

Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

(ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2)

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Ι. ΜΑΡΓΑΡΗΣ

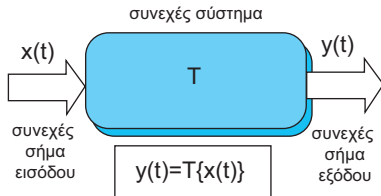
Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2014

Τι είναι ένα σύστημα

Ορισμός της έννοιας του συστήματος

Ένα **σύστημα** ορίζεται με τη βοήθεια δύο συνεχών σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ ως μία οντότητα που μετασχηματίζει το σήμα εισόδου $x(t)$ στο σήμα εξόδου $y(t)$.



Σχηματικό διάγραμμα συστήματος συνεχούς χρόνου

Το σύστημα υποτίθεται πως υλοποιεί ένα μετασχηματισμό \mathcal{T} που εφαρμόζεται στο σήμα εισόδου $x(t)$ για να δημιουργήσει το σήμα εξόδου $y(t)$:

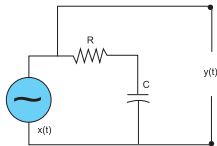
$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\}$$

Θεωρία συστημάτων συνεχούς χρόνου

Περιλαμβάνει τις επόμενες θεματικές ενότητες

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Τυπικό σχηματικό διάγραμμα ενός γενικού συστήματος συνεχούς χρόνου

- **Ανάλυση συστημάτων** που αναλύει και ερμηνεύει τις ιδιότητες κάποιου συνεχούς συστήματος.
- **Σχεδίαση συστημάτων** που επιτρέπει τον καθορισμό της δομής και λειτουργίας κάποιου συστήματος έτσι ώστε αυτό να πληροί συγκεκριμένες προδιαγραφές.
- **Σύνθεση συστημάτων** που επιτρέπει την ανάλυση της δομής του συστήματος με τη βοήθεια ειδικών σχηματικών διαγραμμάτων
- **Υλοποίηση συστημάτων** που καθορίζει τους κανόνες κατασκευής πραγματικών συστημάτων έτσι ώστε να καλύπτονται οι υφιστάμενες σε κάθε περίπτωση απαιτήσεις.

Είδη και κατηγορίες συνεχών συστημάτων

Τα συνεχή συστήματα χαρακτηρίζονται ως

- **Αιτιοκρατικά ή στοχαστικά**

Τα αιτιοκρατικά συστήματα περιγράφονται με τη βοήθεια **ομαλών μαθηματικών συναρτήσεων**.

Η εφαρμογή του συστήματος πάνω στην ίδια είσοδο δίνει πάντα την ίδια έξοδο.

Τα στοχαστικά συστήματα περιγράφονται με τη βοήθεια **στατιστικών όρων** και διέπονται από **πιθανοκρατικούς μηχανισμούς**.

Οι καταγεγραμμένες έξοδοι του συστήματος για την ίδια είσοδο διαφέρουν μεταξύ τους χαρακτηριζόμενες από κάποια **διακύμανση** ως προς τις τιμές τους.

- **Απλών ή πολλαπλών εισόδων και εξόδων**. Διακρίνονται σε

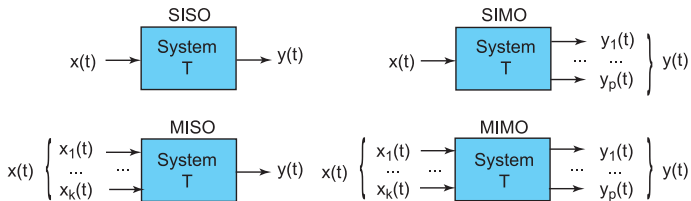
- **SISO** (Single Input Single Output)
- **SIMO** (Single Input Multiple Output)
- **MISO** (Multiple Input Single Output)
- **MIMO** (Multiple Input Multiple Output)

Είδη και κατηγορίες συνεχών συστημάτων

Τα συνεχή συστήματα χαρακτηρίζονται ως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Κατηγορίες συστημάτων με κριτήριο το πλήθος εισόδων και εξόδων τους

• Στατικά ή δυναμικά

Ένα συνεχές σύστημα λέγεται **στατικό** εάν σε κάθε χρονική στιγμή t η έξοδος του $y(t)$ εξαρτάται μόνο από την είσοδο του τη χρονική στιγμή t . Εάν αντίθετα η τρέχουσα έξοδος του συστήματος εξαρτάται εκτός από την τρέχουσα είσοδο καθώς και από **προηγούμενες εισόδους** τότε το σύστημα ονομάζεται **δυναμικό**.

Είδη και κατηγορίες συνεχών συστημάτων

Τα συνεχή συστήματα χαρακτηρίζονται ως

- **Αιτιατά ή μη αιτιατά**

Ένα σύστημα ονομάζεται **αιτιατό**, όταν η έξοδος του $y(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή t εξαρτάται μόνο από προηγούμενες εισόδους $x(t - \tau)$ (που αντιστοιχούν σε τιμές $\tau \geq 0$) και όχι από μεταγενέστερες εισόδους (που αντιστοιχούν σε τιμές $\tau < 0$).

Εάν αντίθετα η τρέχουσα έξοδος του συστήματος εξαρτάται από εισόδους της μορφής $x(t + \tau)$ για τιμές $\tau > 0$, το σύστημα ονομάζεται **μη αιτιατό** και ο υπολογισμός της εξόδου του απαιτεί τη γνώση των τιμών μελλοντικών εισόδων του συστήματος.

Ένα αιτιατό σύστημα υπακούει στη σχέση **αιτίου αποτελέσματος**.

Είδη και κατηγορίες συνεχών συστημάτων

Τα συνεχή συστήματα χαρακτηρίζονται ως

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**

Ένα συνεχές σύστημα ονομάζεται **γραμμικό**, όταν ο μετασχηματισμός \mathcal{T} που εφαρμόζεται πάνω στο σήμα εισόδου $x(t)$ για την παραγωγή του σήματος εξόδου $y(t)$, υπακούει στην **αρχή της επαλληλίας**.

Εάν κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, το σύστημα ονομάζεται **μη γραμμικό**. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας η απόκριση του συστήματος στο σήμα εισόδου

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_N x_N(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t)$$

είναι το σήμα εξόδου

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \dots + \alpha_N y_N(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i(t)$$

Η **αρχή της επαλληλίας** συναρτήσει του μετασχηματισμού \mathcal{T} διατυπώνεται ως

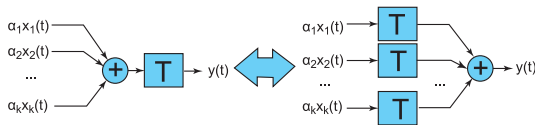
$$\mathcal{T} \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{T} \left\{ x_i(t) \right\}$$

Είδη και κατηγορίες συνεχών συστημάτων

Τα συνεχή συστήματα χαρακτηρίζονται ως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Διαγραμματική επίδειξη της αρχής της επαλληλίας

- Χρονικώς μεταβαλλόμενα και αμετάβλητα.

Ένα συνεχές σύστημα ονομάζεται **χρονικώς αμετάβλητο**, όταν ο μετασχηματισμός \mathcal{T} **δεν μεταβάλλεται με το χρόνο**. Επομένως, εάν τη χρονική στιγμή t τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$ σχετίζονται δια μέσου της έκφρασης

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\}$$

τότε, τη χρονική στιγμή $t \pm \tau$ - για κάθε τιμή της χρονικής μετατόπισης τ - θα πρέπει να είναι

$$y(t \pm \tau) = \mathcal{T}\{x(t \pm \tau)\}$$

Εάν το σύστημα δεν ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα, τότε χαρακτηρίζεται ως **χρονικώς μεταβαλλόμενο**

Παραδείγματα συστημάτων

Τα επόμενα παραδείγματα συστημάτων χαρακτηρίζονται ως

- $y(t) = \sin[x(t)]$ **στατικό**
- $y(t) = 5x(t - 5) + x^5(t - 1)$ **δυναμικό**
- $y(t) = \sin(t - 6)$ **αιτιατό**
- $y(t) = (t + 1)^2 + 5t - 4$ **μη αιτιατό**
- $y(t) = x^2(t)$ **μη γραμμικό**
- $y(t) = 2x(t) + 5$ **γραμμικό**

- $y(t) = x(t) \cos(t)$ **χρονικώς μεταβαλλόμενο** γιατί $y(t - \tau) = x(t - \tau) \cos(t - \tau)$ και $\mathcal{T}[x(t - \tau)] = x(t - \tau) \cos(t)$ και επομένως $y(t - \tau) \neq \mathcal{T}[x(t - \tau)]$.
- $y(t) = x'(t)$. **Χρονικώς αμετάβλητο** γιατί $y(t - \tau) = \frac{dx(t - \tau)}{d(t - \tau)}$, που είναι ίδιο με

$$\mathcal{T}\{x(t - \tau)\} = \frac{d}{dt} [x(t - \tau)] = \frac{dx(\xi)}{dt} = \frac{dx(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx(t - \tau)}{d(t - \tau)}$$

Είναι προφανές πως ένα σύστημα ανάλογο με την εξίσωση που το περιγράφει μπορεί να χαρακτηριστεί ταυτόχρονα ως (α) **στατικό ή δυναμικό**, (β) **αιτιατό ή μη αιτιατό**, (γ) **γραμμικό ή μη γραμμικό**, (δ) **απλών ή πολλαπλών εισόδων / εξόδων**, (ε) **αιτιοκρατικό ή στοχαστικό** και (στ) **χρονικώς μεταβαλλόμενο ή χρονικώς αμετάβλητο**.

Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων

Ευστάθεια BIBO και ασυμπτωτική ευστάθεια

Τα γραμμικά συστήματα περιγράφονται από τη

Γενική γραμμική διαφορική εξίσωση τάξεως N

$$\alpha_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + \dots + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_0 y(t) = \beta_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + \dots + \beta_1 \frac{dx(t)}{dt} + \beta_0 x(t)$$

Ασυμπτωτική ευστάθεια: περιγράφεται δια της μελέτης της εσωτερικής δομής του συστήματος δηλαδή προσδιορίζοντας τις θέσεις των ριζών λ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου** του συστήματος πάνω στο μιγαδικό επίπεδο.

Το σύστημα θεωρείται **ασυμπτωτικά ευσταθές** όταν όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου διαθέτουν αρνητικά πραγματικά μέρη, δηλαδή είναι $\Re\{\lambda_i\} < 0$ (για $i = 1, 2, \dots, N$). Αντίθετα, όταν έστω και μία ρίζα διαθέτει θετικό πραγματικό μέρος, τότε το σύστημα χαρακτηρίζεται ως **ασυμπτωτικά ασταθές**.

Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων

Ευστάθεια BIBO και ασυμπτωτική ευστάθεια

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ευστάθεια BIBO.

Το σύστημα χαρακτηρίζεται ως **ευσταθές κατά BIBO (Bounded Input Bounded Output)** όταν η διαβίβαση σε αυτό μιας **φραγμένης εισόδου** $x(t)$, οδηγεί στη δημιουργία μιας **φραγμένης εξόδου** $y(t)$.

Επομένως, για κάθε ζεύγος εισόδου - εξόδου $[x(t), y(t)]$ υπάρχουν πεπερασμένες πραγματικές σταθερές α και β τέτοιες ώστε

$$\text{για κάθε } x(t) \text{ τέτοιο ώστε } |x(t)| \leq \alpha \iff |y(t)| \equiv |\mathcal{T}\{x(t)\}| \leq \beta$$

Εάν υπάρχει έστω και μία είσοδος του συστήματος για την οποία η έξοδος του συστήματος να μην είναι φραγμένη, τότε το σύστημα χαρακτηρίζεται ως

ασταθές κατά BIBO

Σε αυτό τον τρόπο μελέτης ευστάθειας **αγνοούμε τελείως** την εσωτερική δομή του συστήματος και τις οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες το περιγράφουν.

Κρουστική και βηματική απόκριση

Ορισμός κρουστικής και βηματικής απόκρισης

Ορισμός

Κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός γραμμικού συστήματος συνεχούς χρόνου, ονομάζουμε την έξοδο που παράγεται από το σύστημα όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$, ή σε μαθηματική γραφή

$$h(t) = \mathcal{T}\{\delta(t)\}$$

Ορισμός

Βηματική απόκριση $s(t)$ ενός γραμμικού συστήματος συνεχούς χρόνου, ονομάζουμε την έξοδο που παράγεται από το σύστημα όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί η μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$, ή σε μαθηματική γραφή

$$s(t) = \mathcal{T}\{u(t)\}$$

Συχνотική απόκριση

Ορισμός συχνοτικής απόκρισης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ορισμός

Συχνотική απόκριση $\mathcal{H}(j\omega)$ ενός γραμμικού συστήματος συνεχούς χρόνου, ονομάζουμε το λόγο του σήματος εξόδου που παράγεται από το σύστημα όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί ένα στοιχειώδες μιγαδικό εκθετικό σήμα με πλάτος ίσο με A και αυθαίρετη συχνότητα ω προς αυτό το σήμα εισόδου, ή σε μαθηματική γραφή

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{\mathcal{T}\{Ae^{j\omega t}\}}{Ae^{j\omega t}}$$

Σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις, η συχνотική απόκριση είναι μιγαδική συνάρτηση και εάν διατυπωθεί στην πολική της μορφή

$$\mathcal{H}(j\omega) = |\mathcal{H}(j\omega)| \exp[\angle \mathcal{H}(j\omega)]$$

τότε το μέτρο της $|\mathcal{H}(j\omega)|$ είναι γνωστό ως **απόκριση πλάτους**, ενώ η φάση της $\angle \mathcal{H}(j\omega)$ είναι γνωστή ως **απόκριση φάσης**.

Παράδειγμα υπολογισμού αποκρίσεων

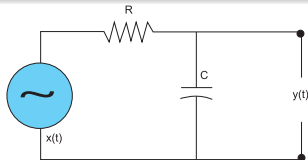
Υπολογισμός κρουστικής, βηματικής και συχνοτικής απόκρισης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να βρεθεί η κρουστική, η βηματική και η συχνοτική απόκριση του κυκλώματος RC που απεικονίζεται στο σχήμα.



Η διαφορική εξίσωση του συστήματος είναι η $\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$ με λύση

$$y(t) = y(0) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \frac{1}{RC} \int_{0^-}^t \exp\left(\frac{\tau}{RC}\right) x(\tau) d\tau$$

Θέτοντας για λόγους απλότητας $y(0) = 0$ έχουμε

$$y(t) = \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \frac{1}{RC} \int_{0^-}^t \exp\left(\frac{\tau}{RC}\right) x(\tau) d\tau$$

Παράδειγμα υπολογισμού αποκρίσεων

Υπολογισμός κρουστικής, βηματικής και συχνοτικής απόκρισης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Κρουστική απόκριση: Θέτοντας $x(t) = \delta(t)$ και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της κρουστικής συνάρτησης βρίσκουμε ότι

$$h(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t/RC}}{RC} & \text{για } t \geq 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases} = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

Βηματική απόκριση: Θέτοντας $x(t) = \delta(t)$ και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της βηματικής συνάρτησης η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\int_{-0}^t \exp\left(\frac{\tau}{RC}\right) u(\tau) d\tau = \int_0^t \exp\left(\frac{\tau}{RC}\right) d\tau = RC \left(e^{t/RC} - 1 \right)$$

Επομένως η βηματική απόκριση θα έχει τη μορφή

$$s(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/RC} & \text{για } t \geq 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases} = \left[1 - e^{-t/RC} \right] u(t)$$

Παράδειγμα υπολογισμού αποκρίσεων

Υπολογισμός κρουστικής, βηματικής και συχνοτικής απόκρισης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Συχνοτική απόκριση: Θέτοντας $x(t) = \sin(\omega t)$ θα είναι $y(t) \equiv H(\omega)$ και μετά από μαθηματικές πράξεις βρίσκουμε ότι

$$H(j\omega) = \frac{\sin(\omega t) + \omega RC \left[e^{-t/RC} - \cos(\omega t) \right]}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}$$

Αποδεικνύεται πως

η απόκριση του συστήματος σε ένα οποιοδήποτε σήμα, μπορεί να εκφρασθεί με τη βοήθεια της βηματικής απόκρισης, της κρουστικής απόκρισης καθώς και της συνάρτησης απόκρισης συχνότητας.

