Συμπίπτει η ευρεθείσα μέση τιμή της επιτάχυνσης με την προκύπτουσα από την κλίση της ευθείας $\upsilon = f(t)$; Πόση είναι η σχετική % διαφορά τους;

9. Ανάγετε τη γραφική παράσταση $x = f(t)$ σε γραμμική, υποθέτοντας σχέση της μορφής: $x = kt^{\nu}$. Βρείτε τους συντελεστές ν και k. Πως συνδέεται ο συντελεστής k με την επιτάχυνση a; Βρείτε την ποσοτική σχέση της θέσης σε συνάρτηση με το χρόνο για την κίνηση αυτή.

10. Εκθέστε τα συμπεράσματά σας.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Ορίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός κινητού.

2. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ μέσης και στιγμιαίας ταχύτητας;

3. Ποιες εξισώσεις περιγράφουν την ταχύτητα και τη θέση ενός κινητού, όταν η επιτάχυνσή του είναι σταθερή; Ποια μορφή έχουν τα διαγράμματα της ταχύτητας και της θέσης σε συνάρτηση με το χρόνο;

4. Πώς καταγράφεται το στιγμιότυπο της θέσης του κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο;

5. Πώς υπολογίζεται η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού από τα δεδομένα της θέσης και του χρόνου;

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

2-1 *Πώς ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα ενός σωματίου; Τι εκφράζει; Ποια είναι η κατεύθυνσή της και το μέτρο της; Ποια είναι η βασική μονάδα μέτρησής της;*

Η στιγμιαία ταχύτητα, ή απλώς ταχύτητα, ενός σωματίου με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ως προς την αρχή ενός συστήματος αναφοράς ορίζεται ως η παράγωγος του διανύσματος θέσης του ως προς το χρόνο

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (2.4)$$

Η ταχύτητα ενός σωματίου εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της θέσης του.
Η κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας είναι εφαπτόμενη της τροχιάς και προς τη φορά της κίνησης.
Το μέτρο της ταχύτητας εκφράζεται ως

$$\upsilon = \frac{ds}{dt}$$

όπου s το διανυόμενο διάστημα.
Το μέτρο της ταχύτητας μπορεί να εκφρασθεί σε συνάρτηση με τις συνιστώσες της ως προς ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ως

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} \qquad (2.6)$$

Η μονάδα της ταχύτητας στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI) είναι το m/s.

2-2 *Πώς ορίζεται η επιτάχυνση ενός σωματίου; Τι εκφράζει; Ποια είναι η κατεύθυνσή της και το μέτρο της; Ποια είναι η βασική μονάδα μέτρησής της;*

Η επιτάχυνση ενός σωματίου ορίζεται ως η παράγωγος της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (2.7)$$

Η επιτάχυνση ενός σωματίου εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητάς του.
Το διάνυσμα της επιτάχυνσης κατευθύνεται προς το κοίλο μέρος της τροχιάς του σωματίου.
Το διάνυσμα της επιτάχυνσης μπορεί να εκφρασθεί σε συνάρτηση με τις συνιστώσες του στους άξονες ενός τρισορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων, ως

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (2.8)$$

οπότε το μέτρο της είναι

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (2.9)$$

Μονάδα επιτάχυνσης στο διεθνές σύστημα μονάδων είναι το m/s^2.

2-3 *Πώς ορίζεται η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση ενός σωματίου; Ποιες είναι οι μονάδες τους;*

Η γωνιακή ταχύτητα ενός σωματίου που κινείται σε κυκλική τροχιά ορίζεται ως η χρονική παράγωγος της γωνίας θέσης θ:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

ενώ η γωνιακή επιτάχυνση ορίζεται ως η χρονική παράγωγος της γωνιακής ταχύτητας ω:

$$a = \frac{d\omega}{dt}$$

Η μονάδα της γωνιακής ταχύτητας είναι το rad/s, ενώ της γωνιακής επιτάχυνσης το rad/s^2.

