

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega r \sin \omega t \vec{i} + \omega r \cos \omega t \vec{j} \quad (2.13)$$

ενώ το μέτρο της είναι

$$v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \omega r \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = \omega r \quad (2.14)$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης, σύμφωνα με τον ορισμό της, είναι

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 r \cos \omega t \vec{i} - \omega^2 r \sin \omega t \vec{j} = -\omega^2 \vec{r} \quad (2.15)$$

ενώ το μέτρο της είναι

$$a = \left| -\omega^2 r \right| = \omega^2 r. \quad (2.16)$$

Επειδή, $v = \omega r$, μπορούμε να γράψουμε το μέτρο της a με τη μορφή:

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (2.17)$$

Η επιτάχυνση αυτή είναι η *κεντρομόλος επιτάχυνση*.

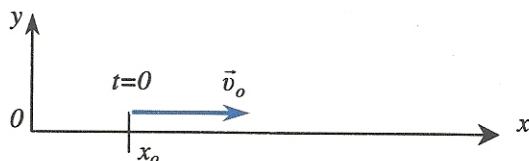
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2-2. Μονοδιάστατη κίνηση.

Ένα σωματίο κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή επιτάχυνση a . Να προσδιοριστούν η ταχύτητα και η θέση του συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα αναφοράς με άξονα την τροχιά του σωματίου, όπως φαίνεται στο Σχ. 2-4. Έστω ότι για $t = 0$ η αρχική θέση είναι x_0 και η αρχική ταχύτητα v_0 .

Αφού ξέρουμε την επιτάχυνση, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα από την Εξ.(2.7), από την οποία προκύπτει



Σχήμα 2-4. Μονοδιάστατη κίνηση

$$dv = a dt.$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

και επειδή η επιτάχυνση a είναι σταθερή,

$$v = v_0 + at \quad (2-18)$$

Από τη γνωστή τώρα ταχύτητα προκύπτει η συνάρτηση της θέσης ως εξής:

Από την εξίσωση της ταχύτητας

$$v = \frac{dx}{dt}$$

προκύπτει

$$dx = v dt$$

Με αντικατάσταση της ταχύτητας v από την Εξ.(2.18) και ολοκλήρωση της τελευταίας έκφρασης προκύπτει:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt$$

και επειδή v_0 και a σταθερές,

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \quad (2.19)$$

Απαλείφοντας το χρόνο t ανάμεσα στις Εξ.(2.18) και (2.19) προκύπτει

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)} \quad (2.20)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2-1. Η θέση ενός κινητού ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$x = 2t$$

$$y = -2t^2 + 1$$

$$z = t^2 - t.$$

Προσδιορίστε:

- α) την ταχύτητά του \vec{v} συναρτήσει του χρόνου (διάνυσμα και μέτρο),
- β) την επιτάχυνσή του \vec{a} συναρτήσει του χρόνου (διάνυσμα και μέτρο).

2-2. Ένα κινητό κινείται σε ευθεία γραμμή. Η επιτάχυνσή του a και η ταχύτητά του συνδέονται με τη σχέση $a = k\sqrt{v}$, όπου k μια θετική σταθερά. Να εκφραστούν συναρτήσει του χρόνου τα: v , a και x , όπου x η θέση του κινητού. Για $t = 0$ είναι: $v_0 = 0$ και $x_0 = 0$.

2-3. Να βρεθεί ο ελάχιστος δυνατός χρόνος, που χρειάζεται ένα αυτοκίνητο, για να διανύσει μια μικρή απόσταση d , αν ξεκινήσει από το ένα άκρο της και σταματήσει στο άλλο. Δεχόμαστε ότι η μέγιστη δυνατή επιτάχυνση είναι a_1 και η μέγιστη δυνατή επιβράδυνση a_2 .

2-4. Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Περιγράψτε την κίνηση της προβολής του στον οριζόντιο άξονα, που περνάει από το κέντρο του κύκλου. Αποδώστε γραφικά τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου.