόδου $x[n]$ τέτοιο ώστε $|x[n]| \leq M_x < \infty$ $(\forall n \geq 0)$. Το μέτρο της εξόδου του συστήματος δίδεται από τη σχέση

$$|y[n]| \leq |\alpha^{n+1} y(-1)| + \left| \sum_{k=0}^{n} \alpha^k x[n-k] \right| \leq |\alpha|^{n+1} |y[-1]| + M_x \sum_{k=0}^{n} |\alpha|^k$$

$$\leq |\alpha|^{n+1} |y[-1]| + M_x \frac{1 - |\alpha|^{n+1}}{1 - |\alpha|} = M_y$$

για τιμές $n \geq 0$. Εάν λοιπόν η τιμή του n είναι πεπερασμένη, η ποσότητα M_y είναι και αυτή πεπερασμένη και το σύστημα είναι ευσταθές αφού δίνει φραγμένη έξοδο.

Ωστόσο, αν η παράμετρος n λαμβάνει άπειρες τιμές, το σύστημα είναι ευσταθές μόνο για τιμές $|\alpha| < 1$ (αφού για αυτή την περιοχή θα είναι $|\alpha|^n \to 0$ καθώς $n \to \infty$).

Στην περίπτωση αυτή η έξοδος είναι φραγμένη από την ποσότητα

$$M_y = M_x \left[1 - \frac{|\alpha|^{n+1}}{1 - |\alpha|} \right]$$

Ένα διακριτό αναδρομικό σύστημα είναι ευσταθές, όταν η κρουστική του απόκριση $h[n]$ είναι απολύτως αθροίσιμη, δηλαδή

$$S_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Λαμβάνοντας όμως υπ΄ όψιν πως η κρουστική απόκριση $h[n]$ ορίζεται ως

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} \beta_k h_\beta[n-k]$$

όπου $h_\beta[n]$ είναι η λύση της ομογενούς έκδοσης της εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k h_\beta[n-k] = \delta[n]$$

η οποία επιλύεται για μηδενικές αρχικές συνθήκες, το άθροισμα της S_h γίνεται

$$S_h = \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{M} \beta_k h_\beta[n-k] \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{M} |\beta_k||h_\beta[n-k]| = \sum_{k=0}^{M} \sum_{n=k}^{\infty} |\beta_k||h_\beta[n-k]|$$

Αλλά η συνάρτηση $h_\beta[n]$ αποτελεί τη λύση της ομογενούς εξίσωσης - θα είναι λοιπόν

$$h_\beta[n] = \sum_{m=1}^{N} C_m \lambda_m^n$$

όπου λ_m $(m = 1, 2, \dots, N)$ είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της ομογενούς εξίσωσης. Προχωρώντας στην αντικατάσταση $n \to n - k$ και χρησιμοποιώντας την έκφραση της $h_\beta[n-k]$ που θα προκύψει, θα λάβουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| = \sum_{k=0}^{M} \sum_{n=k}^{\infty} |\beta_k| \left| \sum_{m=1}^{N} C_m \lambda_m^{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{M} \sum_{n=k}^{\infty} |\beta_k| \sum_{m=1}^{N} |C_m| |\lambda_m^{n-k}| =$$

$$= \sum_{k=0}^{M} |\beta_k| \sum_{m=1}^{N} |C_m| \sum_{n=k}^{\infty} |\lambda_m|^{n-k} = \sum_{k=0}^{M} |\beta_k| \sum_{m=1}^{N} |C_m| \sum_{r=0}^{\infty} |\lambda_m|^r$$

Αυτό το άθροισμα είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν είναι $|\lambda_m| < 1$ $(m = 1, 2, \dots, N)$.

Επομένως ένα αιτιατό αναδρομικό διακριτό σύστημα είναι ευσταθές, μόνο όταν όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης του συστήματος είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερες της μονάδας. Αυτό το είδος της ευστάθειας του συστήματος είναι γνωστό ως εσωτερική ή ασυμπτωτική ευστάθεια.

Διακριτά συστήματα LTI

Η ευστάθεια στα διακριτά αναδρομικά συστήματα LTI

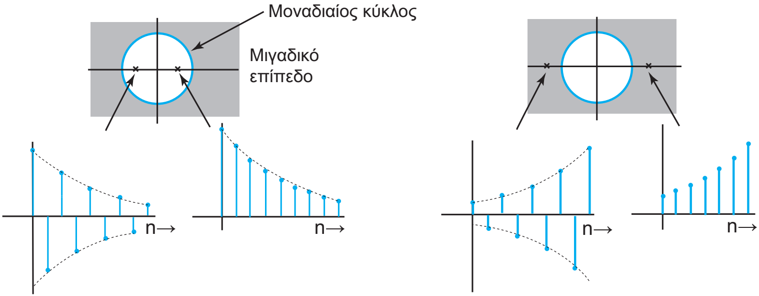
Ο χαρακτηρισμός του συστήματος ως προς την ευστάθειά του στηρίζεται στον προσδιορισμό της θέσεως των ριζών επί του μιγαδικού επιπέδου.

Το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όταν όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου

Εάν έστω και μία από αυτές τις ρίζες βρίσκεται έξω από το μοναδιαίο κύκλο, το σύστημα είναι ασταθές, αφού ο χαρακτηριστικός όρος που αντιστοιχεί σε αυτή τη ρίζα, απειρίζεται στο όριο $n \to \infty$.

Εάν δεν υπάρχουν ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου που να βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου, αλλά υπάρχουν κάποιες διακριτές μεταξύ τους ρίζες που βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια αυτού του κύκλου, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως οριακά ευσταθές.

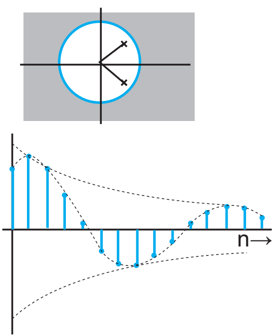
Αντίθετα, εάν υπάρχουν ρίζες επί της περιφέρειας αυτού του κύκλου οι οποίες συμπίπτουν μεταξύ τους, τότε το σύστημα αποδεικνύεται πως είναι ασταθές.

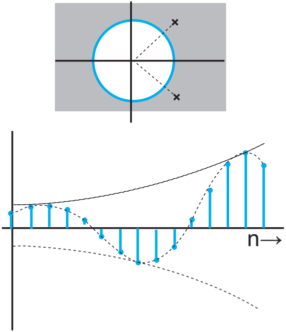


Η θέση των χαρακτηριστικών ριζών επί του μιγαδικού επιπέδου και η χρονική μεταβολή των αντίστοιχων χαρακτηριστικών όρων.

Διακριτά συστήματα LTI

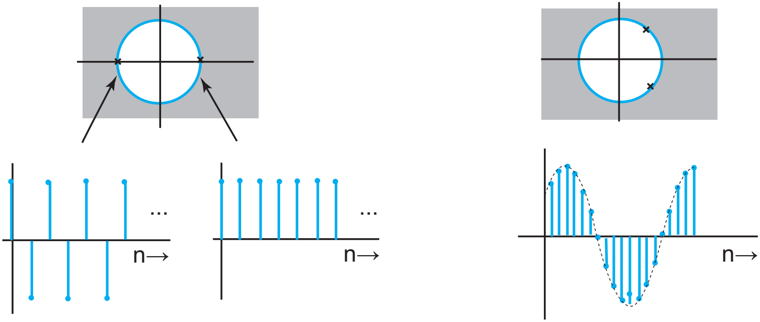
Η ευστάθεια στα διακριτά αναδρομικά συστήματα LTI





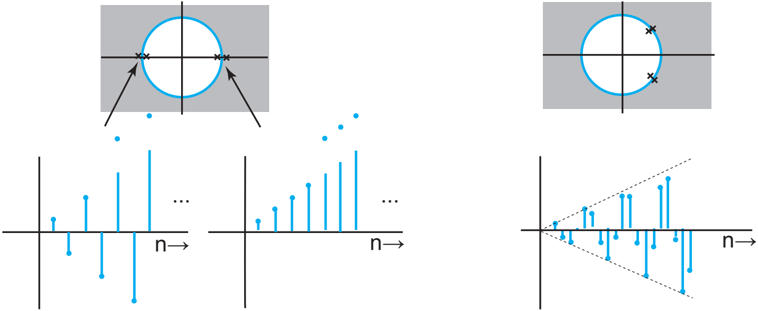
Η θέση των χαρακτηριστικών ριζών επί του μιγαδικού επιπέδου και η χρονική μεταβολή των αντίστοιχων χαρακτηριστικών όρων.

