ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3-1 Κίνηση σε ομογενές πεδίο βαρύτητας

Ένα σωμάτιο εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα υ_o υπό γωνία θ ως προς την οριζόντιο μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας έντασης $\vec{g} = -\vec{g}\,\vec{j}$, όπως φαίνεται στο Σχ.3-4. Να βρεθούν: (α) η ταχύτητά του σε κάθε χρονική στιγμή, (β) το διάνυσμα θέσης του σε κάθε χρονική στιγμή και (γ) η εξίσωση της τροχιάς.

Λύση

(α) Έστω $\vec{\upsilon}$ το διάνυσμα της ταχύτητας στη χρονική στιγμή t. Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -mg\vec{j} \qquad (3.14)$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε:

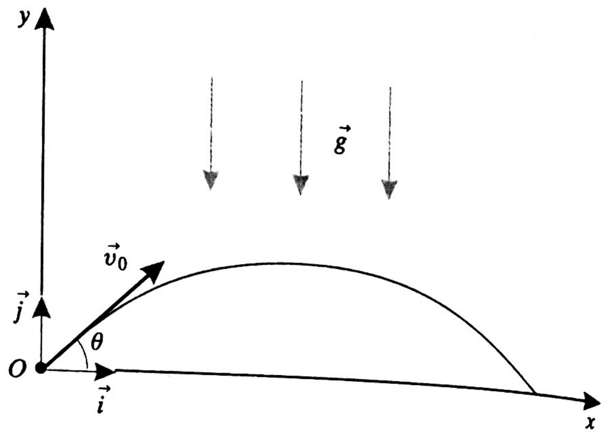
$$\int_{\vec{\upsilon}_o}^{\vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon} = -\int_0^t g\vec{j}\,dt$$

$$\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_o = -gt\vec{j}$$

Αλλά, $\vec{\upsilon}_o = \upsilon_o\cos\theta\,\vec{i} + \upsilon_o\sin\theta\,\vec{j}$. Επομένως,

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_o\cos\theta\,\vec{i} + (\upsilon_o\sin\theta - gt)\,\vec{j} \qquad (3.15)$$

(β) Έστω $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σωματίου τη χρονική στιγμή t. Αντικαθιστώντας την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$



Σχήμα 3-4 Κίνηση σωματίου σε ομογενές πεδίο βαρύτητας

με το $d\vec{r}/dt$ στην Εξ. (3.15) και ολοκληρώνοντας, προκύπτει:

$$\vec{r} = (\upsilon_o\cos\theta)t\,\vec{i} + \left[(\upsilon_o\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\vec{j} \qquad (3.16)$$

ή, ισοδύναμα για τις συνιστώσες του,

$$x = (\upsilon_o\cos\theta)t,\quad y = (\upsilon_o\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (3.17)$$

(γ) Αν απαλείψουμε το χρόνο ανάμεσα στις Εξ. (3.17) παίρνουμε:

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{\upsilon_o^2\cos^2\theta} \qquad (3.18)$$

που είναι η εξίσωση της τροχιάς του σωματίου. Η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση παραβολής. Άρα, η τροχιά του σωματίου είναι παραβολική.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3-2

Για την κίνηση του σωματίου της Εφαρμογής 3-1, να προσδιοριστούν: (α) ο χρόνος για να φτάσει στο μέγιστο ύψος, (β) το μέγιστο ύψος, (γ) ο ολικός χρόνος πτήσης και (δ) η μέγιστη απόσταση κατά τη διεύθυνση x (βεληνεκές).

Λύση

(α) Στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς η ταχύτητα στη διεύθυνση y είναι μηδέν. Έτσι, $\upsilon_o\sin\theta - gt = 0$, οπότε ο απαιτούμενος χρόνος είναι:

$$t = \frac{\upsilon_o\sin\theta}{g} \qquad (3.19)$$

(β) Το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το σωμάτιο βρίσκεται με αντικατάσταση του χρόνου t από την Εξ. (3.19) στην Εξ. (3.17):

$$y_{max} = \frac{\upsilon_o^2\sin^2\theta}{2g} \qquad (3.20)$$

(γ) Ο ολικός χρόνος πτήσης είναι ο χρόνος όταν $y = 0$, δηλαδή:

$$(\upsilon_o\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = t(\upsilon_o\sin\theta - \frac{1}{2}gt) = 0$$

ή, επειδή $t \neq 0$,

$$t = \frac{2\upsilon_o\sin\theta}{g} \qquad (3.21)$$

(δ) Η μέγιστη οριζόντια απόσταση που διανύει το σωμάτιο είναι η τιμή του x της Εξ. (3.17) στο χρόνο t που δίνεται από την Εξ. (3.21), ήτοι,

$$x_{max} = (v_o \cos\theta)\left[\frac{(2v_o \sin\theta)}{g}\right] = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g} \qquad (3.22)$$

Η απόσταση αυτή παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν $\sin 2\theta = 1$, δηλαδή $2\theta = 90^\circ$, ή $\theta = 45^\circ$.