Σήματα διακριτού χρόνου

(ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6)

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Ι. ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2014

Σήματα διακριτού χρόνου
Βασικοί ορισμοί - δειγματοληψία

Περιγράφουν μεγέθη που μεταβάλλονται σε συνάρτηση με το χρόνο ο οποίος όμως δεν είναι συνεχής αλλά διακριτός.

Επομένως η τιμή του σήματος δεν ορίζεται πλέον σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, αλλά μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, οι οποίες μάλιστα δεν είναι υποχρεωτικό να ισαπέχουν μεταξύ τους.

Ένα διακριτό σήμα περιγράφεται από μία συνάρτηση $x[n]$ στην οποία η ανεξάρτητη μεταβλητή n, που εκφράζει το διακριτό χρόνο, παίρνει μόνο ακέραιες τιμές στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

Ένα διακριτό σήμα $x[n]$ δημιουργείται από τη δειγματοληψία ενός συνεχούς σήματος $x(t)$, δηλαδή από την καταγραφή του πλάτους του συνεχούς σήματος σε διακεκριμένες χρονικές στιγμές.

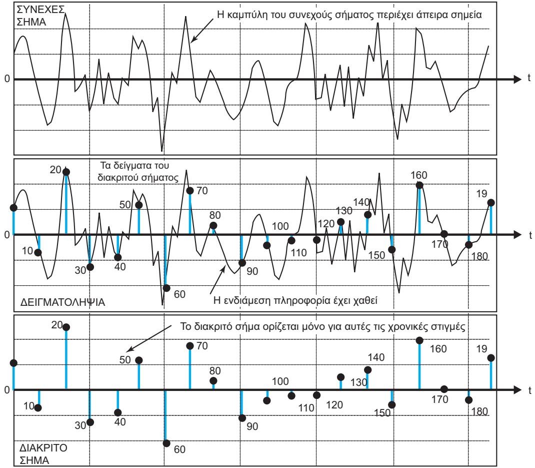
Το χρονικό διάστημα T_s που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικές καταγραφές πλάτους του συνεχούς σήματος είναι γνωστό ως περίοδος δειγματοληψίας

Το πλήθος των δειγμάτων F_s που καταγράφονται στη μονάδα του χρόνου είναι γνωστό ως συχνότητα δειγματοληψίας.

Θα είναι λοιπόν

$$\boxed{y[n] = x(nT_s) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)}$$

Σήματα διακριτού χρόνου
Περιγραφή της δειγματοληψίας



Παράδειγμα συνεχούς σήματος και του ισοδύναμου διακριτού σήματος.

Δειγματοληψία αναλογικού σήματος

Χρόνος Καταγραφής (msec)	Πλάτος Σήματος (Volts)	Χρόνος Καταγραφής (msec)	Πλάτος Σήματος (Volts)
000	+0.437	110	-0.098
010	-0.430	120	-0.040
020	+1.235	130	+0.115
030	-0.495	140	+0.217
040	-0.402	150	-0.501
050	+0.645	160	+0.998
060	-1.003	170	+0.017
070	+1.017	180	-0.195
080	+0.112	190	+0.603
090	-0.631	200	+0.342

Ο παραπάνω πίνακας περιέχει τα αποτελέσματα της διαδικασίας της δειγματοληψίας που απεικονίζεται στο προηγούμενο σχήμα. Το διακριτό σήμα είναι το

$$
\begin{aligned}
x[n] \;=\; \{&0.437, -0.430, 1.235, -0.495, -0.402, 0.645, -1.003, 1.017, 0.112,\\
&-0.631, -0.435, -0.098, -0.040, 0.115, 0.217, -0.501, 0.998, 0.017,\\
&-0.195, 0.603, 0.342, 0.961\}
\end{aligned}
$$

Η κόκκινη τιμή αντιστοιχεί στο $n = 0$.

Σήματα διακριτού χρόνου

Μιγαδικά και πολυδιάστατα σήματα - σήματα άπειρου μήκους

Τα μιγαδικά διακριτά σήματα αποτελούν ακολουθίες μιγαδικών αριθμών της μορφής

$$z[n] = \alpha[n] + j\beta[n] = \Re\{z[n]\} + j\Im\{z[n]\}$$

ή ισοδύναμα $$z[n] = |z(n)| \exp(j\varphi\{z[n]\})$$

με πλάτος και φάση

$$|z(n)| = \sqrt{\{\Re\left[z(n)\right]\}^2 + \{\Im\left[z(n)\right]\}^2} \quad kai \quad \varphi\left[z(n)\right] = \tan^{-1}\left(\frac{\Im\left[z(n)\right]}{\Re\left[z(n)\right]}\right)$$

Εάν το διακριτό σήμα έχει άπειρο μήκος, το σήμα ορίζεται ως συνάρτηση, π.χ.

$$x[n] = \begin{cases} 1, \text{ για } n \leq -100 \\ 4, \text{ για } -100 \leq n \leq 100 \\ 0, \text{ για } n > 100 \end{cases}$$

Τέλος ένα σήμα μπορεί να είναι πολυδιάστατο και να ορίζεται όχι στο χρόνο αλλά στο χώρο, όπως είναι για παράδειγμα μια εικόνα διαστάσεων $M \times N$ που αναπαρίσταται ως μία συνάρτηση $I = f(x, y)$ όπου I η ένταση της εικόνας στο σημείο (x, y).

Εδώ έχουμε δειγματοληψία κατά μήκος των δύο διαστάσεων της εικόνας με περιόδους T_{s1} και T_{s2} και η διακριτή εικόνα ορίζεται ως

$$g(n_1, n_2) = f(n_1 T_{s1}, n_2 T_{s2}), \quad (n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots)$$

Σήματα διακριτού χρόνου

Χρήσιμες εκφράσεις αθροισμάτων σε κλειστή μορφή (σελίδα 361)

ΣΕΙΡΕΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΟΡΩΝ ($\alpha \neq 1$)

$$\sum_{k=\ell}^{n} \alpha^k = \frac{\alpha^\ell - \alpha^{n+1}}{1-\alpha} \quad (n \geq \ell) \qquad \sum_{k=0}^{n} k\alpha^k = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left[1-(n+1)\alpha^n + n\alpha^{n+1}\right]$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\alpha^k = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^3}\left[(1+\alpha)-(n+1)^2\alpha^n + (2n^2+2n-1)\alpha^{n+1} - n^2\alpha^{n+2}\right]$$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

ΣΕΙΡΕΣ ΑΠΕΙΡΩΝ ΟΡΩΝ ($|\alpha| < 1$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k\alpha^k = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k^2\alpha^k = \frac{\alpha^2+\alpha}{(1-\alpha)^3}$$

Ενέργεια και ισχύς σημάτων διακριτού χρόνου

Οι βασικές εξισώσεις

Η ενέργεια E ενός διακριτού σήματος $x[n]$, ορίζεται ως

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

και μπορεί να είναι πεπερασμένη ή άπειρη. Στην πρώτη περίπτωση το σήμα $x[n]$ είναι σήμα ενέργειας ενώ στη δεύτερη, εάν η μέση ισχύς

$$P = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x(n)|^2\right)$$

είναι πεπερασμένη, το σήμα $x[n]$ χαρακτηρίζεται ως σήμα ισχύος.