Διακριτά συστήματα LTI
Η ευστάθεια στα διακριτά αναδρομικά συστήματα LTI



Η θέση των χαρακτηριστικών ριζών επί του μιγαδικού επιπέδου και η χρονική μεταβολή των αντίστοιχων χαρακτηριστικών όρων.

Διακριτά συστήματα LTI
Η ευστάθεια στα διακριτά αναδρομικά συστήματα LTI



Η θέση των χαρακτηριστικών ριζών επί του μιγαδικού επιπέδου και η χρονική μεταβολή των αντίστοιχων χαρακτηριστικών όρων.

Εάν ένα διακριτό αναδρομικό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές τότε θα είναι αυτόματα και ευσταθές κατά BIBO.

Πράγματι, θεωρώντας μία ρίζα λ_k ($k = 1, 2, \ldots, N$) εντός του μοναδιαίου κύκλου (με μέτρο, επομένως, μικρότερο της μονάδας), η αντίστοιχη χαρακτηριστική συνάρτηση $\lambda_k^n u[n]$ θα είναι απολύτως αθροίσιμη, αφού

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^n u[n] = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k|^n = \frac{1}{1-|\lambda_k|}, \quad (|\lambda_k| < 1)$$

Αντίθετα, εάν $|\lambda_k| > 1$, το παραπάνω άθροισμα δεν συγκλίνει και το σύστημα δεν είναι ευσταθές κατά BIBO.

Ένα οριακά ευσταθές ή ασυμπτωτικά ασταθές σύστημα, είναι ασταθές κατά BIBO ενώ το αντίστροφο αυτής της πρότασης δεν είναι υποχρεωτικά αληθές.

Ένα διακριτό σύστημα που είναι ευσταθές κατά BIBO δεν είναι υποχρεωτικά ευσταθές όσον αφορά την εσωτερική του ευστάθεια.

Διακριτά συστήματα LTI

Η ευστάθεια στα διακριτά αναδρομικά συστήματα LTI - Παράδειγμα

Άσκηση

Έστω το διακριτό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 7y[n-1] + 31y[n-2] + 25y[n-3] = 3x[n-1]$$

Να το χαρακτηρίσετε ως προς την ευστάθεια κατά BIBO και την ασυμπτωτική του ευστάθεια

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών

$$y[n] + 7y[n-1] + 31y[n-2] + 25y[n-3] = 0$$

είναι η

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 + 31\lambda + 25 = (\lambda+1)(\lambda^2 + 6\lambda + 25) = (\lambda+1)(\lambda+3-4j)(\lambda+3+4j) = 0$$

με ρίζες $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3+4j$ και $\lambda_3 = -3-4j$.

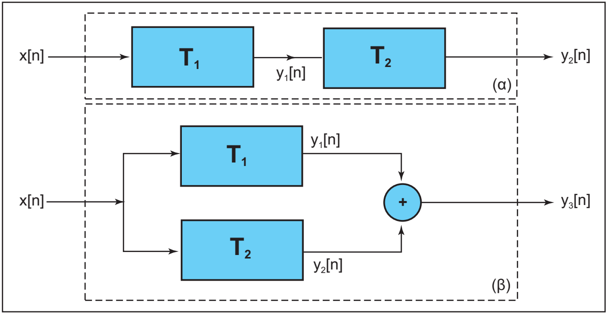
Τα μέτρα αυτών των ριζών υπολογίζονται ως $|\lambda_1| = 1$ και $|\lambda_2| = |\lambda_3| = 5$ και επειδή υπάρχουν ρίζες που βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου, το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ασταθές και επομένως και ασταθές κατά BIBO.

Υπάρχουν τρεις βασικοί τρόποι διασύνδεσης διακριτών συστημάτων:

- σύνδεση σε σειρά στην οποία τα συστήματα συνδέονται έτσι ώστε η έξοδος του ενός συστήματος να γίνεται είσοδος στο άλλο σύστημα.
- παράλληλη σύνδεση στην οποία τα συστήματα δέχονται την ίδια είσοδο και λειτουργούν παράλληλα χωρίς να αλληλεπιδρούν, παράγοντας τις δικές τους ξεχωριστές εξόδους οι οποίες τελικά προστίθενται μεταξύ τους.
- σύνδεση με ανάδραση στην οποία η έξοδος του πρώτου συστήματος ανατροφοδοτεί την είσοδό του, αφού πρώτα διέλθει από το δεύτερο σύστημα.

Η έξοδος του συστήματος που προκύπτει από την εν σειρά και την παράλληλη σύνδεση των στοιχειωδών συστημάτων $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$, έχει τη μορφή

$$\underbrace{y[n] = \mathcal{T}_2\left\{\mathcal{T}_1\{x[n]\}\right\}}_{\text{σύνδεση εν σειρά}} \quad \text{και} \quad \underbrace{y[n] = \mathcal{T}_1\{x[n]\} + \mathcal{T}_2\{x[n]\}}_{\text{παράλληλη σύνδεση}}$$



Διασύνδεση συστημάτων διακριτού χρόνου σε σειρά (εικόνα α) και παράλληλα (εικόνα β)

Σε πλήρη αναλογία με τα συνεχή συστήματα LTI

- Ένα διακριτό σύστημα LTI με κρουστική απόκριση $h[n]$ που δέχεται το σήμα εισόδου $x[n]$, είναι πλήρως ισοδύναμο με ένα σύστημα με κρουστική απόκριση $x[n]$ που δέχεται το σήμα εισόδου $h[n]$.

- Δύο διακριτά συστήματα LTI με κρουστικές αποκρίσεις $h_1[n]$ και $h_2[n]$ τα οποία είναι συνδεδεμένα σε σειρά, είναι ισοδύναμα με ένα απλό σύστημα, η κρουστική απόκριση του οποίου $h[n]$ προκύπτει από τη συνέλιξη των κρουστικών αποκρίσεων των δύο συστημάτων, ή σε μαθηματική διατύπωση

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

- Δύο διακριτά συστήματα LTI με κρουστικές αποκρίσεις $h_1[n]$ και $h_2[n]$ τα οποία συνδέονται παράλληλα, είναι ισοδύναμα με ένα απλό σύστημα η κρουστική απόκριση του οποίου προκύπτει από το άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων των δύο συστημάτων, ή σε μαθηματική γραφή

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

Διακριτά συστήματα LTI

Αντίστροφα διακριτά συστήματα LTI

Δύο διακριτά συστήματα LTI ονομάζονται αντίστροφα το ένα ως προς το άλλο, όταν η εν σειρά σύνδεσή τους δημιουργεί το ταυτοτικό σύστημα, που αντιγράφει την είσοδο στην έξοδό του, υλοποιώντας έτσι το μετασχηματισμό $y[n] = x[n]$.

Εάν οι κρουστικές αποκρίσεις των δύο συστημάτων είναι οι $h_1[n]$ και $h_2[n]$, τότε η κρουστική απόκριση του σύνθετου συστήματος είναι

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

Η έξοδος $y[n]$ του σύνθετου συστήματος θα έχει λοιπόν τη μορφή

$$y[n] = h[n] * x[n] = \Big(h_1[n] * h_2[n]\Big) * x[n] = x[n] = \delta[n] * x[n]$$

και επομένως θα είναι

$$\boxed{h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]}$$

αφού η συνάρτηση $\delta[n]$ αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο της πράξης της συνέλιξης.

Αυτή η σχέση είναι το διακριτό ισοδύναμο της σχέσης

$$h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$$

που ισχύει για την περίπτωση των συστημάτων συνεχούς χρόνου.