2-4 *Για την ομαλή κυκλική κίνηση ενός σωματίου ποια είναι η κατεύθυνση και το μέτρο της επιτάχυνσής του;*
Η επιτάχυνση ενός σωματίου, που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, κατευθύνεται προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς (κεντρομόλος επιτάχυνση).
Το μέτρο της δίνεται από την έκφραση:

$$a = \omega^2 r = \frac{\upsilon^2}{r}$$

όπου r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

2-5 *Ένα σωμάτιο κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή επιτάχυνση. Ποιες είναι οι εξισώσεις της ταχύτητας και της θέσης σε συνάρτηση με το χρόνο; Ποια είναι η εξίσωση της ταχύτητας σε συνάρτηση με τη θέση;*
Αν υ_o είναι η αρχική ταχύτητα και x_o είναι η αρχική θέση, από τους ορισμούς της επιτάχυνσης και της ταχύτητας με ολοκλήρωση προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon = \upsilon_o + at \qquad (2.18)$$

$$x = x_o + \upsilon_o t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (2.19)$$

Απαλείφοντας το χρόνο στις προηγούμενες εξισώσεις προκύπτει:

$$\upsilon^2 = \upsilon_o^2 + 2a(x - x_o) \qquad (2.20)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2-1 Η θέση ενός κινητού ορίζεται από τις εξισώσεις: $x = 2t$, $y = -2t^2+1$, $z = t^2-t$. Προσδιορίστε: (α) την ταχύτητά του σε συνάρτηση με το χρόνο (διάνυσμα και μέτρο), (β) την επιτάχυνσή του $\vec{a}$ σε συνάρτηση με το χρόνο (διάνυσμα και μέτρο).

Λύση

α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας του κινητού είναι:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(-2t^2+1)}{dt} = -4t$$

$$\upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d(t^2-t)}{dt} = 2t-1$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας αυτού είναι

$$\vec{\upsilon} = 2\,\vec{i} - 4t\vec{j} + (2t-1)\vec{k}$$

Το μέτρο της ταχύτητάς του είναι

$$\upsilon = \sqrt{2^2 + (-4t)^2 + (2t-1)^2}$$

$$= \sqrt{20t^2 - 4t + 5}$$

β) Η επιτάχυνση του κινητού είναι

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[2\vec{i} - 4t\vec{j} + (2t-1)\vec{k}\right] = -4\vec{j} + 2\vec{k}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσής του είναι

$$\vec{a} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

2-2 Ένα κινητό κινείται σε ευθεία γραμμή. Η επιτάχυνσή του a και η ταχύτητά του υ συνδέονται με τη σχέση $a = k\sqrt{\upsilon}$, όπου k μια θετική σταθερά. Να εκφραστούν συναρτήσει του χρόνου τα: υ, a και x, όπου x η θέση του κινητού. Για $t = 0$ είναι: $\upsilon_o = 0$ και $x_o = 0$.

Λύση

Από τον ορισμό της επιτάχυνσης έχουμε διαδοχικά

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$k\sqrt{\upsilon} = \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$d\upsilon = k\sqrt{\upsilon}\, dt$$

$$\frac{d\upsilon}{\sqrt{\upsilon}} = kdt$$

$$\int_o^{\upsilon} \upsilon^{-1/2} d\upsilon = \int_o^t k\, dt$$

$$\left.\frac{\upsilon^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_o^{\upsilon} = kt\Big|_o^t$$

$$2\sqrt{\upsilon} = kt$$

$$\upsilon = \frac{k^2 t^2}{4}$$

Η επιτάχυνση a είναι

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{k^2 t^2}{4} = \frac{k^2 t}{2}$$

Από τον ορισμό της ταχύτητας έχουμε για τη θέση x

$$\upsilon = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = \upsilon dt$$

$$dx = \frac{k^2 t^2}{4} dt$$

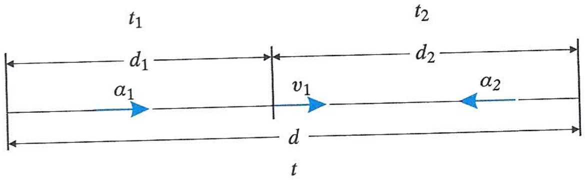
$$\int_o^x dx = \int_o^x \frac{k^2 t^2}{4} dt$$

$$x = \frac{k^2 t^3}{12}$$

2-3 Να βρεθεί ο ελάχιστος δυνατός χρόνος, που χρειάζεται ένα αυτοκίνητο, για να διανύσει μια μικρή απόσταση d, αν ξεκινήσει από το ένα άκρο της και σταματήσει στο άλλο. Δεχόμαστε ότι η μέγιστη δυνατή επιτάχυνση είναι a_1 και η μέγιστη δυνατή επιβράδυνση a_2.