Ορίζοντας την ενέργεια του σήματος επί του διαστήματος $-N \leq n \leq N$ ως

$$E_N = \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

η συνολική ενέργεια θα είναι $E = \lim\limits_{N\to\infty} E_N$ ενώ η μέση ισχύς υπολογίζεται ως

$$P = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2N+1}E_N\right)$$

Ενέργεια και ισχύς σημάτων διακριτού χρόνου

Παράδειγμα υπολογισμού ενέργειας διακριτού σήματος

Άσκηση

Να υπολογίσετε την ενέργεια των τριγωνομετρικών σημάτων

$$x_\kappa[n] = A\cos\left(\frac{2\kappa\pi n}{N}\right), \quad \kappa, n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Από την εξίσωση ορισμού της ενέργειας ενός διακριτού σήματος έχουμε

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = A^2 \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2\left(\frac{2\kappa\pi n}{N}\right) = \frac{A^2}{2}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\left[1+\cos\left(\frac{4\kappa\pi n}{N}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{A^2 N}{2} + \frac{A^2}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\cos\left(\frac{4\kappa\pi n}{N}\right) = \frac{A^2 N}{2}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ καθώς και ότι

$$\sum_{n=0}^{N-1}\cos\left(\frac{4\kappa\pi n}{N}\right) = \Re\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(j\frac{4\kappa\pi n}{N}\right)\right\} = \Re\left\{\frac{e^{j(4\kappa\pi)}-1}{\exp[j(4\kappa\pi)/N]-1}\right\} = \Re\{0\} = 0$$

Περιοδικά διακριτά σήματα
Βασικοί ορισμοί

Ένα διακριτό σήμα $x[n]$ ονομάζεται περιοδικό με περίοδο N αν και μόνο αν

$$x[n+N] = x]n]$$

για κάθε n. Η μικρότερη τιμή του N για την οποία ικανοποιείται η παραπάνω σχέση, ονομάζεται θεμελιώδης περίοδος του σήματος.

Εάν δεν υπάρχει τιμή του N που να ικανοποιεί αυτή τη σχέση, το σήμα ονομάζεται μη περιοδικό.

Όλα τα περιοδικά σήματα είναι σήματα ισχύος.

Εάν η περίοδος του σήματος είναι ίση με N, το σήμα έχει ως περιόδους και τις $M = mN$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$ με τη μικρότερη από αυτές να αποτελεί τη θεμελιώδη περίοδο.

Θεωρώντας δύο περιοδικά σήματα $x_1[n]$ και $x_2[n]$ με περιόδους N_1 και N_2, τα σήματα $x_1[n] + x_2[n]$ και $x_1[n] \cdot x_2[n]$ είναι περιοδικά με περίοδο $N = (N_1 N_2)/MK\Delta(N_1, N_2)$ όπου $MK\Delta(N_1, N_2)$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των ακέραιων N_1 και N_2.

Η τιμή του N εκφράζει το πλήθος των δειγμάτων μετά τα οποία το περιοδικό σήμα επαναλαμβάνεται και επομένως θα πρέπει να είναι υποχρεωτικά ακέραιος αριθμός.

Περιοδικά διακριτά σήματα
Παράδειγμα

Άσκηση

Θεωρώντας το διακριτό σήμα $x[n] = exp(jn\pi/16)\cos(n\pi/17)$ να διαπιστώσετε εάν είναι περιοδικό και αν ναι, να υπολογίσετε την τιμή της περιόδου του.

Το $x[n]$ είναι γινόμενο της μορφής $x[n] = x_1[n] * x_2[n]$ όπου

$$x_1[n] = exp\left[j\left(\frac{n\pi}{16}\right)\right] \quad \text{και} \quad x_2[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{17}\right)$$

Για το σήμα $x_1[n]$ διαπιστώνεται εύκολα ότι (ανατρέξτε στη σελίδα 363)

$$x_1[n] = exp\left(j\frac{n\pi}{16}\right) = exp\left[j\frac{(n+32)\pi}{16}\right] = x_1[n+32]$$

και επομένως $N_1 = 32$. Με τον ίδιο τρόπο, για το $x_2[n]$ έχουμε

$$x_2[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{17}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{17}(n+34)\right] = x_2[n+34]$$

και επομένως $N_2 = 34$. Άρα, το σήμα $x[n]$ θα είναι και αυτό περιοδικό με τιμή περιόδου

$$N = \frac{N_1 * N_2}{MK\Delta\,(N_1, N_2)} = \frac{32 * 34}{2} = 544$$

Άρτια και περιττά διακριτά σήματα

Βασικοί ορισμοί

Ένα διακριτό πραγματικό σήμα $x[n]$ ονομάζεται άρτιο ή συμμετρικό εάν

$$x[-n] = x[n]$$

για κάθε n. Αντίθετα, εάν το σήμα $x[n]$ είναι τέτοιο ώστε

$$x[-n] = -x[n]$$

το σήμα ονομάζεται περιττό ή αντισυμμετρικό και ικανοποιεί την ιδιότητα $x[0] = 0$.

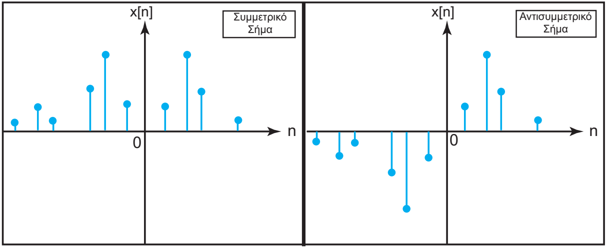
Κάθε διακριτό σήμα $x[n]$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα μιας άρτιας και μια περιττής συνιστώσας, δηλαδή ως

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

με τα σήματα $x_e[n]$ και $x_o[n]$ να χαρακτηρίζονται από άρτια και περιττή συμμετρία και να ορίζονται ως

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\Big(x[n] + x[-n]\Big) \quad \text{και} \quad x_o(n) = \frac{1}{2}\Big(x[n] - x[-n]\Big)$$

Άρτια και περιττά διακριτά σήματα
Βασικοί ορισμοί



Παράδειγμα άρτιου και περιττού σήματος διακριτού χρόνου.

Άσκηση

Να αποδείξετε πως η ενέργεια ενός διακριτού σήματος $x[n]$ ισούται με το άθροισμα των ενεργειών της άρτιας και της περιττής συνιστώσας του.

(για την απόδειξη ανατρέξτε στη σελίδα 364 του βιβλίου).

Τα στοιχειώδη σήματα διακριτού χρόνου

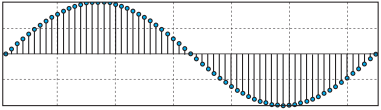
Στοιχειώδη τριγωνομετρικά και εκθετικά σήματα

Το στοιχειώδες συνημιτονοειδές τριγωνομετρικό διακριτό σήμα ορίζεται ως

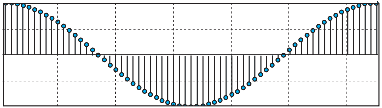
$$x[n] = A\cos(\omega n + \varphi) = A\cos(2\pi f n + \varphi) = A\cos\left(\frac{2\pi n}{N} + \varphi\right)$$

όπου A το πλάτος του σήματος, f η συχνότητά του, $\omega = 2\pi f$ η κυκλική του συχνότητα, φ η φάση του και N η περίοδός του, η οποία θα πρέπει υποχρεωτικά να είναι ακέραιος αριθμός. Το αντίστοιχο ημιτονοειδές σήμα έχει τη μορφή

$$x[n] = A\sin(\omega n + \varphi) = A\sin(2\pi f n + \varphi) = A\sin\left(\frac{2\pi n}{N} + \varphi\right)$$