Διακριτά συστήματα LTI

Αντίστροφα διακριτά συστήματα LTI - Παράδειγμα

Άσκηση

Να αποδειχθεί πως τα διακριτά συστήματα LTI που περιγράφονται από τις σχέσεις

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad \textit{και} \quad y_2[n] = x[n] - x[n-1]$$

αποτελούν ζεύγος ευθέως / αντίστροφου συστήματος.

Από τις εξισώσεις ορισμού των δύο συστημάτων, προκύπτει εύκολα ότι

$$h_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n] \quad \text{και} \quad h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

Υπολογίζοντας τη συνέλιξη ανάμεσα στα διακριτά σήματα $h_1[n]$ και $h_2[n]$ αποδεικνύεται το ζητούμενο αφού έχουμε

$$h_1[n] * h_2[n] = u[n] * \Big(\delta[n] - \delta[n-1]\Big) = u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1] = u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

Το πρώτο σύστημα είναι γνωστό ως συσσωρευτής και αποτελεί το διακριτό ανάλογο του ολοκληρωτή, ενώ το δεύτερο σύστημα αποτελεί το διακριτό ανάλογο του διαφοριστή.

Διακριτά συστήματα LTI

Ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις - η συνάρτηση μεταφοράς

Ας θεωρήσουμε ένα διακριτό σύστημα LTI με κρουστική απόκριση $h[n]$ που δέχεται ως είσοδο το στοιχειώδες σήμα $x[n] = z^n$ όπου $z \in C$. Στην περίπτωση αυτή η έξοδος του συστήματος είναι

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = \mathcal{H}(z)z^n$$

όπου

$$\mathcal{H}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

Η σχέση ισχύει μόνο για εκείνες τις τιμές του z για τις οποίες συγκλίνει το παραπάνω άθροισμα των άπειρων όρων.

Το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει, είναι γνωστό ως περιοχή σύγκλισης, ενώ η παραπάνω σχέση ορίζει ένα νέο τύπο μετασχηματισμού που είναι γνωστός ως μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$.

Το εκθετικό μιγαδικό σήμα $z[n] = z^n$ αποτελεί ιδιοσυνάρτηση ενός διακριτού συστήματος LTI με ιδιοτιμή την τιμή της συνάρτησης $\mathcal{H}(z)$ υπολογισμένη στη θέση της εκάστοτε τιμής της μιγαδικής μεταβλητής z

Αυτή η κατάσταση είναι ανάλογη εκείνης που είχαμε συναντήσει στα συνεχή συστήματα LTI, με ιδιοσυναρτήσεις $x(t) = e^{st}$ και με αντίστοιχη ιδιοτιμή τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος $\mathcal{H}(s)$.

Αυτή η αναλογία μας επιτρέπει να ορίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ενός διακριτού συστήματος LTI ως

$$\boxed{\mathcal{H}(z) = \left.\frac{y[n]}{x[n]}\right|_{x[n]=z^n} = \frac{\mathcal{T}\{z^n\}}{z^n}}$$

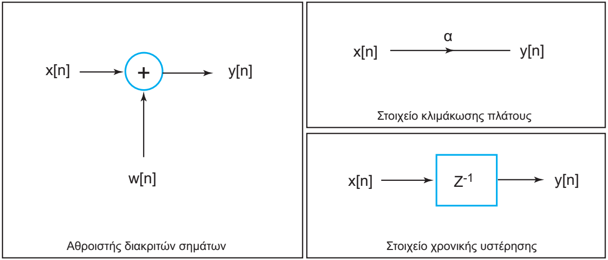
Σημειώστε πως αυτή η συνάρτηση ορίζεται μόνο για τα συστήματα LTI και όχι για μή γραμμικά ή χρονικώς μεταβαλλόμενα συστήματα.

Διακριτά συστήματα LTI

Υλοποίηση διακριτών συστημάτων

Η υλοποίηση των διακριτών συστημάτων στηρίζεται στη χρήση ενός συνόλου *στοιχειωδών υποσυστημάτων* που πραγματοποιούν τις θεμελιώδεις πράξεις ανάμεσα στα διακριτά σήματα.

Τα πιο σημαντικά από αυτά τα υποσυστήματα παρουσιάζονται στο επόμενο σχήμα.



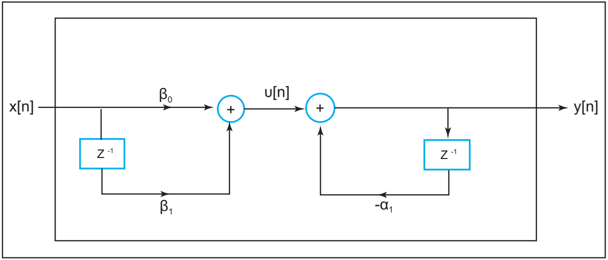
Τα θεμελιώδη υποσυστήματα επεξεργασίας σημάτων διακριτού χρόνου.

Η διασύνδεση των στοιχειωδών υποσυστημάτων επιτρέπει την κατασκευή πιο πολύπλοκων δομών που είναι γνωστές ως δομικά ή σχηματικά διαγράμματα.

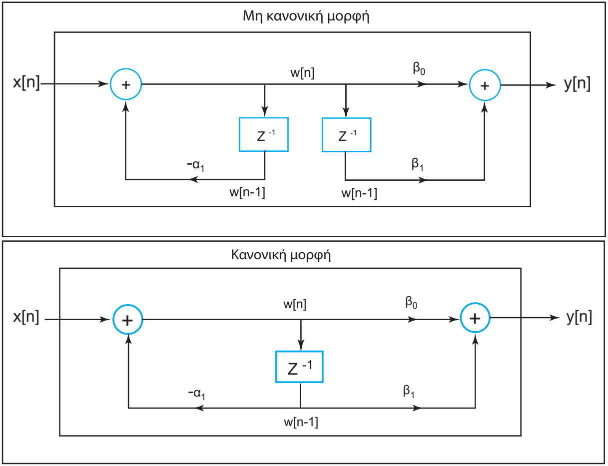
Θεωρώντας για παράδειγμα το διακριτό αναδρομικό σύστημα LTI

$$y[n] = -\alpha_1 y[n-1] + \beta_0 x[n] + \beta_1 x[n-1]$$

το σχηματικό διάγραμμα που το περιγράφει έχει την ακόλουθη μορφή.

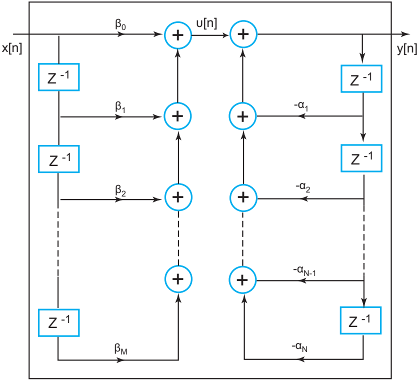


Η μη κανονική μορφή και η κανονική μορφή για αυτό το σύστημα είναι οι



Σχηματικό διάγραμμα για τη γενική περίπτωση

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \alpha_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{N} \beta_k x[n-k]$$



Διακριτά συστήματα LTI
Υλοποίηση διακριτών συστημάτων

Θεωρώντας πως το σύστημα προκύπτει από τη συνένωση ενός μη αναδρομικού συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

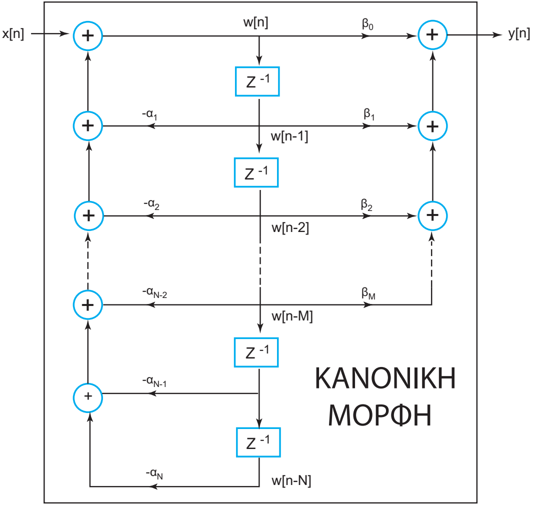
$$u[n] = \sum_{k=0}^{M} \beta_k x[n-k]$$

και ενός αναδρομικού συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \alpha_k y[n-k] + u[n]$$

και αντιστρέφοντας τη σειρά διασύνδεσης των δύο υποσυστημάτων, μπορούμε να κατασκευάσουμε την κανονική μορφή του γενικευμένου διακριτού συστήματος η οποία παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.

