3.1 ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Στο Κεφάλαιο 2 συζητήσαμε τις έννοιες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, χωρίς να θεωρήσουμε το αίτιο, που προκαλούσε την κίνηση των σωμάτων. Στο κεφάλαιο αυτό ερευνούμε τους νόμους του Νεύτωνα για την κίνηση των σωμάτων και μετά δίνουμε μερικές εφαρμογές, για να βοηθηθεί ο σπουδαστής στην αντιμετώπιση προβλημάτων κίνησης.

Η δύναμη καθορίζεται απ' το αποτέλεσμά της, που είναι η μεταβολή της κινητικής κατάστασης του σώματος. Η μεταβολή της κινητικής κατάστασης εμφανίζεται ως επιτάχυνση. Το αποτέλεσμα, λοιπόν, μιας δύναμης, που ενεργεί σ' ένα σώμα είναι να του προσδώσει επιτάχυνση.

Διατυπώνουμε στη συνέχεια τους τρεις νόμους του Νεύτωνα, που αναφέρονται και ως αξιώματα.

Πρώτος νόμος του Νεύτωνα

Όταν σ' ένα σώμα δεν επιδρά εξωτερική δύναμη, τότε η κινητική του κατάσταση παραμένει αμετάβλητη, δηλαδή:

$$\text{όταν } \vec{F} = 0, \text{ τότε } \vec{a} = 0 \tag{3.1}$$

Αυτό σημαίνει ότι, ένα σώμα που βρίσκεται σε ηρεμία, παραμένει σε ηρεμία, ενώ ένα σώμα κινούμενο με ταχύτητα $\vec{v}$, συνεχίζει να κινείται με την ίδια ταχύτητα, εφ' όσον στο σώμα δεν ενεργεί συνολικά δύναμη.

Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα σχετίζεται με την έννοια της ***ορμής.*** Ονομάζουμε ορμή ενός σώματος το γινόμενο της μάζας του επί την ταχύτητά του

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{3.2}$$

Κατά τον Νεύτωνα, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος αποτελεί ένα μέτρο της δύναμης, που επιδρά στο σώμα. Την πρόταση αυτή τη γράφουμε με την εξίσωση:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{3.3}$$

δηλαδή, η δύναμη είναι ίση με τη μάζα επί την επιτάχυνση, αν η μάζα είναι σταθερή.

Η μάζα που υπεισέρχεται στο νόμο αυτό ονομάζεται ***μάζα αδράνειας*** και αποτελεί ένα μέτρο του πόσο δύσκολο είναι να επιταχύνει κανείς ένα σώμα.

Από την Εξ. (3.2) προκύπτει η μονάδα μέτρησης της ορμής, που είναι το kg m/s. Η μονάδα δύναμης είναι το newton (N), που προκύπτει από την Εξ. (3.3) ίση με 1 kg m/s^2.

Ο στόχος του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, που αποτελεί το θεμελιώδη νόμο της Κλασικής Μηχανικής, είναι να προσδιορίζει την επιτάχυνση $\vec{a}$ από τη δύναμη $\vec{F}$ και τη μάζα m. Στο νόμο αυτό $\vec{F}$ είναι το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων, που επιδρούν στο σώμα και $\vec{a}$ η συνισταμένη επιτάχυνσή του. Η εύρεση της επιτάχυνσης οδηγεί, στη συνέχεια, στον προσδιορισμό της ταχύτητας και της θέσης του σώματος συναρτήσει του χρόνου. Γι' αυτό, ο νόμος αυτός ονομάζεται ***νόμος της κίνησης*** και η Εξ. (3.3), που τον εκφράζει, ***εξίσωση της κίνησης.*** Έτσι, η γνώση της δύναμης σε συνδυασμό με την αρχική κατάσταση του σώματος (θέση και ταχύτητα σε μια ορισμένη χρονική στιγμή) οδηγεί στον πλήρη καθορισμό της τροχιάς του σώματος.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η ισχύς του νόμου αυτού περιορίζεται σε ταχύτητες πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός, για τις οποίες η μάζα m παραμένει σταθερή. Για ταχύτητες, που πλησιάζουν την ταχύτητα του φωτός, αντικαθίσταται από τον γενικευμένο νόμο του Einstein.

Τρίτος νόμος του Νεύτωνα

Ο νόμος αυτός στηρίζεται στην έννοια της ***αλληλεπίδρασης*** μεταξύ των σωμάτων και αναφέρεται συχνά ως νόμος δράσης - αντίδρασης. Κι αυτό, γιατί οι δυνάμεις δεν είναι παρά οι εκδηλώσεις της αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωμάτων. Η αλληλεπίδραση προϋποθέτει αμοιβαία δράση. Κάθε δύναμη, δηλαδή, προέρχεται από ένα υλικό σώμα και έχει αποδέκτη ένα άλλο υλικό σώμα. Η ιδιότητα αυτή των δυνάμεων οδηγεί στη διατύπωση του τρίτου νόμου του Νεύτωνα:

Αν δυο σώματα Α και Β αλληλεπιδρούν, η δύναμη $\vec{F}_{AB}$ που ασκείται από το Β στο Α είναι αντίθετη προς τη δύναμη $\vec{F}_{BA}$ που ασκείται από το Α στο

Σχήμα 3-1 Γραφική απεικόνιση του τρίτου νόμου του Νεύτωνα

B, δηλαδή:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \qquad (3.4)$$

Ο νόμος αυτός μας λέγει ότι οι δυνάμεις στη φύση εμφανίζονται κατά ζεύγη. Εκείνο που έχει σημασία να τονίσουμε είναι ότι οι δυνάμεις που απαρτίζουν αυτά τα ζεύγη επιδρούν σε διαφορετικά σώματα και γι' αυτό η κάθε μια επηρεάζει μόνο την κίνηση εκείνου του σώματος στο οποίο επιδρά. Η μεγάλη όμως σημασία του τρίτου νόμου του Νεύτωνα έγκειται στο ότι τόσο ο πρώτος, όσο και ο δεύτερος για να ισχύουν προϋποθέτουν τον τρίτο. Η Εξ. (3.4) για να ισχύει προϋποθέτει ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ των δυο σωμάτων συμβαίνει ακαριαία. Πάντως, οι αλληλεπιδράσεις μεταδίδονται με πεπερασμένη ταχύτητα, ίση με την ταχύτητα του φωτός. Το γεγονός αυτό εισάγει δυσκολίες στην εφαρμογή του τρίτου νόμου.

Θα μελετήσουμε, στη συνέχεια, μερικές αξιοσημείωτες εφαρμογές των νόμων του Νεύτωνα στην κίνηση των σωμάτων, αφού πρώτα αναφερθούμε στη φύση των δυνάμεων, που είναι οι εκδηλώσεις των φυσικών αλληλεπιδράσεων.

3.2 Η ΦΥΣΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Όταν αναφερόμαστε στη φύση των δυνάμεων εννοούμε τον προσδιορισμό των νόμων, σύμφωνα με τους οποίους ασκούνται οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των υλικών σωμάτων ανάλογα με τις ιδιότητές τους. Όλα τα φαινόμενα, εξάλλου, που παρατηρούμε στη φύση είναι αποτέλεσμα των φυσικών αλληλεπιδράσεων των μερών της ύλης. Η Φυσική για την ώρα γνωρίζει τέσσερα είδη αλληλεπιδράσεων:

(α) **Βαρυτική αλληλεπίδραση.**
Είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ μαζών και υπεύθυνη για τα φαινόμενα της βαρύτητας από την πτώση ενός σώματος στην επιφάνεια της Γης μέχρι τη δημιουργία των πλανητών, των πλανητικών συστημάτων, των αστέρων, των γαλαξιών και γενικά για τη δυναμική του Σύμπαντος. Ο νόμος που διέπει τη βαρυτική αλληλεπίδραση διατυπώθηκε από το Νεύτωνα και ονομάζεται ***νόμος της παγκόσμιας έλξης***. Είναι η ασθενέστερη αλληλεπίδραση στη φύση, η ακτίνα δράσης της είναι θεωρητικά άπειρη και έχει πιθανόν το κβάντο της, το ***βαρυτόνιο***.

(β) **Ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση.**
Η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση χαρακτηρίζεται από τη δύναμη που ασκείται μεταξύ σωματιδίων που φέρουν ηλεκτρικό φορτίο. Το φορτίο αποτελεί ένα θεμελιώδες σύμφυτο χαρακτηριστικό της ύλης. Όταν τα φορτισμένα σωματίδια είναι ακίνητα, η δύναμη ονομάζεται ηλεκτρική, ενώ όταν κινούνται, ασκείται και μια επιπλέον δύναμη, που ονομάζεται μαγνητική. Οι δυο αυτές δυνάμεις αποτελούν συνιστώσες της ενιαίας ηλεκτρομαγνητικής δύναμης. Για να δώσουμε μια εκτίμηση της ισχύος της σε σύγκριση με τις άλλες αλληλεπιδράσεις, ας θεωρήσουμε την αλληλεπίδραση μεταξύ δυο γειτονικών πρωτονίων του πυρήνα. Στην περίπτωση αυτή η ηλεκτρική δύναμη είναι της τάξης των 10^2 N, ενώ η αντίστοιχη βαρυτική της τάξης των 10^{-34} N. Το κβάντο της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης είναι το ***φωτόνιο*** και η ακτίνα δράσης της θεωρητικά άπειρη. Σ' αυτή οφείλονται όλες οι γνωστές μας φυσικές και χημικές ιδιότητες της ύλης στη στερεά, την υγρή και αέρια φάση της. Είναι υπεύθυνη για το σχηματισμό των ατόμων, των μορίων και του βιολογικού υλικού και αποτελεί τη βάση της ηλεκτρικής επιστήμης και τεχνολογίας.

(γ) **Ισχυρή πυρηνική αλληλεπίδραση.**
Ασκείται ανάμεσα στα μικροσωματίδια που λέγονται ***αδρόνια*** (πρωτόνια, νετρόνια και μεσόνια). Είναι υπεύθυνη για τη σταθερότητα των ατομικών πυρήνων σε πείσμα των ηλεκτρικών απωστικών δυνάμεων. Η ισχύς της ανάμεσα σε δυο γειτονικά πρωτόνια του πυρήνα είναι της τάξης του 10^4 N και η ακτίνα δράσης της εξαιρετικά μικρή της τάξης των 10^{-15} m. Τα φαινόμενα σύντηξης που προκαλούν το ηλιακό φως και η σχάση που τροφοδοτεί τη σημερινή γενιά των πυρηνικών αντιδραστήρων, αποτελούν όψεις αυτής της αλληλεπίδρασης.

