4.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Όλοι οι μετασχηματισμοί που συμβαίνουν στη φύση μπορούν να περιγραφούν σχεδόν αποκλειστικά με τους νόμους διατήρησης, που αναφέρονται στην ενέργεια, στην ορμή, στη στροφορμή, στο ηλεκτρικό φορτίο, στον αριθμό των νουκλεονίων (πρωτονίων και νετρονίων), στο λεπτονικό αριθμό (αριθμό ηλεκτρονίων, μυονίων, νετρίνων) και σε άλλα φυσικά μεγέθη.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας. Η έννοια της ***ενέργειας*** είναι μια από τις σημαντικότερες έννοιες της Φυσικής. Ο ακριβής ορισμός του φυσικού αυτού μεγέθους είναι πολύ δύσκολος. Ωστόσο, θα μπορούσαμε να πούμε, δίνοντας μια γενική ιδέα της σημασίας της, ότι *ενέργεια είναι το μέγεθος που χαρακτηρίζει την κατάσταση της ύλης, που συγκροτεί το φυσικό μας κόσμο.*

Στη φύση υπάρχουν διάφορες μορφές ενέργειας, όπως:

α. ***βαρυτική ενέργεια***, ως αποτέλεσμα της βαρυτικής αλληλεπίδρασης μεταξύ σωματίων,
β. ***ηλεκτρομαγνητική ενέργεια***, ως αποτέλεσμα της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης,
γ. ***πυρηνική ενέργεια***, που οφείλεται στις πυρηνικές αντιδράσεις (σύντηξη, σχάση),
δ. ***θερμική ενέργεια***, που μεταφέρεται σε μικροσκοπικό επίπεδο από την ξεχωριστή αλληλεπίδραση κάθε ατόμου ή μορίου του περιβάλλοντος σε κάθε άτομο ή μόριο ενός σώματος,
ε. ***χημική ενέργεια***, που παίρνει μέρος στις χημικές αντιδράσεις και στις διάφορες χημικές διαδικασίες,
στ. ***ακτινοβολούμενη ενέργεια***, όπως η ηλιακή ακτινοβολία, η ακτινοβολία laser, κλπ.

Κύριο χαρακτηριστικό των διαφόρων μορφών ενέργειας, είναι ότι αυτές οι μορφές μπορούν να μετατρέπονται η μια στην άλλη. Οποιαδήποτε φυσική διεργασία μπορεί να περιγραφεί ως ένα φαινόμενο ενεργειακών μετατροπών.

Η ενέργεια εμφανίζεται είτε ως ***κινητική***, λόγω της κίνησης των σωματίων, είτε ως ***δυναμική***, που σχετίζεται με τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματίων. Τα σώματα - μέρη της ύλης- αλληλεπιδρώντας πολύπλοκα ανταλλάσσουν ενέργεια. Τις μεταφορές αυτές της ενέργειας από σύστημα ή σώμα σε άλλο τις παριστάνουμε με μια ποσότητα, που ονομάζουμε ***έργο.*** Θα αναπτύξουμε στη συνέχεια τις έννοιες του έργου, της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας, που υπεισέρχονται στο νόμο διατήρησης της ενέργειας. Με τη βοήθεια του νόμου διατήρησης της ενέργειας μπορούμε να λύνουμε προβλήματα κίνησης μ' έναν απλό και συγχρόνως αποτελεσματικό τρόπο. Κι αυτό, γιατί ο νόμος αυτός δεν εξαρτάται από το είδος της τροχιάς και της δύναμης. Έτσι, μπορεί να εφαρμοσθεί ακόμη και στην περίπτωση που η δύναμη είναι άγνωστη.

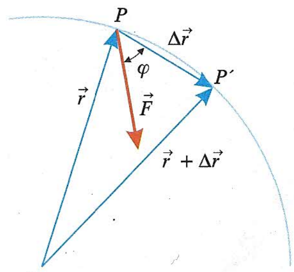
4.1.1 ΕΡΓΟ ΔΥΝΑΜΕΩΣ

Ας θεωρήσουμε ένα σωμάτιο που κινείται σε τροχιά με την επίδραση μιας δύναμης $\vec{F}$, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-1. Αν το σωμάτιο μετατοπιστεί κατά τη στοιχειώδη μετατόπιση $\Delta\vec{r}$, τόσο μικρή, ώστε η δύναμη να παραμένει σταθερή, το έργο που παράγει η δύναμη αυτή ορίζεται από την εξίσωση:

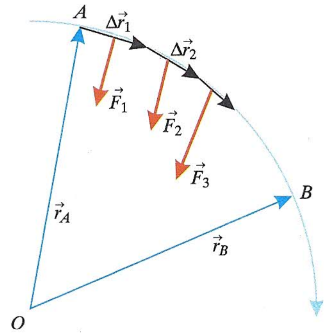
$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \qquad (4.1)$$

Αν φ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{F}$ και $\Delta\vec{r}$, το εσωτερικό γινόμενο στην Εξ. (4.1) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\Delta W = F\,\Delta r\,\cos\varphi \qquad (4.2)$$



Σχήμα 4-1 Έργο παραγόμενο από τη σταθερή δύναμη $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση $\Delta\vec{r}$.



Σχήμα 4-2 Υπολογισμός του έργου που παράγεται από μεταβλητή δύναμη κατά μήκος της διαδρομής από το σημείο A στο σημείο B.

Μονάδα έργου στο διεθνές σύστημα (SI) είναι το joule (1 J = 1 N 1 m).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η δύναμη $\vec{F}$ δεν είναι σταθερή, αλλά συνάρτηση της θέσης $\vec{r}$, δηλαδή $F = f(r)$, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-2. Είναι φανερό ότι στο διάστημα από $\vec{r}_A$ έως $\vec{r}_B$ η δύναμη $\vec{F}$ μεταβάλλεται αρκετά, οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την Εξ. (4.1) για τον υπολογισμό του παραγόμενου έργου σ' αυτή τη μετατόπιση. Αν όμως αναλύσουμε τη διανυόμενη διαδρομή σε n ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε στο καθένα απ' αυτά η δύναμη $\vec{F}$ να είναι σταθερή, τότε για τον υπολογισμό του έργου για καθένα απ' αυτά μπορούμε να εφαρμόσουμε την Εξ. (4.1). Το ολικό έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}(\vec{r})$ μετατοπίζοντας το σημείο εφαρμογής της από τη θέση $\vec{r}_A$ στη θέση $\vec{r}_B$ είναι το άθροισμα των στοιχειωδών έργων για τα οποία ισχύει η Εξ.(4.1):

$$W = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2 + \dots = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει μόνο για απειροστές μεταβολές $\Delta\vec{r}_i$, γιατί μόνο τότε η δύναμη $\vec{F}(\vec{r})$ μπορεί να θεωρηθεί σταθερή. Έτσι αν αφήσουμε τα $\Delta\vec{r}_i$ να τείνουν στο μηδέν, μπορούμε να θεωρήσουμε το ακριβέστερο αποτέλεσμα:

$$W = \lim_{\Delta\vec{r}_i \to 0} \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i \tag{4.3}$$

Η Εξ. (4.3) είναι ισοδύναμη με το ορισμένο ολοκλήρωμα της $\vec{F}(\vec{r})$ από το σημείο A στο B και συμβολίζεται με τη σχέση:

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{4.4}$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί τον ορισμό του έργου που παράγει μια δύναμη, που είναι συνάρτηση της θέσης. Έτσι για την εύρεση του παραγόμενου έργου θα πρέπει να υπολογισθεί το ορισμένο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του εσωτερικού γινομένου της δύναμης $\vec{F}(\vec{r})$ και της στοιχειώδους μετατόπισης $d\vec{r}$ κατά μήκος της τροχιάς με όρια ολοκλήρωσης τις ακραίες θέσεις A και B, στις οποίες αντιστοιχούν τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_A$ και $\vec{r}_B$.