Σε αυτόν τον τύπο αναπαράστασης, το πλήθος των στοιχείων χρονικής υστέρησης που απαιτούνται για την υλοποίηση του συστήματος, είναι το ελάχιστο δυνατό.


x[n]
y[n]
w[n]
β0
Z -1
-α1
β1
w[n-1]
-α2
β2
w[n-2]
-αN-2
βM
w[n-M]
-αN-1
-αN
w[n-N]
ΚΑΝΟΝΙΚΗ
ΜΟΡΦΗ

Η παραπάνω δομή ($N > M$) προκύπτει από τη συνένωση δύο υποσυστημάτων, ενός αναδρομικού και ενός μη αναδρομικού που ορίζονται ως

$$w[n] = -\sum_{k=1}^{N} \alpha_k w[n-k] + x[n] \quad \text{και} \quad y[n] = \sum_{k=0}^{M} \beta_k w[n-k]$$

Εάν στη γενική εξίσωση

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \alpha_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \beta_k x[n-k]$$

θέσουμε $\alpha_k = 0$, αυτή απλουστεύεται ως

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} \beta_k x[n-k]$$

και περιγράφει ένα σύστημα κινούμενου μέσου η (πεπερασμένη) κρουστική απόκριση του οποίου είναι

$$h(k) = \begin{cases} \beta_k & 0 \leq k \leq M \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Διακριτά συστήματα LTI
Υλοποίηση διακριτών συστημάτων

Από την άλλη πλευρά, θέτοντας $M = 0$, θα λάβουμε

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \alpha_k y[n-k] + \beta_0 x[n]$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει ένα πλήρως αναδρομικό σύστημα, η έξοδος του οποίου είναι ένας σταθμισμένος γραμμικός συνδυασμός των N προηγούμενων εξόδων του και της τρέχουσας εισόδου του.

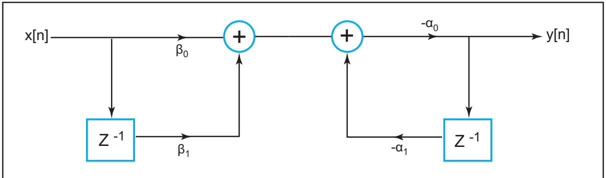
Η μη κανονική μορφή της υλοποίησης των διακριτών αναδρομικών συστημάτων LTI που αντιστοιχούν στις τιμές $M = N = 1$ και $M = N = 2$ και τα οποία περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$\alpha_0 y[n] + \alpha_1 y[n-1] = \beta_0 x[n] + \beta_1 x[n-1] \qquad \text{και}$$

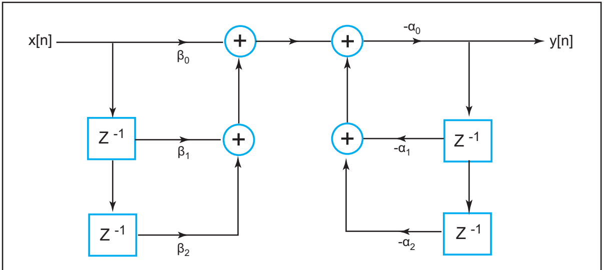
$$\alpha_0 y[n] + \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] = \beta_0 x[n] + \beta_1 x[n-1] + \alpha_2 x[n-2]$$

παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.

Η κατασκευή της κανονικής μορφής αφήνεται ως άσκηση.



Η περίπτωση Μ=Ν=1



Η περίπτωση Μ=Ν=2

Οι έννοιες της κατάστασης, των καταστατικών μεταβλητών και των δυναμικών εξισώσεων ορίζονται με τον τρόπο που είδαμε στα συνεχή συστήματα.

Υπάρχουν ωστόσο οι εξής διαφορές:

- Ο χρόνος αντί για συνεχής είναι διακριτός
- Τα σύμβολα των ολοκληρωμάτων αντικαθίστανται από αθροίσματα.
- Οι στοιχειώδεις ολοκληρωτές που εμφανίζονται στην μη κανονική και στην κανονική μορφή της διαγραμματικής αναπαράστασης των συστημάτων, αντικαθίστανται από στοιχεία χρονικής υστέρησης.

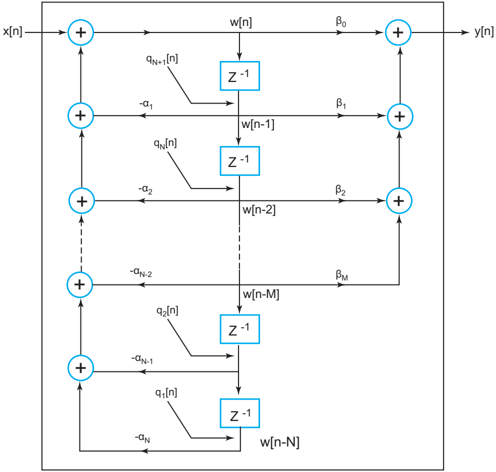
Θεωρώντας το αναδρομικό διακριτό σύστημα τάξεως N

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} \beta_k x[n-k]$$

οι δυναμικές εξισώσεις του μπορούν να κατασκευαστούν τόσο από την κανονική όσο και από τη μη κανονική του μορφή.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης
Κατασκευάζοντας τις δυναμικές εξισώσεις

Στηριζόμενοι στην κανονική μορφή επιλέγουμε ως N καταστατικές μεταβλητές του συστήματος, τις εξόδους των N στοιχείων χρονικής υστέρησης - δείτε το επόμενο σχήμα.



Επομένως οι καταστατικές μεταβλητές σχετίζονται μεταξύ τους ως

$$\begin{aligned} q_1[n+1] &= q_2[n] \\ q_2[n+1] &= q_3[n] \\ q_3[n+1] &= q_4[n] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{N-1}[n+1] &= q_N[n] \\ q_N[n+1] &= \beta_n q_1[n] + \beta_{N-1} q_2[n] + \cdots + \beta_1 q_N[n] + \beta_0 q_{N+1}[n] \end{aligned}$$

ενώ η έξοδος $y[n]$ του συστήματος δίδεται από την εξίσωση

$$y[n] = \beta_N q_1[n] + \beta_{N-1} q_2[n] + \cdots + \beta_1 q_N[n] + \beta_0 q_{N+1}[n]$$

ή ισοδύναμα

$$y[n] = (\beta_N - \beta_0\alpha_N) q_1[n] + (\beta_{N-1} - \beta_0\alpha_{N-1}) q_2[n] + \cdots + (\beta_1 - \beta_0\alpha_1) q_N[n] + \beta_0 x[n]$$

όπου έχουμε απαλείψει τον όρο $q_{N+1}[n]$ από τις δύο τελευταίες εξισώσεις.

Οι N εξισώσεις που συσχετίζουν μεταξύ τους τις *καταστατικές μεταβλητές* $q_1[n], q_2[n], \ldots, q_N[n]$ μπορούν να συνδυαστούν στην απλή εξίσωση

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \\ \vdots \\ q_{N-1}[n+1] \\ q_N[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\alpha_N & -\alpha_{N-1} & -\alpha_{N-2} & \ldots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ \vdots \\ q_{N-1}[n] \\ q_N[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

Ορίζοντας το *καταστατικό διάνυσμα*

$$\boldsymbol{q}[n] = [q_1[n], q_2[n], \ldots, q_N[n]]^T$$

- οπότε θα είναι $\boldsymbol{q}[n+1] = [q_1[n+1], q_2[n+1], \ldots, q_N[n+1]]^T$ - και τους πίνακες

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\alpha_N & -\alpha_{N-1} & -\alpha_{N-2} & \ldots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \left[(\beta_N - \beta_0\alpha_N) \quad (\beta_{N-1} - \beta_0\alpha_{N-1}) \quad \ldots \quad (\beta_1 - \beta_0\alpha_1) \right], \quad \boldsymbol{D} = [\beta_0]$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης
Κατασκευάζοντας τις δυναμικές εξισώσεις

οι δυναμικές εξισώσεις του συστήματος εκφράζονται ως

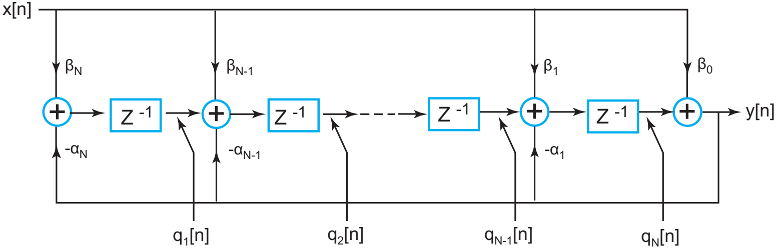
$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}[n+1] &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{B}x[n] \\ y[n] &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{D}x[n] \end{aligned}$$

και περιγράφουν τη συμπεριφορά του συστήματος στο χώρο κατάστασης με βάση την κανονική μορφή της αναπαράστασής του με σχηματικά διαγράμματα.