(δ) **Ασθενής πυρηνική αλληλεπίδραση.**
Τα στοιχειώδη σωματίδια, που χαρακτηρίζονται ως ***λεπτόνια*** (ηλεκτρόνια, νετρίνα, μυόνια και τα αντισωματίδιά τους), αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με μια ασθενή πυρηνική δύναμη, όταν οι μεταξύ τους αποστάσεις είναι μικρότερες από 10^{-17}m. Είναι ασθενέστερη από την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση, ισχυρότερη όμως από τη βαρυτική με ισχύ ανάμεσα σε δυο γειτονικά πρωτόνια της τάξης των 10^{-2} N. Η αλληλεπίδραση αυτή προκαλεί το φαινόμενο που είναι γνωστό ως ακτινοβολία-*β*

ένα διάνυσμα με μέτρο ίσο προς το εμβαδόν dS, διεύθυνση κάθετη προς την επιφάνεια και φορά προς το εξωτερικό της επιφάνειας, τότε το εσωτερικό γινόμενο της έντασης $\vec{E}$ του πεδίου επί το διάνυσμα επιφάνειας $d\vec{S}$.

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{3.5}$$

ορίζεται ως η ***ροή του πεδίου*** διά μέσου του στοιχείου της επιφάνειας $d\vec{S}$. Η ολική ροή του πεδίου διά μέσου της επιφάνειας S δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{3.6}$$

Ένα πεδίο στο οποίο η ένταση σε κάθε σημείο του είναι σταθερή ονομάζεται ***ομογενές***. Αν το πεδίο δε μεταβάλλεται με το χρόνο ονομάζεται ***στατικό***, ενώ αλλιώς ***μεταβαλλόμενο***. Θα περιγράψουμε τώρα το πεδίο βαρύτητας και στη συνέχεια το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

3.4 ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

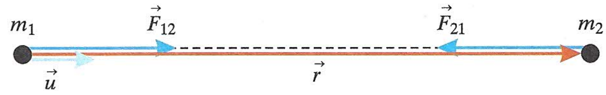
Είναι γνωστό από την καθημερινή μας εμπειρία, ότι η Γη εξασκεί κατακόρυφη έλξη σε κάθε σώμα κοντά στην επιφάνειά της. Η δύναμη αυτή εκφράζει το βάρος του σώματος.

Ο Νεύτωνας για να ερμηνεύσει την έλξη αυτή των σωμάτων από τη Γη, γενίκευσε το φαινόμενο με τη διατύπωση του ***νόμου της παγκόσμιας έλξης των μαζών***. Ο νόμος αυτός ορίζει ότι:
Ένα σώμα μάζας m_1 έλκει ένα άλλο σώμα μάζας m_2, που βρίσκεται σε απόσταση $\vec{r}$ από το πρώτο, με δύναμη

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u} \tag{3.7}$$

*όπου $\vec{u}$ το μοναδιαίο διάνυσμα από το σώμα m_1 στο m_2 και G μια σταθερά, γνωστή ως **σταθερά της παγκόσμιας έλξης** με αριθμητική τιμή* 6,67 x 10^{-11} Nm^2/kg^2. Η δύναμη βαρύτητας, που δίνεται από την Εξ. (3.7), είναι μια κεντρική δύναμη, έχει δηλαδή διεύθυνση την ευθεία που συνδέει τα δυο σώματα, όπως φαίνεται στο Σχ. 3-3.

Γράφοντας την Εξ. (3.7) με τη μορφή:



Σχήμα 3-3 Βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ δυο σημειακών μαζών.

$$\frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = -G\frac{m_1}{r^2}\vec{u} \tag{3.8}$$

παρατηρούμε ότι ο λόγος $\vec{F}_{21}/m_2$ είναι ανεξάρτητος της μάζας m_2 στην οποία ασκείται η δύναμη. Ο λόγος αυτός ορίζεται ως η ***ένταση του πεδίου βαρύτητας*** σε απόσταση r από τη μάζα m_1. Γενικότερα, η ένταση του πεδίου βαρύτητας σ' ένα σημείο ορίζεται ως η δύναμη βαρύτητας $\vec{F}$ σ' ένα σωμάτιο τοποθετημένο στο εν λόγω σημείο προς τη μάζα m του σωματίου

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{3.9}$$

Αυτό σημαίνει ότι η ένταση του πεδίου βαρύτητας είναι η δύναμη βαρύτητας ανά μονάδα μάζας. Γενικά, μπορούμε να πούμε, ότι κάθε μάζα M δημιουργεί στο γύρω χώρο της ένα πεδίο βαρύτητας με ένταση

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u} \tag{3.10}$$

Κάθε δύναμη που ενεργεί σ' ένα σώμα μάζας m μπορεί να εκφραστεί με τη σχέση:

$$\vec{F} = m\vec{g} \tag{3.11}$$

Η μάζα που προσδιορίζεται από την Εξ. (3.11) ονομάζεται ***μάζα βαρύτητας*** και, όπως αποδείχθηκε πειραματικά, συμπίπτει με τη μάζα αδράνειας.

Έτσι, η ένταση του πεδίου βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης είναι:

$$\vec{g}_o = -G\frac{M}{R^2}\vec{u} \tag{3.12}$$

όπου M η μάζα και R η ακτίνα της Γης. Η ένταση του πεδίου βαρύτητας της Γης σε απόσταση r από το κέντρο της, για $r \geq R$, μπορεί να εκφρασθεί ως εξής:

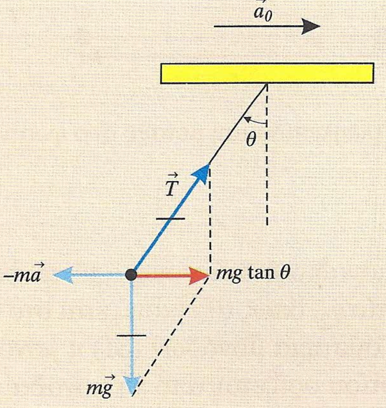
$$g = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{R^2}\frac{R^2}{r^2} = g_o\left(\frac{R}{r}\right)^2 \tag{3.13}$$

Λύση
Ένας παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο επιταχυνόμενο όχημα για να εξηγήσει την απόκλιση του νήματος πρέπει να δεχτεί ότι εκτός από τη δύναμη βαρύτητας $m\vec{g}$ και τη δύναμη $\vec{T}$ από το νήμα, εξασκείται και δύναμη αδράνειας $-m\vec{a}_o$. Δεδομένου ότι το σφαιρίδιο για τον παρατηρητή αυτόν βρίσκεται σε σχετική ηρεμία, η συνισταμένη των δυνάμεων που εξασκούνται σ' αυτό είναι μηδέν, δηλαδή:

$$\vec{T} + m\vec{g} + (-m\vec{a}_o) = 0 \quad \text{ή}$$

$$mg \tan\theta = ma_o,$$

απ' την οποία προκύπτει: $a_o = g \tan\theta$.



Σχήμα 3-11 Μέτρηση της επιτάχυνσης οχήματος.

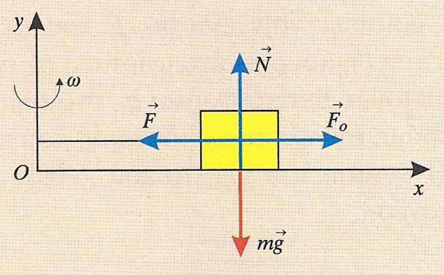
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3-6 Φυγόκεντρη δύναμη

Ένα σώμα μάζας m μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβή κατά μήκος μιας οριζόντιας ράβδου Ox, όπως φαίνεται στο Σχ. 3-12. Το σώμα συνδέεται με το κέντρο O με τη βοήθεια ενός ελατηρίου. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα Oy με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Να μελετηθεί η κίνηση του σώματος.

Λύση
Η επιτάχυνση του σώματος ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι: $\vec{a}_o = -\omega^2 \vec{r}$, [Εξ. (2.15)], όπου το $\vec{r}$ κατευθύνεται από τον άξονα περιστροφής προς τα έξω και είναι κάθετο σ' αυτόν. Η επιτάχυνση αυτή είναι, ως γνωστόν, η κεντρομόλος επιτάχυνση. Ένας παρατηρητής στερεά συνδεδεμένος με την περιστρεφόμενη ράβδο, παρατηρεί ότι το σώμα ως προς αυτόν ηρεμεί, παρά το γεγονός ότι το ελατήριο είναι τεντωμένο. Για να ερμηνεύσει το φαινόμενο δέχεται ότι στο σώμα μάζας m, εκτός από τις δυνάμεις $m\vec{g}$, αντίδραση της ράβδου $\vec{N}$ και $\vec{F}$ από το ελατήριο, εξασκείται η δύναμη αδράνειας:

$$\vec{F}_o = -m\vec{a}_o = m\omega^2\vec{r} \qquad (3.46)$$

ώστε κατά τον άξονα Ox να ισχύει: $\vec{F} + \vec{F}_o = 0$. Η δύναμη αδράνειας $\vec{F}_o$ σ' αυτή την περίπτωση ονομάζεται ***φυγόκεντρη δύναμη***. Η φυγόκεντρη δύναμη κατευθύνεται από τον άξονα περιστροφής προς τα έξω.



Σχήμα 3-12 Φυγόκεντρη δύναμη.

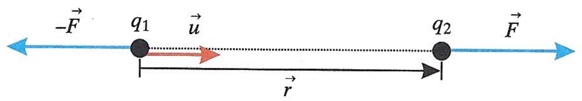
3.7 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Γνωρίζουμε σήμερα ότι το ηλεκτρικό φορτίο είναι μια ιδιότητα των στοιχειωδών σωματιδίων της ύλης. Στη φύση υπάρχουν δυο είδη φορτίων, το θετικό και το αρνητικό. Το στοιχειώδες θετικό φορτίο είναι το φορτίο του πρωτονίου, $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C, ενώ το στοιχειώδες αρνητικό φορτίο είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου, $-e$. Μέχρι σήμερα δεν έχει βρεθεί στη φύση φορτίο μικρότερο από αυτή την τιμή. Έτσι, κάθε φορτίο της ύλης είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του στοιχειώδους ηλεκτρικού φορτίου.

Νόμος του Coulomb

Το πείραμα επιβεβαίωσε ότι ηλεκτρικό φορτίο q_1 δημιουργεί στον περιβάλλοντα χώρο του ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο αλληλεπιδρά με άλλο ηλεκτρικό φορτίο q_2, ευρισκόμενο σε απόσταση r από το πρώτο, με δύναμη $\vec{F}$, που δίνεται από το νόμο του Coulomb:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u} \qquad (3.47)$$



Σχήμα 3-13 Αλληλεπίδραση μεταξύ δυο φορτίων q_1 και q_2.

όπου $\vec{u}$ το μοναδιαίο διάνυσμα από το φορτίο q_1 προς το φορτίο q_2, όπως απεικονίζεται στο Σχ.3-13. Στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI) η μονάδα ηλεκτρικού φορτίου ορίζεται από τη μονάδα έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος, που είναι το ampère (A). Το ηλεκτρικό φορτίο στο σύστημα SI μετριέται σε coulomb (C), όπου 1C = 1A · 1s. Η σταθερά ε_o ονομάζεται ***διηλεκτρική σταθερά του κενού*** και έχει τιμή $8{,}854 \times 10^{-12}$ C^2/Nm^2, ενώ η σταθερά αναλογίας $1/4\pi\varepsilon_o$ έχει την τιμή 9×10^9 Nm^2/C^2.

Από τη μορφή του νόμου του Coulomb είναι εμφανείς οι ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Η δύναμη Coulomb είναι κεντρική δύναμη, έχει δηλαδή τη διεύθυνση του άξονα που συνδέει τα δυο φορτία.
(2) Τα ομώνυμα ηλεκτρικά φορτία απωθούνται, ενώ τα ετερώνυμα έλκονται.
(3) Οι δυνάμεις Coulomb είναι νευτώνειες, ήτοι: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Ένταση ηλεκτρικού πεδίου

Για να ορίσουμε την ένταση $\vec{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου, που δημιουργεί ένα φορτίο q σε απόσταση r, τοποθετούμε θετικό φορτίο q_o στο σημείο αυτό και μετράμε την ηλεκτρική δύναμη, που επιδρά σ' αυτό. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ορίζεται από τη σχέση:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_o} \tag{3.48}$$

Έτσι, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται σε θετικό φορτίο.

Ο ορισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ μοιάζει με τον ορισμό της έντασης του πεδίου βαρύτητας $\vec{g}$, αντί όμως για τη μάζα μας ενδιαφέρει το φορτίο του σώματος. Αν και η ένταση του πεδίου βαρύτητας εκφράζεται συνήθως σε m/s^2, η μονάδα της όπως προκύπτει από τον ορισμό της είναι το 1N/kg. Η μονάδα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι το 1N/C, αν και συνήθως εκφράζεται σε Volt/m, όπως θα δούμε αργότερα. Έτσι, οι μονάδες και των δύο εντάσεων εκφράζονται ως το πηλίκο της μονάδας δύναμης δια της μονάδας ενός φυσικού μεγέθους (μάζας ή φορτίου).

Αν εφαρμόσουμε το νόμο του Coulomb για φορτίο q που δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο και για το φορτίο q_o σε συνδυασμό με την Εξ. (3.48), παίρνουμε για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στη θέση του φορτίου q_o

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\vec{u} \tag{3.49}$$

Η διεύθυνση του $\vec{E}$ είναι η διεύθυνση της ευθείας που περνά από το φορτίο q έως το q_o και η φορά του είναι προς τα έξω αν το φορτίο q είναι θετικό, ή προς τα μέσα αν το φορτίο q είναι αρνητικό.

Νόμος του Gauss

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (3.49), που προβλέπει ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σ' ένα σημείο του χώρου είναι αντιστρόφως ανάλογη προς το τετράγωνο της απόστασης του σημείου από το φορτίο που δημιουργεί το πεδίο, μπορούμε να αποδείξουμε, εφαρμόζοντας την Εξ. (3.6), μια σημαντική ιδιότητα του ηλεκτρικού πεδίου, που είναι γνωστή ως ***νόμος του Gauss***: *Η ολική ροή του ηλεκτρικού πεδίου σε μια κλειστή επιφάνεια είναι ανάλογη προς το ολικό φορτίο q που περικλείει η επιφάνεια και ανεξάρτητη από την ύπαρξη φορτίων στον εξωτερικό χώρο*, ήτοι

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o} \tag{3.50}$$

Ο νόμος του Gauss είναι διπλά χρήσιμος. Αφενός μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως το αντίστροφο του νόμου του Coulomb για τον προσδιορισμό της κατανομής φορτίου που δημιουργεί ένα γνωστό πεδίο, αφετέρου για τον προσδιορισμό της έντασης του πεδίου που δημιουργεί μια δεδομένη κατανομή φορτίου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3-7

Ένα ολικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα στο εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας R έτσι ώστε η πυκνότητα φορτίου ρ να είναι σταθερή. Προσδιορίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σ' ένα σημείο (α) στο εξωτερικό της σφαίρας και (β) στο εσωτερικό της.

Παρατηρούμε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της σφαιρικής κατανομής αυξάνει γραμμικά με το r. Στο όριο $r = R$ οι δυο εκφράσεις συμφωνούν. Οι λύσεις για τις δυο περιοχές παριστάνονται γραφικά στο Σχ. 3-14γ.

3.7.1 ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΟΥ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Το ηλεκτρικό πεδίο εξασκεί πάνω σε φορτισμένο σωμάτιο με φορτίο q και μάζα m δύναμη, η οποία δίνεται από την εξίσωση:

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \tag{3.51}$$

Επομένως, η επιτάχυνση του σωματίου είναι:

$$a = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E} \tag{3.52}$$

Η Εξ. (3.52) αποτελεί την εξίσωση της κίνησης. Από την εξίσωση αυτή με μια ολοκλήρωση προκύπτει η έκφραση της ταχύτητας

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \frac{q}{m}\vec{E}t \tag{3.53}$$

και με μια ακόμη ολοκλήρωση η έκφραση της θέσης

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\frac{q}{m}\vec{E}t^2 \tag{3.54}$$