4.1.2 ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Θα συσχετίσουμε τώρα το έργο που παράγει μια εν γένει μεταβαλλόμενη δύναμη σ' ένα σωμάτιο, με την μεταβολή της κινητικής του κατάστασης. Αν στην Εξ. (4.4) αντικαταστήσουμε την εφαρμοζόμενη δύναμη $\vec{F}$ με το κινητικό της αποτέλεσμα, όπως δίνεται από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, (Εξ. 3.3), έχουμε για το παραγόμενο έργο:

$$W = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} \tag{4.5}$$

Το διαφορικό $d\vec{r}$ στην Εξ. (4.5) μπορεί να γραφεί ως

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

Όμως, η $d\vec{r}/dt$ είναι ο ορισμός της ταχύτητας $\vec{v}$, οπότε

$$d\vec{r} = \vec{v}\, dt$$

Κατόπιν αυτών το ολοκλήρωμα στην Εξ. (4.5) γίνεται

$$W = \int_A^B m\vec{v} \cdot \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\, dt\right) \tag{4.6}$$

Η ποσότητα $(d\vec{v}/dt)dt$ είναι εξ ορισμού το διαφορικό $d\vec{v}$. Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$W = \int_A^B m\vec{v} \cdot d\vec{v} \tag{4.7}$$

Δεδομένου ότι

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \tfrac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \tfrac{1}{2} dv^2$$

η Εξ. (4.7) παίρνει τη μορφή

$$W = \frac{1}{2} m \int_{v_A}^{v_B} dv^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \tag{4.8}$$

όπου v_A και v_B οι ταχύτητες του σωματίου στις θέσεις A και B, αντιστοίχως. Η έκφραση

$$K = \tfrac{1}{2} m v^2 \tag{4.9}$$

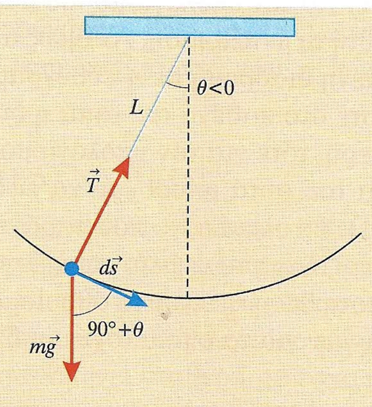
είναι εξ ορισμού η ***κινητική ενέργεια*** του σωματίου. Έχουμε λοιπόν:

$$W = K_B - K_A = \Delta K \qquad (4.10)$$

Η Εξ. (4.10) εκφράζει ότι, όταν ένα σωμάτιο κινείται από το σημείο A στο σημείο B υπό την επίδραση μιας δύναμης $\vec{F}$, το έργο αυτής ισούται με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας. Η πρόταση αυτή αποτελεί το ***θεώρημα έργου – ενέργειας***. Η εφαρμογή του θεωρήματος αυτού απλοποιεί σημαντικά την επίλυση προβλημάτων κίνησης.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4-1

Ένα εκκρεμές, (Σχ. 4-3), αποτελείται από μια σφαίρα μάζας $m = 0{,}1$ kg, που είναι κρεμασμένη στην άκρη ενός νήματος μήκους $L = 1$ m. Το εκκρεμές μετατοπίζεται κατά γωνία $\theta_0 = 30°$ ως προς την κατακόρυφο και αφήνεται ελεύθερο. Να βρεθεί η ταχύτητα της σφαίρας, όταν περνά από την κατακόρυφο.



Σχήμα 4-3

Λύση

Όταν το εκκρεμές απομακρύνεται από την κατακόρυφο κατά γωνία θ_0, η αρχική ταχύτητα της σφαίρας είναι μηδέν. Οι δυνάμεις που επιδρούν στη σφαίρα είναι το βάρος της $m\vec{g}$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$. Η τάση του νήματος $\vec{T}$ δεν παράγει έργο, αφού είναι κάθετη στην τροχιά. Η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος $m\vec{g}$. Το παραγόμενο στοιχειώδες έργο είναι:

$$dW = (mg)(ds)\cos(90° + \theta)$$

όπως προκύπτει από τη γεωμετρία του σχήματος. Επειδή το μήκος του τόξου s σχετίζεται με τη γωνία θ σε ακτίνια με τη σχέση $s = L\theta$, θα είναι $ds = Ld\theta$. Επίσης, $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$. Μ' αυτές τις αντικαταστάσεις έχουμε

$$dW = -(mg)(Ld\theta)\sin\theta$$

Το ολικό παραγόμενο έργο όταν το εκκρεμές κινείται από τη γωνία θ_o στη γωνία $\theta = 0$ είναι

$$\begin{aligned} W &= -\int_{\theta_o}^{0} mgL\sin\theta d\theta \\ &= mgL\int_{0}^{\theta_o}\sin\theta d\theta \\ &= mgL\Big[-\cos\theta\Big]_{0}^{\theta_o} \\ &= mgL(1-\cos\theta_o) \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι η κινητική ενέργεια στη θέση θ_o είναι μηδέν, εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου – ενέργειας μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα της σφαίρας του εκκρεμούς στη θέση όπου $\theta = 0$

$$W = \Delta K = K_{(\theta=0)} - K_{(\theta_o)} = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

$$mgL(1-\cos\theta_o) = \frac{1}{2}mv^2$$

Λύνοντας ως προς v προκύπτει

$$v = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_o)}$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από τη μάζα του σωματίου. Εισάγοντας αριθμητικές τιμές, βρίσκουμε:

$$v = 1{,}62 \text{ m/s}$$

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα ακόλουθα πλεονεκτήματα της εφαρμογής του θεωρήματος έργου – ενέργειας:

(α) Για να βρούμε την τελική ταχύτητα δεν είναι απαραίτητο να βρούμε την επιτάχυνση σε ενδιάμεση θέση.

(β) Όλες οι χρησιμοποιούμενες ποσότητες είναι αριθμητικές, που προστίθενται αλγεβρικά, χωρίς να χρησιμοποιούνται συντεταγμένες x και y.

(γ) Δυνάμεις που δεν παράγουν έργο δεν παρουσιάζονται στη λύση του προβλήματος.

ορίζει τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας σε οποιαδήποτε άλλη θέση

$$U(\vec{r}) = -\int_A^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (4.15)$$

Ο τρόπος εκλογής του σημείου αναφοράς, όπου η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν, εξαρτάται από το πρόβλημα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4-2 Δυναμική ενέργεια ελατηρίου

Ας θεωρήσουμε ένα σπειροειδές ελατήριο, του οποίου το ένα άκρο είναι σταθερό (Σχ. 4-5). Το ελατήριο είναι τοποθετημένο κατά τον άξονα των x, έτσι ώστε το ελεύθερο άκρο να βρίσκεται στη θέση $x = 0$. Το ελατήριο εκτείνεται κατά x υπό την επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης. Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο.

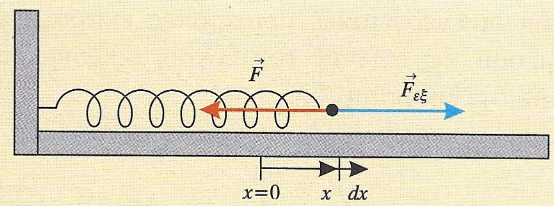
Λύση

Όταν το ελεύθερο άκρο μετατοπισθεί κατά x, η δύναμη επαναφοράς δίνεται από το νόμο του Hooke

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

και έτσι είναι συνάρτηση της θέσης μόνο. Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, η δύναμη επαναφοράς ενός ελατηρίου είναι διατηρητική. Ας υπολογίσουμε τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, καθώς το εκτείνουμε από τη θέση $x = 0$ στη θέση x. Στη θέση $x = 0$, όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, θεωρούμε τη θέση αναφοράς της δυναμικής ενέργειας, $U(0) = 0$. Το διάνυσμα της μετατόπισης είναι $d\vec{r} = dx\vec{i}$. Εφαρμόζοντας την Εξ. (4.15) έχουμε

$$U(x) = -\int_0^x (-kx\vec{i})\cdot(dx\vec{i})$$

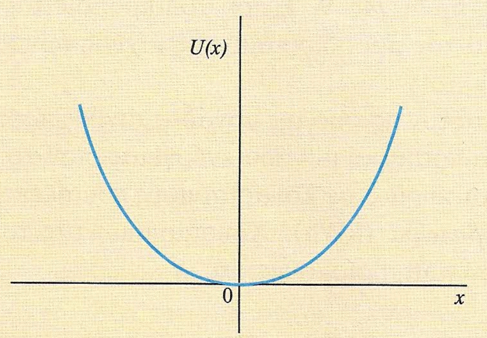


Σχήμα 4-5 Το ελατήριο εκτείνεται κατά x υπό την επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης.

$$= \int_0^x kx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}kx^2$$

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας ενός ελατηρίου, που ακολουθεί το νόμο του Hooke, είναι μια παραβολή, όπως παριστάνεται στο Σχ. 4-6.



Σχήμα 4-6 Διάγραμμα δυναμικής ενέργειας σπειροειδούς ελατηρίου.

4.1.5 ΝΟΜΟΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Είδαμε ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σωματίου μεταξύ δυο σημείων ισούται με το έργο που παράγουν σ' αυτό όλες οι δυνάμεις του πεδίου

$$W = \Delta K$$

Με ανάλογο τρόπο, το έργο που παράγουν οι διατηρητικές δυνάμεις του πεδίου αντιστοιχεί σε μείωση της δυναμικής ενέργειας του σωματίου

$$\Delta U = -W$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη έχουμε:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \qquad (4.16)$$

Η Εξ. (4.16) μας λέει ότι η ολική μεταβολή στην κινητική ενέργεια συν την ολική μεταβολή στη δυναμική ενέργεια είναι μηδέν. Δηλαδή, δεν υπάρχει μεταβολή στο άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας. Η πρόταση αυτή διατυπώνεται μαθηματικά με την εξίσωση

$$\Delta(K + U) = 0 \qquad (4.17)$$

Η ποσότητα $K+U$ ονομάζεται ***ολική μηχανική ενέργεια*** του σωματίου. Η Εξ. (4.17) αναφέρεται συχνά ως ***νόμος διατήρησης της μηχανικής ενέργειας*** για διατηρητικές δυνάμεις.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι εκτός από τις διατηρητικές δυνάμεις ενεργεί στο σώμα και μια μη διατηρητική δύναμη, όπως για παράδειγμα μια δύναμη τριβής. Τότε, μπορούμε να γράψουμε την Εξ. (4.10) ως εξής

$$W_f + W_c = \Delta K \qquad (4.18)$$

όπου W_f το έργο που παράγει η τριβή, W_c το έργο που παράγουν οι διατηρητικές δυνάμεις και ΔK η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωμάτιου. Επειδή $W_c = -\Delta U$, σύμφωνα με την Εξ. (4.13), μπορούμε να γράψουμε την Εξ. (4.18) ως εξής

$$\Delta K + \Delta U = W_f$$

Επειδή το άθροισμα των μεταβολών ισούται με τη μεταβολή του αθροίσματος, έχουμε

$$\Delta(K + U) = W_f \qquad (4.19)$$

Αυτό σημαίνει ότι η ολική μηχανική ενέργεια δεν είναι σταθερή και η μεταβολή της ισούται με το έργο των μη διατηρητικών δυνάμεων. Τί έγινε όμως η «απολεσθείσα» μηχανική ενέργεια στην περίπτωση αυτή; Μετασχηματίστηκε σε ***εσωτερική ενέργεια*** U_{int}, προκαλώντας αύξηση της θερμοκρασίας. ´Ετσι θα ισχύει: $W_f = -\Delta U_{\text{int}}$, οπότε η Εξ. (4-19) γίνεται

$$\Delta(K + U) + \Delta U_{\text{int}} = 0 \qquad (4.20)$$

Η Εξ. (4.20) λέει ότι το άθροισμα της ολικής μηχανικής ενέργειας και της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος διατηρείται σταθερό. Κατ' επέκταση μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta(K + U) + \Delta U_{\text{int}} + \ldots = 0 \qquad (4.21)$$

Συνολικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\Delta E = 0 \qquad (4.22)$$

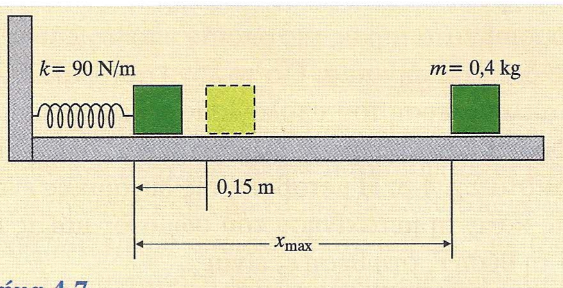
όπου E η ολική ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος. Η απλή αυτή εξίσωση σημαίνει ότι ***η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή*** και αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του ***νόμου διατήρησης της ολικής ενέργειας*** ενός συστήματος. Η ενέργεια όμως μπορεί να μετασχηματίζεται από μια μορφή σε άλλη, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί, ούτε να καταστραφεί. Η έννοια λοιπόν της ενέργειας γενικεύτηκε, για να περιλάβει μορφές εκτός από την κινητική και δυναμική ενέργεια, συνέδεσε τους διάφορους τομείς της Φυσικής και έχει γίνει μια από τις πιο ενοποιητικές της έννοιες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4-3

´Ενα σώμα μάζας m = 0,4 kg συμπιέζει ένα σπειροειδές ελατήριο σταθεράς k = 90 N/m κατά 0,15 m, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-7. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του σώματος και της οριζόντιας επιφάνειας είναι 0,35. (α) Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος, όταν διέρχεται από θέση όπου το ελατήριο είχε το φυσικό του μήκος; (β) Πόση είναι η απόσταση που θα διανύσει το σώμα από το σημείο συμπίεσης μέχρις ότου σταματήσει;

Λύση

(α) Θα εφαρμόσουμε την Εξ. (4.19), η οποία τροποποιεί το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την περίπτωση που ασκούνται στο σύστημα και μη διατηρητικές δυνάμεις, όπως η