Λύση

Οι εξισώσεις των ταχυτήτων του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με το χρόνο για τα δυο χρονικά διαστήματα είναι



Σχήμα 2-8

$$\upsilon_1 = a_1 t_1$$
$$0 = \upsilon_1 - a_2 t_2$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με a_2 και τη δεύτερη με a_1 και προσθέτουμε κατά μέλη

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_1 a_2 &= a_1 a_2 t_1 \\ \upsilon_1 a_1 &= a_1 a_2 t_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\upsilon_1 (a_1 + a_2) = a_1 a_2 (t_1 + t_2) \qquad (1)$$

$$\upsilon_1 = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} t$$

Οι ανεξάρτητες του χρόνου εξισώσεις των ταχυτήτων του αυτοκινήτου για τα δυο διαστήματα είναι

$$\upsilon_1^2 = 2a_1 d_1$$
$$0 = \upsilon_1^2 - 2a_2 d_2$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με το a_2 και τη δεύτερη με το a_1 και προσθέτουμε κατά μέλη

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_1^2 a_2 &= 2a_1 a_2 d_1 \\ \upsilon_1^2 a_1 &= 2a_1 a_2 d_2 \end{aligned}\right\}$$

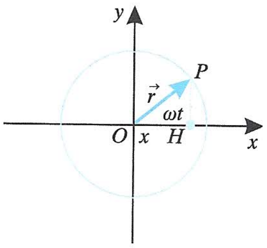
$$\upsilon_1^2 (a_1 + a_2) = 2a_1 a_2 (d_1 + d_2) \qquad (2)$$

$$\upsilon_1^2 = 2\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} d$$

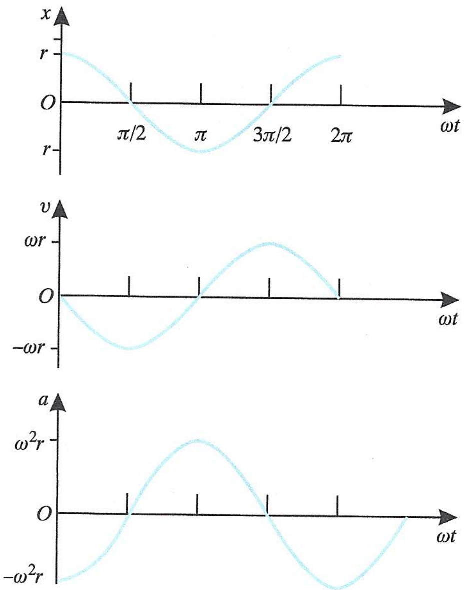
Από τις Εξ. (1) και (2) μετά την απαλοιφή του υ_1 προκύπτει ότι ο ελάχιστος δυνατός χρόνος που χρειάζεται το αυτοκίνητο για να διανύσει την απόσταση d είναι

$$t = \sqrt{\frac{2(a_1 + a_2)d}{a_1 a_2}}$$

2-4 Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, (Σχ. 2-9α).



Σχήμα 2-9α



Σχήμα 2-9β

Περιγράψτε την κίνηση της προβολής του στον οριζόντιο άξονα, που περνάει από το κέντρο του κύκλου. Αποδώστε γραφικά τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

Η θέση της προβολής του σημείου P στον άξονα των x περιγράφεται από την εξίσωση

$$x = r\cos\omega t \qquad (1)$$

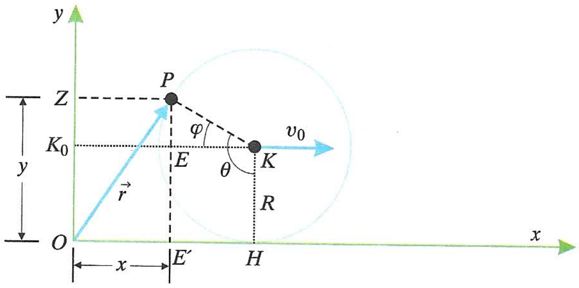
Η ταχύτητά της είναι

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -r\omega\sin\omega t \qquad (2)$$

Η επιτάχυνση της προβολής είναι

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x \qquad (3)$$

Η κίνηση της προβολής του σημείου P είναι απλή αρμονική ταλάντωση. Τα διαγράμματα της θέσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της προβολής παριστάνονται στο Σχ. 2-9β.



Σχήμα 2-10

2-5 Ένας τροχός ακτίνας R κυλάει χωρίς να ολισθαίνει πάνω στον άξονα Ox με σταθερή ταχύτητα υ_o (ταχύτητα του κέντρου του). Περιγράψτε την κίνηση ενός σημείου της περιφέρειάς του, που ξεκινάει από την αρχή O (τροχιά, ταχύτητα, επιτάχυνση).

Λύση

Από το Σχ. 2-10 προκύπτει

$$\left.\begin{aligned} OH &= \widehat{HP} = R\theta \\ OH &= K_oK = \upsilon_o t \end{aligned}\right\} \quad \text{οπότε}$$

$$R\theta = \upsilon_o t$$

$$\theta = \frac{\upsilon_o t}{R} \ (\text{rad})$$

Οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης του σημείου P μπορούν εκφρασθούν ως ακολούθως

$$\begin{aligned} x &= OH - EK \\ &= \upsilon_o t - R\cos\varphi \\ &= \upsilon_o t - R\cos(\theta - 90^\circ) \\ &= \upsilon_o t - R\sin\theta \\ &= \upsilon_o t - R\sin\frac{\upsilon_o t}{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= EE' + PE \\ &= R + R\sin\varphi \\ &= R + R\sin(\theta - 90^\circ) \\ &= R - R\cos\theta \\ &= R - R\cos\frac{\upsilon_o t}{R} \end{aligned}$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας του σημείου P είναι

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_o\left(1 - \cos\frac{v_o t}{R}\right)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_o \sin\frac{v_o t}{R}$$

Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης αυτού είναι

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{v_o^2}{R}\sin\frac{v_o t}{R}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{v_o^2}{R}\cos\frac{v_o t}{R}$$

Η τροχιά που διαγράφει το σημείο P της περιφέρειας του τροχού είναι μια κυκλοειδής καμπύλη. Το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_o\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{v_o t}{R}\right)} = 2v_o \sin\frac{v_o t}{2R}$$

με $v_{max} = 2v_o$ για $t = \pi R/v_o$.

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου P είναι

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v_o^2}{R}$$

η οποία είναι σταθερή.

2-6 Σε καθοδικό σωλήνα δέσμη ηλεκτρονίων εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα 2 x 10^7 m/s στην περιοχή δυο οριζόντιων πλακών μήκους 2 cm. Ένα ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των πλακών εξασκεί στα ηλεκτρόνια σταθερή προς τα κάτω επιτάχυνση 2 x 10^{15} m/s^2. Βρείτε (α) την κατακόρυφη μετατόπιση της δέσμης και (β) τις συνιστώσες της ταχύτητας, όταν τα ηλεκτρόνια της δέσμης εξέρχονται από τις πλάκες.

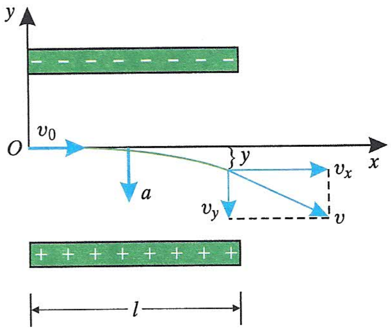
Λύση

(α) Οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης του κάθε ηλεκτρονίου της δέσμης στο πέρας των πλακών είναι

$$l = v_o t \qquad (1)$$

$$y = \frac{1}{2}at^2 \qquad (2)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι η κατακόρυφη εκτροπή της δέσμης των ηλεκτρονίων



Σχήμα 2-11

κατά την έξοδό τους από τις πλάκες είναι

$$y = \frac{1}{2}a\frac{l^2}{v_o^2} = \frac{1}{2}(2\times 10^{15}\ \text{m/s}^2)\frac{\left(2\times 10^{-2}\ \text{m}\right)^2}{\left(2\times 10^{7}\ \text{m/s}\right)^2} = 10^{-3}\ \text{m}$$