όπου $\vec{r}_o$ το διάνυσμα θέσης και $\vec{v}_o$ το διάνυσμα της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3-8 Κίνηση ηλεκτρονίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

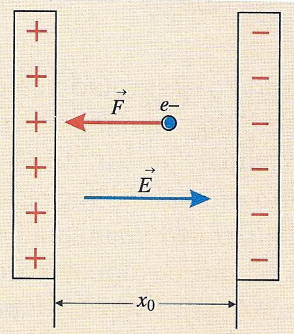
Ένα ηλεκτρόνιο εκπέμπεται από την αρνητικά φορτισμένη πλάκα του Σχ. 3-15 με μηδενική αρχική ταχύτητα. Η ένταση του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου είναι 20.000 N/C και η απόσταση μεταξύ των πλακών 0,02 m. Πόση είναι η τελική ταχύτητα του ηλεκτρονίου;

Λύση

Αν m η μάζα και $-e$ το φορτίο του ηλεκτρονίου, οι Εξ. (3.53) και (3.54) για την περίπτωσή μας παίρνουν τη μορφή:

$$v_x = \frac{e}{m}E_x t, \quad v_y = 0 \quad v_z = 0$$

$$x = x_o - \frac{1}{2}\frac{e}{m}E_x t^2, \quad y = 0 \quad z = 0$$



Σχήμα 3-15 Κίνηση ηλεκτρονίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Αν απαλείψουμε το χρόνο t στις ανωτέρω εξισώσεις, παίρνουμε για την τελική θέση όπου $x = 0$:

$$v_x^2 = \frac{2e}{m}E_x x_o$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα, βρίσκουμε για την τελική ταχύτητα του ηλεκτρονίου την τιμή $v_x = 1{,}2 \times 10^7$ m/s.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3-9 Εκτροπή ηλεκτρονικής δέσμης

Το Σχ. 3-16 δείχνει την κίνηση δέσμης ηλεκτρονίων, που εισέρχονται με αρχική ταχύτητα $v_{ox} = 1{,}2 \times 10^7$ m/s κάθετα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E} = -E_y\vec{j}$, όπου $E_y = 10^4$ N/C, που σχηματίζεται στο χώρο ενός επίπεδου πυκνωτή με μήκος πλακών $L = 0{,}02$ m.

(α) Να περιγραφεί η κίνηση των ηλεκτρονίων.

(β) Πόση είναι η γωνία που σχηματίζει η ηλεκτρονική δέσμη με τον άξονα των x τη στιγμή που η δέσμη βγαίνει από τις πλάκες;

(γ) Πόση είναι η κατακόρυφη εκτροπή της δέσμης;

Λύση

(α) Από την Εξ. (3.73) προκύπτει

$$v_n = \frac{I}{Aq_n n}$$

$$= \frac{10\ \text{A}}{(10^{-6}\ \text{m}^2)(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(7 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})}$$

$$= 9 \times 10^{-4}\ \text{m/s}$$

(β) Ο απαιτούμενος χρόνος είναι

$$t = \frac{x}{v_n} = \frac{1\ \text{m}}{9 \times 10^{-4}\ \text{m/s}} = 1{,}1 \times 10^{3}\ \text{s} = 18{,}5\ \text{min}$$

Όταν, όμως, κλείνουμε έναν διακόπτη για το άναμμα ενός λαμπτήρα, ο λαμπτήρας ανάβει σχεδόν αμέσως ανεξάρτητα από την απόσταση διακόπτη – λαμπτήρα. Η αιτία γι' αυτό είναι ότι η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος του σύρματος είναι ίδια με την ταχύτητα του φωτός σ' αυτό. Συνεπώς, όλα τα ελεύθερα ηλεκτρόνια επηρεάζονται από το ηλεκτρικό πεδίο και αρχίζουν να μετακινούνται.

3.9 ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Μέχρι τώρα εξετάσαμε τις δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ φορτίων, που δεν κινούνται το ένα ως προς το άλλο. Οι δυνάμεις αυτές, που ονομάσαμε ηλεκτρικές, δεν είναι απαραίτητο να παραμένουν αναλλοίωτες όταν τα φορτία κινούνται το ένα ως προς το άλλο. Πράγματι, η πειραματική έρευνα απέδειξε ότι η δύναμη μεταξύ δυο κινούμενων φορτίων εξαρτάται τόσο από τη μεταξύ τους απόσταση, όσο και από τη σχετική τους ταχύτητα. Πιο συγκεκριμένα, η δύναμη που ασκείται σε κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο προσαυξάνεται κατά μια μικρή ποσότητα $\vec{F}_M$, που είναι ανάλογη της ταχύτητάς του και ονομάζεται ***μαγνητική δύναμη***. Στην πραγματικότητα, όμως, αυτό που μας εμφανίζεται μακροσκοπικά ως δυο διαφορετικές δυνάμεις δεν είναι τίποτε άλλο από δυο όψεις μιας ενιαίας δύναμης της ***ηλεκτρομαγνητικής***, που έχει δυο συνιστώσες, την ηλεκτρική $\vec{F}_E$ και τη μαγνητική $\vec{F}_M$, ήτοι:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_M \qquad (3.81)$$

Αν όμως έχουμε πολλά φορτία, που κινούνται το ένα ως προς το άλλο, η έκφραση της μαγνητικής δύναμης καθίσταται εξαιρετικά πολύπλοκη. Στην περίπτωση αυτή η κατάσταση απλουστεύεται, αν εισάγουμε την έννοια του πεδίου, που μας απαλλάσσει και από τη λογικά μη ικανοποιητική έννοια της δράσης από απόσταση. Το πείραμα αποδεικνύει ότι κινούμενα ηλεκτρικά φορτία δημιουργούν γύρω τους ένα πεδίο, που το ονομάζουμε ***μαγνητικό πεδίο***, και ασκεί δυνάμεις μόνο σε κινούμενα φορτία. Η ιδιότητα που αποκτά ο χώρος λόγω της ύπαρξης κινούμενων φορτίων καθορίζεται από τη συνάρτηση της ***έντασης του μαγνητικού πεδίου***, $\vec{B}$.