Σχήμα 4-7

τριβή. Η τελική μηχανική ενέργεια (στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος) είναι μόνο κινητική, $\frac{1}{2}mv^2$. Η αρχική μηχανική ενέργεια (στη θέση μέγιστης συμπίεσης του ελατηρίου) είναι μόνο δυναμική, $\frac{1}{2}kx_0^2$. Επομένως η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας είναι

$$\Delta(K + U) = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}kx_0^2$$

Το έργο της δύναμης κινητικής τριβής είναι

$$W_f = F_r\,(\Delta x)\cos 180^\circ = \mu_k mgx_0(-1) = -\mu_k mgx_0$$

Επομένως, η Εξ. (4.19) γίνεται

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}kx_0^2 = -\mu_k mgx_0$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς την ταχύτητα v και αντικαθιστώντας τα δεδομένα βρίσκουμε

$$v = \sqrt{\frac{kx_0^2}{m} - 2\mu_k gx_0}$$

$$v = \sqrt{\frac{kx_0^2}{m} - 2\mu_k gx_0}$$

$$= \sqrt{\frac{(90\ \text{N/m})(0{,}15\ \text{m})^2}{0{,}4\ \text{kg}} - 2(0{,}35)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}15\ \text{m})}$$

$$= 2\ \text{m/s}$$

(β) Όταν το σώμα σταματήσει, η τελική μηχανική ενέργεια είναι μηδέν. Η αρχική μηχανική ενέργεια στη θέση συμπίεσης είναι μόνο δυναμική, ίση με $\frac{1}{2}kx_0^2$. Επομένως, η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας είναι

$$\Delta(K + U) = 0 - \tfrac{1}{2}kx_0^2$$

Το έργο της μη διατηρητικής δύναμης τριβής ανάμεσα στις δυο θέσεις, που απέχουν απόσταση x_{max}, είναι

$$W_f = F_r x_{max}\cos 180^\circ = \mu_k mgx_{max}(-1) = -\mu_k mgx_{max}$$

Εφαρμόζοντας την Εξ. (4.19) έχουμε

$$-\tfrac{1}{2}kx_0^2 = -\mu_k mgx_{max}$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς x_{max} και αντικαθιστώντας τα δεδομένα βρίσκουμε

$$x_{max} = \frac{kx_0^2}{2\mu_k mg}$$

$$= \frac{(90\ \text{N/m})(0{,}15\ \text{m})^2}{2(0{,}35)(0{,}4\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)} = 0{,}74\ \text{m}$$

4.1.6 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

Ας θεωρήσουμε δυο σημειακά σώματα με μάζες m_1 και m_2, που βρίσκονται αρχικά σε απόσταση r. Η δύναμη βαρύτητας μεταξύ των σωμάτων, που δίνεται από την Εξ. (3.7), είναι μια διατηρητική δύναμη, όπως είδαμε στο Εδάφιο 4.1.4. Επομένως, η βαρυτική δυναμική ενέργεια ισούται με το αρνητικό του παραγόμενου έργου από τη δύναμη βαρύτητας καθώς τα σώματα διαχωρίζονται. Επειδή η δύναμη βαρύτητας είναι μια διατηρητική δύναμη, η διαδρομή κατά μήκος της οποίας υπολογίζουμε το έργο δεν έχει σημασία. Για το λόγο αυτό, αλλά και για απλούστευση του υπολογισμού, θεωρούμε μια διαδρομή κατά μήκος του άξονα των x, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-8. Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας κατά τη μετακίνηση του σώματος μάζας m_2 από τη θέση $\vec{r}_1$ στη θέση $\vec{r}_2$ είναι

$$\Delta U = -W = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (4.23)$$

Η δύναμη βαρύτητας στο σώμα μάζα m_2 είναι

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{i}$$

ενώ το $d\vec{r} = dr\,\vec{i}$. Επομένως, η Εξ. (4.23) γίνεται

$$\Delta U = Gm_1m_2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$= Gm_1m_2\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}$$

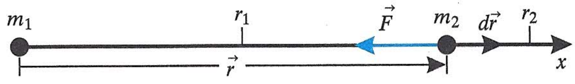
$$= -G\frac{m_1m_2}{r_2} + G\frac{m_1m_2}{r_1}$$

Επειδή $\Delta U = U_2 - U_1$, η μορφή της προηγούμενης εξίσωσης μας οδηγεί στο να προβλέψουμε μια έκφραση για τη δυναμική ενέργεια της μορφής

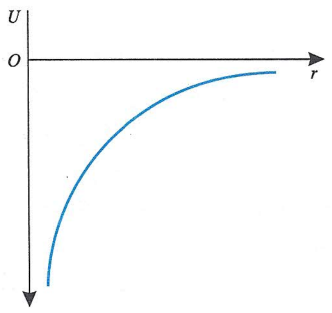
$$U = -G\frac{m_1m_2}{r} + C$$

όπου C μια οποιαδήποτε σταθερά. Για απλούστευση λαμβάνουμε $C = 0$. Τότε η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος δυο σημειακών σωμάτων μαζών m_1 και m_2 σε απόσταση r δίνεται από την έκφραση

$$\boxed{U = -G\frac{m_1m_2}{r}} \qquad (4.24)$$



Σχήμα 4-8 Υπολογισμός της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος σημειακών σωμάτων μαζών m_1 και m_2, καθώς το σώμα μάζας m_2 μετακινείται από τη θέση r_1 στη θέση r_2.



Σχήμα 4-9 Δυναμική ενέργεια ενός συστήματος δύο σημειακών σωμάτων σε συνάρτηση με την απόσταση r.

Για $r = \infty$ προκύπτει $U = 0$, γεγονός που επιβεβαιώνει την εκλογή $C = 0$. Επομένως, η θέση αυτή αποτελεί τη θέση αναφοράς της δυναμικής ενέργειας. Παρατηρούμε ότι η δυναμική ενέργεια είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να καταβάλουμε έργο για να απομακρύνουμε τα σώματα σε άπειρη απόσταση. Το διάγραμμα της δυναμικής ενέργειας παριστάνεται στο Σχ. 4-9.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4-4

Υπολογίστε την αρχική ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί ένα σώμα μάζας m, για να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας της Γης.

Λύση

Για να διαφύγει το σώμα από το πεδίο βαρύτητας της Γης, θα πρέπει η δυναμική του ενέργεια να καταστεί μηδενική και η ταχύτητά του η ελάχιστη δυνατή. Εφόσον λοιπόν η τελική δυναμική του ενέργεια είναι μηδέν (δηλαδή $U(r) = 0$ για $r = \infty$) και η τελική κινητική του ενέργεια τουλάχιστον μηδέν, τότε σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας θα πρέπει και η ολική ενέργεια να είναι μηδέν σ' όλη τη διάρκεια της κίνησης, αν φυσικά αγνοήσουμε ενεργειακές μετατροπές σε θερμότητα κατά την κίνηση του σώματος στην ατμόσφαιρα της Γης. Έτσι θα ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{2} m v_o^2 - G\frac{mM}{R} = 0$$

όπου: v_o η ταχύτητα εκτόξευσης του σώματος από την επιφάνεια της Γης, M η μάζα της Γης και R η ακτίνα της Γης. Άρα η ταχύτητα εκτόξευσης του σώματος από την επιφάνεια της Γης είναι

$$v_o = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης, σύμφωνα με την Εξ. (3-12), είναι:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

οπότε:

$$v_o = \sqrt{2gR}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές: $g = 9{,}8$ m/s² και $R = 6400$ km, βρίσκουμε $v_o = 11{,}2$ km/s. Η ταχύτητα αυτή είναι γνωστή ως ***ταχύτητα διαφυγής***. Η ταχύτητα διαφυγής είναι η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει ένα σώμα για να διαφύγει από οποιοδήποτε πεδίο βαρύτητας. Εάν η ταχύτητα ενός σώματος είναι μικρότερη από την ταχύτητα διαφυγής, η κινητική του ενέργεια είναι μικρότερη από την απόλυτη τιμή της δυναμικής του ενέργειας και έτσι η ολική του ενέργεια είναι αρνητική. Έτσι, σώματα που είναι βαρυτικώς δέσμια μεταξύ τους έχουν αρνητική ολική ενέργεια.

4.2 ΘΕΡΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Στις ενεργειακές μετατροπές πολλές μορφές ενέργειας καταλήγουν σε μια υποβαθμισμένη μορφή ενέργειας που ονομάζεται ***θερμική ενέργεια*** ή ***θερμότητα***. Η θερμότητα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι μια μορφή ενέργειας που υπόκειται σε πρόσθετους περιορισμούς για τη μεταφορά της από ένα σώμα σ' ένα άλλο.