Η πρώτη εξίσωση ονομάζεται καταστατική εξίσωση, ενώ η δεύτερη εξίσωση εξόδου. Οι πίνακες που εμφανίζονται σε αυτές, χαρακτηρίζονται από τις επόμενες ιδιότητες:

- Ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ έχει διαστάσεις $N \times N$ και ονομάζεται πίνακας συστήματος
- Ο πίνακας $\boldsymbol{B}$ έχει διαστάσεις $N \times 1$ και ονομάζεται πίνακας εισόδου
- Ο πίνακας $\boldsymbol{C}$ έχει διαστάσεις $1 \times N$ και ονομάζεται πίνακας μέτρησης
- Ο πίνακας $\boldsymbol{D}$ έχει διαστάσεις 1×1 και ονομάζεται πίνακας εξόδου

Η κατασκευή των δυναμικών εξισώσεων από τη μη κανονική μορφή της αναπαράστασης του συστήματος, συνίσταται στην επιλογή των καταστατικών μεταβλητών με τον τρόπο που παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.



Ορισμός των καταστατικών μεταβλητών του συστήματος από τη μη κανονική του μορφή.

Στην προκειμένη περίπτωση, οι καταστατικές μεταβλητές σχετίζονται ως

$$\begin{aligned} q_1[n+1] &= -\alpha_N q_N[n] + (\beta_N - \alpha_N\beta_0)x[n] \\ q_2[n+1] &= q_1[n] - \alpha_{N-1}q_N[n] + (\beta_{N-1} - \alpha_{N-1}\beta_0)x[n] \\ q_3[n+1] &= q_2[n] - \alpha_{N-2}q_N[n] + (\beta_{N-2} - \alpha_{N-2}\beta_0)x[n] \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_N[n+1] &= q_{N-1}[n] - \alpha_1 q_N[n] + (\beta_1 - \alpha_1\beta_0)x[n] \end{aligned}$$

ενώ η έξοδος του συστήματος έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} y[n] &= \beta_0 x[n] + (\beta_1 x[n-1] - \alpha_1 y[n-1]) + (\beta_2 x[n-2] - \alpha_2 y[n-2]) + \cdots + \\ &+ (\beta_N x[n-N] - \alpha_N y[n-N]) \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή οι πίνακες $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ και $\boldsymbol{D}$ ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_N \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \beta_N - \beta_0\alpha_N \\ \beta_{N-1} - \beta_0\alpha_{N-1} \\ \vdots \\ \beta_2 - \beta_0\alpha_2 \\ \beta_1 - \beta_0\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = [\beta_0]$$

Τα παραπάνω αφορούν απλά συστήματα SISO, ενώ για την περίπτωση συστημάτων MIMO K εισόδων και L εξόδων οι δυναμικές εξισώσεις έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}[n+1] &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[n] \\ \boldsymbol{y}[n] &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}[n] \end{aligned}$$

με τους πίνακες $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ και $\boldsymbol{D}$ να ορίζονται ως

$$\boldsymbol{A}_{N\times N} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \dots & \alpha_{NN} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_{N\times K} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1K} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{N1} & \beta_{N2} & \dots & \beta_{NK} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_{L\times N} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{L1} & \gamma_{L2} & \dots & \gamma_{LN} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D}_{L\times K} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1K} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{L1} & \delta_{L2} & \dots & \delta_{LK} \end{bmatrix}$$

και τα διανύσματα $\boldsymbol{x}[n]$ και $\boldsymbol{y}[n]$ να περιέχουν K και L στοιχεία αντίστοιχα.

Άσκηση

Να κατασκευάσετε τις δυναμικές εξισώσεις του διακριτού αναδρομικού συστήματος LTI που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]-y[n-3]=5x[n]-4x[n-1]+12x[n-2]$$

στηριζόμενοι τόσο στην κανονική όσο και στη μη κανονική του μορφή.

Η εξίσωση του συστήματος αντιστοιχεί σε τιμές παραμέτρων $N=3$, $M=2$, $\alpha_0=1$, $\alpha_1=3$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=-1$, $\beta_0=5$, $\beta_1=-4$, $\beta_2=12$, $\beta_3=0$. Ξεκινώντας από την κανονική μορφή οι πίνακες $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ και $\boldsymbol{D}$ είναι

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \beta_3-\beta_0\alpha_3 & \beta_2-\beta_0\alpha_2 & \beta_1-\beta_0\alpha_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -19 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}=[\beta_0]=[5]$$

Επομένως η καταστατική εξίσωση του συστήματος έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n]+\boldsymbol{B}x[n]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ q_3[n] \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}x[n]$$

από όπου προκύπτει εύκολα ότι

$$
\begin{aligned}
q_1[n+1] &= q_2[n] \\
q_2[n+1] &= q_3[n] \\
q_3[n+1] &= q_1[n] - 2q_2[n] - 3q_3[n] + x[n]
\end{aligned}
$$

Η εξίσωση εξόδου του συστήματος υπολογίζεται ως

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{D}x[n] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ q_3[n] \end{bmatrix} + 5x[n] \\
&= 5q_1[n] + 2q_2[n] - 19q_3[n] + 5x[n]
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας τη μη κανονική μορφή της αναπαράστασης του συστήματος βρίσκουμε

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \beta_3 - \beta_0\alpha_3 \\ \beta_2 - \beta_0\alpha_2 \\ \beta_1 - \beta_0\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -19 \end{bmatrix}
$$

$$
C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = [\beta_0] = [5]
$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης
Κατασκευάζοντας τις δυναμικές εξισώσεις - Παράδειγμα

Επομένως η καταστατική εξίσωση του συστήματος θα έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{q}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{B}x[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ q_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -19 \end{bmatrix} x[n]$$

Θα είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} q_1[n+1] &= q_3[n] + 5x[n] \\ q_2[n+1] &= q_1[n] - 2q_3[n] + 2x[n] \\ q_3[n+1] &= q_2[n] - 3q_3[n] - 19x[n] \end{aligned}$$

Τέλος, η εξίσωση εξόδου του συστήματος υπολογίζεται ως

$$y[n] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{D}x[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ q_3[n] \end{bmatrix} + 5x[n] = q_3[n] + 5x[n]$$

Η επίλυση της καταστατικής εξίσωσης

$$\boldsymbol{q}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{B}x[n]$$

γίνεται με αναδρομικό τρόπο υποθέτοντας πως γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση $\boldsymbol{q}[0]$. Για $n = 0$ προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{q}[1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[0] + \boldsymbol{B}x[0]$$

ενώ για $n = 1$ η η καταστατική εξίσωση γράφεται

$$\boldsymbol{q}[2] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[1] + \boldsymbol{B}x[1]$$

ή ισοδύναμα

$$\boldsymbol{q}[2] = \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[0] + \boldsymbol{B}x[0]) + \boldsymbol{B}x[1] = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{q}[0] + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}x[0] + \boldsymbol{B}x[1]$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{q}[3] &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[2] + \boldsymbol{B}x[2] = \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{q}[0] + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}x[0] + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}x[1] + \boldsymbol{B}x[2] \\
\boldsymbol{q}[4] &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[3] + \boldsymbol{B}x[3] = \boldsymbol{A}^4\boldsymbol{q}[0] + \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}x[0] + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}x[1] + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}x[2] + \boldsymbol{B}x[3]
\end{aligned}$$