Αν σ' ένα σημείο ενός μαγνητικού πεδίου μετρήσουμε τη δύναμη που ενεργεί σε διάφορα φορτία, που κινούνται σε διαφορετικές κατευθύνσεις, βρίσκουμε σχέση ανάμεσα στη δύναμη, το φορτίο και την ταχύτητα, που περιγράφεται τέλεια από την εξίσωση:

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (3.82)$$

όπου: q το φορτίο σε C, $\vec{v}$ η ταχύτητα του σωματίου σε m/s και $\vec{F}_M$ η δύναμη σε N. Το διάνυσμα $\vec{B}$, που παριστάνει την ένταση του μαγνητικού πεδίου, το βρίσκουμε σε κάθε σημείο του πεδίου, συγκρίνοντας την πειραματική τιμή της $\vec{F}_M$ στο σημείο αυτό με τις αντίστοιχες τιμές των q και $\vec{v}$. Το διάνυσμα $\vec{B}$ μπορεί ν' αλλάζει από σημείο σε σημείο του μαγνητικού πεδίου, αλλά έχει για δεδομένο σημείο ορισμένη τιμή, ανεξάρτητα από το φορτίο και την ταχύτητά του.

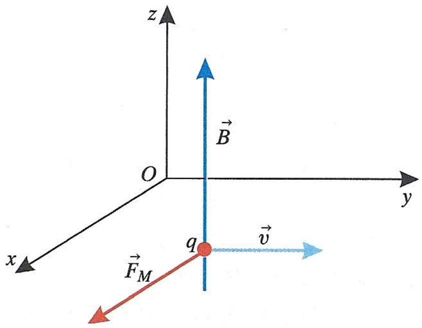
Στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI) μονάδα έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι το 1 tesla (1T):

$$1\text{T} = 1\frac{\text{N}}{\text{Cm/s}} = 1\frac{\text{N}}{\text{A m}}$$

Το μέτρο της μαγνητικής δύναμης, που δίνεται από την Εξ. (3.82), στη γενική περίπτωση είναι:

$$F_M = q\, v\, B \sin\theta \qquad (3.83)$$

όπου θ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{B}$. Η σχέση



Σχήμα 3-22 Δύναμη σε κινούμενο φορτίο μέσα σε μαγνητικό πεδίο

αυτή βρέθηκε πειραματικά από τον Laplace και είναι γνωστή ως ***νόμος του Laplace*** για το κινούμενο φορτίο. Η διεύθυνση της $\vec{F}$ είναι κάθετη στα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{B}$. Από την Εξ. (3.83) παρατηρούμε ότι, όταν η ταχύτητα $\vec{v}$ είναι παράλληλη προς την ένταση $\vec{B}$, τότε η $\vec{F}$ είναι μηδενική. Πράγματι, έχει παρατηρηθεί, ότι σε κάθε μαγνητικό πεδίο υπάρχει μια διεύθυνση κίνησης φορτίων όπου δεν ασκείται δύναμη. Η διεύθυνση αυτή συμπίπτει με τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Στο Σχ. 3-22 φαίνονται οι κατευθύνσεις των διανυσμάτων $\vec{v}$, $\vec{B}$ και $\vec{F}$, που αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα. Η μαγνητική δύναμη παίρνει τη μέγιστη τιμή της, όταν $\theta = 90°$, δηλαδή όταν τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα. Τότε ισχύει:

$$F_M = q\,v\,B$$

Επειδή, όπως είπαμε, η ηλεκτρομαγνητική δύναμη έχει δυο συνιστώσες, την ηλεκτρική και τη μαγνητική, χρειάζονται δυο μεγέθη για να καθοριστεί το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο: το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Οι δυο συναρτήσεις $\vec{E}$ και $\vec{B}$ αποδίδουν πλήρως την ιδιότητα που έχει αποκτήσει ο χώρος. Συγκεκριμένα, προσδιορίζουν ότι αν ένα σωμάτιο που φέρει φορτίο q και κινείται μέσα στο χώρο αυτό με ταχύτητα $\vec{v}$ σε δεδομένη θέση, θα υποστεί μια δύναμη:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{3.84}$$

Η δύναμη αυτή ονομάζεται ***δύναμη Lorentz***. Ο προσδιορισμός της δύναμης αυτής ανάγεται στον καθορισμό των πεδίων $\vec{E}$ και $\vec{B}$.

Κατ' αναλογία προς το ηλεκτρικό πεδίο, ορίζεται και για το μαγνητικό πεδίο η έννοια της ***ροής*** Φ_B από την εξίσωση:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{3.85}$$

με μονάδα στο SI το 1 weber (1Wb): 1Wb = 1T m².