4.2.1 ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Θα μελετήσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας σε κλειστά σύνολα πολλών σωματίων, που αποτελούν ένα ***σύστημα***. Κάθε τέτοιο σύστημα μπορεί να αλληλεπιδράσει με το περιβάλλον του με μεταφορά ενέργειας οποιασδήποτε μορφής, με αποτέλεσμα τη μεταβολή της ενεργειακής του κατάστασης. Η ενεργειακή κατάσταση ενός συστήματος μπορεί να περιγραφεί με μεταβλητές, που εκφράζουν το μέσο όρο της ενεργειακής κατάστασης των επιμέρους μερών του συστήματος. Οι μεταβλητές αυτές αναφέρονται στη συμπεριφορά του συστήματος και ονομάζονται ***μακροσκοπικές*** ή ***θερμοδυναμικές μεταβλητές*** του συστήματος. Για παράδειγμα, για καθορισμένη μάζα αερίου, που αποτελεί ένα μακροσκοπικό σύστημα, η γνώση της πίεσης P

και του όγκου V καθορίζει το ενεργειακό του περιεχόμενο. Πράγματι στα πραγματικά αέρια, σε αρκετά χαμηλές πιέσεις, ισχύει η παρακάτω καταστατική εξίσωση, που προκύπτει πειραματικά:

$$P\,V = \text{σταθ.} \tag{4.25}$$

όταν η θερμοκρασία είναι σταθερή. Η εξίσωση αυτή συνδέει τις μακροσκοπικές μεταβλητές της πίεσης και του όγκου και μας επιτρέπει να διακρίνουμε ένα σύστημα από ένα άλλο. Ταυτόχρονα, επειδή το γινόμενο $P\,V$ έχει διαστάσεις ενέργειας (εκφράζεται σε J), καθορίζει και την ενεργειακή κατάσταση του συστήματος. Η Εξ. (4.25) μας επιτρέπει να ορίσουμε μια θερμομετρική κλίμακα, για τη μέτρηση της θερμοκρασίας. Η κλίμακα αυτή θα καθοριστεί πλήρως αν ορίσουμε πάνω της ένα σημείο. Το σημείο αυτό αντιστοιχεί στο τριπλό σημείο του νερού, δηλαδή τη θερμοκρασία στην οποία συνυπάρχουν σε ισορροπία πάγος, νερό και υδρατμοί. Η αριθμητική της τιμή είναι: T_{tr} = 273,16 K. Έτσι, μονάδα θερμοκρασίας στο σύστημα SI είναι το kelvin (K), που είναι το 1/273,16 της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας του τριπλού σημείου του νερού.

Για 1 mole αερίου βρίσκουμε πειραματικά ότι:

$$P\,V = R\,T \tag{4.26}$$

όπου R μια σταθερά, γνωστή ως *παγκόσμια σταθερά των αερίων*, με τιμή 8,31 J/mol K.

Για να περιγραφεί ένα σύστημα με τη βοήθεια των μακροσκοπικών του μεταβλητών, πρέπει να επικρατεί σ' αυτό θερμοδυναμική ισορροπία, πρέπει δηλαδή η θερμοκρασία του συστήματος να είναι ίδια σ' όλα τα σημεία του και η πίεση να είναι επίσης σταθερή σ' όλα τα σημεία του. Η θερμοκρασία σχετίζεται με την αίσθηση του "θερμού" και του "ψυχρού". Το πιο αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό της θερμοκρασίας είναι η τάση της για εξίσωση. Αυτό σημαίνει ότι αν δυο σώματα, ένα θερμό κι ένα ψυχρό, έλθουν σε θερμική επαφή, το θερμό σώμα ψύχεται και το ψυχρό θερμαίνεται, μέχρις ότου αποκτήσουν και τα δυο την ίδια θερμοκρασία. Αυτή η εξισορρόπηση οφείλεται σε ροή ενέργειας από το θερμότερο σώμα προς το ψυχρότερο. Μια τέτοια ροή ενέργειας ονομάζεται ροή θερμότητας. Όταν αυτή η ροή σταματήσει, τα δυο σώματα βρίσκονται σε θερμική ισορροπία. Ένας λογικός και διαδικαστικός έλεγχος για τη θερμική ισορροπία είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα τρίτο δοκιμαστικό σώμα ως θερμόμετρο. Έτσι, *αν δυο σώματα, το καθένα χωριστά, βρίσκονται σε θερμική ισορροπία με τρίτο σώμα (το θερμόμετρο), τότε βρίσκονται και μεταξύ τους σε θερμική ισορροπία.* Η πρόταση αυτή αναφέρεται συχνά ως ***μηδενικός νόμος της θερμοδυναμικής***.

Η θερμότητα, όπως και το έργο, συνεπάγεται μια μεταφορά ενέργειας, μόνο που το έργο εμφανίζεται σε μεταφορές ενέργειας, με τέτοιο τρόπο που μια διαφορά θερμοκρασίας να μην υπεισέρχεται στη διαδικασία της ενεργειακής μετατροπής.

4.2.2 Ο ΠΡΩΤΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Θα ασχοληθούμε τώρα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας στα μακροσκοπικά σώματα ή συστήματα. Μια έννοια, που περιγράφει την ενεργειακή κατάσταση ενός συστήματος, είναι η ***εσωτερική ενέργεια***, U, που περικλείει το άθροισμα των κινητικών και δυναμικών ενεργειών, που οφείλονται στην τυχαία κίνηση των ατόμων ή μορίων του συστήματος. Η εσωτερική ενέργεια ενός συστήματος διαφέρει από τον όρο θερμότητα, που αναφέρεται στη μεταφερόμενη ενέργεια μεταξύ δυο συστημάτων, ως αποτέλεσμα της διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ τους.

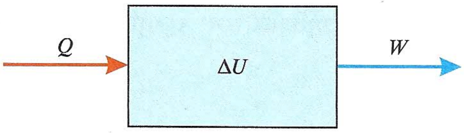
Την εσωτερική ενέργεια ενός συστήματος, που είναι μονότιμη συνάρτηση της κατάστασής του, μπορούμε να την ορίσουμε και με τη βοήθεια των μακροσκοπικών του μεταβλητών. Για το σκοπό αυτό, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα, που μπορεί να ανταλλάσσει ενέργεια με το περιβάλλον του, είτε με ροή θερμότητας, είτε μέσω έργου. Έτσι, το περιβάλλον μπορεί να παρέχει θερμότητα Q στο σύστημα (ή να αφαιρεί θερμότητα $-Q$ απ' αυτό) και σε ανταπόδοση το σύστημα να παράγει έργο W στο περιβάλλον (ή το περιβάλλον να παράγει έργο $-W$ στο σύστημα). Αποτέλεσμα αυτών των αλληλεπιδράσεων είναι η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος κατά ΔU. Η ολική όμως ενέργεια συστήματος – περιβάλλοντος διατηρείται. Κατά συνέπεια ισχύει:

$$Q = \Delta U + W \tag{4.27}$$

ή

$$\Delta U = Q - W \tag{4.28}$$

Η Εξ. (4.28) εκφράζει τον ***πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής*** και απεικονίζεται στο Σχ. 4-10. Ο πρώτος



Σχήμα 4-10 Σχέση μεταξύ θερμότητας Q, έργου W και εσωτερικής ενέργειας ενός συστήματος. Η διαφορά Q-W αποθηκεύεται ως μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ΔU του συστήματος.