Στοιχειώδες διακριτό ημίτονο



Στοιχειώδες διακριτό συνημίτονο

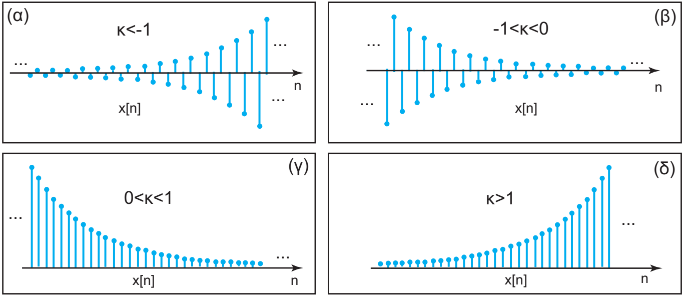
Το στοιχειώδες εκθετικό διακριτό σήμα ορίζεται ως

$$x[n] = A\kappa^n$$

όπου $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ενώ τα A και κ είναι γενικά μιγαδικοί αριθμοί. Θεωρώντας ότι $A = \alpha e^{j\varphi}$ και $\kappa = re^{j\omega}$, το διακριτό σήμα $x[n]$ διατυπώνεται ως

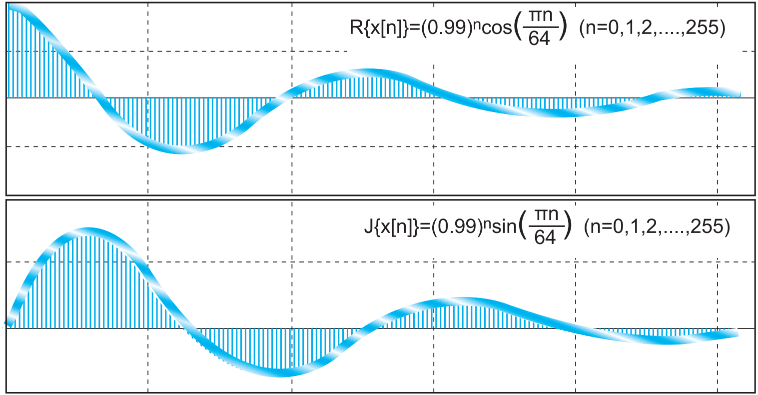
$$x[n] = \alpha e^{j\varphi}(re^{j\omega})^n = (\alpha r^n)\, e^{j(\omega n+\varphi)} = (\alpha r^n)\cos(\omega n + \varphi) + j(\alpha r^n)\sin(\omega n + \varphi)$$

Το σήμα $x[n] = \kappa^n$ $(A = 1, k \in R)$ απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.



Τα στοιχειώδη σήματα διακριτού χρόνου

Στοιχειώδη τριγωνομετρικά και εκθετικά σήματα



Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού εκθετικού σήματος $x[n] = \kappa^n$ για τιμές παραμέτρων $r = 0.99$, $\omega = \pi/64$ και $\varphi = 0$

Τα στοιχειώδη σήματα διακριτού χρόνου
Οι διαφορές των συνεχών και των διακριτών τριγωνομετρικών σημάτων

Θεωρώντας το συνεχές τριγωνομετρικό σήμα

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(2\pi f t + \varphi) + A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$$

αυτό χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες όσον αφορά τη συχνότητά του:

- Για κάθε τιμή της συχνότητας f, το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό, με τιμή περιόδου $T = 1/f$ αφού έχουμε

$$\begin{aligned} x(t+T) &= A\cos[2\pi f(t+T) + \varphi] = A\cos(2\pi f t + 2\pi f T + \varphi) = \\ &= A\cos[(2\pi f t + \varphi) + 2\pi] = A\cos(2\pi f t + \varphi) = x(t) \end{aligned}$$

  (θυμηθείτε, πως η περίοδος T ενός συνεχούς σήματος μπορεί να είναι οποιαδήποτε).

- Θεωρώντας δύο συνεχή ημιτονοειδή σήματα με συχνότητες f_1 και f_2, αυτά σε όλες τις περιπτώσεις, είναι διαφορετικά και διακριτά μεταξύ τους.

- Η αύξηση της συχνότητας f οδηγεί στην αύξηση του ρυθμού ταλάντωσης του σήματος, καθώς αυξάνεται το πλήθος των πλήρων επαναλήψεων στη μονάδα του χρόνου.

Τα στοιχειώδη σήματα διακριτού χρόνου

Οι διαφορές των συνεχών και των διακριτών τριγωνομετρικών σημάτων

Στα περιοδικά διακριτά σήματα $x[n] = x[n+N]$ η περίοδος N εκφράζει πλήθος δειγμάτων και θα πρέπει υποχρεωτικά να είναι

ακέραιος αριθμός

Εργαζόμενοι όπως και στα συνεχή σήματα έχουμε

$$x[n+N] = A\cos[2\pi f(n+N) + \varphi] = A\cos(2\pi fn + 2\pi fN + \varphi)$$

Ωστόσο τώρα δεν μπορούμε να πούμε πως για την τρέχουσα τιμή της συχνότητας f υπάρχει μία περίοδος $N = 1/f$ έτσι ώστε να είναι $fN = 1$ και να συνεχίσουμε την ανάλυση όπως και πριν !!!

Αυτό δεν ισχύει στη γενική περίπτωση!!!

Για να καταλήξουμε λοιπόν στη σχέση $x[n] = x[n+N]$ ή ισοδύναμα

$$A\cos(2\pi fn + \varphi) = A\cos(2\pi fn + 2\pi fN + \varphi)$$

θα πρέπει να κάνουμε την παραδοχή ότι $2\pi fN = 2\pi m$ $(m = 0, 1, 2, \dots)$ η οποία οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα αφού το συνημίτονο είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi m$.

Τα στοιχειώδη σήματα διακριτού χρόνου
Οι διαφορές των συνεχών και των διακριτών τριγωνομετρικών σημάτων

Θα είναι λοιπόν $f = m/N$ και επομένως

ένα διακριτό σήμα είναι περιοδικό όταν η συχνότητά του είναι ρητός αριθμός, δηλαδή μπορεί να εκφρασθεί ως το πηλίκο δύο ακέραιων αριθμών m και N

Σε αντίθεση με τα συνεχή σήματα που εάν έχουν διαφορετικές συχνότητες διακρίνονται μεταξύ τους αυτό δεν ισχύει πάντοτε στα διακριτά σήματα.