Η μη ύπαρξη μαγνητικού φορτίου στη φύση μας επιτρέπει να γράψουμε για τη μαγνητική ροή την εξίσωση:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{3.86}$$

Η εξίσωση αυτή, που αποτελεί το ***νόμο του Gauss*** για το μαγνητισμό, μας λέγει ότι *η μαγνητική ροή μέσα από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια πρέπει να είναι μηδέν*. Αν την εξίσωση αυτή την παραβάλλουμε με το νόμο του Gauss στο ηλεκτρικό πεδίο, Εξ. (3.50), προκύπτει ότι δεν υπάρχει μαγνητικό φορτίο αντίστοιχο του ηλεκτρικού φορτίου q. Εάν υπήρχε το αποκαλούμενο μαγνητικό φορτίο, θα αντιστοιχούσε σ' ένα *μαγνητικό μονόπολο*, έναν απομονωμένο δηλαδή μαγνητικό πόλο. Πειραματική, όμως, επιβεβαίωση της ύπαρξης μαγνητικού μονοπόλου δεν υπήρξε και επομένως, η απλούστερη πηγή μαγνητικού πεδίου είναι ένα μαγνητικό δίπολο. Αυτό σημαίνει ότι οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι κλειστές γραμμές.

3.9.1 ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΟΥ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Έστω φορτισμένο σωμάτιο μάζας m και φορτίου q κινούμενο μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$. Θα περιγράψουμε την κίνησή του ως προς ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων, όπως αυτό του Σχ. 3-23. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου έχει τη φορά του άξονα των z. Η εξίσωση της κίνησης του φορτισμένου σωματίου υπό την επίδραση της μαγνητικής δύναμης μπορεί να γραφεί:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{3.87}$$

Αναλύοντας τη διανυσματική αυτή εξίσωση στις συνιστώσες των $\vec{v}$ και $\vec{B}$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα του εξωτερικού γινομένου, έχουμε:

$$m\left(\frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}\right) = q\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}$$

$$m\left(\frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}\right) = q\,(v_y B\vec{i} - v_x B\vec{j})$$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m}v_y \qquad (3.88\alpha)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m}v_x \qquad (3.88\beta)$$

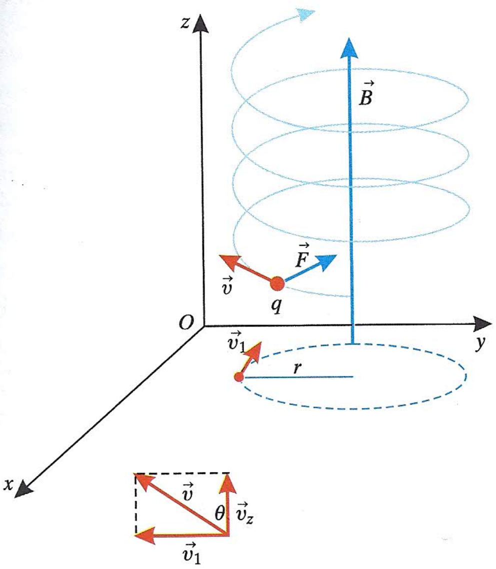
$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \qquad (3.88\gamma)$$

Επειδή η μαγνητική δύναμη είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα του σωματίου, το έργο που καταναλώνεται είναι ίσο με μηδέν. Η κινητική ενέργεια, επομένως, καθώς και η ταχύτητα (κατά μέτρο) του σωματίου παραμένουν σταθερές. Πράγματι, η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}$$

Παραγωγίζοντας την έκφραση αυτή έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$



Σχήμα 3-23 Κίνηση φορτισμένου σωματίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.

και αντικαθιστώντας σ' αυτή την Εξ.(3.64) προκύπτει

$$\frac{dK}{dt} = q\vec{v}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = 0$$

επειδή το διάνυσμα $\vec{v} \times \vec{B}$ είναι κάθετο στο $\vec{v}$. Επομένως, η κινητική ενέργεια δεν μεταβάλλεται και το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό.

Παραγωγίζοντας την Εξ. (3.88α) ως προς t, σε συνδυασμό με την Εξ. (3.88β) παίρνουμε:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = 0 \qquad (3.89)$$

Ομοίως, για τη συνιστώσα v_y παίρνουμε:

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y = 0 \qquad (3.90)$$

Οι λύσεις των Εξ. (3.89) και (3.90) είναι ημιτονοειδείς συναρτήσεις. Η διαφορά φάσης των v_x και v_y θα πρέπει να είναι 90°. Επομένως, οι λύσεις θα είναι:

$$v_x = v_1 \sin \omega t \qquad (3.91)$$

$$v_y = v_1 \cos \omega t \qquad (3.92)$$

όπου:

$$\boxed{\omega = \frac{qB}{m}} \qquad (3.93)$$

η κυκλική συχνότητα της κίνησης και v_1 η συνιστώσα της ταχύτητας, που είναι παράλληλη στο επίπεδο xy. Η προβολή της τροχιάς στο επίπεδο xy θα είναι κύκλος ακτίνας

$$\boxed{r = \frac{v_1}{\omega} = \frac{mv_1}{qB}} \qquad (3.94)$$

Από την Εξ. (3.88γ) συμπεραίνουμε αμέσως ότι

$$v_z = \text{σταθερό}. \qquad (3.95)$$

Επομένως, το σωμάτιο εκτός από την κυκλική κίνηση θα μετατοπίζεται κατά τον άξονα των z με μια σταθερή ταχύτητα.

Οι αναλυτικές εξισώσεις της τροχιάς προκύπτουν με ολοκλήρωση των Εξ. (3.91), (3.92) και (3.95):