και στη γενική περίπτωση

$$\boldsymbol{q}[n] = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{q}[0] + \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}x[0] + \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{B}x[1] + \cdots + \boldsymbol{B}x[n-1]$$

ή ισοδύναμα

$$\boldsymbol{q}[n] = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{q}[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^{n-1-k}\boldsymbol{B}x[k]$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης
Επίλυση της καταστατικής εξίσωσης

Ο δεύτερος όρος στην τελευταία σχέση εκφράζει τη συνέλιξη των πινάκων $\boldsymbol{A}^{n-1}u[n-1]$ και $\boldsymbol{B}x[n]$· θα είναι λοιπόν

$$\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^{n-1-k}\boldsymbol{B}x[k] = \boldsymbol{A}^{n-1}u[n-1] * \boldsymbol{B}x[n]$$

και η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\boldsymbol{q}[n] = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{q}[0] + \boldsymbol{A}^{n-1}u[n-1] * \boldsymbol{B}x[n]$$

Στο παραπάνω άθροισμα

- Ο πρώτος όρος είναι ανεξάρτητος της εισόδου του συστήματος και είναι γνωστός ως η συνιστώσα μηδενικής εισόδου
- Ο δεύτερος όρος είναι ανεξάρτητος από το διάνυσμα της αρχικής κατάστασης και είναι γνωστός ως η συνιστώσα μηδενικής κατάστασης.

Ο πίνακας

$$\boldsymbol{A}^n = \underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\ldots\cdots\boldsymbol{A}}_{n \text{ φορές}}$$

είναι γνωστός ως πίνακας καταστατικής μετάβασης.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης
Επίλυση της καταστατικής εξίσωσης

Αντικαθιστώντας την έκφραση του $\boldsymbol{q}[n]$ στην εξίσωση της εξόδου $y[n]$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{D}x[n] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{q}[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1-k}\boldsymbol{B}x[k] + \boldsymbol{D}x[n] \\ &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{q}[0] + \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}u[n-1] * \boldsymbol{B}x[n] + \boldsymbol{D}x[n] \end{aligned}$$

Ο όρος $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{q}[0]$ εκφράζει την απόκριση στη μηδενική είσοδο, ενώ το άθροισμα $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}u[n-1] * \boldsymbol{B}x[n] + \boldsymbol{D}x[n]$ αποτελεί την απόκριση στη μηδενική κατάσταση.

Οι αντίστοιχες εξισώσεις για χρονικώς μεταβαλλόμενα συστήματα είναι ($n_0 \neq 0$)

$$\boldsymbol{q}[n] = \boldsymbol{\Phi}[n, n_0]\boldsymbol{q}[n_0] + \sum_{k=n_0}^{n-1} \boldsymbol{\Phi}[n, k+1]\boldsymbol{B}[k]x[k]$$

$$y[n] = \boldsymbol{C}[n]\boldsymbol{\Phi}[n, n_0]\boldsymbol{q}[n_0] + \boldsymbol{C}[n]\sum_{k=n_0}^{n-1} \boldsymbol{\Phi}[n, k+1]\boldsymbol{B}[k]x[k] + \boldsymbol{D}[n]x[n]$$

όπου

$$\boldsymbol{\Phi}[n, n_0] = \prod_{k=1}^{n-n_0} \boldsymbol{A}[n-k]$$

Ο υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης $\boldsymbol{A}^n$ πραγματοποιείται με αρκετούς τρόπους.

Η πρώτη μέθοδος στηρίζεται στη χρήση των ιδιοτιμών $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ του πίνακα $\boldsymbol{A}$ $(N \times N)$ που αποτελούν ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$Q(\lambda) = \lambda^N + \alpha_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Cayley-Hamilton (δείτε και τις αντίστοιχες διαφάνειες του Κεφαλαίου 2) έχουμε

$$\boldsymbol{A}^n = \beta_0\boldsymbol{I} + \beta_1\boldsymbol{A} + \beta_2\boldsymbol{A}^2 + \cdots + \beta_{N-1}\boldsymbol{A}^{N-1}$$

όπου $\boldsymbol{I}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας τάξεως N ενώ οι συντελεστές $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{N-1}$ υπολογίζονται με τη βοήθεια των ιδιοτιμών του πίνακα $\boldsymbol{A}$ ως η λύση του συστήματος

$$\begin{aligned}
\beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_1^2 + \cdots + \beta_{N-1}\lambda_1^{N-1} &= f(\lambda_1) = \lambda_1^n \\
\beta_0 + \beta_1\lambda_2 + \beta_2\lambda_2^2 + \cdots + \beta_{N-1}\lambda_2^{N-1} &= f(\lambda_2) = \lambda_2^n \\
\beta_0 + \beta_1\lambda_3 + \beta_2\lambda_3^2 + \cdots + \beta_{N-1}\lambda_3^{N-1} &= f(\lambda_3) = \lambda_3^n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_0 + \beta_1\lambda_N + \beta_2\lambda_N^2 + \cdots + \beta_{N-1}\lambda_N^{N-1} &= f(\lambda_N) = \lambda_N^n
\end{aligned}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης $\boldsymbol{A}^n$

το οποίο σε μορφή πινάκων διατυπώνεται ως

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{N-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_3^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \lambda_N^2 & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^n \\ \lambda_2^n \\ \lambda_3^n \\ \vdots \\ \lambda_N^n \end{bmatrix}$$

Ο δεύτερος τρόπος στηρίζεται στη διαγωνιοποίηση του πίνακα $\boldsymbol{A}$ που επιτρέπει τη γραφή του ως $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$ όπου

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix}$$

ο πίνακας ιδιοτιμών και $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2 \ \ \boldsymbol{x}_3 \ \ \dots \ \ \boldsymbol{x}_N]$ ο πίνακας διαγωνιοποίησης. Έχοντας υπολογίσει αυτούς τους πίνακες, ο πίνακας $\boldsymbol{A}^n$ υπολογίζεται ως

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης
Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης $\boldsymbol{A}^n$

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_N^n \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

Τέλος, σύμφωνα με τη θεωρία της φασματικής ανάλυσης πινάκων, εάν ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ αναπτυχθεί ως το άθροισμα

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \boldsymbol{E}_i = \lambda_1 \boldsymbol{E}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \lambda_N \boldsymbol{E}_N$$

ο ζητούμενος πίνακας $\boldsymbol{A}^n$ μπορεί να υπολογιστεί από το άθροισμα

$$\boldsymbol{A}^n = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^n \boldsymbol{E}_i = \lambda_1^n \boldsymbol{E}_1 + \lambda_2^n \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \lambda_N^n \boldsymbol{E}_N$$

Μία εναλλακτική μέθοδος υπολογισμού στηρίζεται στη χρήση του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$.

Άσκηση

Να υπολογίσετε τον πίνακα $\boldsymbol{A}^n$ με τον πίνακα $\boldsymbol{A}$ διαστάσεων 3×3, να ορίζεται ως

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση ιδιοτιμών του πίνακα $\boldsymbol{A}$ είναι η

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+3) = 0$$

από όπου προκύπτει ότι $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = -3$.