Έστω δύο διακριτά σήματα με συχνότητες f_1 και f_2 της μορφής

$$\begin{aligned} x[n] &= A\cos(\omega_1 n + \varphi) = A\cos(2\pi f_1 n + \varphi) \quad \text{και} \\ y[n] &= A\cos(\omega_2 n + \varphi) = A\cos(2\pi f_2 n + \varphi) \end{aligned}$$

Υποθέτοντας πως οι συχνότητες f_1 και f_2 σχετίζονται ως $f_2 = f_1 + m$ ή ισοδύναμα

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = 2\pi(f_1 + m) = 2\pi f_1 + 2\pi m = \omega_1 + 2\pi m \qquad \text{θα έχουμε}$$

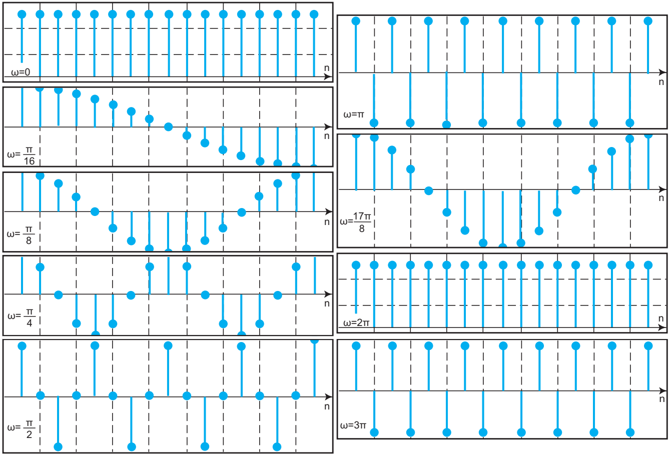
$$\begin{aligned} y[n] &= A\cos(\omega_2 n + \varphi) = A\cos[(\omega_1 + 2\pi m)n + \varphi] = A\cos[\omega_1 n + 2\pi(mn) + \varphi] = \\ &= A\cos(\omega_1 n + 2\kappa\pi + \varphi) = A\cos(\omega_1 n + \varphi) = x[n] \quad \text{Επομένως} \end{aligned}$$

δύο διακριτά περιοδικά σήματα οι κυκλικές συχνότητες των οποίων διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο των 2π, είναι ταυτόσημα.

Τα στοιχειώδη σήματα διακριτού χρόνου

Οι διαφορές των συνεχών και των διακριτών τριγωνομετρικών σημάτων

Ως συνέπεια της προηγούμενης ιδιότητας η αύξηση της συχνότητας δεν συνεπάγεται αύξηση ταλαντώσεων. Παρατηρείστε πως τα σήματα με συχνότητες 0 και 2π ή π και 3π είναι τα ίδια (αναμενόμενο αφού οι συχνότητες διαφέρουν κατά 2π):



Τα στοιχειώδη σήματα διακριτού χρόνου

Οι διαφορές των συνεχών και των διακριτών τριγωνομετρικών σημάτων

Ο μέγιστος ρυθμός ταλάντωσης αφορά δύο οποιαδήποτε διαδοχικά δείγματα με εναλλαγή στο πρόσημο. Επομένως η ελάχιστη περίοδος του σήματος θα είναι $N = 2$ που αντιστοιχεί σε μέγιστη συχνότητα $\omega = 2\pi/N = \pi$.

Εάν το σήμα έχει συχνότητα $\pi \leq \omega \leq 2\pi$, το πλήθος των ταλαντώσεων ελαττώνεται, αφού δύο σήματα $x[n]$ και $y[n]$ με συχνότητες $\omega_1 = \omega$ και $\omega_2 = 2\pi - \omega$ τέτοιες ώστε $\omega_2 < \omega_1$ με $\omega_2 \in [0, \pi]$ ταυτίζονται:

$$y[n] = A\cos(\omega_2 n) = A\cos[(2\pi - \omega)n] = A\cos(-\omega n) = A\cos(\omega n) = A\cos(\omega_1 n) = x[n]$$

Για κάθε συχνότητα $\omega > 2\pi$ υπάρχει πάντοτε κάποια ταυτόσημη συχνότητα $\omega' = \omega - 2\pi$ τέτοια ώστε $0 \leq \omega' \leq \pi$.

Επομένως όλες οι τριγωνομετρικές ακολουθίες $x_k(n) = A\cos(\omega_k n + \varphi)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $\omega_k = \omega_0 + 2k\pi$ $(-\pi \leq \omega_0 \leq \pi)$ είναι ταυτόσημες με το σήμα συχνότητας ω_0.

Ο άξονας των συχνοτήτων αποτελείται από περιοχές χαμηλών συχνοτήτων με συχνότητες γειτονικές των $\omega_n = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots, 2\kappa\pi$ που εναλλάσσονται με περιοχές υψηλών συχνοτήτων με συχνότητες γειτονικές των
$\omega = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots, (2\kappa + 1)\pi$ (για τις τιμές $k = 0, 1, 2, \ldots$).

Οι συχνότητες του διαστήματος $[0, \pi]$ είναι διακριτές και μοναδικές και ονομάζονται αληθείς ενώ οι υπόλοιπες χαρακτηρίζονται ως ψευδεπίγραφες.

Τα στοιχειώδη σήματα διακριτού χρόνου
Ορθογώνια μιγαδικά εκθετικά σήματα

Άσκηση

Να αποδείξετε πως το σύνολο των μιγαδικών εκθετικών σημάτων $x_\kappa[n] = \exp[j(2\kappa\pi/N)n]$ *αποτελούν μία ορθογώνια βάση εντός οποιουδήποτε διαστήματος μήκους* N.

Η συνθήκη ορθογωνιότητας εντός διαστήματος $[N_1, N_2]$ για τη διακριτή περίπτωση είναι

$$P = < x_m[n], x_\kappa[n] > = \sum_{n=N_1}^{N_2} x_m[n] x_\kappa^*[n] = \begin{cases} M & m = \kappa \\ 0 & m \neq \kappa \end{cases}$$

Στην προκειμένη περίπτωση, έχουμε $N_1 = 0$, $N_2 = N - 1$, και

$$x_m[n] = \exp\left(jm\frac{2\pi}{N}n\right) \qquad x_\kappa^*[n] = \exp\left(-j\kappa\frac{2\pi}{N}n\right)$$

Επομένως το εσωτερικό γινόμενο των *μιγαδικών εκθετικών σημάτων* λαμβάνει τη μορφή

$$P = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(jm\frac{2\pi}{N}n\right) \exp\left(-j\kappa\frac{2\pi}{N}n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left[j(m-\kappa)\frac{2\pi}{N}n\right]$$

και χρησιμοποιώντας την κατάλληλη έκφραση από το μαθηματικό τυπολόγιο

Τα στοιχειώδη σήματα διακριτού χρόνου
Ορθογώνια μιγαδικά εκθετικά σήματα

$$P = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left[j(m-\kappa)\frac{2\pi}{N}\right]^n = \frac{1-\exp\left[j(m-\kappa)2\pi\right]}{1-\exp\left[j(m-\kappa)\frac{2\pi}{N}\right]}$$

Για $m \neq \kappa$ η σχέση μηδενίζεται, ενώ για $m = \kappa$, λαμβάνει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Εφαρμόζοντας λοιπόν τον κανόνα του Del' Hospital

$$P = \lim_{m\to\kappa}\left\{\frac{\frac{d}{dm}\left\{1-\exp\left[j(m-\kappa)2\pi\right]\right\}}{\frac{d}{dm}\left\{1-\exp\left[j(m-\kappa)\frac{2\pi}{N}\right]\right\}}\right\} = \lim_{m\to\kappa}\left\{\frac{-j(2\pi)\exp\left[j(m-\kappa)2\pi\right]}{-j\frac{2\pi}{N}\exp\left[j(m-\kappa)\frac{2\pi}{N}\right]}\right\} = N$$

και επομένως θα είναι

$$P = < x_m[n], x_\kappa[n] > = \begin{cases} N & m = \kappa \\ 0 & m \neq \kappa \end{cases}$$

Άρα τα N σήματα $x_\kappa[n]$ αποτελούν μία ορθογώνια βάση συναρτήσεων στο διάστημα $[0, N-1]$ και το οποιοδήποτε σήμα $x[n]$ μπορεί να γραφεί ως ένα ανάπτυγμα Fourier

$$x[n] = \sum_{\kappa=0}^{N-1} \alpha_\kappa x_\kappa[n] = \sum_{\kappa=0}^{N-1} \alpha_\kappa \exp\left(j\kappa\frac{2\pi}{N}n\right)$$

όπου α_κ οι συντελεστές Fourier.