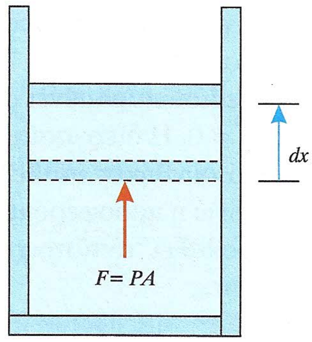
νόμος της θερμοδυναμικής δεν είναι τίποτε άλλο, παρά ο γενικός νόμος διατήρησης της ενέργειας: Η ενέργεια μεταφέρεται και μετασχηματίζεται, αλλά ούτε δημιουργείται, ούτε καταστρέφεται. Λόγω διατήρησης της ενέργειας, η συνολική ενέργεια που μεταφέρθηκε στο – ή από το – σύστημα δε χάθηκε, αλλά αύξησε την εσωτερική του ενέργεια κατά ΔU. Για μεταβολή από ορισμένη κατάσταση 1 σε άλλη ορισμένη κατάσταση 2 η ΔU είναι καθορισμένη, χωρίς να εξαρτάται από το δρόμο που ακολούθησε το σύστημα γι αυτή τη μεταβολή. Κατά συνέπεια, το ίδιο ισχύει και για τη διαφορά Q-W, Εξ. (4-28), όχι όμως για τα Q και W ξεχωριστά. Τα Q και W εξαρτώνται από το πώς συμβαίνει η μεταβολή από την αρχική στην τελική κατάσταση, εξαρτώνται δηλ. από τον ακολουθούμενο δρόμο της διεργασίας. Η χρησιμότητα του πρώτου νόμου της θερμοδυναμικής έγκειται στο γεγονός ότι προσφέρει ένα βολικό τρόπο για την ποσοτική μέτρηση των μεταβολών της εσωτερικής ενέργειας. Ας προχωρήσουμε όμως σε συγκεκριμένες εφαρμογές.

4.2.3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

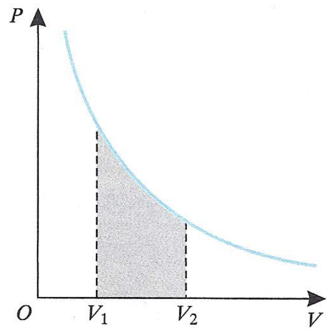
Ας θεωρήσουμε ένα ιδανικό αέριο μέσα σε κύλινδρο, που κλείνει με κινητό έμβολο, χωρίς τριβή, όπως παριστάνεται στο Σχ. 4-11α. Η πίεση του αερίου, που αποτελεί το σύστημα, αρχικά είναι P και ο όγκος του V. Έστω ότι το εγκλωβισμένο αέριο, λόγω της πίεσής του, μετακινεί το έμβολο κατά μια μικρή μετατόπιση dx. Αν το εμβαδόν της επιφάνειας του εμβόλου είναι A, και το dx είναι αρκετά μικρό, ώστε η πίεση P να παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια αυτής της μετατόπισης, τότε η δύναμη επί του εμβόλου είναι $F = P\,A$. Το στοιχειώδες έργο που παράγει το σύστημα είναι

$$dW = F\,dx = P\,A\,dx = P(A\,dx) = P\,dV \quad (4.29)$$

όπου dV η στοιχειώδης μεταβολή του όγκου. Σε



(α)



(β)

Σχήμα 4-10 (α) Στοιχειώδες έργο παραγόμενο κατά την εκτόνωση ενός αερίου. (β) Το παραγόμενο έργο κατά την εκτόνωση ενός αερίου από όγκο V_1 σε όγκο V_2 ισούται με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του διαγράμματος P-V

πεπερασμένη μεταβολή από όγκο V_1 σε όγκο V_2 το έργο που παράγει το σύστημα, λόγω της πίεσής του P, είναι

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV \quad (4.30)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να υπολογιστεί γραφικά, από το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη P-V, όπως φαίνεται στο Σχ.4-11β. Από το σχήμα αυτό είναι φανερό ότι το έργο, που παράγει το σύστημα στο περιβάλλον, ή και αντιστρόφως, εξαρτάται όχι μόνο από την αρχική και τελική κατάσταση, αλλά και από το δρόμο της θερμοδυναμικής διεργασίας. Έτσι σ' έναν πλήρη κύκλο το έργο δεν είναι μηδενικό. Αντίθετα η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας σ' έναν πλήρη κύκλο είναι μηδενική, γιατί η εσωτερική ενέργεια έχει καθορισμένη τιμή σ' οποιοδήποτε σημείο της διαδρομής.

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις θερμοδυναμικών διεργασιών:
(α) Ο όγκος του αερίου παραμένει σταθερός, δηλ. $V_1 = V_2$, οπότε: $W = 0$. Η διεργασία αυτή καλείται ***ισόχωρη***. Άρα, υπό συνθήκες σταθερού όγκου, το έργο είναι μηδέν, ενώ η προσφερόμενη στο σύστημα θερμότητα προκαλεί αντίστοιχη αύξηση της εσωτερικής ενέργειας

$$\Delta U = Q \tag{4.31}$$

Για τον υπολογισμό του ποσού θερμότητας Q, που προσλαμβάνει ένα σώμα, πρέπει να ξέρουμε τη θερμοχωρητικότητα αυτού. Η ***θερμοχωρητικότητα*** ενός σώματος ορίζεται ως *η θερμότητα που απορροφιέται από ένα γραμμομόριο αυτού, για να προκαλέσει μοναδιαία μεταβολή της θερμοκρασίας*. Αν ο όγκος διατηρείται σταθερός κατά τη διάρκεια της θερμικής μεταβολής, τότε μιλάμε για ***θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο*** και την ορίζουμε με τη σχέση:

$$C_V = \left.\frac{dQ}{dT}\right|_{V=\text{σταθ.}} \tag{4.32}$$

Στο σύστημα μονάδων SI η θερμοχωρητικότητα εκφράζεται σε J/K · mol.
Με βάση αυτόν τον ορισμό, η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος είναι

$$\Delta U = C_V \Delta T \tag{4.33}$$

για 1 mole, αν η C_V παραμένει σταθερή στη μεταβολή της θερμοκρασίας ΔT. Άρα η μεταβολή της θερμοκρασίας ενός συστήματος αποτελεί μέτρο της μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας αυτού.
(β) Η πίεση παραμένει σταθερή, οπότε το ολικό έργο που παράγει το σύστημα είναι

$$W = P\,(V_2 - V_1) \tag{4.34}$$

Μια τέτοια διεργασία ονομάζεται ***ισοβαρής***. Στην περίπτωση αυτή ο πρώτος νόμος παίρνει τη μορφή

$$\Delta U = Q - P\,(V_2 - V_1) \tag{4.35}$$

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται η ***θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση*** από τη σχέση

$$C_P = \left.\frac{dQ}{dT}\right|_{P=\text{σταθ.}} \tag{4.36}$$

Απ' όπου με τη βοήθεια του πρώτου νόμου προκύπτει

$$C_P = \left.\frac{dQ}{dT}\right|_P = \left.\frac{dU}{dT}\right|_P + P\left.\frac{dV}{dT}\right|_P \tag{4.37}$$

Από τις Εξ. (4.36) και (4.37) συνεπάγεται ότι για ιδανικό αέριο ισχύει

$$C_P - C_V = R \tag{4.38}$$

(γ) Η πίεση μεταβάλλεται με ταυτόχρονη μεταβολή του όγκου, ενώ η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή. Μια τέτοια διεργασία ονομάζεται ***ισόθερμη***. Σε πεπερασμένη μεταβολή από όγκο V_1 σε όγκο V_2 το έργο που παράγει το ιδανικό αέριο βρίσκεται με αντικατάσταση της Εξ. (4.26) για T σταθερό στην Εξ. (4.30)

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = RT\ln\frac{V_2}{V_1} \tag{4.39}$$