Γραμμικά και χρονικώς αμετάβλητα συστήματα

Συστήματα LTI - Βασικοί ορισμοί

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ικανοποιούν τόσο την ιδιότητα της γραμμικότητας όσο και την ιδιότητα της χρονικής αμεταβλητότητας και η έξοδός τους $y(t)$ υπολογίζεται ως η **συνέλιξη ανάμεσα στην κρουστική απόκριση $h(t)$ και στο σήμα εισόδου $x(t)$** - θα είναι λοιπόν

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Κατά συνέπεια η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού και χρονικώς αμετάβλητου συνεχούς συστήματος, **περιγράφει πλήρως το σύστημα**. Πράγματι, οποιαδήποτε και εάν είναι η είσοδος του συστήματος, η έξοδός του θα προκύπτει πάντα από τη συνέλιξη ανάμεσα στο σήμα εισόδου και στην κρουστική απόκριση του συστήματος.

Γραμμικά και χρονικώς αμετάβλητα συστήματα

Οι συνέπειες των ιδιοτήτων της συνέλιξης (1)

Η συνέλιξη $x(t) * y(t)$ δύο συνεχών σημάτων $x(t)$ και $y(t)$, χαρακτηρίζεται από την **αντιμεταθετική**, την **προσεταιριστική** και την **επιμεριστική** ιδιότητα, οι οποίες διατυπώνονται ως

- **Αντιμεταθετική:** $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$

Η εναλλαγή των ρόλων των σημάτων $h(t)$ και $x(t)$ δεν μεταβάλλει την έξοδο $y(t)$ του συστήματος, η οποία παραμένει η ίδια.

- **Προσεταιριστική:** $[x(t) * y(t)] * z(t) = x(t) * [y(t) * z(t)]$

Δύο συστήματα LTI με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(t)$ και $h_2(t)$ συνδεδεμένα σε σειρά, είναι ισοδύναμα με ένα απλό σύστημα, η κρουστική απόκριση του οποίου $h(t)$ είναι η συνέλιξη των κρουστικών αποκρίσεων των δύο συστημάτων:
 $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$.

- **Επιμεριστική:** $x(t) * [y(t) + z(t)] = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$

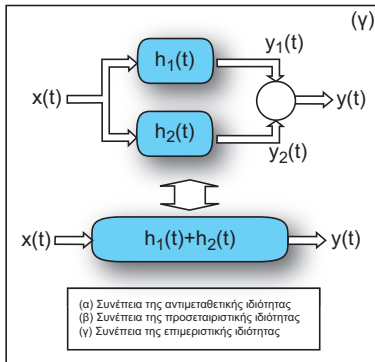
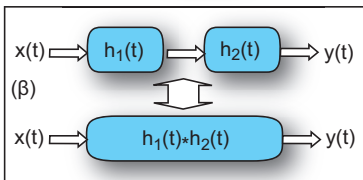
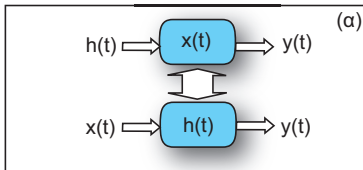
Δύο συστήματα LTI με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(t)$ και $h_2(t)$ που συνδέονται παράλληλα, είναι ισοδύναμα με ένα απλό σύστημα η κρουστική απόκριση του οποίου είναι το άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων των δύο συστημάτων:
 $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$.

Γραμμικά και χρονικώς αμετάβλητα συστήματα

Οι συνέπειες των ιδιοτήτων της συνέλιξης (2)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Η κρουστική απόκριση των συστημάτων LTI

Υπολογισμός από τη διαφορική εξίσωση του συστήματος

Θεωρώντας ένα σύστημα LTI που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η σύνθεση δύο συστημάτων LTI A και B που υλοποιούν το δεξί και το αριστερό μέλος της εξίσωσης αντίστοιχα και περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$w(t) = \mathcal{T}_1\{x(t)\} = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = w(t)$$

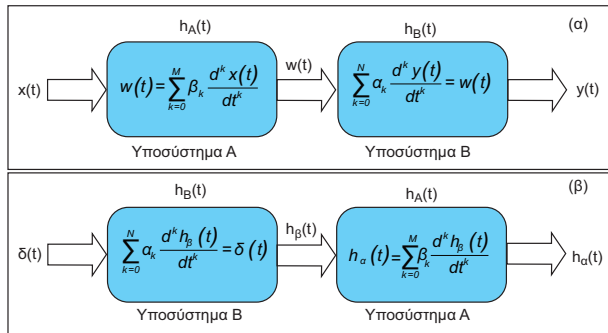
Αυτά τα συστήματα συνδέονται με τον τρόπο που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Η κρουστική απόκριση των συστημάτων ΛΤΙ

Υπολογισμός από τη διαφορική εξίσωση του συστήματος

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο συνεχές σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως η σύνθεση δύο υποσυστημάτων κάθε ένα εκ των οποίων υλοποιεί και ένα μέλος της διαφορικής εξίσωσης που το περιγράφει

Η κρουστική απόκριση των συστημάτων ΛΤΙ

Υπολογισμός από τη διαφορική εξίσωση του συστήματος

Εναλλάσσοντας τις θέσεις των συστημάτων και διαβιβάζοντας στο υποσύστημα Β την κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$, στην έξοδο του υποσυστήματος Α θα λάβουμε την κρουστική απόκριση $h(t)$ και σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση θα είναι

$$\delta(t) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k h_{\beta}(t)}{dt^k}$$

και

$$h(t) \equiv h_{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k h_{\beta}(t)}{dt^k}$$

Κατά συνέπεια μπορούμε να υπολογίσουμε την **κρουστική απόκριση** του συστήματος από τη **διαφορική εξίσωση** που το περιγράφει με τον ακόλουθο τρόπο:

Η κρουστική απόκριση των συστημάτων LTI

Υπολογισμός από τη διαφορική εξίσωση του συστήματος

ΒΗΜΑ 1: Αντικαθιστούμε το δεξί μέλος της διαφορικής εξίσωσης με την κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$. Η έξοδος αυτού του υποσυστήματος θα είναι η κρουστική απόκριση $h_\beta(t)$ με τις δύο συναρτήσεις να συνδέονται με τη σχέση

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k h_\beta(t)}{dt^k} = \delta(t)$$

Ωστόσο θα πρέπει οι μέγιστες τάξεις των παραγώγων των συναρτήσεων $y(t)$ και $x(t)$ να ικανοποιούν τη συνθήκη $N \geq M$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα να βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας έτσι ώστε να μπορούμε να γράψουμε ότι

$$y(0^-) = \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{d^2 y(0^-)}{dt^2} = \dots = \frac{d^{(N-1)} y(0^-)}{dt^{(N-1)}} = 0$$

ΒΗΜΑ 2: Υπό την προϋπόθεση ότι

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{d^k h_\beta(t)}{dt^k} dt = \frac{d^{(k-1)} h_\beta(0^+)}{dt^{k-1}} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

Η κρουστική απόκριση των συστημάτων ΛΤΙ

Υπολογισμός από τη διαφορική εξίσωση του συστήματος

η ολοκλήρωση στο διάστημα από $t = 0^-$ έως $t = 0^+$ θα μας δώσει

$$\begin{aligned}\int_{0^-}^{0^+} \sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k h_\beta(t)}{dt^k} dt &= \sum_{k=0}^N \alpha_k \int_{0^-}^{0^+} \frac{d^k h_\beta(t)}{dt^k} dt = \alpha_N \int_{0^-}^{0^+} \frac{d^N h_\beta(t)}{dt^N} dt \\ &= \alpha_N \frac{d^{(N-1)} h_\beta(0^+)}{dt^{N-1}} = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\frac{d^{(N-1)} h_\beta(0^+)}{dt^{N-1}} = \frac{1}{\alpha_N}$$

Επομένως οι N το πλήθος αρχικές συνθήκες για τη συνάρτηση $h_\beta(t)$ θα είναι οι

$$h_\beta(0^+) = \frac{dh_\beta(0^+)}{dt} = \dots = \frac{d^{(N-2)} h_\beta(0^+)}{dt^{N-2}} = 0$$

$$\text{και} \quad \frac{d^{(N-1)} h_\beta(0^+)}{dt^{N-1}} = \frac{1}{\alpha_N}$$

Η κρουστική απόκριση των συστημάτων LTI

Υπολογισμός από τη διαφορική εξίσωση του συστήματος

ΒΗΜΑ 3: Επιλύουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k h_{\beta}(t)}{dt^k} = 0$$

για τη χρονική στιγμή $t = 0^+$ και για τις παραπάνω αρχικές συνθήκες. Θεωρώντας μιγαδική εκθετική λύση της μορφής $h_{\beta}(t) = Ae^{st}$ όπου $A, s \in \mathbb{C}$ και $t > 0$ και αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση θα λάβουμε

$$\alpha_0(Ae^{st}) + \alpha_1(Ase^{st}) + \alpha_2(As^2e^{st}) + \dots + \alpha_N(As^N e^{st}) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$Ae^{st} \left(\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots + \alpha_N s^N \right) = 0$$

από όπου προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots + \alpha_N s^N = \sum_{k=0}^N \alpha_k s^k = 0$$

Η κρουστική απόκριση των συστημάτων ΛΤΙ

Υπολογισμός από τη διαφορική εξίσωση του συστήματος

Θεωρώντας N διακριτές ρίζες και χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας βρίσκουμε

$$h_{\beta}(t) = \sum_{k=0}^N A_k h_{\beta}^k(t) = \sum_{k=0}^N A_k e^{s_k t}$$

με τους συντελεστές A_k να υπολογίζονται ως οι λύσεις του συστήματος

$$h_{\beta}(0^+) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} \Big|_{t=0^+} = \sum_{k=1}^N A_k$$

$$\frac{dh_{\beta}(0^+)}{dt} = \sum_{k=1}^N A_k s_k e^{s_k t} \Big|_{t=0^+} = \sum_{k=1}^N A_k s_k$$

$$\frac{d^2 h_{\beta}(0^+)}{dt^2} = \sum_{k=1}^N A_k s_k^2 e^{s_k t} \Big|_{t=0^+} = \sum_{k=1}^N A_k s_k^2$$

$$\frac{d^{(N-1)} h_{\beta}(0^+)}{dt^{N-1}} = \sum_{k=1}^N A_k s_k^{N-1} e^{s_k t} \Big|_{t=0^+} = \sum_{k=1}^N A_k s_k^{N-1} = \frac{1}{\alpha_N}$$

Η κρουστική απόκριση των συστημάτων LTI

Υπολογισμός από τη διαφορική εξίσωση του συστήματος

το οποίο σε μορφή πίνακα διατυπώνεται ως

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1/\alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_N \\ s_1^2 & s_2^2 & \dots & s_N^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1^{N-1} & s_2^{N-1} & \dots & s_N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix}$$

με τον πίνακα διαστάσεων $N \times N$ που εμφανίζεται στο δεξί μέλος να είναι γνωστός ως **πίνακας του Vandermonde**.

ΒΗΜΑ 4: Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση από τη σχέση

$$h(t) = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k h_\beta(t)}{dt^k}$$

Η διαδικασία ολοκληρώνεται.

Παράδειγμα υπολογισμού κρουστικής απόκρισης

Υπολογισμός από τη διαφορική εξίσωση του συστήματος

Άσκηση

Να προσδιορίσετε την κρουστική απόκριση του συστήματος

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

Αρχικά επιλύουμε την εξίσωση

$$\frac{d^2 h_{\beta}(t)}{dt^2} + 3 \frac{dh_{\beta}(t)}{dt} + 2h_{\beta}(t) = \delta(t)$$

η οποία, για την περιοχή τιμών $t > 0$ λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{d^2 h_{\beta}(t)}{dt^2} + 3 \frac{dh_{\beta}(t)}{dt} + 2h_{\beta}(t) = 0$$

χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες

$$h_{\beta}(0^+) = 0 \quad \text{και} \quad \left. \frac{d^{(N-1)} h_{\beta}(t)}{dt^{N-1}} \right|_{N=2} = \frac{dh_{\beta}(0^+)}{dt} = \frac{1}{\alpha_N} \Big|_{N=2} = \frac{1}{\alpha_2} = 1$$

Παράδειγμα υπολογισμού κρουστικής απόκρισης

Υπολογισμός από τη διαφορική εξίσωση του συστήματος

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης $s^2 + 3s + 2 = 0$ διαθέτει δυο ρίζες, τις $s_1 = -2$ και $s_2 = -1$ και επομένως η γενική λύση είναι η

$$h_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^2 A_k e^{s_k t} = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-t}, \quad (t \geq 0)$$

Οι συντελεστές A_1 και A_2 μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών

$$h_{\beta}(0^+) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-t} \Big|_{t=0^+} = A_1 + A_2 = 0$$

$$\frac{dh_{\beta}(0^+)}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - A_2 e^{-t} = \Big|_{t=0^+} = -2A_1 - A_2 = 1$$

Η επίλυση αυτού του συστήματος οδηγεί στις τιμές $A_1 = -1$ και $A_2 = 1$. Θα είναι λοιπόν

$$h_{\beta}(t) = e^{-t} - e^{-2t} \quad (\text{για } t \geq 0) = \left(e^{-t} - e^{-2t} \right) u(t)$$

και αντικαθιστώντας τη στην εξίσωση ορισμού της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ βρίσκουμε

$$h(t) = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k h_{\beta}(t)}{dt^k} \Big|_{M=0} = h_{\beta}(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t} \right) u(t)$$

Η κρουστική απόκριση των συστημάτων ΛΤΙ

Υπολογισμός από τη βηματική απόκριση

Θεώρημα

Η βηματική απόκριση $s(t)$ ενός αιτιατού γραμμικού και χρονικώς αμετάβλητου συνεχούς συστήματος, είναι ίση με το **ολοκλήρωμα** της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ η οποία με τη σειρά της αποτελεί την **παράγωγο** της βηματικής απόκρισης $s(t)$. Η παραπάνω ιδιότητα σε μαθηματική μορφή διατυπώνεται ως

$$s(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει άμεσα από την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης και τον ορισμό της βηματικής συνάρτησης ως

$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

Στα αιτιατά συστήματα είναι **$h(\tau) = 0$ για $\tau < 0$** και το κάτω όριο στο τελευταίο ολοκλήρωμα λαμβάνει **μηδενική τιμή**.