Τα στοιχειώδη σήματα διακριτού χρόνου

Οι συναρτήσεις $u[n]$, $\delta[n]$ και $r[n]$

Τα διακριτά σήματα της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης $u[n]$ και της μοναδιαίας κρουστικής συνάρτησης ή μοναδιαίας ώσης $\delta[n]$ ορίζονται ως

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

ενώ η διακριτή συνάρτηση comb ορίζεται ως

$$\text{comb}_N[n] = \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \delta[n - \kappa N]$$

Οι χρονικώς μετατοπισμένες εκδόσεις των $u[n]$ και $\delta[n]$ δίδονται από τις σχέσεις

$$u[n-\kappa] = \begin{cases} 1 & n \geq \kappa \\ 0 & n < \kappa \end{cases} = \sum_{\kappa=-\infty}^{n} \delta[n-\kappa] \quad \text{και} \quad \delta[n-\kappa] = \begin{cases} 1 & n = \kappa \\ 0 & n \neq \kappa \end{cases}$$

Οι δύο παραπάνω συναρτήσεις σχετίζονται μεταξύ τους ως (ανατρέξτε στη σελίδα 373)

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad \text{και} \quad u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

Η διακριτή μοναδιαία συνάρτηση βήματος χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $u[-n] = 1 - u[n]$ από όπου προκύπτει ότι $u[n] + u[-n] = 1$
- $u[+\infty] = 1$ και $u[-\infty] = 0$
- $$\int_0^n u[s]ds = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \int_0^n ds = n & n \geq 0 \end{cases} = nu[n]$$

Μοναδιαία συνάρτηση ράμπας: ορίζεται από την εξίσωση

$$r[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

και σχετίζεται με τη μοναδιαία συνάρτηση βήματος δια μέσου των σχέσεων

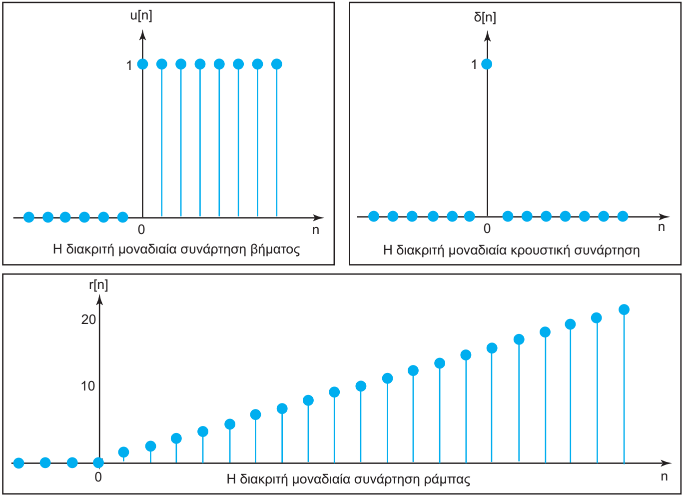
$$r[n] = \sum_{\kappa=-\infty}^{n} u[\kappa - 1] = nu[n]$$

Η χρονικώς μετατοπισμένη μοναδιαία συνάρτηση ράμπας ορίζεται ως

$$r[n-k] = (n-k)u[n-k]$$

Τα στοιχειώδη σήματα διακριτού χρόνου

Οι συναρτήσεις $u[n]$, $\delta[n]$ και $r[n]$



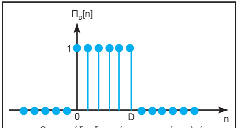
Ο *τετραγωνικός παλμός* $\Pi_D[n]$ και ο *τριγωνικός παλμός* $\Lambda_D[n]$ ορίζονται ως

$$\Pi_D[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < D \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} = u[n] - u[n-D]$$

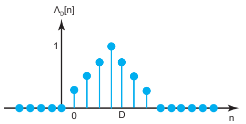
$$\Lambda_D[n] = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\, n+1-D \,|}{D} & |\, n+1-D \,| \leq D-1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

ενώ η διακριτή *συνάρτηση sinc* περιγράφεται από την εξίσωση

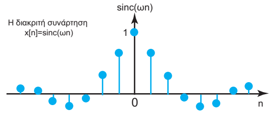
$$\text{sinc}(\omega n) = \frac{\sin(\pi \omega n)}{\pi \omega n}$$



Ο στοιχειώδης διακριτός τετραγωνικός παλμός



Ο στοιχειώδης διακριτός τριγωνικός παλμός



Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί

Μετατόπιση, αντιστροφή και κλιμάκωση

Οι βασικοί τύποι μετασχηματισμών που μπορούμε να εφαρμόσουμε στην ανεξάρτητη μεταβλητή n ενός διακριτού σήματος $x[n]$, είναι οι εξής:

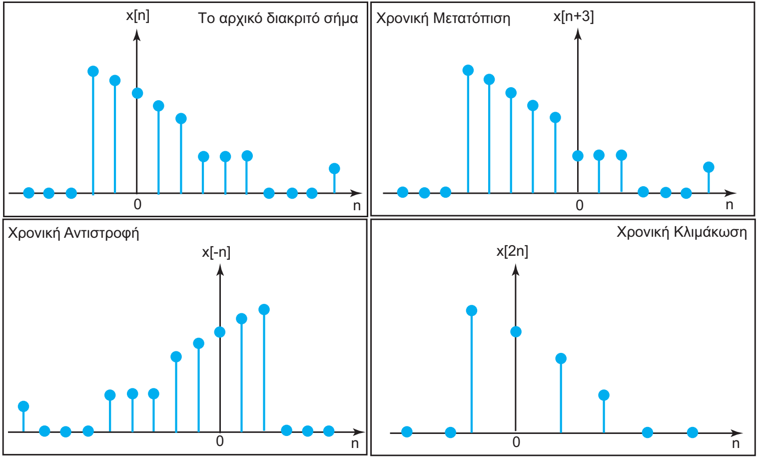
- Χρονική μετατόπιση $x[n] \rightarrow x[n \pm k]$: ένα σήμα $x[n]$, μπορεί να μετατοπιστεί στο χρόνο, αντικαθιστώντας την τρέχουσα τιμή της μεταβλητής n με την τιμή $(n-k)$ όπου το k είναι μια ακέραια ποσότητα.

  Για θετικές τιμές του k, η χρονική μετατόπιση αντιστοιχεί σε χρονική υστέρηση κατά k χρονικές μονάδες, ενώ για αρνητικές τιμές του k, η χρονική μετατόπιση γίνεται προς τα εμπρός και το σήμα προχωρά στο χρόνο κατά $|k|$ χρονικές μονάδες.

- Χρονική αντιστροφή $x[n] \rightarrow x[-n]$: συνίσταται στην αντικατάσταση της τιμής του n από την τιμή $-n$, διαδικασία που έχει ως αποτέλεσμα το σχηματισμό του κατοπτρικού διακριτού σήματος ως προς την αρχή $n = 0$ του συστήματος αξόνων.