(β) Οι συνιστώσες της ταχύτητας των ηλεκτρονίων κατά την έξοδό τους από τις πλάκες είναι

$$v_x = v_o = 2 \times 10^7\ \text{m/s}$$

$$v_y = at = a\frac{l}{v_o} = (2\times 10^{15}\ \text{m/s}^2)\frac{2\times 10^{-2}\ \text{m}}{2\times 10^{7}\ \text{m/s}} = 2\times 10^{6}\ \text{m/s}$$

2-7 Η επιτάχυνση ενός σωματίου έχει συντεταγμένες σε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς $a_x = 5t$ και $a_y = 10t^2$. Βρείτε την εξίσωση της θέσης του (διάνυσμα θέσης).

Λύση

Από τους ορισμούς της επιτάχυνσης και της ταχύτητας κατόπιν διαδοχικών ολοκληρώσεων έχουμε

$$dv_x = a_x dt$$

$$dv_x = 5t dt$$

$$\int_{v_{ox}}^{v_x} dv_x = 5\int_0^t t dt$$

$$v_x - v_{ox} = 5\frac{t^2}{2}$$

$$v_x = v_{ox} + 5\frac{t^2}{2}$$

$$dv_y = a_y dt$$

$$dv_y = 10t^2 dt$$

$$\int_{v_{oy}}^{v_y} dv_y = 10\int_0^t t^2 dt$$

$$v_y - v_{oy} = 10\frac{t^3}{3}$$

$$v_y = v_{oy} + 10\frac{t^3}{3}$$

$$dx = v_x dt$$

$$dx = (v_{ox} + \frac{5}{2}t^2)dt$$

$$\int_{x_o}^{x} dx = v_{ox}\int_0^t dt + \frac{5}{2}\int_0^t t^2 dt$$

$$x = x_o + v_{ox}t + \frac{5}{6}t^3$$

$$dy = v_y dt$$

$$dy = (v_{oy} + \frac{10}{3}t^3)dt$$

$$\int_{y_o}^{y} dy = v_{oy}\int_0^t dt + \frac{10}{3}\int_0^t t^3 dt$$

$$y - y_o = v_{oy}t + \frac{10}{3}\frac{t^4}{4}$$

$$y = y_o + v_{oy}t + \frac{5}{6}t^4$$

2-8 Η επιτάχυνση ενός σώματος σε απόσταση r από το κέντρο της Γης ακολουθεί το νόμο $a = -k/r^2$, όπου k μια σταθερά που μπορεί να προσδιοριστεί. Υπολογίστε:

(α) την ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί ένα σώμα από την επιφάνεια της Γης, ώστε να μην επιστρέψει σ' αυτή (ταχύτητα διαφυγής).

(β) Το χρόνο που θα χρειαστεί το σώμα για να διανύσει απόσταση ίση με την ακτίνα της Γης.

Η ακτίνα της Γης είναι $R = 6{,}38 \times 10^6$ m.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι $g_o = 9{,}81 \text{m/s}^2$.

Λύση

(α) Από το νόμο της επιτάχυνσης προκύπτει ότι για την επιφάνεια της Γης είναι

$$g_o = \frac{k}{R^2} \Rightarrow k = g_o R^2 \qquad (1)$$

Από τον ορισμό της επιτάχυνσης και τον δοθέντα νόμο προκύπτει

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (2)$$

$$a = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$a = v\frac{dv}{dr} \qquad (2)$$

$$v dv = \frac{k}{r^2}dr$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$\int_{v_o}^{o} v\, dv = -k\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{v^2}{2}\Bigg|_{v_o}^{0} = -k\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^\infty \qquad (3)$$

$$\frac{v_o^2}{2} = \frac{k}{R}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(3) τη σταθερά k από την Εξ. (1) προκύπτει ότι η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια της Γης είναι

$$v_o^2 = \frac{2g_o R^2}{R}$$

$$v_o = \sqrt{2g_o R}$$

$$v_o = \sqrt{2(9{,}81 \text{ m/s}^2)(6{,}38 \times 10^6 \text{ m})} = 11188 \text{ m/s}$$