Οι συντελεστές β_0, β_1 και β_2 θα υπολογιστούν λοιπόν δια της επιλύσεως του συστήματος

$$\begin{aligned} \beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_1^2 &= \lambda_1^n \\ \beta_0 + \beta_1\lambda_2 + \beta_2\lambda_2^2 &= \lambda_2^n \\ \beta_0 + \beta_1\lambda_3 + \beta_2\lambda_3^2 &= \lambda_3^n \end{aligned} \qquad \text{ή ισοδύναμα} \qquad \begin{aligned} \beta_0 + 3\beta_1 + 9\beta_2 &= 3^n \\ \beta_0 + 2\beta_1 + 4\beta_2 &= 2^n \\ \beta_0 - 3\beta_1 + 9\beta_2 &= (-3)^n \end{aligned}$$

η οποία οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\beta_0 = -3^n + \frac{1}{5}(-3)^n + \frac{9}{5}2^n, \quad \beta_1 = \frac{1}{6}3^n - \frac{1}{6}(-3)^n, \quad \beta_2 = \frac{1}{6}3^n - \frac{1}{5}2^n + \frac{1}{30}(-3)^n$$

Θα είναι λοιπόν

$$\boldsymbol{A}^n = \beta_0 \boldsymbol{I} + \beta_1 \boldsymbol{A} + \beta_2 \boldsymbol{A}^2$$

ή μετά από πράξεις

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} (3)^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}(2)^n + \frac{4}{5}(-3)^n & \frac{1}{5}(2)^n - \frac{1}{5}(-3)^n \\ 0 & \frac{4}{5}(2)^n - \frac{4}{5}(-3)^n & \frac{4}{5}(2)^n + \frac{1}{5}(-3)^n \end{bmatrix}$$

Από την άλλη πλευρά, η εφαρμογή της μεθόδου διαγωνιοποίησης οδηγεί εύκολα στον υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων

- $\boldsymbol{x}_1 = [\ 1 \quad 0 \quad 0\ ]^T$ για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$
- $\boldsymbol{x}_2 = [\ 0 \quad 1 \quad 4\ ]^T$ για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$
- $\boldsymbol{x}_3 = [\ 0 \quad 1 \quad -1\ ]^T$ για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = -3$.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης $\boldsymbol{A}^n$ - Παράδειγμα

Επομένως οι πίνακες $\boldsymbol{P}$ και $\boldsymbol{P}^{-1}$ υπολογίζονται ως

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 4/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραστάσεις στην εξίσωση ορισμού του πίνακα $\boldsymbol{A}^n$ θα λάβουμε

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 4/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

και κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που υπολογίσαμε προηγουμένως.

Άσκηση

Να επιλύσετε την καταστατική εξίσωση $\boldsymbol{q}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{B}x[n]$ *για τιμές παραμέτρων*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/6 & 5/6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x[n] = u[n]$$

και διάνυσμα αρχικής κατάστασης $\boldsymbol{q}[0] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ *και στη συνέχεια να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος εάν οι πίνακες* $\boldsymbol{C}$ *και* $\boldsymbol{D}$ *έχουν τη μορφή* $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix}$ *και* $\boldsymbol{D} = [0]$.

Η ζητούμενη λύση $\boldsymbol{q}[n]$ της καταστατικής εξίσωσης του συστήματος θα προκύψει ως

$$\boldsymbol{q}[n] = \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{q}[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^{n-1-k} \boldsymbol{B} x[k]$$

Αρχικά θα πρέπει να υπολογίσουμε την εκθετική συνάρτηση πίνακα $\boldsymbol{A}^n$.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα $\boldsymbol{A}$ είναι οι $\lambda_1 = 1/3$ και $\lambda_2 = 1/2$, ενώ ακόμη βρίσκουμε

$$\beta_0 = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{και} \quad \beta_1 = -6\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα $\boldsymbol{A}$ είναι οι $\lambda_1 = 1/3$ και $\lambda_2 = 1/2$, ενώ υπολογίζοντας και τις τιμές των β_0 και β_1 οδηγούμαστε τελικά στο αποτέλεσμα

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & -6\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

Θα είναι ακόμη

$$\boldsymbol{A}^n \boldsymbol{q}[0] = \begin{bmatrix} 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & -6\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12\left(\frac{1}{3}\right)^n + 14\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ -4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 7\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

και επομένως η απόκριση του συστήματος στη μηδενική είσοδο υπολογίζεται ως

$$y_{zi}[n] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^n \boldsymbol{q}[0] = \begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12\left(\frac{1}{3}\right)^n + 14\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ -4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 7\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} = -8\left(\frac{1}{3}\right)^n + 21\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Από την άλλη πλευρά, ο υπολογισμός του όρου $\boldsymbol{A}^{n-1}u[n-1] * \boldsymbol{B}x[n]$ θα πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης της συνέλιξης

$$\boldsymbol{A}^{n-1}u[n-1] * \boldsymbol{B}x[n] = \boldsymbol{A}^{n}u[n] * \boldsymbol{B}x[n] \Big|_{n \to n-1}$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα $\boldsymbol{A}^n$ που προσδιορίσαμε προηγουμένως έχουμε

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{n}u[n] * \boldsymbol{B}x[n] &= \begin{bmatrix} 3\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] & -6\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] & -2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ u[n] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -6\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] * u[n]\right] + 6\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * u[n]\right] \\ -2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] * u[n]\right] + 3\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * u[n]\right] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Επίσης, από την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης διαπιστώνουμε ότι

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] * u[n] = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{και} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * u[n] = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

και αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην τελευταία εξίσωση,

$$\boldsymbol{A}^n u[n] * \boldsymbol{B}x[n] = \begin{bmatrix} 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{bmatrix}$$

Εάν στην παραπάνω σχέση κάνουμε την αντικατάσταση $n \to n-1$ θα λάβουμε

$$\boldsymbol{A}^{n-1} u[n-1] * \boldsymbol{B}x[n] = \underbrace{\begin{bmatrix} 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{bmatrix}}_{n \to n-1} = \begin{bmatrix} 9\left(\frac{1}{3}\right)^n - 12\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραστάσεων $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{q}[0]$ και $\boldsymbol{A}^{n-1}u[n-1] * \boldsymbol{B}x[n]$ που υπολογίσαμε, στην εξίσωση ορισμού του καταστατικού διανύσματος $\boldsymbol{q}[n]$, προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{q}[n] = \begin{bmatrix} -3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ -\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{q}[0] + \boldsymbol{A}^{n-1}u[n-1] * \boldsymbol{B}x[n]$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Επίλυση της καταστατικής εξίσωσης - Παράδειγμα

που αποτελεί τη λύση της καταστατικής εξίσωσης. Η απόκριση στη μηδενική κατάσταση υπολογίζεται ως

$$y_{zs}[n] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}u[n-1] * \boldsymbol{B}x[n] + \boldsymbol{D}x[n] = \begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9\left(\frac{1}{3}\right)^n - 12\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$y_{zs}[n] = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n - 18\left(\frac{1}{2}\right)^n + 12$$

ενώ η συνολική έξοδος του συστήματος θα έχει τη μορφή

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \left[-2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 12\right]u[n]$$

με τη βηματική συνάρτηση $u[n]$ να χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει πως η έξοδος του συστήματος $y[n]$ αποτελεί ένα αιτιατό σήμα

Εάν επαναδιατυπώσουμε την εξίσωση ορισμού της απόκρισης στη μηδενική κατάσταση ως

$$\begin{aligned} y_{zs}[n] &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}u[n-1] * \boldsymbol{B}x[n] + \boldsymbol{D}(\delta[n] * x[n]) \\ &= \left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}u[n-1]\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\delta[n]\right) * x[n] = h[n] * x[n] \end{aligned}$$

μπορούμε να διατυπώσουμε τον ισχυρισμό πως η κρουστική απόκριση του συστήματος $h[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από τους πίνακες της αναπαράστασης του συστήματος στο χώρο κατάστασης από την εξίσωση

$$h[n] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}u[n-1]\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\delta[n]$$

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες του προηγούμενου παραδείγματος βρίσκουμε ότι

$$h[n] = \left[-12\left(\frac{1}{3}\right)^n + 18\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n-1]$$

όπως μπορεί να αποδειχθεί πραγματοποιώντας στην εξίσωση ορισμού του πίνακα $\boldsymbol{A}^n$ την αντικατάσταση $n \rightarrow n-1$ και χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των πινάκων $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ και $\boldsymbol{D}$ που δίδονται στην εκφώνηση της άσκησης.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης
Μετασχηματισμοί ομοιότητας

Η επιλογή των καταστατικών μεταβλητών για ένα σύστημα δεν είναι μοναδική.

Υπάρχουν άπειρα ισοδύναμα καταστατικά διανύσματα που σχετίζονται δια μέσου αντιστρέψιμων πινάκων μετασχηματισμού.