- Χρονική κλιμάκωση $x[n] \rightarrow x[\alpha n]$: η ανεξάρτητη μεταβλητή n αντικαθίσταται από τη μεταβλητή $n' = \alpha n$ με το συντελεστή α να είναι της μορφής $\alpha = k$ ή $\alpha = 1/k$ όπου k μία ακέραια παράμετρος.

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί
Μετατόπιση, αντιστροφή και κλιμάκωση



Οι μετασχηματισμοί της χρονικής μετατόπισης, αντιστροφής και κλιμάκωσης.

Αναπαράσταση με στοιχειώδεις συναρτήσεις
Οι βασικές εξισώσεις

Η αναπαράσταση ενός περιοδικού διακριτού σήματος $x[n]$ με τη βοήθεια των στοιχειωδών μιγαδικών εκθετικών σημάτων δίδεται από το ανάπτυγμα Fourier

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

Εναλλακτικά το σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί με τη βοήθεια της στοιχειώδους κρουστικής συνάρτησης $\delta[n]$ ως ένας γραμμικός συνδυασμός άπειρων στο πλήθος χρονικώς μετατοπισμένων κρουστικών συναρτήσεων της μορφής

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Πράγματι παρατηρώντας ότι

$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1 & n = \kappa \\ 0 & n \neq \kappa \end{cases} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad x[n]\delta[n-k] = \begin{cases} x[n] & \kappa = n \\ 0 & \kappa \neq n \end{cases}$$

διαπιστώνουμε πως ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος $x[n]$ με τη χρονικώς μετατοπισμένη συνάρτηση $\delta[n-k]$ θα μας επιστρέψει την τιμή του σήματος $x[n]$ τη χρονική στιγμή k που δεν είναι παρά το δείγμα $x[k]$

Θα είναι λοιπόν $x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$.

Αναπαράσταση με στοιχειώδεις συναρτήσεις

Οι βασικές εξισώσεις

Γενικεύοντας, εάν πολλαπλασιάσουμε το θεωρούμενο διακριτό σήμα με μία χρονικώς μετατοπισμένη κρουστική συνάρτηση θα ανακτήσουμε την τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή της μετατόπισης.

Η εφαρμογή λοιπόν αυτής της διαδικασίας για όλες τις δυνατές τιμές μετατόπισης k στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ θα μας επιστρέψει όλα τα δείγματα του σήματος, η επαλληλία των οποίων θα μας δώσει τελικά και ολόκληρο το σήμα.

(δείτε το παράδειγμα και τη λυμένη άσκηση στις σελίδες 379 και 380).

Επιστρέφοντας στη σχέση

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

και αντικαθιστώντας σε αυτή τη χρονικώς μετατοπισμένη κρουστική συνάρτηση $\delta[n-k]$ από την έκφραση $\delta[n-k] = u[n-k] - u[n-k-1]$ λαμβάνουμε

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(u[n-k] - u[n-k-1]\right)$$

που αποτελεί τη διατύπωση του σήματος $x[n]$ με τη βοήθεια της διακριτής βηματικής συνάρτησης

Η κλιμάκωση του πλάτους ενός σήματος $x[n]$ κατά μία σταθερά A, λαμβάνει χώρα πολλαπλασιάζοντας την τιμή κάθε δείγματος του σήματος με την τιμή της σταθεράς A.

Το νέο σήμα που θα προκύψει θα έχει τη μορφή

$$y[n] = Ax[n] \quad -\infty < n < \infty$$

Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ οδηγούν στη δημιουργία ενός νέου σήματος $z[n]$ κάθε δείγμα του οποίου προκύπτει από την πρόσθεση ή τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων δειγμάτων των σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ έτσι ώστε να μπορούμε να γράφουμε ότι

$$z[n] = x[n] + y[n] \quad \text{και} \quad z[n] = x[n] \cdot y[n] \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$$

Με τον όρο αντίστοιχα δείγματα εννοούμε δείγματα που αντιστοιχούν στην ίδια τιμή της διακριτής μεταβλητής n.

Άσκηση

Να βρεθεί το άθροισμα των διακριτών σημάτων

$$x[n] = \{5,\quad 2,\quad -1,\quad 4,\quad 6\} \quad \textit{και} \quad y[n] = \{2,\quad 1,\quad 3,\quad 5\}$$

Τα σήματα δεν είναι στοιχισμένα ως προς το χρόνο, αφού τα δείγματα που αντιστοιχούν στο $n = 0$ δεν βρίσκονται στην ίδια θέση.

Επομένως πρώτα θα πρέπει να στοιχίσουμε τα σήματα, τοποθετώντας τα αντίστοιχα δείγματα το ένα κάτω από το άλλο και προσθέτοντας μηδενικά στις κενές θέσεις.

Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των δύο σημάτων παρουσιάζεται στη συνέχεια.

n	-2	-1	0	1	2	3
$x[n]$	5	2	-1	4	6	0
$y[n]$	0	0	2	1	3	5
$z[n]$	5	2	1	5	9	5

Θεμελιώδεις πράξεις διακριτών σημάτων

Συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

Η **συνέλιξη** δύο σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ δίδεται από τη σχέση

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$$

Εάν τα σήματα έχουν πεπερασμένο μήκος η παραπάνω πράξη ορίζεται ως

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-(M/2)+1}^{M/2} x[k]y[n-k]$$

Αυτός ο τύπος συνέλιξης είναι γνωστός ως **γραμμική συνέλιξη**.

Επομένως η διατύπωση ενός σήματος $x[n]$ με τη βοήθεια της συνάρτησης $\delta[n]$ δεν είναι παρά **η συνέλιξη ανάμεσα στα δύο σήματα**:

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n] * \delta[n]}$$

Κατά συνέπεια, η συνέλιξη ενός διακριτού σήματος με τη συνάρτηση $\delta[n]$ μας επιστρέφει το ίδιο το σήμα, ήτοι, **η κρουστική συνάρτηση αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο της πράξης της συνέλιξης στο χώρο των σημάτων**.

Θεμελιώδεις πράξεις διακριτών σημάτων

Συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

Στην ειδική περίπτωση περιοδικών σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ με κοινή περίοδο N, το άθροισμα

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$$

δεν συγκλίνει. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε την περιοδική συνέλιξη

$$z[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{n=0}^{N-1} x[k]y[n-k]$$

Η *περιοδική συνέλιξη* $z[n]$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο N. Πράγματι, αφού το σήμα $y[n]$ είναι περιοδικό με περίοδο N θα είναι $y[n-k] = y[n-k+N]$ και επομένως

$$z[n+N] = \sum_{n=0}^{N-1} x[k]y[(n+N)-k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[k]y[n-k+N] = \sum_{n=0}^{N-1} x[k]y[n-k] = z[n]$$

από όπου προκύπτει και το ζητούμενο.

Άσκηση

Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα διακριτά σήματα $x[n] = \alpha^n u[n]$ και $y[n] = \beta^n u[n]$ για τις περιπτώσεις $\alpha = \beta$ και $\alpha \neq \beta$.