Η κρουστική απόκριση των συστημάτων LTI

Υπολογισμός από τη βηματική απόκριση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Για το κύκλωμα RC που μελετήσαμε προηγουμένως έχουμε

$$s(t) = \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right] u(t)$$

και επομένως

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \left(1 - e^{-t/RC} \right) u(t) \right\} = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) + \delta(t) - e^{-t/RC} \delta(t)$$

αφού $\delta(t) = u'(t)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κρουστικής συνάρτησης έχουμε

$$\left[\delta(t) - e^{-t/RC} \delta(t) \right]_{t=0} = \delta(0) - e^{-0/RC} \delta(0) = \delta(0) - \delta(0) = 0$$

και επομένως η ζητούμενη κρουστική απόκριση υπολογίζεται ως

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

Η συχνοτική απόκριση των συστημάτων LTI

Βασικές εξισώσεις

Η συχνοτική απόκριση ενός συστήματος LTI, είναι η απόκριση στο στοιχειώδες **μγαδικό εκθετικό σήμα** $x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της συνέλιξης έχουμε

$$\begin{aligned}y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau = Ae^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega_0 \tau} d\tau\end{aligned}$$

Ορίζοντας

$$\mathcal{H}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

η παραπάνω σχέση θα λάβει τη μορφή

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = Ae^{j\omega_0 t}\mathcal{H}(j\omega_0) = \mathcal{H}(j\omega_0)x(t)$$

Επομένως τα στοιχειώδη μγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής $x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$ αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος, με αντίστοιχες ιδιοτιμές τις τιμές της συνάρτησης $\mathcal{H}(j\omega)$ υπολογισμένης στη θέση της συχνότητας ω_0 του σήματος εισόδου.

Η συχνοτική απόκριση των συστημάτων LTI

Βασικές εξισώσεις

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η συνάρτηση $\mathcal{H}(j\omega)$ είναι μιγαδική συνάρτηση της πραγματικής συχνότητας ω και επομένως μπορεί να διατυπωθεί στην εκθετική της μορφή

$$\mathcal{H}(j\omega) = |\mathcal{H}(j\omega)|e^{j\angle\mathcal{H}(j\omega)}$$

Κατά συνέπεια η παραπάνω σχέση γράφεται

$$y(t) = Ae^{j\omega_0 t} \left\{ |\mathcal{H}(j\omega_0)|e^{j\angle\mathcal{H}(j\omega_0)} \right\} = \left(A|\mathcal{H}(j\omega_0)| \right) \exp \left\{ j \left(\omega_0 t + \angle\mathcal{H}(j\omega_0) \right) \right\}$$

Επομένως

η επίδραση ενός γραμμικού και χρονικώς αμετάβλητου συστήματος συνεχούς χρόνου σε στοιχειώδες μιγαδικό εκθετικό σήμα συχνότητας ω , είναι ο **πολλαπλασιασμός του πλάτους του σήματος επί το μέτρο της συνάρτησης $\mathcal{H}(j\omega)$** και η **μετατόπιση της φάσης του σήματος κατά τη φάση της συνάρτησης $\mathcal{H}(j\omega)$** , ενώ αντίθετα, η συχνότητά του ω **δεν μεταβάλλεται**.

Στη θεωρία των σημάτων συνεχούς χρόνου, η συνάρτηση $|\mathcal{H}(j\omega)|$ είναι γνωστή ως **απόκριση πλάτους** ενώ η συνάρτηση $\angle\mathcal{H}(j\omega)$ είναι γνωστή ως **απόκριση φάσης** του συστήματος.

Συνάρτηση μεταφοράς

Βασικές εξισώσεις

Παρατηρώντας πως το εκθετικό σήμα $x(t) = Ae^{j\omega t}$ αποτελεί ειδική περίπτωση του μιγαδικού εκθετικού σήματος $x(t) = Ae^{st}$ όπου $s = \alpha + j\omega$ η γενίκευση της παραπάνω διαδικασίας θα μας δώσει

$$\begin{aligned}y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = A \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= Ae^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = Ae^{st}\mathcal{H}(s) = \mathcal{H}(s)x(t)\end{aligned}$$

με τη συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$, η οποία είναι γνωστή ως **συνάρτηση μεταφοράς** να ορίζεται ως

$$\mathcal{H}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για τις τιμές του s που ανήκουν στην **περιοχή σύγκλισης** της συνάρτησης $\mathcal{H}(s)$.

Συνάρτηση μεταφοράς

Βασικές εξισώσεις

Σε αυτή τη γενική περίπτωση, η εξίσωση ιδιοτιμών του συστήματος λαμβάνει τη μορφή

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = \mathcal{H}(s)x(t)$$

και επομένως το μιγαδικό εκθετικό σήμα $x(t) = Ae^{st}$ αποτελεί **ιδιοσυνάρτηση** του συστήματος με **ιδιοτιμή** την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης μεταφοράς $\mathcal{H}(s)$. Για τη γενική περίπτωση του γραμμικού συστήματος

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $x(t) = e^{st}$ και $y(t) = \mathcal{H}(s)e^{st}$ ($A = 1$) και παραγωγίζοντας τις συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$, M και N φορές αντίστοιχα, έχουμε

$$\begin{array}{ll} x'(t) & = se^{st} & y'(t) & = s\mathcal{H}(s)e^{st} \\ x''(t) & = s^2e^{st} & y''(t) & = s^2\mathcal{H}(s)e^{st} \\ x'''(t) & = s^3e^{st} & y'''(t) & = s^3\mathcal{H}(s)e^{st} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(M)}(t) & = s^M e^{st} & y^{(M)}(t) & = s^N \mathcal{H}(s)e^{st} \end{array}$$

Συνάρτηση μεταφοράς

Βασικές εξισώσεις

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση του συστήματος παίρνουμε

$$\begin{aligned}\alpha_0 \mathcal{H}(s)e^{st} + \alpha_1 s \mathcal{H}(s)e^{st} + \alpha_2 s^2 \mathcal{H}(s)e^{st} + \dots + \alpha_{N-1} s^{N-1} \mathcal{H}(s)e^{st} + \alpha_N s^N \mathcal{H}(s)e^{st} \\ = \beta_0 e^{st} + \beta_1 s e^{st} + \beta_2 s^2 e^{st} + \dots + \beta_{N-1} s^{N-1} e^{st} + \beta_M s^M e^{st}\end{aligned}$$

Απαλείφοντας την εκθετική ποσότητα e^{st} και επιλύοντας ως προς $\mathcal{H}(s)$ βρίσκουμε

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \dots + \beta_{N-1} s^{N-1} + \beta_M s^M}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \alpha_N s^N} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

με τα πολυώνυμα $P(s)$ και $Q(s)$ να ορίζονται ως

$$P(s) = \sum_{k=0}^M \beta_k s^k \quad \text{και} \quad Q(s) = \sum_{k=0}^N \alpha_k s^k$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου $P(s)$ που μηδενίζουν τη συνάρτηση μεταφοράς ονομάζονται **μηδενικές τιμές**, ενώ οι ρίζες του πολυωνύμου $Q(s)$ που απειρίζουν τη συνάρτηση μεταφοράς, είναι γνωστές ως **πόλοι**. Οι θέσεις των μηδενικών τιμών και των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς στο μιγαδικό επίπεδο, χαρακτηρίζουν την **ευστάθεια** και γενικότερα τη συμπεριφορά του συστήματος.

Συνάρτηση μεταφοράς

Φυσική σημασία

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η φυσική σημασία της σχέσης $y(t) = \mathcal{H}(s)x(t) = A\mathcal{H}(s)e^{st}$ είναι πως

εάν ένα εκθετικό σήμα της μορφής $x(t) = Ae^{st}$ διέλθει μέσα από ένα σύστημα LTI, το σήμα εξόδου θα διαφέρει σε σχέση με το σήμα εισόδου **μόνο κατά την τιμή του πλάτους του**, η οποία θα είναι ίση με το πλάτος του σήματος εισόδου πολλαπλασιασμένη με το μέτρο της συνάρτησης $\mathcal{H}(s)$

Θεωρώντας λοιπόν τα σήματα

$$x_1(t) = A_1 e^{s_1 t}, \quad x_2(t) = A_2 e^{s_2 t}, \quad x_3(t) = A_3 e^{s_3 t}$$

οι αντίστοιχες αποκρίσεις του συστήματος είναι οι

$$y_1(t) = A_1 \mathcal{H}(s_1) e^{s_1 t}, \quad y_2(t) = A_2 \mathcal{H}(s_2) e^{s_2 t}, \quad y_3(t) = A_3 \mathcal{H}(s_3) e^{s_3 t}$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας, η απόκριση του συστήματος στο σήμα εισόδου

$$x(t) = C_1(A_1 e^{s_1 t}) + C_2(A_2 e^{s_2 t}) + C_3(A_3 e^{s_3 t})$$

είναι η

$$y(t) = C_1[A_1 \mathcal{H}(s_1) e^{s_1 t}] + C_2[A_2 \mathcal{H}(s_2) e^{s_2 t}] + C_3[A_3 \mathcal{H}(s_3) e^{s_3 t}]$$

Ευστάθεια συστημάτων LTI

Εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ένα σύστημα LTI θεωρείται **ευσταθές κατά BIBO** όταν για κάθε φραγμένη είσοδο $x(t)$ η έξοδος $y(t)$ είναι επίσης φραγμένη. Θεωρώντας το φραγμένο σήμα εισόδου $|x(t)| < M < \infty$ και χρησιμοποιώντας την εξίσωση της συνέλιξης έχουμε

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau$$

Η έξοδος του συστήματος είναι φραγμένη όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$

συνθήκη, που με τη σειρά της διασφαλίζει την ευστάθεια του συστήματος κατά BIBO.

Κατά συνέπεια, **ένα σύστημα είναι ευσταθές κατά BIBO** όταν η κρουστική του απόκριση $h(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.

Ευστάθεια συστημάτων ΛΤΙ

Εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν γνωρίζουμε τη διαφορική εξίσωση του συστήματος

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

η ευστάθεια κατά BIBO μπορεί να μελετηθεί συναρτήσει των ριζών $\{s_k\}_{k=1}^N$ του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\alpha_N s^N + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$h(t) = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k h_\beta(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k}{dt^k} \left\{ \underbrace{\sum_{m=1}^N \alpha_m e^{s_m t} u(t)}_{h_\beta(t)} \right\}$$

(για λόγους απλότητας θεωρούμε N διακριτές ρίζες καθώς και ότι $N \geq M$) θα έχουμε

Ευστάθεια συστημάτων ΛΤΙ

Εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

$$\begin{aligned} \int_{0^+}^{+\infty} |h(t)| dt &= \\ \int_{0^+}^{+\infty} \left| \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k}{dt^k} \left\{ \sum_{m=1}^N \alpha_m e^{s_m t} \right\} \right| dt &\leq \int_{0^+}^{+\infty} \sum_{k=0}^M |\beta_k| \left| \frac{d^k}{dt^k} \left\{ \sum_{m=1}^N \alpha_m e^{s_m t} \right\} \right| dt = \\ \sum_{k=0}^M |\beta_k| \int_{0^+}^{+\infty} \left| \frac{d^k}{dt^k} \left\{ \sum_{m=1}^N \alpha_m e^{s_m t} \right\} \right| dt &= \sum_{k=0}^M |\beta_k| \int_{0^+}^{+\infty} \left| \sum_{m=1}^N \alpha_m (s_m)^k e^{s_m t} \right| dt \leq \\ \sum_{k=0}^M |\beta_k| \int_{0^+}^{+\infty} \sum_{m=1}^N |\alpha_m (s_m)^k e^{s_m t}| dt &\leq \sum_{k=0}^M |\beta_k| \int_{0^+}^{+\infty} \sum_{m=1}^N |\alpha_m (s_m)^k| e^{\Re\{s_m\}t} dt \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\int_{0^+}^{+\infty} |h(t)| dt \leq \sum_{k=0}^M |\beta_k| \int_{0^+}^{+\infty} \sum_{m=1}^N |\alpha_m (s_m)^k| e^{\Re\{s_m\}t} dt$$

Ευστάθεια συστημάτων LTI

Εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Παρατηρούμε πως το άνω όριο της παραπάνω ποσότητας απειρίζεται όταν τα πραγματικά μέρη των ριζών s_m του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι θετικά.

Επομένως

ένα συνεχές σύστημα LTI είναι ευσταθές όταν όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της διαφορικής εξίσωσης του συστήματος έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη

Η παραπάνω συνθήκη εκτός από ικανή αποδεικνύεται πως είναι και αναγκαία υπό την έννοια πως

εάν έστω και μία ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε το συνεχές σύστημα με το οποίο σχετίζεται, είναι ασταθές

Παράδειγμα ευστάθειας συστημάτων LT

Χαρακτηρισμός συστημάτων ως προς την ευστάθειά τους

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να εξετάσετε ως προς την ευστάθεια κατά BIBO τα γραμμικά και χρονικώς αμετάβλητα συστήματα με κρουστική απόκριση

$$(α) h(t) = e^{2t}u(-1-t), \quad (β) h(t) = e^{-6|t|}, \quad (γ) h(t) = te^{-t}u(t)$$

(α) Παρατηρώντας ότι

$$u(-1-t) = \begin{cases} 1 & \text{για } -1-t \geq 0 \Rightarrow t \leq -1 \\ 0 & \text{για } -1-t < 0 \Rightarrow t > -1 \end{cases} \quad \text{θα έχουμε}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{-1} e^{2t} dt = \frac{1}{2} e^{2t} \Big|_{-\infty}^{-1} = \frac{1}{2} e^{-2} < \infty$$

Επομένως η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι **απολύτως ολοκληρώσιμη** και το σύστημα είναι **ευσταθές κατά BIBO**.

Παράδειγμα ευστάθειας συστημάτων LT

Χαρακτηρισμός συστημάτων ως προς την ευστάθειά τους

(β) Από την εξίσωση ορισμού της απόλυτης τιμής

$$|t| = \begin{cases} +t & \text{για } t \geq 0 \\ -t & \text{για } t < 0 \end{cases} \quad \text{είναι} \quad h(t) = \begin{cases} e^{-6t} & \text{για } t \geq 0 \\ e^{+6t} & \text{για } t < 0 \end{cases}$$

και επομένως το σύστημα είναι **ευσταθές κατά BIBO**, αφού

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^0 e^{6t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-6t} dt = \left. \frac{1}{6} e^{6t} \right|_{-\infty}^0 - \left. \frac{1}{6} e^{-6t} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{6}$$

(γ) Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες προκύπτει εύκολα ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \left. -(t+1)e^{-t} \right|_0^{+\infty} = 1 < \infty$$

Επομένως το σύστημα είναι **ευσταθές κατά BIBO**.

Διασύνδεση συστημάτων LTI

Οι βασικές δομικές μονάδες

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ένα σύστημα LTI κατασκευάζεται από τη διασύνδεση υποσυστημάτων που υλοποιούν στοιχειώδεις πράξεις σημάτων όπως είναι

- πρόσθεση
- αφαίρεση
- πολλαπλασιασμός
- κλιμάκωση
- χρονική υστέρηση
- διαφόριση
- ολοκλήρωση.