Εφόσον η θερμοκρασία παραμένει σταθερή, έπεται ότι δεν έχουμε μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας, δηλ.

$$\Delta U = 0 \tag{4.40}$$

οπότε:

$$Q = W \tag{4.41}$$

Έτσι στην ισόθερμη μεταβολή η θερμότητα, που απορρόφησε το σύστημα, μετατρέπεται σε έργο.
(δ) Η θερμοκρασία μεταβάλλεται, ενώ συγχρόνως μεταβάλλονται η πίεση και ο όγκος χωρίς ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ συστήματος και περιβάλλοντος. Μια τέτοια διεργασία ονομάζεται ***αδιαβατική***. Για μια τέτοια διεργασία από τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής παίρνουμε:

$$\Delta U = -W \tag{4.42}$$

Αυτό σημαίνει ότι η εσωτερική ενέργεια μεταβάλλεται ακριβώς κατά το ποσό του έργου, που παράγεται στο ή από το σύστημα.
Η Εξ. (4.42) σε συνδυασμό με την Εξ. (4.33) δίνει διαδοχικά για απειροστές μεταβολές

$$C_V\,dT = -P\,dV$$

$$C_V dT = -\frac{RT}{V}dV$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V}\frac{dV}{V}$$

$$\frac{dT}{T} = -\left(\frac{C_P}{C_V}-1\right)\frac{dV}{V}$$

Ορίζοντας το λόγο $C_P/C_V = \gamma$, προκύπτει

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma-1)\frac{dV}{V}$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\ln T = -(\gamma-1)\ln V + C$$

απ' όπου προκύπτει:

$$T\,V^{\gamma-1} = \text{σταθ.} \qquad (4.43)$$

ή, λαμβάνοντας υπόψη την καταστατική εξίσωση των αερίων $PV = RT$

$$P\,V^{\gamma} = \text{σταθ.} \qquad (4.44)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4-5

Να υπολογιστεί το έργο που παράγει 1 mole ιδανικού αερίου σε μια αδιαβατική εκτόνωσή του από όγκο V_1 σε όγκο V_2.

Λύση

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (4.44) έχουμε ότι $P = cV^{-\gamma}$, οπότε η Εξ. (4.30) γίνεται:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = c\int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma}dV = \frac{cV_2^{1-\gamma}-cV_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

ή, επειδή $P_2 = c\,V_2^{-\gamma}$ και $P_1 = c\,V_1^{-\gamma}$,

$$W = \frac{P_1V_1 - P_2V_2}{\gamma-1} = \frac{R(T_1-T_2)}{\gamma-1}$$

ΠΕΙΡΑΜΑ 4-1 Νόμος του Boyle

ΣΤΟΧΟΣ

Μετά τη διεξαγωγή του πειράματος ο σπουδαστής θα καταστεί περισσότερο ικανός να προσδιορίζει τη σχέση μεταξύ της πίεσης και του όγκου μιας ποσότητας αέρα σε σταθερή θερμοκρασία.

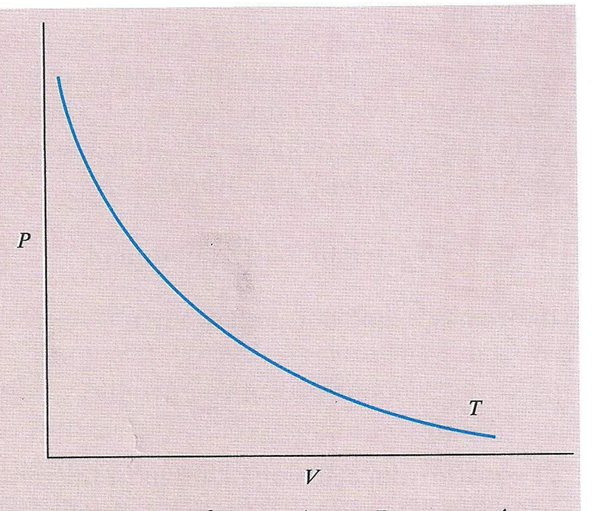
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από τα ακόλουθα όργανα και υλικά:

- Σωλήνα με έμβολο (σύριγγα) βαθμολογημένο σε cm^3 (ml)
- Αισθητήρα πίεσης
- Διασυνδετική διάταξη (Science workshop interface / Pasco)
- Ηλεκτρονικό Υπολογιστή
- Λογισμικό συλλογής και επεξεργασίας μετρήσεων (DataStudio / Pasco)

ΘΕΩΡΙΑ

Η πίεση, P, ο όγκος, V, και η θερμοκρασία, T, ενός αερίου διέπονται από μερικούς απλούς νόμους. Ένας απ' αυτούς συσχετίζει τον όγκο και την πίεση μιας ορισμένης ποσότητας ιδανικού αερίου σε σταθερή θερμοκρασία και είναι γνωστός ως νόμος του Boyle. Σύμφωνα με το νόμο αυτό:



Σχήμα 4-12 Σχέση μεταξύ της πίεσης, P, και του όγκου, V, μιας ποσότητας ιδανικού αερίου σε σταθερή θερμοκρασία.

«Σε σταθερή θερμοκρασία το γινόμενο της πίεσης και του όγκου μιας ορισμένης ποσότητας αερίου παραμένει σταθερό, καθώς το αέριο συμπιέζεται ή εκτονώνεται», δηλαδή

$$PV = \text{σταθ.} \qquad (4.45)$$

εμφανίζεται ο πίνακας μετρήσεων πίεσης, P(kPa) – όγκου, V(cm^3).

2. Επιλέξτε "Start" και ακολούθως "Keep" για την καταγραφή της τιμής της πίεσης. Εισάγετε την τιμή του όγκου στο αναδυόμενο πλαίσιο από το πληκτρολόγιο. Ο όγκος του εγκλωβισμένου αέρα στο σωλήνα θα μεταβληθεί αργά από 24 cm^3 έως 15 cm^3 με βήμα 1 cm^3. Μετά από το πέρας λήψης των μετρήσεων επιλέξτε "Stop" και βγείτε από το πρόγραμμα <u>χωρίς να αποθηκεύσετε τα δεδομένα</u>.
3. Καταγράψτε τη θερμοκρασία, T του Εργαστηρίου κατά τη διάρκεια λήψης των μετρήσεων.
4. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της πίεσης P σε συνάρτηση με τον όγκο V. Τι παρατηρείτε για τη μορφή της καμπύλης;
5. Υποθέστε ότι η γενική σχέση που συνδέει την πίεση P με τον όγκο V είναι μια εξίσωση ν-οστού βαθμού, όπως η Εξ. (4.53). Για τον προσδιορισμό των συντελεστών ν και C αυτής θα πρέπει να την ανάγεται σε γραμμική, λαμβάνοντας τους λογαρίθμους και των δύο μελών της. Έτσι, προκύπτει

$$\log P = \log C + \nu \log V \tag{4.54}$$

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του log$P$ σε συνάρτηση του log$V$. Από την κλίση της προκύπτουσας ευθείας προσδιορίστε τη σταθερά ν, στρογγυλεύοντάς την στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό. Στη συνέχεια, προσδιορίστε τη σταθερά C από την Εξ. (4.54) για ένα τυχαίο σημείο της ευθείας, όχι κατ' ανάγκη πειραματικό.