Θεωρώντας N καταστατικές μεταβλητές, υπάρχει τετραγωνικός πίνακας μετασχηματισμού $\boldsymbol{W}$ τάξεως N, που συσχετίζει το τρέχον διάνυσμα $\boldsymbol{q}[n]$ με ένα άλλο διάνυσμα $\boldsymbol{p}[n]$ δια μέσου της σχέσεως

$$\begin{bmatrix} p_1[n] \\ p_2[n] \\ p_3[n] \\ \vdots \\ p_N[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \cdots & w_{1N} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & \cdots & w_{2N} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & \cdots & w_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2} & w_{N3} & \cdots & w_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ q_3[n] \\ \vdots \\ q_N[n] \end{bmatrix}$$

ή σε συνοπτική γραφή

$$\boldsymbol{p}[n] = \boldsymbol{W}\boldsymbol{q}[n]$$

όπου $\boldsymbol{W} = \{w_{ij}\} : (i, j = 1, 2, \ldots, N)$.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης
Μετασχηματισμοί ομοιότητας

Επειδή αυτός ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας $\boldsymbol{W}^{-1}$ και επομένως θα είναι

$$\boldsymbol{q}[n] = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{p}[n]$$

Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιώντας τις δυναμικές εξισώσεις του συστήματος διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}[n+1] &= \boldsymbol{wq}[n+1] = \boldsymbol{W}\Big(\boldsymbol{Aq}[n] + \boldsymbol{B}x[n]\Big) = (\boldsymbol{WAW}^{-1})\boldsymbol{p}[n] + (\boldsymbol{WB})x[n] \\ y[n] &= \boldsymbol{Cq}[n] + \boldsymbol{D}x[n] = (\boldsymbol{CW}^{-1})\boldsymbol{p}[n] + \boldsymbol{D}x[n] \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}[n+1] &= \widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{p}[n] + \widetilde{\boldsymbol{B}}x[n] \\ y[n] &= \widetilde{\boldsymbol{C}}p[n] + \widetilde{\boldsymbol{D}}x[n] \end{aligned}$$

όπου $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{WAW}^{-1}$, $\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{WB}$, $\widetilde{C} = \boldsymbol{CW}^{-1}$ και $\widetilde{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D}$. Οι παραπάνω εκφράσεις αποτελούν τις δυναμικές εξισώσεις του συστήματος εκπεφρασμένες συναρτήσει του νέου καταστατικού διανύσματος $\boldsymbol{p}[n]$.

Αποδεικνύεται πως οι ιδιοτιμές του πίνακα συστήματος $\boldsymbol{A}$, είναι ανεξάρτητες από την επιλογή του καταστατικού διανύσματος που θα χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή του συστήματος και επομένως είναι αναλλοίωτες κάτω από τους μετασχηματισμούς ομοιότητας.

Ένα διακριτό σύστημα LTI που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\boldsymbol{q}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{B}x[n]$$

χαρακτηρίζεται ως πλήρως ελέγξιμο, εάν η μετάβαση $(\boldsymbol{q}[0] = \boldsymbol{q}_0) \rightarrow (\boldsymbol{q}[n_1] = \boldsymbol{q}_1)$ πραγματοποιείται σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων.

Διαφορετικά το σύστημα λέγεται μερικώς ελέγξιμο ή μη ελέγξιμο.

Ένα διακριτό σύστημα LTI είναι πλήρως παρατηρήσιμο εντός ενός πεπερασμένου χρονικού διαστήματος διάρκειας N, εάν για κάθε n μπορούμε να προσδιορίσουμε την αρχική κατάσταση $\boldsymbol{q}[0] = \boldsymbol{q}_0$ γνωρίζοντας μόνο την είσοδο $x[n]$ και την έξοδο $y[n]$.

Εάν κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως μη παρατηρήσιμο.

Ξεκινώντας από την ελεγξιμότητα, η αντικατάσταση των τιμών $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ στην καταστατική εξίσωση θα μας δώσει

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{q}[1] &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[0] + \boldsymbol{B}x[0] \\
\boldsymbol{q}[2] &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[1] + \boldsymbol{B}x[1] = \boldsymbol{A}^2 q[0] + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}x[0] + \boldsymbol{B}x[1] \\
\boldsymbol{q}[3] &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[2] + \boldsymbol{B}x[2] = \boldsymbol{A}^3 q[0] + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}x[0] + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}x[1] + \boldsymbol{B}x[2] \\
\cdots &\cdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{q}[N] &= \boldsymbol{A}^N q[0] + \boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B}x[0] + \cdots + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}x[N-2] + \boldsymbol{B}x[N-1]
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα, υπό τη μορφή πινάκων

$$\boldsymbol{q}[N] - \boldsymbol{A}^N \boldsymbol{q}[0] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \dots & \boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[N-1] \\ x[N-2] \\ \vdots \\ x[1] \\ x[0] \end{bmatrix}$$

Για την απλή περίπτωση των συστημάτων SISO που εξετάζουμε, ο πίνακας

$$\boldsymbol{S}_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \dots & \boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως N που είναι γνωστός ως πίνακας ελεγξιμότητας.

Εάν αυτός ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος, μπορούμε να προσδιορίσουμε την ακολουθία των εισόδων που θα προκαλέσει τη μετάβαση από την αρχική στην επιθυμητή κατάσταση, ως τη λύση της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} x[N-1] \\ x[N-2] \\ \vdots \\ x[1] \\ x[0] \end{bmatrix} = \boldsymbol{S}_c^{-1} \left(\boldsymbol{q}[N] - \boldsymbol{A}^N \boldsymbol{q}[0] \right)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης
Ελεγξιμότητα και παρατηρησιμότητα

Αντίθετα, για τα συστήματα MIMO K εισόδων, ο πίνακας $\boldsymbol{S_c}$ έχει διαστάσεις $N \times NK$ ενώ ο πίνακας των εισόδων έχει διαστάσεις $NK \times 1$.

Ένα διακριτό σύστημα τάξεως N είναι πλήρως ελέγξιμο, εάν η βαθμίδα του πίνακα ελεγξιμότητας ταυτίζεται με την τάξη του συστήματος, δηλαδή

$$\text{rank } \boldsymbol{S_c} = N$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία στην εξίσωση εξόδου παίρνουμε

$$\begin{aligned}
y[0] &= \boldsymbol{Cq}[0] + \boldsymbol{D}x[0] \\
y[1] &= \boldsymbol{Cq}[1] + \boldsymbol{D}x[1] = \boldsymbol{CAq}[0] + \boldsymbol{CB}x[0] + \boldsymbol{D}x[1] \\
y[2] &= \boldsymbol{Cq}[2] + \boldsymbol{D}x[2] = \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{q}[0] + \boldsymbol{CAB}x[0] + \boldsymbol{CB}x[1] + \boldsymbol{D}x[2] \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y[N-1] &= \boldsymbol{CA}^{N-1}\boldsymbol{q}[0] + \boldsymbol{CA}^{N-2}\boldsymbol{B}x[0] + \cdots + \boldsymbol{CAB}x[n-3] + \boldsymbol{CB}x[n-2] + \boldsymbol{D}x[n-1]
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα, υπό μορφή πινάκων,

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{N-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{q}[n] + \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \boldsymbol{CB} & \boldsymbol{D} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \boldsymbol{CAB} & \boldsymbol{CB} & \boldsymbol{D} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{N-2} & \boldsymbol{CA}^{N-3} & \boldsymbol{CA}^{N-4} & \cdots & \boldsymbol{CB} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας $\boldsymbol{S_o}$ που για τα συστήματα SISO είναι τετραγωνικός τάξεως N ενώ για συστήματα MIMO L εξόδων έχει διαστάσεις $NL \times N$

$$\boldsymbol{S_o} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{N-1} \end{bmatrix}$$

ονομάζεται πίνακα παρατηρησιμότητας.

Ένα διακριτό σύστημα LTI είναι πλήρως παρατηρήσιμο, όταν η βαθμίδα αυτού του πίνακα είναι ίση με N, ή σε μαθηματική γραφή

$$\text{rank } \boldsymbol{S_o} = N$$

Η έννοια του δυισμού ανάμεσα στην ελεγξιμότητα και την παρατηρησιμότητα και οι κανονικές μορφές της ελεγξιμότητας και της παρατηρησιμότητας ορίζονται με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο ορίζονται στα συνεχή συστήματα