Αυτά τα υποσυστήματα είναι τα εξής:

- **Υποσύστημα κλιμάκωσης πλάτους:** Στατικό σύστημα που υλοποιεί το μετασχηματισμό $y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = \alpha x(t)$ όπου α ένας σταθερός συντελεστής που είναι γνωστός ως *κέρδος*. Το ηλεκτρικό του ισοδύναμο είναι μια αντίσταση R που δέχεται ένα ρεύμα $i(t)$ και παράγει την τάση $v(t) = Ri(t)$.
- **Υποσυστήματα πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού σημάτων:** Στατικά υποσυστήματα που δέχονται στην είσοδό τους τα σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ και επιστρέφουν **το άθροισμά τους** $x_1(t) + x_2(t)$, **τη διαφορά τους** $x_1(t) - x_2(t)$ και **το γινόμενό τους** $x_1(t) \cdot x_2(t)$.

Διασύνδεση συστημάτων ΛΤΙ

Οι βασικές δομικές μονάδες

- Ο **ιδανικός ολοκληρωτής**: που υλοποιεί το μετασχηματισμό

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Το ηλεκτρικό ισοδύναμο είναι ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που λειτουργεί ως

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

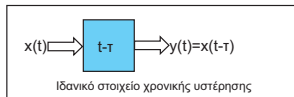
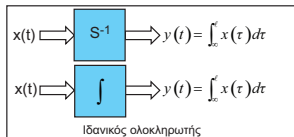
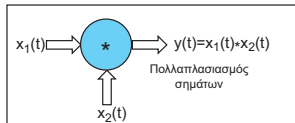
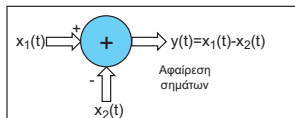
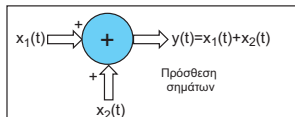
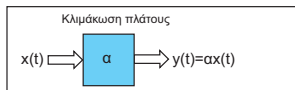
- Ο **ιδανικός διαφοριστής** που υλοποιεί το μετασχηματισμό $y(t) = x'(t)$. Αποτελεί στατικό υποσύστημα. Το ηλεκτρικό του ισοδύναμο είναι ένας επαγωγέας L που υλοποιεί την εξίσωση $v(t) = L[di(t)/dt]$.
- **Ιδανικό στοιχείο χρονικής υστέρησης**: δυναμικό υποσύστημα που υλοποιεί το μετασχηματισμό $y(t) = x(t - \tau)$.

Διασύνδεση συστημάτων ΛΤΙ

Διαγραμματική αναπαράσταση

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



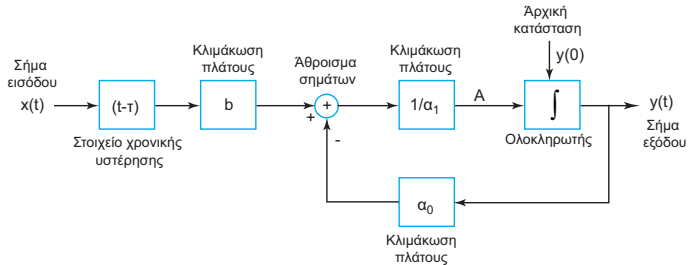
Διασύνδεση συστημάτων LTI

Διαγραμματική αναπαράσταση εξίσωσης

Θεωρώντας ένα σύστημα που περιγράφεται από μία συνήθη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$\alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_0 y(t) = bx(t - \tau)$$

η αναπαράστασή του με σχηματικό διάγραμμα γίνεται ως εξής:



Διασύνδεση συστημάτων LTI

Τρόποι σύνδεσης συστημάτων LTI

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Θεωρώντας δύο συστήματα της μορφής $y(t) = \mathcal{T}_1\{x(t)\}$ και $y(t) = \mathcal{T}_2\{x(t)\}$, αυτά μπορούν να συνδεθούν ως εξής:

- **Σύνδεση σε σειρά:** Η έξοδος του πρώτου συστήματος γίνεται είσοδος στο δεύτερο σύστημα και επομένως θα είναι

$$y_2(t) = \mathcal{T}_2\{y_1(t)\} = \mathcal{T}_2\{\mathcal{T}_1\{x(t)\}\}$$

- **Παράλληλη σύνδεση:** τα δύο συστήματα δέχονται την κοινή είσοδο $x(t)$ και οι έξοδοι που παράγουν προστίθενται για να δώσουν την τελική έξοδο. Θα είναι λοιπόν

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \mathcal{T}_1\{x(t)\} + \mathcal{T}_2\{x(t)\}$$

- **Σύνδεση με ανάδραση:** Η έξοδος του πρώτου συστήματος ανατροφοδοτεί την είσοδό του αφού πρώτα διέλθει από το δεύτερο σύστημα και επομένως θα είναι

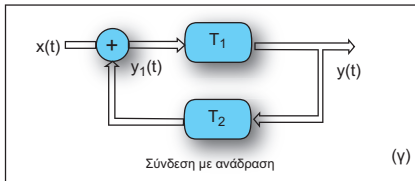
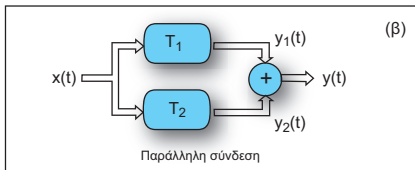
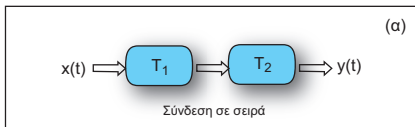
$$y_1(t) = x(t) + \mathcal{T}_1\{x(t)\} \quad \text{και} \quad y(t) = \mathcal{T}_1\{y_1(t)\}$$

Διασύνδεση συστημάτων LTI

Τρόποι σύνδεσης συστημάτων LTI

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα

Κανονική και μη κανονική μορφή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τα σχηματικά διαγράμματα επιτρέπουν τη διαγραμματική αναπαράσταση της λύσης $y(t)$ της γενικής διαφορικής εξίσωσης ενός συστήματος LTI που είναι η

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^M \beta_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

με τη βοήθεια στοιχείων όπως είναι οι **διαφοριστές** και οι **ολοκληρωτές** καθώς επίσης οι **αθροιστές** και οι **πολλαπλασιαστές**.

Υπάρχουν δύο τρόποι αναπαράστασης, η **μή κανονική μορφή (Direct Form I)** και η **κανονική (Direct Form II)**. Μία αναπαράσταση ονομάζεται **κανονική** όταν το πλήθος των ολοκληρωτών που χρησιμοποιούνται είναι το ίδιο με την τάξη του συστήματος που υλοποιούν έτσι ώστε να μην υπάρχουν περιττοί ολοκληρωτές.

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα

Μη κανονική μορφή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Διατυπώνοντας τη διαφορική εξίσωση του συστήματος ως

$$\sum_{n=0}^N \alpha^n D^n y(t) = \sum_{m=0}^M \beta_m D^m x(t)$$

όπου το σύμβολο $D^n \triangleq d^n/dt^n$ περιγράφει τον τελεστή της πολλαπλής διαφορίσης και ορίζοντας τον τελεστή πολλαπλής ολοκλήρωσης ως

$$D^{-N} \triangleq \underbrace{\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t}_{N \text{ φορές}}$$

ο πολλαπλασιασμός με αυτόν αμφοτέρων των μελών της παραπάνω σχέσης μας δίνει

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n D^{n-N} y(t) = \sum_{m=0}^M \beta_m D^{m-N} x(t)$$

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα

Μη κανονική μορφή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Αντικαθιστώντας το δεξί μέλος με τη συνάρτηση

$$w(t) = \sum_{m=0}^N \beta_m D^{m-N} x(t)$$

και αναπτύσσοντας το άθροισμα του αριστερού μέλους για την τιμή $n = N$, η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\alpha_N y(t) + \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n D^{n-N} y(t) = w(t) \quad \text{ή ισοδύναμα}$$

$$y(t) = \frac{1}{\alpha_N} \left[w(t) - \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n D^{n-N} y(t) \right]$$

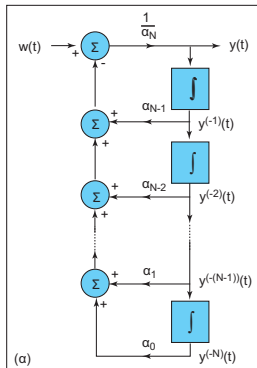
Η διαγραμματική αναπαράσταση της τελευταίας εξίσωσης αποτελεί τη **μη κανονική μορφή** του συστήματος.

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα

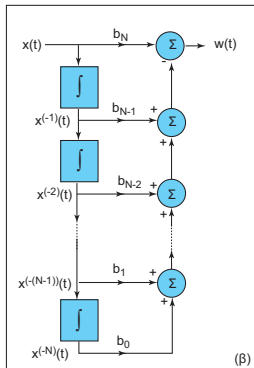
Μη κανονική μορφή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ



$$y(t) = \frac{1}{a_N} \left[w(t) - \sum_{n=1}^{N-n} a_n D^{n-N} y(t) \right]$$



$$w(t) = \sum_{m=0}^N \beta_m D^{m-N} x(t)$$

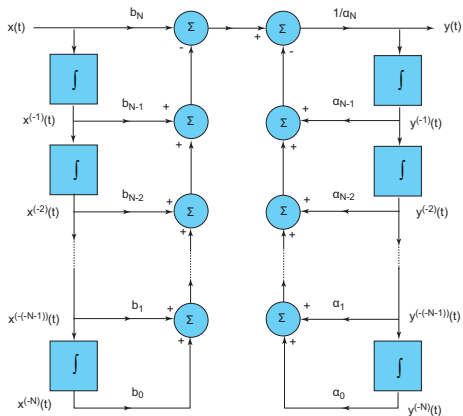
Τα σχηματικά διαγράμματα για τις συναρτήσεις $y(t)$ και $w(t)$ της μη κανονικής μορφής

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα

Μη κανονική μορφή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Η μη κανονική μορφή της αναπαράστασης της διαφορικής εξίσωσης του συστήματος από σχηματικό διάγραμμα

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα

Κανονική μορφή

Η **κανονική μορφή** της αναπαράστασης ενός συστήματος προκύπτει από τη **μη κανονική μορφή** με τον ακόλουθο τρόπο:

- **Αντιστρέφουμε** τη σειρά σύνδεσης των δύο υποσυστημάτων.
- Παρατηρώντας πως η χρήση δύο ολοκληρωτών που αφενός μεν είναι συνεχόμενοι, αφετέρου δε επιδρούν στο ίδιο σήμα, είναι περιττή, **απομακρύνουμε** τον ένα από αυτούς.

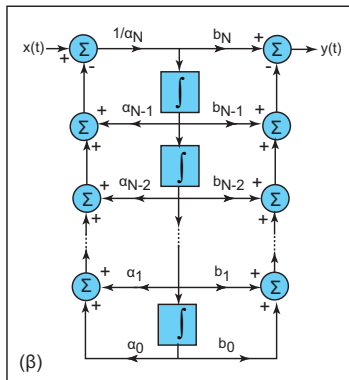
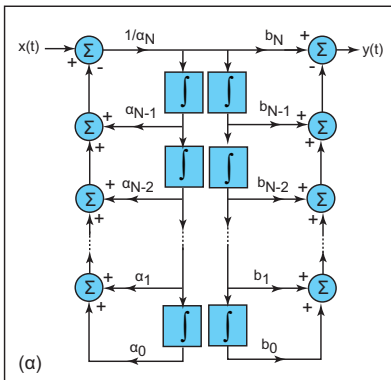
Το διάγραμμα που προκύπτει περιέχει N ολοκληρωτές και αποτελεί την κανονική μορφή του συστήματος.

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα

Κανονική μορφή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Η κανονική μορφή της αναπαράστασης της διαφορικής εξίσωσης του συστήματος από σχηματικό διάγραμμα

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα

Κανονική μορφή για την περίπτωση $N = M = 2$

Η διαφορική εξίσωση του συστήματος είναι η

$$\alpha_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_0 y(t) = \beta_0 x(t) + \beta_1 \frac{dx(t)}{dt} + \beta_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

Ολοκληρώνοντας δύο φορές θα λάβουμε

$$\begin{aligned} \alpha_2 y(t) + \alpha_1 \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau + \alpha_0 \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{\tau} y(\xi) d\xi \right) d\tau = \\ \beta_0 \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{\tau} x(\xi) d\xi \right) d\tau + \beta_1 \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + \beta_2 x(t) \end{aligned}$$

Θέτουμε

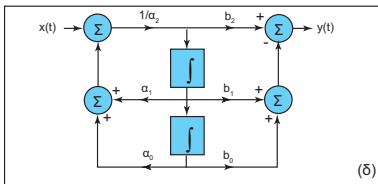
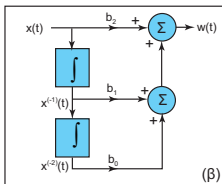
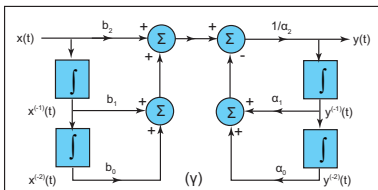
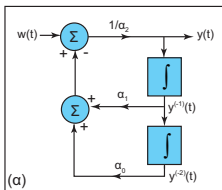
$$w(t) = \beta_0 \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{\tau} x(\xi) d\xi \right) d\tau + \beta_1 \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + \beta_2 x(t)$$

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα

Κανονική μορφή για την περίπτωση $N = M = 2$

Η έξοδος του συστήματος γράφεται ως

$$y(t) = \frac{1}{\alpha_2} \left[w(t) - \alpha_1 \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau - \alpha_0 \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{\tau} y(\xi) d\xi \right) d\tau \right]$$



Αντιστρεψιμότητα και αντίστροφα συστήματα

Η έννοια του αντίστροφου συστήματος

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ένα σύστημα συνεχούς χρόνου που υλοποιεί κάποιο μετασχηματισμό \mathcal{T} ονομάζεται **αντιστρέψιμο**, εάν η διαβίβαση σε αυτό **διακριτών εισόδων** οδηγεί πάντα στη δημιουργία αντίστοιχων **διακριτών εξόδων**, έτσι ώστε παρατηρώντας την έξοδό του, να μπορέσουμε να αναπαράγουμε την είσοδό του.

Περιγράφοντας το σύστημα ως συνάρτηση της μορφής $x(t) \rightarrow y(t)$ αυτή για να διαθέτει αντίστροφη θα πρέπει να αποτελεί **αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση** (1-1 και επί)

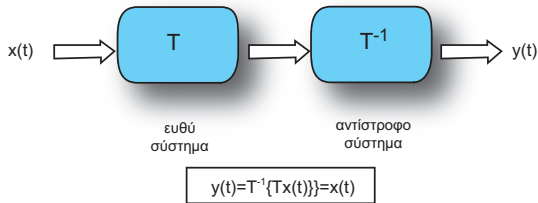
Παρατηρώντας πως το αντίστροφο σύστημα υλοποιεί τον αντίστροφο μετασχηματισμό \mathcal{T}^{-1} , η εν σειρά σύνδεση ενός συστήματος με το αντίστρόφό του δημιουργεί το **ταυτοτικό σύστημα** $y(t) = x(t)$ (δείτε το επόμενο σχήμα).

Αντιστρεψιμότητα και αντίστροφα συστήματα

Η έννοια του αντίστροφου συστήματος

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Εάν $h(t)$ και $g(t)$ είναι οι κρουστικές αποκρίσεις του ευθέως και του αντίστροφου συστήματος τότε από τον κανόνα της εν σειρά σύνδεσης συστημάτων θα έχουμε

$$y(t) = \xi(t) * x(t) = x(t) * [h(t) * g(t)] = x(t)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$h(t) * g(t) = \delta(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Εργαλεία μελέτης συστημάτων

Τα εργαλεία που παρουσιάστηκαν μέχρι αυτό το σημείο για την περιγραφή των συστημάτων LTI περιλαμβάνουν.