Από την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης θα λάβουμε

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k]\beta^{n-k} u[n-k]$$

Όμως για $k < 0$ θα είναι $u[k] = 0$ ενώ για $k > n$ θα είναι $u[n-k] = 0$ και επομένως

$$z[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^n \beta^{-k} = \beta^n \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{-k} = \beta^n \sum_{k=0}^{n} (\alpha\beta^{-1})^k$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Περίπτωση 1η: $\alpha = \beta$: Θα είναι $\alpha\beta^{-1} = \alpha\alpha^{-1} = 1$ οπότε θα είναι

$$z[n] = \beta^n \sum_{k=0}^{n} 1^k = \beta^n(n+1) = \alpha^n(n+1)$$

- Περίπτωση 2η: $\alpha \neq \beta$: Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$z[n] = \beta^n \frac{1-(\alpha\beta^{-1})^{n+1}}{1-(\alpha\beta^{-1})} = \beta^n \frac{1-\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα βρίσκουμε

$$z[n] = x[n] * y[n] = \begin{cases} \beta^n(n+1) & \alpha = \beta \\ \dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

(για την εξοικείωσή σας με τη διαδικασία υπολογισμού συνέλιξης μελετήστε και τις λυμένες ασκήσεις 6.8.7, 6.8.8, 6.8.9, 6.8.10 και 6.8.11 στις σελίδες 384-386).

$x[n]$	$y[n]$	$z[n] = x[n] * y[n]$
$x[n]$	$\delta[n-N]$	$x[n-N]$
$e^{\lambda n}u[n]$	$u[n]$	$\dfrac{e^{\lambda n}-1}{\lambda}u[n]$
$u[n]$	$u[n]$	$nu[n]$
$e^{\lambda_1 n}u[n]$	$e^{\lambda_2 n}u[n]$	$\dfrac{e^{\lambda_1 n}-e^{\lambda_2 n}}{\lambda_1-\lambda_2}u[n]\ (\lambda_1 \neq \lambda_2)$
$e^{\lambda n}u[n]$	$e^{\lambda n}u[n]$	$ne^{\lambda n}u[n]$
$ne^{\lambda n}u[n]$	$e^{\lambda n}u[n]$	$(1/2)n^2e^{\lambda n}u[n]$
$n^N u[n]$	$e^{\lambda n}u[n]$	$\dfrac{N!e^{\lambda n}}{\lambda^{N+1}}u[n] - \sum_{k=0}^{N}\dfrac{N!n^{N-k}}{\lambda^{k+1}(N-k)!}u[n]$
$n^M u[n]$	$n^N u[n]$	$\dfrac{M!N!}{(N+M+1)!}n^{M+N+1}u[n]$

$x[n]$	$y[n]$	$z[n] = x[n] * y[n]$
$ne^{\lambda_1 n}u[n]$	$e^{\lambda_2 n}u[n]$	$\dfrac{e^{\lambda_2 n} - e^{\lambda_1 n} + (\lambda_1 - \lambda_2)ne^{\lambda_1 n}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}u[n]$
$n^M e^{\lambda n}u[n]$	$n^N e^{\lambda n}u[n]$	$\dfrac{M!N!}{(N+M+1)!}n^{M+N+1}e^{\lambda n}u[n]$
$n^M e^{\lambda_1 n}u[n]$	$n^N e^{\lambda_2 n}u[n]$	$\sum_{k=0}^{M}\dfrac{(-1)^k M!(N+k)!t^{M-k}e^{\lambda_1 n}}{k!(M-k)!(\lambda_1 - \lambda_2)^{M+k+1}}u[n] + \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k N!(M+k)!t^{N-k}e^{\lambda_2 n}}{k!(N-k)!(\lambda_2 - \lambda_1)^{N+k+1}}u[n]$
$e^{-\alpha n}\cos(\beta n + \vartheta)u[n]$	$e^{\lambda n}u[n]$	$\dfrac{\cos(\vartheta - \varphi)e^{\lambda n} - e^{\alpha n}\cos(\beta n + \vartheta - \varphi)}{\sqrt{(\alpha+\lambda)^2 + \beta^2}}u[n]$

Θεμελιώδεις πράξεις διακριτών σημάτων
Γραφικός υπολογισμός της συνέλιξης

Η διαδικασία υπολογισμού του κάθε δείγματος του σήματος $z[n] = x[n] * y[n]$ αποτελείται από τα επόμενα βήματα:

- Χρονική αντιστροφή του σήματος $y[k]$, ώστε να λάβουμε την αντεστραμμένη ακολουθία $y[-k]$.
- Χρονική μετατόπιση της αντεστραμμένης ακολουθίας κατά n χρονικές μονάδες προς τα δεξιά (για θετικές τιμές του n) ή προς τα αριστερά (για αρνητικές τιμές του n) ώστε να δημιουργήσουμε το σήμα $y[n-k]$.
- Πολλαπλασιασμό των διακριτών σημάτων $x[k]$ και $y[n-k]$ δείγμα προς δείγμα ώστε να κατασκευάσουμε το σήμα $\upsilon_n[k]$ κάθε δείγμα του οποίου προκύπτει ως το γινόμενο των αντίστοιχων δειγμάτων των διακριτών σημάτων $x[k]$ και $y[n-k]$.
- Πρόσθεση των τιμών των στοιχείων της διακριτής ακολουθίας $\upsilon_n[k]$ ώστε να υπολογίσουμε την τιμή του δείγματος $z[n]$.

Για να υπολογίσουμε τις τιμές όλων των δειγμάτων θα πρέπει να εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία για κάθε χρονική στιγμή n στο διάστημα $(-\infty, \infty)$.

Θεμελιώδεις πράξεις διακριτών σημάτων

Γραφικός υπολογισμός της συνέλιξης - Παράδειγμα

Θεωρώντας τα σήματα $x[n] = \{1, 2, 3, 1\}$ και $y[n] = \{1, 2, 1, -1\}$, η τιμή του δείγματος $z[0]$ της συνέλιξης $z[n] = x[n] * y[n]$ υπολογίζεται ως εξής:

- Αντιστρέφουμε το σήμα $y[-k]$ ως προς το χρόνο, έτσι ώστε αυτό να λάβει τη μορφή $y[-k] = \{-1, 1, \mathbf{2}, 1\}$.
- Μετατοπίζουμε το σήμα $y[-k]$ κατά $n = 0$ χρονικές μονάδες λαμβάνοντας το σήμα $y[-k] = \{-1, 1, \mathbf{2}, 1\}$.
- Πολλαπλασιάζουμε τα σήματα $x[k]$ και $y[k-0]$. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι η κατασκευή του σήματος $\upsilon_0 = \{1 * 2, 2 * 1, 3 * 0, 1 * 0\} = \{2, 2, 0, 0\}$.
- Προσθέτουμε τα στοιχεία της ακολουθίας υ_0 για να υπολογίσουμε την τιμή $z[0]$. Θα είναι λοιπόν $z[0] = 2 + 2 + 0 + 0 = 4$.