6. Προσδιορίστε τον αριθμό των γραμμομορίων, n, και τον αριθμό των μορίων, N, του εγκλωβισμένου αέρα.
7. Εκθέστε τα συμπεράσματά σας.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Αν το Σχ. 4-12 παριστάνει την ισόθερμη καμπύλη για τη θερμοκρασία περιβάλλοντος, ποια θα είναι η ισόθερμη καμπύλη για υψηλότερη θερμοκρασία;
2. Θεωρώντας δύο διαφορετικούς όγκους για μια ποσότητα αερίου σε σταθερή θερμοκρασία, δείξτε ότι ο λόγος των δυο όγκων ισούται με το αντίστροφο του λόγου των δυο αντίστοιχων πιέσεων.
3. Ποιες είναι οι μονάδες του γινομένου PV; Ποιο φυσικό μέγεθος εκφράζει;
4. Θεωρήστε 1 mole ενός ιδανικού αερίου σε σταθερή θερμοκρασία. Πώς σχετίζεται η πυκνότητά του με την πίεσή του;
5. Πόσος είναι ο αριθμός των μορίων 1 cm^3 αέρα σε κανονικές συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης (θερμοκρασία 0 °C = 273 K και πίεση 1 atm = 1,01 x 10^5 Pa);

4.2.4 Ο ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής είναι μια επαναδιατύπωση του νόμου διατήρησης της ενέργειας. Στην πράξη όμως υπάρχουν θερμοδυναμικές διεργασίες στις οποίες η ενέργεια διατηρείται, αλλά ποτέ δε συμβαίνουν. Για παράδειγμα, αν φέρουμε σ' επαφή ένα θερμό μ' ένα ψυχρό σώμα, θερμότητα μεταφέρεται απ' το θερμό στο ψυχρό κι όχι αντίστροφα. Ή, ακόμα κατά την ολίσθηση ενός σώματος πάνω σ' ένα άλλο παράγεται θερμότητα λόγω τριβής, ενώ προσφορά θερμότητας στο σύστημα δεν προκαλεί την ολίσθηση των δύο σωμάτων. Οι περιορισμοί αυτοί, που υπάρχουν για τη μεταφορά θερμότητας από ένα σώμα σ' ένα άλλο και γενικότερα για τη μετατροπή της θερμότητας σε άλλη μορφή ενέργειας, είναι αντικείμενο του δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής.

Για να πετύχουμε μια ποσοτική διατύπωση του νόμου αυτού, θα πρέπει να εισάγουμε μια νέα έννοια: την ***εντροπία***, S. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα κρυσταλλικό στερεό - ένα στερεό που έχει τα άτομά του διατεταγμένα σε απόλυτα καθορισμένες θέσεις - με ομοιόμορφη θερμοκρασία T, στο οποίο προσφέρουμε ένα στοιχειώδες ποσό θερμότητας dQ, ώστε το στερεό να μεταπέσει σε υγρό. Στη μεταβολή αυτή της κατάστασης, που συνυπάρχουν και οι δύο φάσεις, το προσφερόμενο ποσό θερμότητας δεν καταναλίσκεται για την αύξηση της θερμοκρασίας, που παραμένει σταθερή και κατά συνέπεια ούτε για την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του σώματος, αλλά μόνο για την αύξηση της αταξίας του. Μέτρο της αταξίας ενός συστήματος αποτελεί το μακροσκοπικό φυσικό μέγεθος, που ονομάζουμε εντροπία. Επειδή στη φύση δεν υπάρχει απόλυτη τάξη, μιλάμε πάντα για μεταβολές της εντροπίας. Κάτω από τις συνθήκες αυτές ορίζουμε τη μεταβολή της εντροπίας ενός συστήματος με την εξίσωση:

$$dS = \frac{dQ}{T} \tag{4.55}$$

όπου: dQ η προσφερόμενη (ή αποβαλλόμενη) θερμότητα στο σύστημα σε σταθερή θερμοκρασία και T η απόλυτη θερμοκρασία του συστήματος. Η Εξ.(4.55) δείχνει ότι η εντροπία εκφράζεται σε μονάδες J/K. Πρέπει να επισημάνουμε επίσης, ότι ο παραπάνω ορισμός ισχύει μόνο για αντιστρεπτές μεταβολές.

Όταν ένα σύστημα οδεύει από μια κατάσταση 1 σε μια κατάσταση 2 διά μέσου ενός αντιστρεπτού μετασχηματισμού, η ολική μεταβολή της εντροπίας είναι:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \tag{4.56}$$

Η μεταβολή αυτή της εντροπίας εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική κατάσταση και όχι από τις ενδιάμεσες καταστάσεις. Έτσι κατά τη διάρκεια ενός αντιστρεπτού κύκλου η μεταβολή της εντροπίας είναι μηδέν. Το ίδιο συμβαίνει και κατά τη διάρκεια μιας αντιστρεπτής αδιαβατικής διεργασίας.

Ας εφαρμόσουμε τώρα τον παραπάνω ορισμό για την περίπτωση ενός συστήματος που αποτελείται από δυο σώματα A και B διαφορετικών θερμοκρασιών T_A και T_B αντίστοιχα με $T_A > T_B$. Αν αρχικά τα δυο σώματα είναι απομονωμένα από το περιβάλλον και στη συνέχεια έλθουν σε θερμική επαφή, τότε ένα ποσό θερμότητας dQ θα μεταφερθεί από το A στο B και όχι αντίστροφα. Κατά συνέπεια η εντροπία του B θα αυξηθεί κατά $\Delta S_B = dQ/T_B$, ενώ η εντροπία του A θα μειωθεί κατά $\Delta S_A = -dQ/T_A$. Άρα η εντροπία του συστήματος θα μεταβληθεί κατά

$$\Delta S = \frac{dQ}{T_B} - \frac{dQ}{T_A}$$

που είναι θετικός αριθμός, επειδή $T_A > T_B$ και $dQ > 0$.

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε να το γενικεύσουμε στην ακόλουθη πρόταση:

"Στη διάρκεια πραγματικών διεργασιών, η εντροπία απομονωμένου συστήματος πάντοτε αυξάνει και γίνεται μέγιστη στην κατάσταση ισορροπίας."

Η πρόταση αυτή εκφράζεται με την εξίσωση:

$$\Delta S \geq 0 \tag{4.57}$$

και αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του ***δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής***.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4-6 Ισόθερμη εκτόνωση ιδανικού αερίου.

Ας θεωρήσουμε την αντιστρεπτή ισόθερμη εκτόνωση ενός ιδανικού αερίου θερμοκρασίας T από όγκο V_1 σε όγκο V_2. Να υπολογισθεί η μεταβολή της εντροπίας.

Λύση

Κατά την ισόθερμη διεργασία η θερμότητα που προσφέρεται στο σύστημα μετατρέπεται εξ ολοκλήρου σε έργο, δηλαδή:

$$dQ = P\,dV.$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση αυτή, που ισχύει για αντιστρεπτές διεργασίες, στην Εξ. (4.56) και λύνοντας ως προς P την καταστατική εξίσωση των αερίων, $P=nRT/V$ (θεωρούμε ποσότητα n γραμμομορίων) παίρνουμε:

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int_{V_1}^{V_2} P dV = nR\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Η εντροπία, δηλαδή, του αερίου αυξήθηκε κατά τη διάρκεια της αντιστρεπτής εκτόνωσης. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι η μεταβολή της εντροπίας είναι ανεξάρτητη της διαδρομής που συνδέει τις δυο καταστάσεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4-7 Η θερμική μηχανή του Carnot.

Η μετατροπή θερμικής ενέργειας εξολοκλήρου σε έργο δεν γίνεται στη φύση και απαιτεί τη χρησιμοποίηση μιας θερμικής μηχανής. Η πιο απλή μηχανή για το σκοπό αυτό είναι η μηχανή του Carnot. Η μηχανή του Carnot λειτουργεί μεταξύ δύο θερμοκρασιών T_1 και T_2 ($T_1 > T_2$), κατά τη διάρκεια ενός κύκλου που συνίσταται από δύο ισόθερμες και δύο αδιαβατικές αντιστρεπτές διεργασίες. Οι μεταβολές της ενέργειας που συμ-