- Την απόκριση του συστήματος στα στοιχειώδη συνεχή σήματα όπως είναι η βηματική και η κρουστική συνάρτηση καθώς και οι εκθετικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις.
- Τη συσχέτιση εισόδου - εξόδου που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται η έξοδος του συστήματος όταν είναι γνωστή η είσοδος του.
- Τη διαγραμματική αναπαράσταση της δομής του συστήματος με τη βοήθεια των κατάλληλων σχηματικών διαγραμμάτων .
- Το ολοκλήρωμα της συνέλιξης εφόσον το συνεχές σύστημα που θεωρούμε είναι γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο.
- Τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος που ορίζεται ως ο λόγος της εξόδου προς την είσοδο για το σήμα εισόδου $x(t) = e^{st}$.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Εργαλεία μελέτης συστημάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το μειονέκτημα των παραπάνω τρόπων μελέτης, είναι πως περιγράφουν το σύστημα δια μέσου των συσχετίσεων εισόδου / εξόδου, **χωρίς να λαμβάνουν υπόψη την εσωτερική του δομή.**

Ως αποτέλεσμα, οδηγούμαστε συχνά σε εσφαλμένα συμπεράσματα, όπως είναι για παράδειγμα ο χαρακτηρισμός ενός συστήματος ως **ευσταθές** ενώ στην πραγματικότητα αυτό είναι **ασταθές.**

Για το λόγο αυτό μελετούμε το σύστημα στο

χώρο κατάστασης

με τη βοήθεια ενός συνόλου N μεταβλητών $q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)$ που ονομάζονται **μεταβλητές κατάστασης** ή **καταστατικές μεταβλητές** και είναι συναρτήσεις του χρόνου.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Ορισμός μεταβλητών κατάστασης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η απόκριση ενός συστήματος LTI σε κάθε χρονική στιγμή t , εξαρτάται από όλες τις εισόδους που διαβιβάστηκαν στο σύστημα το χρονικό διάστημα $(-\infty, t)$ και επομένως υπολογίζεται ως

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Εάν δεν γνωρίζουμε τις εισόδους του συστήματος για $t \leq t_0$ διατυπώνουμε την παραπάνω σχέση ως

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{t_0} x(\tau)h(t - \tau)d\tau + \int_{t_0}^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= y(t, t_0) + \int_{t_0}^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau \end{aligned}$$

με τη συνάρτηση $y(t, t_0)$ να υποτίθεται πως περιέχει όλη την ιστορία του συστήματος για χρονικές στιγμές $t \leq t_0$.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Ορισμός μεταβλητών κατάστασης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν είναι $y(t, t_0) = 0$ μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y(t)$ για $t > t_0$. Το σύνολο των αρχικών συνθηκών του συστήματος τη χρονική στιγμή $t = t_0$, ονομάζεται **αρχική κατάσταση**.

Ορίζουμε τις **καταστατικές μεταβλητές** ως την **ελάχιστη ποσότητα πληροφορίας** που θα πρέπει να γνωρίζουμε για το σύστημα, έτσι ώστε οι τιμές τους σε κάθε χρονική στιγμή t_0 να επαρκούν για τον υπολογισμό της εξόδου για κάθε $t \geq t_0$ εφόσον για αυτές τις χρονικές στιγμές γνωρίζουμε την είσοδο $x(t)$.

Επομένως, η έξοδος του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή, προσδιορίζεται **πλήρως** από τις καταστατικές μεταβλητές και την είσοδο του συστήματος

Ας σημειωθεί, πως η επιλογή του συνόλου των μεταβλητών που θα χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της κατάστασης του συστήματος, **δεν είναι μοναδική**.

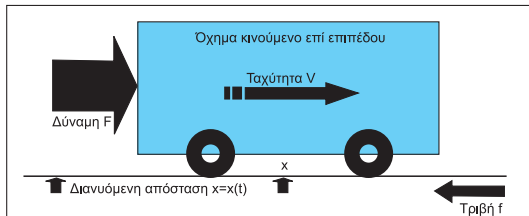
Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα 1 - Κίνηση οχήματος σε επίπεδο

Έστω όχημα κινούμενο επί επιπέδου με ταχύτητα v υπό την επίδραση δύναμης F και παρουσίας τριβής f , ανάλογης της ταχύτητας. Η εξίσωση κίνησης του οχήματος είναι

$$x(t) = vt + \frac{1}{2}\gamma t^2 + x_0$$

όπου $\gamma = dv/dt$ η επιτάχυνση του οχήματος και x_0 η αρχική του θέση (για $t = 0$).



Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα 1 - Κίνηση οχήματος σε επίπεδο

Παρατηρώντας πως (1) η ταχύτητα προκύπτει από τη διαφορά της του διανύσματος θέσης, (2) η επιτάχυνση υπολογίζεται ως

$$\text{Επιτάχυνση} = \frac{\text{Δύναμη}}{\text{Μάζα}} - \text{Τριβή}$$

και (3) η τριβή είναι ανάλογη της ταχύτητας, μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως το σύστημα γνωρίζοντας τη **θέση** του x και την **ταχύτητα** του v . Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις **καταστατικές μεταβλητές** $q_1(t) = x(t)$ και $q_2(t) = v(t)$ έχουμε

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = q_2(t) \quad \text{και} \quad \frac{dq_2(t)}{dt} = \frac{F}{m} - f q_2(t)$$

ή, καταφεύγοντας σε συμβολισμό πινάκων,

$$\begin{bmatrix} dq_1(t)/dt \\ dq_2(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} F$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα 2 - Κύκλωμα RLC

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Έστω **κύκλωμα RLC** που διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως $i(t)$ ο υπολογισμός του οποίου απαιτεί (1) την **τάση εισόδου** $v_i(t)$, (2) το αρχικό **παραμένον φορτίο** του πυκνωτή q_0 και (3) το **αρχικό ρεύμα** του πηνίου i_0 . Η εφαρμογή της θεωρίας των κυκλωμάτων μας οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$i(t) = \frac{\exp(-t/LC)}{4RLC^2 - 1} \left\{ \frac{V}{L} \left[(4RLC^2 - 1) \cos(Mt) - 2LCM \sin(Mt) \right] + i_0 \left[(4RLC^2 - 1) \cos(Mt) - 2LCM \sin(Mt) \right] - 4RLC^2 \sin(Mt) q_0 \right\}$$

όπου $M = \sqrt{4RLC^2 - 1}/2LC$. Επιλέγοντας ως **καταστατικές μεταβλητές** το ρεύμα $i(t)$ και το ηλεκτρικό φορτίο $q(t)$, η εφαρμογή του νόμου του **Kirchhoff** μας οδηγεί στην εξίσωση

$$V = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα 2 - Κύκλωμα RLC

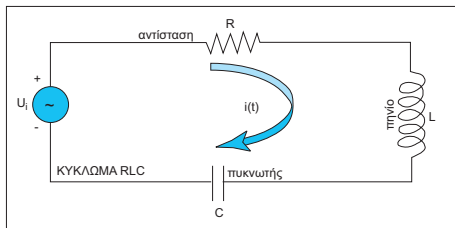
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Χρησιμοποιώντας ως καταστατικές μεταβλητές τις $q_1(t) = q(t) = \int i(t)dt$ και

$q_2(t) = i(t)$ οπότε θα είναι $\frac{dq_1(t)}{dt} = q_2(t)$ η παραπάνω σχέση διατυπώνεται ως

$$\begin{bmatrix} dq_1(t)/dt \\ dq_2(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -R/L & -1/LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} V$$



Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα 3 - Κατακόρυφη ταλάντωση

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Έστω μάζα M που εκτελεί **κατακόρυφη ταλάντωση** αναρτημένη σε ελατήριο σταθεράς k , υφιστάμενη την τριβή του τοιχώματος β . Η εξίσωση κίνησης είναι η

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \beta \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t)$$

όπου $F(t)$ είναι η **συνολική δύναμη** που εφαρμόζεται στο σώμα και $x(t)$ η **κατακόρυφη απομάκρυνση** της μάζας από τη θέση ισορροπίας της.

Η επίλυση αυτής της εξίσωσης απαιτεί τη χρήση δύο καταστατικών μεταβλητών, των $q_1(t) = x(t)$ και $q_2(t) = x'(t)$ που ανάγουν την εξίσωση στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} = q_2(t) \quad \text{και} \quad \frac{dq_2(t)}{dt} = -\frac{k}{m}q_1(t) - \frac{\beta}{m}q_2(t) + \frac{F(t)}{m}$$

το οποίο υπό μορφή πινάκων διατυπώνεται ως

$$\begin{bmatrix} dq_1(t)/dt \\ dq_2(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & \beta/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} F$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Κατασκευάζοντας τις δυναμικές εξισώσεις

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η διαδικασία που εφαρμόσαμε στα παραπάνω παραδείγματα μπορεί να γενικευθεί για τη γενική περίπτωση ενός **SISO συστήματος τάξεως N** με διαφορική εξίσωση

$$\alpha_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + \alpha_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + \alpha_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_0 y(t) =$$
$$\beta_N \frac{d^N x(t)}{dt^N} + \beta_{N-1} \frac{d^{N-1} x(t)}{dt^{N-1}} + \dots + \beta_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \beta_1 \frac{dx(t)}{dt} + \beta_0 x(t)$$

Η κατασκευή των καταστατικών εξισώσεων στηρίζεται στη διαγραμματική αναπαράσταση του συστήματος και ως καταστατικές μεταβλητές

$$q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)$$

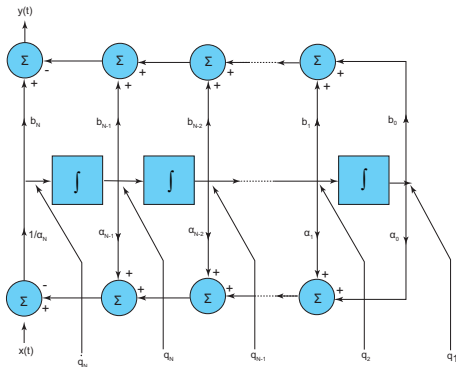
ορίζουμε τις **εξόδους των N ολοκληρωτών** του διαγράμματος της κανονικής του μορφής.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Κατασκευάζοντας τις δυναμικές εξισώσεις

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Ορισμός των καταστατικών μεταβλητών του συστήματος από την κανονική του μορφή

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Κατασκευάζοντας τις δυναμικές εξισώσεις

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Μελετώντας το σχήμα διαπιστώνουμε πως οι **καταστατικές μεταβλητές** του συστήματος θα σχετίζονται μεταξύ τους με ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$q_1(t) = \int q_2(t) dt \Rightarrow \frac{dq_1(t)}{dt} = q_2(t)$$

$$q_2(t) = \int q_3(t) dt \Rightarrow \frac{dq_2(t)}{dt} = q_3(t)$$

$$q_3(t) = \int q_4(t) dt \Rightarrow \frac{dq_3(t)}{dt} = q_4(t)$$

.....

$$q_{N-1}(t) = \int q_N(t) dt \Rightarrow \frac{dq_{N-1}(t)}{dt} = q_N(t)$$

στο οποίο θα πρέπει να προσθέσουμε και την εξίσωση για τη χρονική παράγωγο της καταστατικής μεταβλητής $q_N(t)$

$$\frac{dq_N(t)}{dt} = -\frac{\alpha_0}{\alpha_N} q_1(t) - \frac{\alpha_1}{\alpha_N} q_2(t) - \dots - \frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N} q_{N-1}(t) - \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} q_N(t) + \frac{1}{\alpha_N} x(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Κατασκευάζοντας τις δυναμικές εξισώσεις

Καταλήγουμε λοιπόν στο σύστημα των N συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_{N-2}(t) \\ \dot{q}_{N-1}(t) \\ \dot{q}_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_N} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_N} & \cdots & -\frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N} & -\frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_{N-2}(t) \\ q_{N-1}(t) \\ q_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\alpha_N} \end{bmatrix} x(t)$$

η λύση του οποίου οδηγεί στον προσδιορισμό των καταστατικών μεταβλητών του συστήματος.

Από την άλλη πλευρά, η έξοδος του συστήματος $y(t)$ συναρτηίσει των καταστατικών μεταβλητών του δίδεται από τη σχέση

$$y(t) = \beta_0 q_1(t) + \beta_1 q_2(t) + \cdots + \beta_{N-1} q_N(t) + \beta_N \frac{dq_N(t)}{dt}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Κατασκευάζοντας τις δυναμικές εξισώσεις

Αντικαθιστώντας την παράγωγο $\dot{q}_N(t)$ από την εξίσωση ορισμού της θα λάβουμε

$$\begin{aligned}y(t) &= \beta_0 q_1(t) + \beta_1 q_2(t) + \dots + \beta_{N-1} q_N(t) \\ &+ \beta_N \left\{ -\frac{\alpha_0}{\alpha_N} q_1(t) - \frac{\alpha_1}{\alpha_N} q_2(t) - \dots - \frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N} q_{N-1}(t) - \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} q_N(t) + \frac{1}{\alpha_N} x(t) \right\} \\ &= \left(\beta_0 - \beta_N \frac{\alpha_0}{\alpha_N} \right) q_1(t) + \left(\beta_1 - \beta_N \frac{\alpha_1}{\alpha_N} \right) q_2(t) + \dots + \\ &+ \left(\beta_{N-2} - \beta_N \frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N} \right) q_{N-1}(t) + \left(\beta_{N-1} - \beta_N \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} \right) q_N(t) + \frac{\beta_N}{\alpha_N} x(t)\end{aligned}$$

ή σε μορφή πινάκων

$$y(t) = \left[\left(\beta_0 - \beta_N \frac{\alpha_0}{\alpha_N} \right) \left(\beta_1 - \beta_N \frac{\alpha_1}{\alpha_N} \right) \dots \left(\beta_{N-1} - \beta_N \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} \right) \right] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_{N-2}(t) \\ q_{N-1}(t) \\ q_N(t) \end{bmatrix} + \frac{\beta_N}{\alpha_N} x(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Κατασκευάζοντας τις δυναμικές εξισώσεις

Ορίζοντας τους πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_N} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_N} & \dots & -\frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N} & -\frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\alpha_N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \beta_N \\ \alpha_N \end{bmatrix}$$

$$\text{και} \quad \mathbf{C} = \left[\left(\beta_0 - \beta_N \frac{\alpha_0}{\alpha_N} \right) \left(\beta_1 - \beta_N \frac{\alpha_1}{\alpha_N} \right) \dots \left(\beta_{N-1} - \beta_N \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} \right) \right]$$

οι δύο εξισώσεις στις οποίες καταλήξαμε παραπάνω γράφονται

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}x(t)$$

και

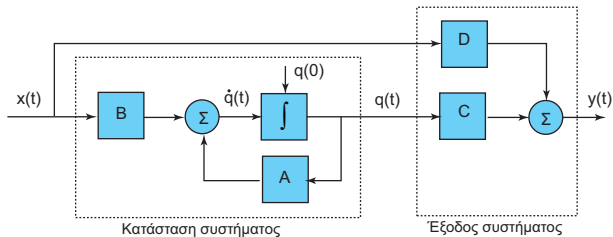
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}x(t)$$

όπου $\dot{\mathbf{q}}(t) = [\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_N(t)]^T$ η χρονική παράγωγος του καταστατικού διανύσματος $\mathbf{q}(t)$.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Κατασκευάζοντας τις δυναμικές εξισώσεις

- Ο πίνακας A (διαστάσεων $N \times N$) ονομάζεται **πίνακας συστήματος**.
- Ο πίνακας B (διαστάσεων $N \times 1$) ονομάζεται **πίνακας εισόδου**.
- Ο πίνακας C (διαστάσεων $1 \times N$) ονομάζεται **πίνακας μέτρησης**.
- Ο πίνακας D (διαστάσεων 1×1) ονομάζεται **πίνακας εξόδου**.