(β) Ολοκληρώνουμε την Εξ.(2) ως ακολούθως

$$\int_{v_o}^{v} v dv = -k\int_R^r \frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_o^2}{2} = -k\left[-\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right] \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(4) το v_o από την Εξ.(3) και το k από την Εξ. (1) προκύπτει

$$v^2 = \frac{2g_o R^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{2g_o R^2}{r}} \qquad (5)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της ταχύτητας η Εξ.(5) γίνεται

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2g_o R^2}{r}}$$

$$\sqrt{r}\,dr = \sqrt{2g_oR^2}\,dt \quad (6)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση προκύπτει

$$\int_R^{2R} r^{1/2}dr = \sqrt{2g_oR^2}\int_0^t dt$$

$$\left.\frac{2r^{3/2}}{3}\right|_R^{2R} = \sqrt{2g_oR^2}\,t$$

$$\frac{2\left[(2R)^{3/2} - R^{3/2}\right]}{3} = \sqrt{2g_oR^2}\,t$$

$$t = \frac{2R^{3/2}(2\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{2g_oR^2}}$$

$$t = \frac{\sqrt{2R}(2\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{g_o}}$$

$$t = \frac{\sqrt{2(6{,}38\times 10^6\text{ m})}\,(2\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{9{,}81\text{ m/s}^2}} = 695\text{ s}$$

2-9 Το διάνυσμα θέσης ενός κινούμενου σωματίου δίνεται από την έκφραση $\vec{r} = a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j}$, όπου a και b είναι άνισες σταθερές. (α) Βρείτε τις εκφράσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σωματίου (διάνυσμα και μέτρο) (β) Βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του σωματίου.

Λύση

Η ταχύτητα του σωματίου είναι σύμφωνα με τον ορισμό της

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j})$$
$$= -a\omega\sin\omega t\vec{i} + b\omega\cos\omega t\vec{j}) \quad (1)$$

Το μέτρο της ταχύτητας του σωματίου είναι

$$v = \sqrt{(-a\omega\sin\omega t)^2 + (b\omega\cos\omega t)^2}$$
$$= \omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t} \quad (2)$$

Η επιτάχυνση του σωματίου είναι

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(-a\omega\sin\omega t\vec{i} + b\omega\cos\omega t\vec{j})$$
$$= -a\omega^2\cos\omega t\vec{i} - b\omega^2\sin\omega t\vec{j}) = -\omega^2\vec{r} \quad (3)$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι

$$a = \sqrt{(-a\omega^2\cos\omega t)^2 + (-b\omega^2\sin\omega t)^2}$$
$$= \omega^2\sqrt{a^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t} \quad (4)$$
$$= \omega^2 r$$

2-10 Ο ρότορας μιας γεννήτριας περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα 1000 στροφών/min και σταματά σε χρόνο 3 min από τη διακοπή της παροχής. Προσδιορίστε: (α) την εξίσωση της κίνησης $\theta = f(t)$, (β) τον αριθμό των στροφών μέχρις ότου σταματήσει.

Λύση

(α) Η αρχική γωνιακή ταχύτητα του ρότορα είναι

$$\omega_o = 1000\text{ στροφές/min} = \frac{1000\cdot 2\pi}{60}\text{ rad/s} \quad (1)$$

Από τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης

$$a = \frac{d\omega}{dt}$$

με ολοκλήρωση από $t = 0$ έως $t = t$, όπου $t = 3$ min $= 180$ s, έχουμε

$$d\omega = a\,dt$$
$$\int_{\omega_o}^0 d\omega = \int_o^t a\,dt$$
$$-\omega_o = at$$
$$a = -\frac{\omega_o}{t}$$
$$a = -\frac{200\,\pi}{6\cdot 180}\text{ rad/s}^2 \quad (2)$$

Η εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο βρίσκεται από την εξίσωση ορισμού της γωνιακής επιτάχυνσης με μια ολοκλήρωση, όπως προηγουμένως, αλλά για την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t

$$\int_{\omega_o}^{\omega} d\omega = \int_0^t a\,dt$$
$$\omega - \omega_o = at$$
$$\omega = \omega_o + at \quad (3)$$