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία για όλες τις τιμές του n (θετικές και αρνητικές) τελικά βρίσκουμε ότι

$$\boxed{z[n] = \{\ldots, 0, 0, 0, 1, \mathbf{4}, 8, 8, 3, -2, -1, 0, 0, 0, 0\ldots\}}$$

Θεμελιώδεις πράξεις διακριτών σημάτων
Ιδιότητες της συνέλιξης (οι αποδείξεις στις σελίδες 389-391)

- Αντιμεταθετική ιδιότητα: $x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$
- Προσεταιριστική ιδιότητα: $\Big(x[n] * y[n]\Big) * z[n] = x[n] * \Big(y[n] * z[n]\Big)$
- Επιμεριστική ιδιότητα: $x[n] * \Big(y[n] + z[n]\Big) = x[n] * y[n] + x[n] * z[n]$
- Ομογένεια: $\Big(\alpha x[n]\Big) * y[n] = \alpha\Big(x[n] * y[n]\Big) = x[n] * \Big(\alpha y[n]\Big)$
- Γραμμικότητα: εάν είναι $z_1[n] = x_1[n] * y[n]$ και $z_2[n] = x_2[n] * y[n]$ τότε

$$x[n] * y[n] = z[n]$$

όπου $x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ και $z[n] = \alpha z_1[n] + \beta z_2[n]$

- Χρονική μετατόπιση: Εάν τα $x[n]$, $y[n]$ και $z[n]$ σχετίζονται ως

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k]$$

τότε θα είναι $z[n-\ell] = x[n] * y[n-\ell] = x[n-\ell] * y[n]$

Θεμελιώδεις πράξεις διακριτών σημάτων

Ιδιότητες της συνέλιξης (οι αποδείξεις στις σελίδες 389-391)

- Πρώτη διαφορά: Εάν τα $x[n]$, $y[n]$ και $z[n]$ σχετίζονται ως

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k]$$

τότε θα είναι και $z[n] - z[n-1] = x[n] * \Big(y[n] - y[n-1]\Big)$

- Άθροισμα: Εάν τα $x[n]$, $y[n]$ και $z[n]$ σχετίζονται ως

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$$

τότε θα είναι και $S_z = S_x S_y$ με τις ποσότητες S_z, S_x και S_y να ορίζονται ως

$$S_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z[n], \quad S_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k], \quad S_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k]$$

Θεμελιώδεις πράξεις διακριτών σημάτων

Ετεροσυσχέτιση και αυτοσυσχέτιση διακριτών σημάτων

Έστω διακριτά σήματα πεπερασμένης ενέργειας $x[n]$ και $y[n]$. Ο βαθμός ομοιότητας των δύο σημάτων περιγράφεται ποσοτικά από το μέγεθος της ετεροσυσχέτισης ή απλά συσχέτισης που ορίζεται ως

$$r_{xy}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-\ell] \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad r_{xy}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+\ell]y[n]$$

όπου ο δείκτης ℓ $(\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ εκφράζει μετατόπιση στο διακριτό χρόνο

Η σειρά γραφής των δεικτών x και y υπαγορεύει και τη "κατεύθυνση" μετατόπισης της μίας ακολουθίας ως προς την άλλη.

Αντιστρέφοντας τους ρόλους των $x[n]$ και $y[n]$ διαπιστώνουμε πως

$$r_{xy}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]x[n-\ell] \quad \text{και} \quad r_{yx}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n+\ell]x[n]$$

από όπου προκύπτει ότι $r_{xy}[\ell] = r_{yx}[-\ell]$.

Θεμελιώδεις πράξεις διακριτών σημάτων

Ετεροσυσχέτιση και αυτοσυσχέτιση διακριτών σημάτων

Εάν είναι $x[n] = y[n]$ η ετεροσυσχέτιση ονομάζεται αυτοσυσχέτιση - θα είναι λοιπόν

$$r_{xx}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-\ell] \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad r_{xx}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+\ell]x[n]$$

Εάν το μήκος των $x[n]$ και $y[n]$ είναι ίσο με N οι παραπάνω σχέσεις γράφονται

$$r_{xy}[\ell] = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x[n]y[n-\ell] \quad \text{και} \quad r_{xx}[\ell] = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x[n]x[n-\ell]$$

όπου για $\ell \geq 0$ είναι $i = \ell$ και $k = 0$, ενώ για $\ell < 0$ είναι $i = 0$ και $k = \ell$.

Εάν τα σήματα $x[n]$ και $y[n]$ είναι σήματα ισχύος, χαρακτηρίζονται δηλαδή από άπειρη ενέργεια και από πεπερασμένη ισχύ, τα μεγέθη της ετεροσυσχέτισης και της αυτοσυσχέτισης ορίζονται ως

$$r_{xy}[\ell] = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]y[n-\ell] \right) \quad \text{και} \quad r_{xx}[\ell] = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]x[n-\ell] \right)$$

Θεμελιώδεις πράξεις διακριτών σημάτων

Ετεροσυσχέτιση και αυτοσυσχέτιση διακριτών σημάτων

Εάν τα σήματα $x[n]$ και $y[n]$ είναι περιοδικά με περίοδο N, οι παραπάνω μέσες τιμές για το διάστημα $(-\infty, +\infty)$ ταυτίζονται με εκείνες που υπολογίζονται για διάστημα μιας περιόδου και οι παραπάνω σχέσεις λαμβάνουν τη μορφή

$$r_{xy}[\ell] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[n-l] \quad \text{και} \quad r_{xx}[\ell] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n-l]$$

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί πως η ετεροσυσχέτιση και η αυτοσυσχέτιση περιοδικών σημάτων είναι περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο ίση με την περίοδο των σημάτων.

Έστω σήματα πεπερασμένης ενέργειας $x[n]$ και $y[n]$ και ο γραμμικός συνδυασμός τους

$$z[n] = \alpha x[n] + \beta y[n-\ell], \quad \alpha, \beta > 0$$

η ενέργεια του οποίου είναι

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\alpha x[n] + \beta y[n-\ell]\right)^2 = \alpha^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] + \beta^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2[n-\ell] + 2\alpha\beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-\ell]$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-0] = r_{xx}[0] = E_x$$

ενώ με παρόμοιο τρόπο θα έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2[n-\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-\ell]y[n-\ell] = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} y[n']y[n'] = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} y[n']y[n'-0] = r_{yy}[0] = E_y$$

όπου E_x και E_y οι ενέργειες των σημάτων $x[n]$ και $y[n]$. Επομένως, η ενέργεια του $z[n]$ ικανοποιεί την ιδιότητα

$$E = \alpha^2 r_{xx}[0] + \beta^2 r_{yy}[0] + 2\alpha\beta r_{xy}[\ell] \geq 0$$

η οποία μπορεί να διατυπωθεί και ως

$$E = \alpha^2 E_x + \beta^2 E_y + 2\alpha\beta r_{xy}[\ell] \geq 0$$

Υποθέτοντας ότι $\beta \neq 0$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$r_{xx}[0]\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2r_{xy}[\ell]\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + r_{yy}[0] \geq 0$$

Θέτοντας $\xi = \alpha/\beta$ οδηγούμαστε στη δευτεροβάθμια ανίσωση

$$r_{xx}[0]\xi^2 + 2r_{xy}[\ell]\xi + r_{yy}[0] \geq 0$$

με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4r_{xy}^2[\ell] - 4r_{xx}[0]r_{yy}[0] \leq 0$ από όπου προκύπτει ότι

$$4\left(r_{xy}^2[\ell] - r_{xx}[0]r_{yy}[0]\right) \leq 0$$

Επομένως η ακολουθία της συσχέτισης $r_{xy}[\ell]$ θα ικανοποιεί τη συνθήκη

$$|r_{xy}[\ell]| \leq \sqrt{r_{xx}[0]r_{yy}[0]} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad |r_{xy}[\ell]| \leq \sqrt{E_x E_y}$$

Κατά συνέπεια, η αυτοσυσχέτιση $r_{xx}[\ell]$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της για $\ell = 0$ κάτι που είναι αναμενόμενο, αφού για $\ell = 0$, τα σήματα $x[n]$ και $x[n-\ell]$ είναι ταυτόσημα.