Σχηματικό διάγραμμα συστήματος SISO στο χώρο καταστάσεων

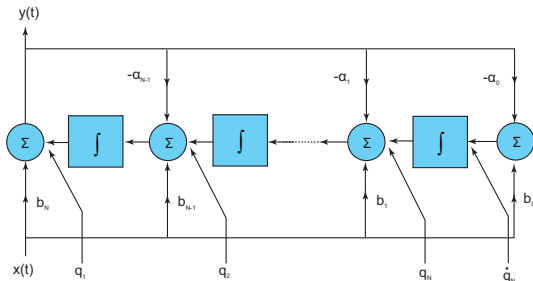
Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις από την μη κανονική μορφή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οι καταστατικές μεταβλητές για την περίπτωση της μη κανονικής μορφής ορίζονται όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Ορισμός των καταστατικών μεταβλητών από τη μη κανονική μορφή

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις από την μη κανονική μορφή

Από τη μελέτη του σχήματος διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = q_2(t) + \beta_{N-1}x(t) - \alpha_{N-1}y(t)$$

$$\frac{dq_2(t)}{dt} = q_3(t) + \beta_{N-2}x(t) - \alpha_{N-2}y(t)$$

$$\frac{dq_3(t)}{dt} = q_4(t) + \beta_{N-3}x(t) - \alpha_{N-3}y(t)$$

.....

$$\frac{dq_{N-1}(t)}{dt} = q_N(t) + \beta_1x(t) - \alpha_1y(t)$$

$$\frac{dq_N(t)}{dt} = \beta_0x(t) - \alpha_0y(t)$$

ενώ η έξοδος του συστήματος δίδεται από τη σχέση

$$y(t) = \frac{1}{\alpha_N} [\beta_N x(t) + q_1(t)]$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις από την μη κανονική μορφή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν απαλείψουμε τη συνάρτηση $y(t)$ από το παραπάνω σύστημα εξισώσεων χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση θα λάβουμε

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = q_2(t) - \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} q_1(t) + \left(\beta_{N-1} - \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} \beta_N \right) x(t)$$

$$\frac{dq_2(t)}{dt} = q_3(t) - \frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N} q_1(t) + \left(\beta_{N-2} - \frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N} \beta_N \right) x(t)$$

.....

$$\frac{dq_{N-1}(t)}{dt} = q_N(t) - \frac{\alpha_1}{\alpha_N} q_1(t) + \left(\beta_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_N} \beta_N \right) x(t)$$

$$\frac{dq_N(t)}{dt} = -\frac{\alpha_0}{\alpha_N} q_1(t) + \left(\beta_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_N} \beta_N \right) x(t)$$

ή, χρησιμοποιώντας πίνακες

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}x(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις από την μη κανονική μορφή

όπου $\dot{q}(t) = [\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_N(t)]^T$ η χρονική παράγωγος του καταστατικού διανύσματος και

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\alpha_1}{\alpha_N} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\alpha_N}{\alpha_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha_N}{\alpha_N} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{N-1} - \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} \beta_N \\ \beta_{N-2} - \frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N} \beta_N \\ \dots \dots \dots \\ \beta_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_N} \beta_N \\ \beta_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_N} \beta_N \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση εξόδου έχει τη μορφή $y(t) = \mathbf{C}q(t) + \mathbf{D}x(t)$ όπου

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_N} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_N}{\alpha_N} \end{bmatrix}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Η περίπτωση των συστημάτων MIMO

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ανάλυση στα συστήματα MIMO διαπιστώνουμε ότι

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t)$$

με τους πίνακες \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} και \mathbf{D} στην προκειμένη περίπτωση να ορίζονται ως

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \dots & \alpha_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1K} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{N1} & \beta_{N2} & \dots & \beta_{NK} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{L1} & \gamma_{L2} & \dots & \gamma_{LN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1K} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{L1} & \delta_{L2} & \dots & \delta_{LK} \end{bmatrix}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα κατασκευής δυναμικών εξισώσεων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να προσδιορίσετε τις δυναμικές εξισώσεις του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} - 5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} - 4x(t)$$

στηριζόμενοι στην κανονική και στη μη κανονική μορφή.

Η διαφορική εξίσωση χαρακτηρίζεται από τιμές τάξεων $N = 3$, $M = 1$ και τιμές παραμέτρων

$$\alpha_0 = 4 \quad \alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = -5 \quad \alpha_3 = 1 \quad \beta_0 = -4 \quad \beta_1 = 3 \quad \beta_2 = \beta_3 = 0$$

οπότε θα είναι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_3} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\alpha_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα κατασκευής δυναμικών εξισώσεων

ενώ οι πίνακες C και D υπολογίζονται ως

$$C = \left[\left(\beta_0 - \beta_3 \frac{\alpha_0}{\alpha_3} \right) \left(\beta_1 - \beta_3 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) \left(\beta_2 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right] = [-4 \ 3 \ 0] \quad \text{και} \quad D = [0]$$

Θα είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t) \\ &= \begin{bmatrix} q_2(t) \\ q_3(t) \\ -4q_1(t) - 2q_2(t) + 5q_3(t) + x(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = q_2(t) \quad \frac{dq_2(t)}{dt} = q_3(t) \quad \frac{dq_3(t)}{dt} = -4q_1(t) - 2q_2(t) + 5q_3(t) + x(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα κατασκευής δυναμικών εξισώσεων

ενώ η έξοδος του συστήματος υπολογίζεται ως

$$y(t) = [-4 \ 3 \ 0] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + [0]x(t) = -4q_1(t) + 3q_2(t)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις προκύπτουν από την **κανονική μορφή**, ενώ εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο για τη **μη κανονική μορφή** βρίσκουμε

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} x(t)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5q_1(t) + q_2(t) \\ -2q_1(t) + q_3(t) + 3x(t) \\ -4q_1(t) - 4x(t) \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = 5q_1(t) + q_2(t) \quad \frac{dq_2(t)}{dt} = -2q_1(t) + q_3(t) + 3x(t) \quad \frac{dq_3(t)}{dt} = -4q_1(t) - 4x(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Εκθετικές συναρτήσεις πίνακα - εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Θεωρώντας το σύνολο $R^{N \times N}$ των τετραγωνικών πινάκων τάξεως N , ορίζουμε την **πολυωνυμική συνάρτηση** $g(M)$ βαθμού n του τετραγωνικού πίνακα M ως μία απεικόνιση $g: R^{N \times N} \rightarrow R^{N \times N}$

$$g(M) = \alpha_0 M^n + \alpha_1 M^{n-1} + \alpha_2 M^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} M + \alpha_n I$$

όπου η υπ' αριθμόν i δύναμη του πίνακα M ($0 \leq i \leq n$) ορίζεται ως

$$M^i = \underbrace{M \cdot M \cdot M \cdot \dots \cdot M}_i \text{ φορές}$$

ενώ το σύμβολο I περιγράφει το μοναδιαίο πίνακα τάξεως N . Με εντελώς ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τη δυναμοσειρά του τετραγωνικού πίνακα M από τη σχέση της

$$g(M) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i M^i$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Εκθετικές συναρτήσεις πίνακα - εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

Η **εκθετική συνάρτηση πίνακα** e^{Mt} ορίζεται ως η δυναμοσειρά άπειρων όρων

$$\mathcal{J}(M) = e^{Mt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Mt)^k}{k!} = I + Mt + \frac{(Mt)^2}{2!} + \frac{(Mt)^3}{3!} + \dots + \frac{(Mt)^n}{n!} + \dots$$

με $e^0 = I$ και χαρακτηρίζεται από τις ίδιες ιδιότητες με τη συνήθη εκθετική συνάρτηση $e^{\alpha t}$ - θα είναι, λοιπόν,

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} \quad \text{και} \quad e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}$$

Εάν στην πρώτη εκ των παραπάνω σχέσεων θέσουμε $t_2 = -t_1$,

$$e^{A0} = e^0 = I = e^{At_1} e^{-At_1} \quad \text{και επομένως θα είναι} \quad (e^{At_1})^{-1} = e^{-At_1}$$

ενώ με εντελώς ανάλογο τρόπο, εάν στη δεύτερη σχέση θέσουμε $B = -A$ αυτή θα λάβει τη μορφή

$$(e^{At})(e^{-At}) = (e^{-At})(e^{At}) = e^0 = I$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Εκθετικές συναρτήσεις πίνακα - εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

Η χρονική παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης πίνακα υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{Mt}) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Mt)^k}{k!} \right) = \frac{d}{dt} \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Mt)^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1} M^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} M^k}{(k-1)!} = M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Mt)^{k-1}}{(k-1)!}\end{aligned}$$

Ορίζοντας το βωβό δείκτη $\ell = k - 1$, για $k = 1$ θα είναι $\ell = 0$ και η παραπάνω σχέση τελικά θα λάβει τη μορφή

$$\frac{d}{dt}(e^{Mt}) = M \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(Mt)^\ell}{\ell!} = M e^{Mt}$$

ιδιότητα που είναι εντελώς ανάλογη με την αντίστοιχη ιδιότητα της παραγωγίσης της συνηθισμένης εκθετικής συνάρτησης.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Επίλυση της καταστατικής εξίσωσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Για την επίλυση της καταστατικής εξίσωσης πολλαπλασιάζουμε αμφότερα τα μέλη της με την ποσότητα e^{-At} οπότε θα λάβουμε

$$e^{-At} \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = e^{-At} \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + e^{-At} \mathbf{B}\mathbf{x}(t) \quad \text{ή ισοδύναμα}$$

$$-e^{-At} \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + e^{-At} \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = e^{-At} \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την ιδιότητα

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{B} + \mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης γράφεται

$$-e^{-At} \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + e^{-At} \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{-At})\mathbf{q}(t) + e^{-At} \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[e^{-At} \mathbf{q}(t) \right]$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Επίλυση της καταστατικής εξίσωσης

Θα είναι λοιπόν

$$\frac{d}{dt} \left[e^{-At} \mathbf{q}(t) \right] = e^{-At} \mathbf{B} \mathbf{x}(t)$$

και με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$e^{-At} \mathbf{q}(t) \Big|_{t_0}^t = e^{-At} \mathbf{q}(t) - e^{-At_0} \mathbf{q}(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} \mathbf{B} \mathbf{x}(\tau) d\tau$$

Εάν μεταφέρουμε την ποσότητα $e^{-At_0} \mathbf{q}(t_0)$ στο δεξί μέλος της εξίσωσης και πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της με την ποσότητα e^{At} αυτή θα λάβει τη μορφή

$$\mathbf{q}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{q}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{x}(\tau) d\tau = e^{A(t-t_0)} \mathbf{q}(t_0) + e^{At} * \mathbf{B} \mathbf{x}(t)$$

όπου το σύμβολο * αναφέρεται στη **συνέλιξη πινάκων**. Αυτή η σχέση αποτελεί και τη λύση της καταστατικής εξίσωσης του συστήματος.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Επίλυση της καταστατικής εξίσωσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Από τους δύο όρους που εμφανίζονται στο δεξι μέλος της τελευταίας σχέσης, ο πρώτος είναι γνωστός ως η

συνιστώσα της μηδενικής εισόδου

αφού είναι ανεξάρτητη της εισόδου $x(t)$, ενώ ο δεύτερος όρος είναι γνωστός ως η

συνιστώσα μηδενικής κατάστασης

αφού είναι ανεξάρτητη από το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών του συστήματος $q(t_0)$.

Στην απλή περίπτωση κατά την οποία θεωρούμε ότι $t_0 = 0$ η τελευταία σχέση λαμβάνει την απλούστερη μορφή

$$q(t) = e^{At} q(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bx(\tau) d\tau = e^{At} q(0) + e^{At} * Bx(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης e^{At}

Ο υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης e^{At} στηρίζεται στη χρήση των ιδιοτιμών του πίνακα A οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση

$$Ax = \lambda x$$

που μπορεί να γραφεί και ως

$$(A - \lambda I)x = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2N} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda & \dots & \alpha_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \alpha_{N3} & \dots & \alpha_{NN} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = 0$$

Το παραπάνω αλγεβρικό σύστημα των εξισώσεων διαθέτει λύση αν και μόνο αν

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2N} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda & \dots & \alpha_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \alpha_{N3} & \dots & \alpha_{NN} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης e^{At}

Αυτή η πολωνυμική εξίσωση, μπορεί να λάβει τη μορφή

$$Q(\lambda) = \lambda^N + \alpha_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$$

και η λύση της οδηγεί στον υπολογισμό των N ιδιοτιμών του πίνακα \mathbf{A} .

Σύμφωνα με το θεώρημα των **Cayley-Hamilton**, η παραπάνω **χαρακτηριστική εξίσωση** ικανοποιείται και από τον ίδιο τον πίνακα \mathbf{A} , δηλαδή θα έχουμε

$$Q(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^N + \alpha_{N-1}\mathbf{A}^{N-1} + \dots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I} = 0$$

Υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές λ_i του πίνακα \mathbf{A} ως τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολωνύμου, αποδεικνύεται πως η οποιαδήποτε συνάρτηση $f(\mathbf{A})$ του τετραγωνικού πίνακα \mathbf{A} διαστάσεων $N \times N$ μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{N-1} \beta_i \mathbf{A}^i = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{A} + \dots + \beta_{N-1} \mathbf{A}^{N-1}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης e^{At}

με τους συντελεστές β_i ($i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$) να υπολογίζονται από τις εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{N-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_3^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \lambda_N^2 & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ f(\lambda_3) \\ \vdots \\ f(\lambda_N) \end{bmatrix}$$

Εάν στην παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις

$$f(\lambda_i) = e^{\lambda_i t} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

τότε σύμφωνα με την ιδιότητα της **φασματικής απεικόνισης**, η συνάρτηση $f(\mathbf{A})$ που θα υπολογίσουμε θα είναι η εκθετική συνάρτηση πίνακα e^{At} .

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης e^{At}

Ο δεύτερος τρόπος υπολογισμού της συνάρτησης e^{At} στηρίζεται στη **διαγωνιοποίηση** του πίνακα A (υποθέτοντας πως ο πίνακας διαγωνιοποιείται). Θεωρώντας ένα τετραγωνικό πίνακα A τάξεως N με διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα x_1, x_2, \dots, x_N ας ορίσουμε τον πίνακα

$$P = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & \dots & x_{N1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \dots & x_{N2} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & \dots & x_{N3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1N} & x_{2N} & x_{3N} & \dots & x_{NN} \end{bmatrix}$$

Στην περίπτωση αυτή, το γινόμενο των πινάκων AP γράφεται

$$AP = [\lambda_1 x_1 \ \lambda_2 x_2 \ \dots \ \lambda_N x_N] = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix} = P\Lambda$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης e^{At}

Στην παραπάνω εξίσωση, ο πίνακας Λ αποτελεί το διαγώνιο **πίνακα ιδιοτιμών**

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix}$$

Θα είναι λοιπόν $AP = P\Lambda$ από όπου προκύπτει αμέσως ότι $\Lambda = P^{-1}AP$ ενώ ο ίδιος ο πίνακας A μπορεί να γραφεί με τη μορφή $A = P\Lambda P^{-1}$.

Παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned} A^k &= (P\Lambda P^{-1})^k = \underbrace{(P\Lambda P^{-1}) \dots (P\Lambda P^{-1})}_{k \text{ φορές}} = P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P) \dots \Lambda P^{-1} \\ &= P(\Lambda I)(\Lambda I) \dots (\Lambda I)\Lambda P^{-1} = P \underbrace{\Lambda \Lambda \Lambda \dots \Lambda}_{k \text{ φορές}} P^{-1} = P\Lambda^k P^{-1} \end{aligned}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης e^{At}

η εξίσωση ορισμού της εκθετικής συνάρτησης θα λάβει τη μορφή

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^k \mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{P} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{\Lambda}^k}{k!} \right) \mathbf{P}^{-1}$$

Στηριζόμενοι στο γεγονός πως ο πίνακας $\mathbf{\Lambda}$ είναι διαγώνιος και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα σε σειρά της εκθετικής συνάρτησης $e^{\lambda_i t}$ τελικά βρίσκουμε

$$e^{At} = \mathbf{P} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{\Lambda}^k}{k!} \right) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_N t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

Τέλος ο πίνακας e^{At} μπορεί να υπολογιστεί και ως

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{E}_i = \lambda_1 \mathbf{E}_1 + \lambda_2 \mathbf{E}_2 + \dots + \lambda_N \mathbf{E}_N$$

όπου \mathbf{E}_i οι πίνακες φασματικής προβολής

$$\mathbf{E}_i = \left\{ \prod_{k=1}^M (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}) \right\} / \left\{ \prod_{k=1}^M (\lambda_i - \lambda_k) \right\}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Η κρουστική απόκριση στο χώρο κατάστασης

Αντικαθιστώντας την έκφραση

$$\mathbf{q}(t) = e^{At} \mathbf{q}(0) + e^{At} * \mathbf{B} \mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{q}(0) + e^{At} \mathbf{B} * \mathbf{x}(t)$$

στην εξίσωση εξόδου του συστήματος, αυτή γράφεται ως

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \left[\Phi(t) \mathbf{q}(0) + \Phi(t) \mathbf{B} * \mathbf{x}(t) \right] + \mathbf{D} \mathbf{x}(t)$$

όπου $\Phi(t) = e^{At}$. Ορίζοντας τον διαγώνιο πίνακα $\delta(t)$ τάξεως N με στοιχεία $\delta(t)_{ij} = \delta(t) \delta_{ij}$ όπου δ_{ij} το **δέλτα του Kronecker** και παρατηρώντας ότι

$$\delta(t) * \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \delta(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_K(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(t) * x_1(t) \\ \delta(t) * x_2(t) \\ \delta(t) * x_3(t) \\ \vdots \\ \delta(t) * x_K(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_K(t) \end{bmatrix} = \mathbf{x}(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Η κρουστική απόκριση στο χώρο κατάστασης

η παραπάνω σχέση θα λάβει τη μορφή

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathbf{C} \left[\Phi(t)\mathbf{q}(0) + \Phi(t)\mathbf{B} * \mathbf{x}(t) \right] + \mathbf{D}\delta(t) * \mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{q}(0) + \left[\mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) \right] * \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

Η απόκριση μηδενικής κατάστασης του συστήματος βρίσκεται θέτοντας $\mathbf{q}(0) = 0$. Θα είναι λοιπόν

$$y(t) = \left[\mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) \right] * \mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t) * \mathbf{x}(t)$$

Αλλά αυτή δεν είναι παρά η εξίσωση της συνέλιξης για συστήματα MIMO με **πίνακα κρουστικής απόκρισης**

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Ο πίνακας καταστατικής μετάβασης

Στη γενική περίπτωση η λύση της καταστατικής εξίσωσης είναι η

$$\mathbf{q}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{q}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}\mathbf{x}(\tau)d\tau$$

με τον πίνακα $\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ να είναι γνωστός ως

πίνακας καταστατικής μετάβασης

αφού επιτρέπει τον προσδιορισμό της χρονικής εξέλιξης του καταστατικού διανύσματος εάν είναι γνωστή η αρχική του τιμή $\mathbf{q}(t_0)$.

Αυτός ο ορισμός αφορά τα **συστήματα LTI**, ενώ για τα χρονικώς μεταβαλλόμενα συστήματα ο πίνακας ορίζεται ως

$$\Phi(t, \tau) = \mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(\tau)$$

όπου $\mathbf{U}(t)$ η λύση της εξίσωσης $\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t)$.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Μετασχηματισμοί ομοιότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η περιγραφή των συστημάτων στο χώρο κατάστασης μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας περισσότερα από ένα σύνολα **καταστατικών μεταβλητών** τα οποία σχετίζονται μεταξύ τους δια μέσου **γραμμικών συσχετίσεων**.

Θεωρώντας δύο καταστατικά διανύσματα

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)]^T \quad \text{και} \quad \mathbf{p}(t) = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_N(t)]^T$$

που περιγράφουν το ίδιο σύστημα στο χώρο κατάστασης, υπάρχει πίνακας \mathbf{W} τέτοιος ώστε

$$\begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1N} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2} & \dots & w_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix}$$

ή σε συνοπτική γραφή

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{W}\mathbf{q}(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Μετασχηματισμοί ομοιότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν οι N αυτές εξισώσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, θα είναι $\det(\mathbf{W}) \neq 0$ και θα υπάρχει ο **αντίστροφος πίνακας** \mathbf{W}^{-1} - θα είναι, λοιπόν, $\mathbf{q}(t) = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{p}(t)$.

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{W}^{-1}\dot{\mathbf{p}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{p}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) \quad \text{ή ισοδύναμα} \\ \dot{\mathbf{p}}(t) &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{p}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

όπου $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}$ και $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{W}\mathbf{B}$. Ομοίως θα είναι

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{p}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{p}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t)$$

όπου $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{W}^{-1}$ και επομένως οι δυναμικές εξισώσεις του συστήματος **διατηρούν την ίδια μορφή με την αρχική**.

Οι μετασχηματισμοί των καταστατικών διανυσμάτων με τον παραπάνω τρόπο, είναι γνωστοί ως

μετασχηματισμοί ομοιότητας

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα επίλυσης καταστατικής εξίσωσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να επιλύσετε την καταστατική εξίσωση $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}x(t)$ για τιμές παραμέτρων

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(t) = 0$$

Η λύση της καταστατικής εξίσωσης έχει τη μορφή

$$\mathbf{q}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{q}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}x(\tau) d\tau = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{q}(0)$$

αφού στην προκειμένη περίπτωση είναι $x(t) = 0$. Επομένως η λύση της άσκησης συνίσταται ουσιαστικά στην εύρεση της εκθετικής συνάρτησης $e^{\mathbf{A}t}$.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα επίλυσης καταστατικής εξίσωσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

και επομένως οι ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{A} είναι οι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -2$. Θα είναι λοιπόν

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \sum_{i=0}^1 \beta_i \mathbf{A}^i = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{A} = (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα επίλυσης καταστατικής εξίσωσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τέλος, αντικαθιστώντας τον πίνακα e^{At} στη λύση του συστήματος $q(t) = e^{At}q(0)$ καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6e^{-t} - 4e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$q_1(t) = 6e^{-t}u(t) - 4e^{-2t}u(t) \quad \text{και} \quad q_2(t) = -3e^{-t}u(t) + 4e^{-2t}u(t)$$

που είναι και το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ: Να υπολογίσετε τον πίνακα e^{At} με τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης και να επαληθεύσετε το παραπάνω αποτέλεσμα.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ένα συνεχές σύστημα ονομάζεται **ελέγξιμο** εάν

όλες οι καταστατικές του μεταβλητές $q_1(t)$, $q_2(t)$, \dots , $q_N(t)$ μπορούν να ελεγχθούν με τη βοήθεια των εισόδων του, έτσι ώστε να μπορούμε να κατευθύνουμε το σύστημα σε συγκεκριμένη κατάσταση, διαβιβάζοντας σε αυτό την κατάλληλη είσοδο.

Εάν αυτό είναι δυνατό για κάποιες ή για όλες τις καταστατικές του μεταβλητές, το σύστημα ονομάζεται **μερικώς ελέγξιμο** ή **μη ελέγξιμο** αντίστοιχα.

Ένα συνεχές σύστημα χαρακτηρίζεται ως **παρατηρήσιμο**, όταν

για κάθε δυνατή ακολουθία διανυσμάτων κατάστασης και εισόδου, μπορούμε να προσδιορίσουμε την τρέχουσα κατάστασή του μέσα σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, γνωρίζοντας μόνο την έξοδό του

Στην αντίθετη περίπτωση το σύστημα χαρακτηρίζεται ως **μη παρατηρήσιμο**.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Ελεγχιμότητα για συστήματα LTI

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ορισμός

Ελεγχιμότητα: ένα γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο σύστημα που περιγράφεται από τις δυναμικές εξισώσεις

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + Bx(t)$$

$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)$$

χαρακτηρίζεται ως πλήρως ελέγξιμο εντός ενός πεπερασμένου χρονικού διαστήματος $[t_0, t_1]$, εάν για κάθε αρχική κατάσταση $q_0 = q(t_0)$ και για κάθε κατάσταση q_1 , υπάρχει είσοδος $x(t)$ ($t \in [t_0, t_1]$) η οποία να προκαλεί τη μετάβαση του συστήματος στην κατάσταση $q(t_1) = q_1$.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Ελεξιμότητα για συστήματα LTI

Διατυπώνοντας την εξίσωση ορισμού της κατάστασης $\mathbf{q}(t_1)$,

$$\mathbf{q}(t_1) = e^{\mathbf{A}(t_1-t_0)} \mathbf{q}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{x}(\tau) d\tau$$

με τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \left(e^{\mathbf{A}(t_1-t_0)} \mathbf{q}(t_0) - \mathbf{q}(t_1) \right) + \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{x}(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}(t_1-t_0)} \mathbf{p}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{x}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{I} \mathbf{q}(t_0) - e^{\mathbf{A}(t_0-t_1)} \mathbf{q}(t_1)$, διαπιστώνουμε ότι

$$\boxed{\left[\mathbf{q}_0(t_0) \rightarrow \mathbf{q}_1(t_1) \right] \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\text{οι δύο μεταβάσεις}} \\ \xleftrightarrow{\text{είναι ισοδύναμες}} \end{array} \left[\mathbf{p}_0(t_0) \rightarrow \mathbf{0}(t_1) \right]}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Ελεγκσιμότητα για συστήματα LTI

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ορίζοντας το μέγεθος $\tilde{\mathbf{P}}(t_1, t_0) = e^{\mathbf{A}(t_1 - t_0)} \mathbf{p}(t_0)$, διαπιστώνουμε ότι

$$\tilde{\mathbf{P}}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1 - \tau)} \mathbf{B} \mathbf{x}(\tau) d\tau$$

και επειδή σύμφωνα με το θεώρημα **Cayley-Hamilton** θα έχουμε

$$e^{\mathbf{A}(t_1 - \tau)} = \sum_{i=0}^{N-1} \beta_i(t_1 - \tau) \mathbf{A}^i$$

η τελευταία σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \beta_i(t_1 - \tau) \mathbf{A}^i \right) \mathbf{B} \mathbf{x}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \left(\int_{t_0}^{t_1} \beta_i(t_1 - \tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Ελεγκσιμότητα για συστήματα LTI

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως

$$\tilde{\mathbf{P}}(t_0, t_1) = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_1} \beta_0(t_1 - \tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau \\ \int_{t_0}^{t_1} \beta_1(t_1 - \tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t_1} \beta_{N-1}(t_1 - \tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα ως $\tilde{\mathbf{P}}(t_0, t_1) = \mathbf{S}_c \cdot \mathbf{\Gamma}$ όπου

$$\mathbf{\Gamma} = [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_{N-1}]^T \text{ με } \gamma_i = \int_{t_0}^{t_1} \beta_i(t_1 - \tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau$$

για τιμές δείκτη $i = 1, 2, \dots, N - 1$.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Ελεγχιμότητα για συστήματα LTI

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στην τελευταία εξίσωση, η ποσότητα $\tilde{P}(t_0, t_1)$ είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων $N \times 1$, ο πίνακας

$$S_c = [B \ AB \ \dots \ A^{N-1}B]$$

που είναι γνωστός ως **πίνακας ελεγχιμότητας** έχει διαστάσεις $N \times NK$ - για σύστημα MIMO K εισόδων και N καταστατικών μεταβλητών - ενώ ο πίνακας Γ διαστάσεων $NK \times 1$ είναι συνάρτηση της εισόδου του συστήματος $\vec{x}(t)$. Σύμφωνα με ένα θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας ελέγχου

το σύστημα που περιγράφεται από την τελευταία εξίσωση είναι πλήρως ελέγξιμο, εάν ο πίνακας ελεγχιμότητας S_c έχει τιμή βαθμίδας ίση με N

ή σε μαθηματική γραφή,

$$\text{rank } S_c = N$$

όπου η **βαθμίδα** (ή βαθμός) ενός πίνακα εκφράζει το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παρατηρησιμότητα για συστήματα LTI

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ορισμός

Παρατηρησιμότητα: ένα γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο συνεχές σύστημα που περιγράφεται από τις δυναμικές εξισώσεις $\dot{q}(t) = Aq(t) + Bx(t)$ και $y(t) = Cq(t) + Dx(t)$ χαρακτηρίζεται ως πλήρως παρατηρήσιμο εντός ενός πεπερασμένου χρονικού διαστήματος $[t_0, t_1]$, εάν για κάθε χρονική στιγμή t_0 είναι δυνατός ο προσδιορισμός μιας αρχικής κατάστασης $q(t_0)$ γνωρίζοντας μόνο την είσοδο του συστήματος $x(t)$ και την αντίστοιχη έξοδο $y(t)$ για το εν λόγω χρονικό διάστημα.

Ένα σύστημα MIMO L εξόδων και N καταστατικών μεταβλητών είναι παρατηρήσιμο, όταν ο **πίνακας παρατηρησιμότητας**

$$S_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}$$

διαστάσεων $NL \times N$ έχει τιμή τάξης ίση με N , δηλαδή είναι $\text{rank } S_o = N$ έτσι ώστε να υφίσταται ο **αντίστροφος πίνακας** S_o^{-1} .

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παρατηρησιμότητα για συστήματα LTI

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Για την απόδειξη του θεωρήματος παρατηρούμε πως η παράμετρος $\mathbf{q}(t_0)$ εξαρτάται τόσο από την έξοδο $\mathbf{y}(t)$ όσο και από τις παραγώγους της $\mathbf{y}^{(i)}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N - 1$).