Από τον ορισμό της γωνιακής ταχύτητας και με μια ακόμη ολοκλήρωση έχουμε

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$d\theta = \omega dt$$

$$\int_0^\theta d\theta = \int_0^t (\omega_o + at)dt$$

$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (4)$$

(β) Αν N είναι ο αριθμός των στροφών που εκτελεί ο ρότορας μέχρις ότου σταματήσει, τότε η γωνία θ σε rad μπορεί να εκφρασθεί με τη σχέση

$$\theta = 2\pi N \qquad (5)$$

Από τις Εξ. (4) και (5) προκύπτει

$$N = \frac{1}{2\pi}\left(\omega_o t - \frac{1}{2}at^2\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi \cdot 100 \cdot 180}{6} - \frac{1}{2}\frac{200\pi}{6 \cdot 180}180^2\right)$$

$$= 1500 \text{ στροφές}$$

ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2-11 Προσδιορίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός σωματίου, που η θέση του καθορίζεται από τα παρακάτω διανύσματα:

(α) $\vec{r} = 3t^2 \ \vec{i} + 5t\vec{j} + 9\vec{k}$

(β) $\vec{r} = 5 \sin 10t \ \vec{i} + 8t\vec{j} + e^{3t}\vec{k}$

Απάντηση: (α) $\vec{v} = 6t \ \vec{i} + 5\vec{j}, \vec{a} = 6\vec{i}$

(β) $\vec{v} = 50 \cos 10t \ \vec{i} + 8\vec{j} + 3e^{3t}\vec{k}$,

$\vec{a} = -500 \cos 10t \ \vec{i} + 9e^{3t}\vec{k}$

2-12 Οι συντεταγμένες x και y του σφαιριδίου ενός απλού εκκρεμούς, που ταλαντώνεται σε δυο διαστάσεις, δίνονται από τις εξισώσεις:

$$x(t) = a \cos \omega t$$

$$y(t) = b \sin \omega t$$

όπου a και b άνισες μεταξύ τους σταθερές.

(α) Σχεδιάστε την τροχιά του σφαιριδίου στο επίπεδο xy.

(β) Προσδιορίστε τις συνιστώσες της ταχύτητας v_x και v_y και το μέτρο της ταχύτητας. Πού γίνεται μέγιστη και που ελάχιστη η ταχύτητα;

Απάντηση: (α) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

(β) $v_x = -a\omega \sin \omega t, v_y = b\omega \cos \omega t$,

$v = \sqrt{a^2\omega^2 \sin^2\omega t + b^2\omega^2 \cos^2\omega t}$,

Για $\omega t = 0$ είναι $v_{min} = b\omega$

και για $\omega t = \pi/2$ είναι $v_{max} = a\omega$

2-13 Η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου αγώνων κατά τη διάρκεια μιας δοκιμής είναι:

$$v = v_o(1 - e^{-t/5})$$

όπου $v_o = 50$ m/s.

(α) Προσδιορίστε τη θέση x του αυτοκινήτου και την επιτάχυνσή του a σε συνάρτηση με το χρόνο t.

(β) Σχεδιάστε τα διαγράμματα των: x, v, και a σε συνάρτηση με το χρόνο t.

Απάντηση: (α) $x = 50t - 250(1 - e^{-t/5})$ (m),

$a = 10e^{-t/5}$ (m/s²)

2-14 Ένα αυτοκίνητο κινείται αρχικά με ταχύτητα $v_o = 15$ m/s. Όταν φρενάρει, η επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση:

$$a = \frac{a_o(t - t_o)}{t_o} \quad (0 < t \le t_o),$$

όπου $a_o = 3$ m/s² και $t_o = 10$ s, (Σχ. 2-12).

(α) Προσδιορίστε την ταχύτητα $v(t)$ και τη θέση $x(t)$.

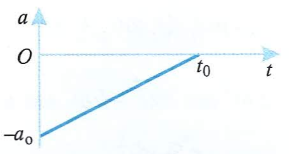
(β) Αποδείξτε ότι η ταχύτητά του γίνεται μηδέν την ίδια χρονική στιγμή με την επιτάχυνση.

(γ) Πόσο διάστημα διανύει το αυτοκίνητο στη διάρκεια των 10 s που φρενάρει;

Απάντηση: (α) $v(t) = 0{,}15t^2 - 3t + 15$,

$x(t) = 0{,}05t^3 - 1{,}5t^2 + 15t$

(γ) $x_{max} = 50$ m



Σχήμα 2-12