Παραγωγίζοντας $N - 1$ φορές την εξίσωση εξόδου και χρησιμοποιώντας διαδοχικά και την καταστατική εξίσωση θα λάβουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{q}(t) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}}(t) \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{y}^{(N-1)}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{q}(t) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-3}\dot{\mathbf{x}}(t) + \dots \\ &+ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}^{(N-3)}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{x}^{(N-2)}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}^{(N-1)}(t)\end{aligned}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παρατηρησιμότητα για συστήματα LTI

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

ή ισοδύναμα, υπό μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \ddot{\mathbf{y}}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(N-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{N-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{N-3}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CB} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(N-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο υπολογισμός του διανύσματος $\mathbf{q}(t)$ απαιτεί την αντιστροφή του πίνακα \mathbf{S}_o η οποία είναι δυνατή μόνο εάν είναι $\text{rank } \mathbf{S}_o = N$.

Εάν ο πίνακας \mathbf{A} ενός συστήματος LTI μπορεί να διαγωνιοποιηθεί ως $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{AU}$ αποδεικνύεται ότι:

- Το σύστημα είναι **πλήρως ελέγξιμο**, αν και μόνο αν ο πίνακας $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}$ δεν διαθέτει γραμμές μηδενικών στοιχείων.
- Το σύστημα είναι **πλήρως παρατηρήσιμο**, αν και μόνο αν ο πίνακας $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{CU}$ δεν διαθέτει στήλες μηδενικών στοιχείων.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα χαρακτηρισμού συστήματος

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να εξετάσετε εάν είναι πλήρως ελέγξιμο και παρατηρήσιμο το γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο σύστημα που περιγράφεται από τις δυναμικές εξισώσεις

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_A \mathbf{q}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \mathbf{x}(t) \quad \text{και} \quad \mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \mathbf{q}(t)$$

Υπολογίζοντας τα γινόμενα \mathbf{AB} και $\mathbf{A}^2\mathbf{B}$ διαπιστώνουμε ότι

$$\mathbf{S}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα χαρακτηρισμού συστήματος

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Υπολογίζοντας τη βαθμίδα του πίνακα ελεγχιμότητας διαπιστώνουμε ότι

$$\text{rank } \mathbf{S}_c = 2 < 3$$

και κατά συνέπεια το σύστημα **δεν είναι ελέγξιμο**.

Από την άλλη πλευρά, κατασκευάζοντας τους πίνακες \mathbf{CA} και \mathbf{CA}^2 ο πίνακας παρατηρησιμότητας υπολογίζεται ως

$$\mathbf{S}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στην προκειμένη περίπτωση προκύπτει ότι

$$\text{rank } \mathbf{S}_o = 1 < 3$$

και κατά συνέπεια το σύστημα **δεν είναι παρατηρήσιμο**.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυϊσμός ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Έστω σύστημα MIMO K εισόδων και L εξόδων με εξισώσεις

$$\dot{q}(t) = \mathbf{A}q(t) + \mathbf{B}x(t) \quad \text{και} \quad y(t) = \mathbf{C}q(t) + \mathbf{D}x(t)$$

Ορίζουμε το **δυϊκό** ως προς αυτό σύστημα, ως το σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\dot{p}(t) = \mathbf{A}^T p(t) + \mathbf{C}^T v(t) \quad \text{και}$$

$$w(t) = \mathbf{B}^T p(t) + \mathbf{D}^T v(t)$$

Συμβολίζοντας τα δύο συστήματα ως (1) και (2), οι πίνακες $S_c^{(1)}$ και $S_o^{(1)}$ για το σύστημα (1) έχουν τη μορφή

$$S_c^{(1)} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}] \quad \text{και} \quad S_o^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-1} \end{bmatrix}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυϊσμός ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας

ενώ οι αντίστοιχοι πίνακες για το σύστημα (2) ορίζονται ως

$$\mathbf{S}_c^{(2)} = [\mathbf{C} \ \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \ (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T \ \dots \ (\mathbf{A}^T)^{N-1} \mathbf{C}^T] = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-1} \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{S}_o^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^{N-1} \end{bmatrix} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}]^T$$

Θα είναι λοιπόν

$$\mathbf{S}_c^{(2)} = \left(\mathbf{S}_o^{(1)}\right)^T \quad \text{και} \quad \mathbf{S}_o^{(2)} = \left(\mathbf{S}_c^{(1)}\right)^T$$

και επομένως ανάμεσα στις έννοιες της ελεγχιμότητας και της παρατηρησιμότητας, υφίσταται ένα είδος **δυϊσμού**. Με άλλα λόγια,

το σύστημα που περιγράφεται από τον πίνακα \mathbf{M} είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν το σύστημα που περιγράφεται από τον ανάστροφο πίνακα \mathbf{M}^T είναι παρατηρήσιμο.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυϊσμός ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Διατυπώνοντας τις δυναμικές εξισώσεις των δύο συστημάτων ως

$$\begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \quad \text{και}$$
$$\begin{bmatrix} \dot{p}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

οι πίνακες \mathbf{M} και \mathbf{M}^T που χρησιμοποιούνται στην τελευταία πρόταση ορίζονται ως

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad \text{και}$$
$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^T$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Ελέγξιμη μορφή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Θεώρημα

Κάθε ελέγξιμο σύστημα LTI με πλήθος εισόδων $K = 1$ που περιγράφεται από την εξίσωση $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}x(t)$ μπορεί πάντοτε να μετασχηματιστεί στην **ελέγξιμη μορφή**

$$\dot{\mathbf{q}}_c(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{q}_c(t) + \tilde{\mathbf{B}}x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{q}_c(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x(t)$$

όπου α_i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) είναι οι συντελεστές του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου**

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^N + \alpha_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

ενώ ο μετασχηματισμός ομοιότητας που προκαλεί τη μετάβαση του συστήματος στην παραπάνω κανονική μορφή, είναι ο **πίνακας ελεγχιμότητας**

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{S}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}]$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Μορφή ελεγκτή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Θεώρημα

Κάθε ελέγξιμο σύστημα LTI με πλήθος εισόδων $K = 1$ που περιγράφεται από την εξίσωση $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}x(t)$ μπορεί πάντοτε να μετασχηματιστεί στη **μορφή του ελεγκτή** που ορίζεται ως

$$\dot{\mathbf{q}}_c(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{q}_c(t) + \tilde{\mathbf{B}}x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{q}_c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

[όπου α_i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) είναι οι συντελεστές του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου**], χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό ομοιότητας

$$\mathbf{T} = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} r_N & r_N \mathbf{A} & r_N \mathbf{A}^2 & \dots & r_N \mathbf{A}^{N-1} \end{array} \right]^T \right\}^{-1}$$

όπου r_N είναι η τελευταία γραμμή του πίνακα $(\mathbf{S}_c)^{-1}$.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παρατηρήσιμη μορφή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Θεώρημα

Κάθε παρατηρήσιμο σύστημα LTI με πλήθος εξόδων $L = 1$ που περιγράφεται από τις δυναμικές εξισώσεις $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t)$ και $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{q}(t)$ μπορεί πάντοτε να μετασχηματιστεί στην **παρατηρήσιμη μορφή**

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_o(t) &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{q}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{q}_o(t) \\ y(t) &= \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{q}_o(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_o(t)\end{aligned}$$

όπου α_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$) είναι οι συντελεστές του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου**, ενώ ο μετασχηματισμός ομοιότητας που προκαλεί τη μετάβαση του συστήματος στην παρατηρήσιμη μορφή, είναι ο αντίστροφος του **πίνακα παρατηρησιμότητας**

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{S}_o^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}\mathbf{A} & \mathbf{C}\mathbf{A}^2 & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-1} \end{bmatrix}^T \right\}^{-1}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Μορφή παρατηρητή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Θεώρημα

Κάθε παρατηρήσιμο σύστημα LTI με πλήθος εξόδων $L = 1$ που περιγράφεται από τις δυναμικές εξισώσεις $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t)$ και $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{q}(t)$ μπορεί πάντοτε να μετασχηματιστεί στη **μορφή του παρατηρητή**, που διατυπώνεται ως

$$\dot{\mathbf{q}}_o(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{q}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{q}_o(t)$$
$$y(t) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{q}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}_o(t)$$

όπου α_i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) είναι οι συντελεστές του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου**, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό ομοιότητας

$$\mathbf{T} = [\mathbf{c}_N \quad \mathbf{A}\mathbf{c}_N \quad \mathbf{A}^2\mathbf{c}_N \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{c}_N]$$

όπου \mathbf{c}_N είναι η τελευταία στήλη του πίνακα παρατηρησιμότητας \mathbf{S}_o .

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα ελεγχιμότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να μετασχηματίσετε στην ελέγξιμη μορφή και στη μορφή του ελεγκτή το σύστημα LTI που περιγράφεται από την καταστατική εξίσωση

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} x(t)$$

Το σύστημα είναι **ελέγξιμο**, αφού ο **πίνακας ελεγχιμότητας**

$$\mathbf{S}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}^3\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

έχει τιμή τάξης $R = 4 = N$: επομένως είναι δυνατός ο μετασχηματισμός του στις δύο παραπάνω μορφές, με τον **πίνακα μετασχηματισμού** να είναι ο ίδιος ο πίνακας \mathbf{S}_c . Είναι

$$\mathbf{S}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 5/3 & 0 & 1/3 \\ 5/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & -5/3 \\ -1/3 & 0 & -5/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα ελεγχιμότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση ορισμού του πίνακα $\tilde{\mathbf{A}}$ βρίσκουμε ότι

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ενώ, ο πίνακας $\tilde{\mathbf{B}}$ της νέας αναπαράστασης υπολογίζεται ως

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{S}_c^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 5/3 & 0 & 1/3 \\ 5/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & -5/3 \\ -1/3 & 0 & -5/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως το θεωρούμενο σύστημα εκπεφρασμένο στην *ελέγξιμη μορφή*, περιγράφεται από την καταστατική εξίσωση

$$\dot{\mathbf{q}}_c(t) = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{q}_c(t) + \tilde{\mathbf{B}} x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_c(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x(t)$$

με τα διανύσματα $\mathbf{q}(t)$ και $\mathbf{q}_c(t)$ να σχετίζονται δια μέσου του μετασχηματισμού

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{S}_c \mathbf{q}_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_c(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα ελεγχιμότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η αναπαράσταση του συστήματος **στη μορφή του ελεγκτή**, απαιτεί τον υπολογισμό του μετασχηματισμού T . Παρατηρώντας ότι

$$r_4 = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & -5/3 & 0 \end{bmatrix}$$

θα έχουμε

$$r_4 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 0 & -5/3 \end{bmatrix}, \quad r_4 \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad r_4 \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Επομένως, οι πίνακες T^{-1} και T θα έχουν τη μορφή

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} r_4 \\ r_4 \mathbf{A} \\ r_4 \mathbf{A}^2 \\ r_4 \mathbf{A}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & -5/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & -5/3 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad T = \begin{bmatrix} r_4 \\ r_4 \mathbf{A} \\ r_4 \mathbf{A}^2 \\ r_4 \mathbf{A}^3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

και με αντικατάσταση καταλήγουμε στους ζητούμενους πίνακες

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα παρατηρησιμότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Έστω το γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο σύστημα που περιγράφεται από τις δυναμικές εξισώσεις

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t)$$

Να εξετάσετε εάν είναι παρατηρήσιμο ή όχι και εάν είναι να το μετασχηματίσετε στην παρατηρήσιμη μορφή και στην κανονική μορφή του παρατηρητή.

Η τάξη του πίνακα \mathbf{A} του συστήματος είναι $N = 4$. Διαπιστώνοντας ότι

$$\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CA}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CA}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας παρατηρησιμότητας του συστήματος θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{S}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα παρατηρησιμότητας

Αποδεικνύεται ότι $\text{rank}(\mathbf{S}_o) = 4$ και επομένως το σύστημα είναι παρατηρήσιμο. Ξεκινώντας από την **παρατηρήσιμη μορφή**, ο ζητούμενος μετασχηματισμός \mathbf{T} είναι ο **αντίστροφος του πίνακα παρατηρησιμότητας**:

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως οι πίνακες $\tilde{\mathbf{A}}$ και $\tilde{\mathbf{C}}$ υπολογίζονται ως

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}_o \mathbf{A} \mathbf{S}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{S}_o^{-1} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

οδηγώντας στην παρατηρήσιμη μορφή

$$\dot{\mathbf{q}}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_o(t) \quad \text{και} \quad \mathbf{y}(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{q}_o(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Παράδειγμα παρατηρησιμότητας

Για την κατασκευή της **μορφής του παρατηρητή**, χρειαζόμαστε τις στήλες c_4 , $A c_4$, $A^2 c_4$ και $A^3 c_4$ που υπολογίζονται ως

$$c_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A c_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 c_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A^3 c_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως ο μετασχηματισμός T και ο αντίστροφός του T^{-1} είναι οι

$$T = [c_N \quad A c_N \quad A^2 c_N \quad A^3 c_N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

οδηγώντας στους πίνακες

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \tilde{C} = C T = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Κατά συνέπεια, η **μορφή του παρατηρητή** του συστήματος είναι η

$$\dot{q}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} q_o(t) \quad \text{και} \quad y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] q_o(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Η ευστάθεια στο χώρο κατάστασης

Η μελέτη της ευστάθειας στο χώρο κατάστασης στηρίζεται στη θεωρία του **Lyapunov** σύμφωνα με την οποία η ευστάθεια του $\dot{q}(t) = \mathbf{A}q(t) + \mathbf{B}x(t)$ προσδιορίζεται πλήρως από τη μελέτη της ομογενούς εξίσωσης $\dot{q}(t) = \mathbf{A}q(t)$, αφού ο πίνακας συστήματος \mathbf{A} περιέχει όλες τις αναγκαίες πληροφορίες όσον αφορά το χαρακτηρισμό της ευστάθειας του συστήματος.

Ορισμός

Ένα σύστημα LTI με ομογενή καταστατική εξίσωση $\dot{q}(t) = \mathbf{A}q(t)$ ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθές**, τότε και μόνο τότε όταν η λύση της εν λόγω εξίσωσης με αρχική συνθήκη $q(t_0) = q_0$ τείνει στο μηδέν για κάθε αρχική συνθήκη q_0 , δηλαδή όταν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0, \quad \forall q(t_0)$$

Κριτήριο ευστάθειας κατά Lyapunov: ένα συνεχές σύστημα LTI θεωρείται **ασυμπτωτικά ευσταθές**, όταν όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα \mathbf{A}

$$f(\lambda) = \alpha_N \lambda^N + \alpha_{N-1} \lambda^{N-1} + \dots + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$$

- δηλαδή με άλλα λόγια οι ιδιοτιμές του - έχουν **αρνητικά πραγματικά μέρη**.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Η ευστάθεια στο χώρο κατάστασης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Πράγματι, αφού η λύση της ομογενούς εξίσωσης $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t)$ είναι η $\mathbf{q}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}(t_0)$, η απαίτηση να ισχύει η ιδιότητα $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}$ στο όριο $t \rightarrow \infty$ για κάθε αρχική συνθήκη $\mathbf{q}(t_0)$ επαναδιατυπώνεται ως

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{O}$$

όπου \mathbf{O} ο μηδενικός πίνακας των κατάλληλων διαστάσεων. Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_N t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

η εκθετική συνάρτηση τείνει στον μηδενικό πίνακα στο όριο $t \rightarrow \infty$, μόνο όταν **όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{A} έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη**, δηλαδή όταν $\Re\{\lambda_i\} < 0$ ($1 \leq i \leq N$).