ΣΗΜΑΤΑ και ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Κ. Δελήμπασης

**(Μέρος του υλικού βασίστηκε σε αρχικό υλικό που συντάχθηκε από τον Ν. Ασημάκη,
διορθώσεις από τον Μ. Σαβελώνα)**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- **ΣΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ και ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ**
- **ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ και ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ**
- **Μετασχηματισμός FOURIER**
  - **Σειρές - FS**
  - **Συνεχής -CFT**
  - **Διακριτού Χρόνου -DTFT**
- **Στοιχεία Μετασχηματισμού Laplace και Z**
- **Διακριτός Μετασχηματισμός FOURIER -DFT**

ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

- **ΒΑΣΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ**
- **ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ**
- **ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΗΜΑΤΩΝΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ**
- **ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ**

Συνεχή σήματα

- Οποιαδήποτε φυσική ποσότητα που έχει τιμές σαν συνάρτηση του χρονου, ή του χώρου, ή άλλης ανεξάρτητης μεταβλητής.
  - παράδειγμα: $s(t)=20t^2$.
- Συνήθως τα πραγματικά σήματα δεν περιγράφονται από μία μαθηματική σχέση, αλλά προκύπτουν από μετρήσεις.

Συνεχή ημιτονοειδή σήματα

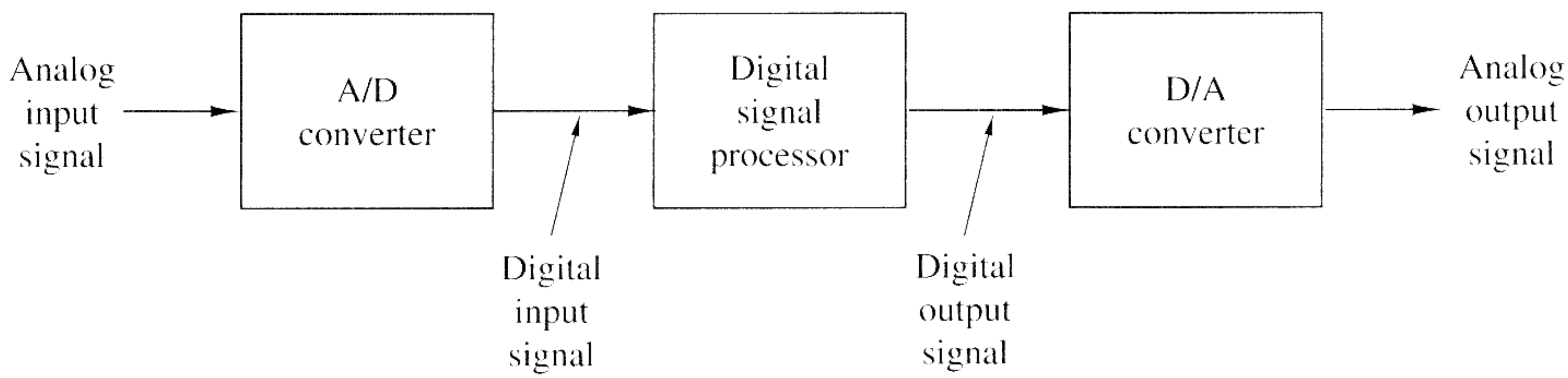
$$x(t) = Ae^{j(\omega t+\theta)} = \frac{\mathrm{A}}{2}\left(\cos\left(\omega t+\theta\right)+\sin\left(\omega t+\theta\right)\right)$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

- ω rad/sec
- F (Hz)
- Η έννοια της θετικής και αρνητικής συχνότητας

Δειγματοληψία και Κβαντισμός



Σήματα Ενέργειας και Ισχύος

- Ενέργεια $E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt$

- Ισχύς $P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt$
-
- Σήματα Ενέργειας
- Σήματα Ισχύος

Παράδειγμα

$$x(t)=\begin{cases} e^{-mt}, t\geq 0 \\ 0, t<0 \end{cases}$$

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-mt}\right)^2 dt=\int_{0}^{\infty}\left(e^{-mt}\right)^2 dt=-\frac{1}{2m}\left[e^{-2mt}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2m}$$

Αρα πρόκειται για σήμα ενέργειας

$$x(t)=\begin{cases} e^{-2t}\sin t, t\geq 0 \\ 0, t<0 \end{cases}$$

$$x^2(t)=\left(e^{-2t}\sin t\right)^2=e^{-4t}\frac{1}{2}\left(1-\cos(2t)\right)$$

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x(t)\right)^2 dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}e^{-4t}dt-\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}e^{-4t}\cos(2t)dt=-\frac{1}{2m}\left[e^{-2mt}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2m}$$

$$\int_{0}^{\infty}e^{-4t}dt=-\frac{1}{4}\left[e^{-4t}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{4}$$

$$\int_{0}^{\infty}e^{-4t}\cos(2t)dt=\int_{0}^{\infty}e^{-4t}\left(\sin(2t)\right)'dt=e^{-4t}\sin(2t)-$$

Αρα πρόκειται για σήμα ενέργειας

ΒΑΣΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Ένα **σήμα διακριτού χρόνου**
είναι μία ακολουθία
πραγματικών ή *μιγαδικών* αριθμών
που παριστάνεται ως συνάρτηση x(n)
της οποίας η ανεξάρτητη μεταβλητή n
παίρνει διακριτές (ακέραιες) τιμές.

- Το σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να παριστάνεται ως x(n) ή x[n], όπου *n* ακέραιος.
- Ένα σήμα διακριτού χρόνου παράγεται με δύο τρόπους
  – Με μία μαθηματική σχέση x(n)=f(n)
  – Από ένα σήμα συνεχούς χρόνου x(t), t πραγματικός αριθμός, μέσω δειγματοληψίας.
- Δειγματοληψία είναι η διαδικασία μέτρησης της τιμής ενός σήματος σε διακριτές χρονικές στιγμές, οι οποίες ισαπέχουν: t=nTs, όπου Ts η περίοδος δειγματοληψίας.
- Για το δειγματοληπτημένο σήμα, x(t)=x(nTs) =x(n) (αφού Ts είναι σταθερά).

Μιγαδικό σήμα διακριτού χρόνου

$$x(n) = a(n) + j\,b(n) = |x(n)|\, e^{j\varphi(n)}$$

πραγματική συνιστώσα $a(n)$
φανταστική συνιστώσα $b(n)$
πλάτος $|x(n)| = (a(n)^2 + b(n)^2)^{1/2}$
φάση $\varphi(n) = \mathrm{atan}\,(b(n)/a(n))$
όπου
$e^{j\varphi(n)} = \cos(\varphi(n)) + j \sin(\varphi(n)), \ |e^{j\varphi(n)}| = 1$

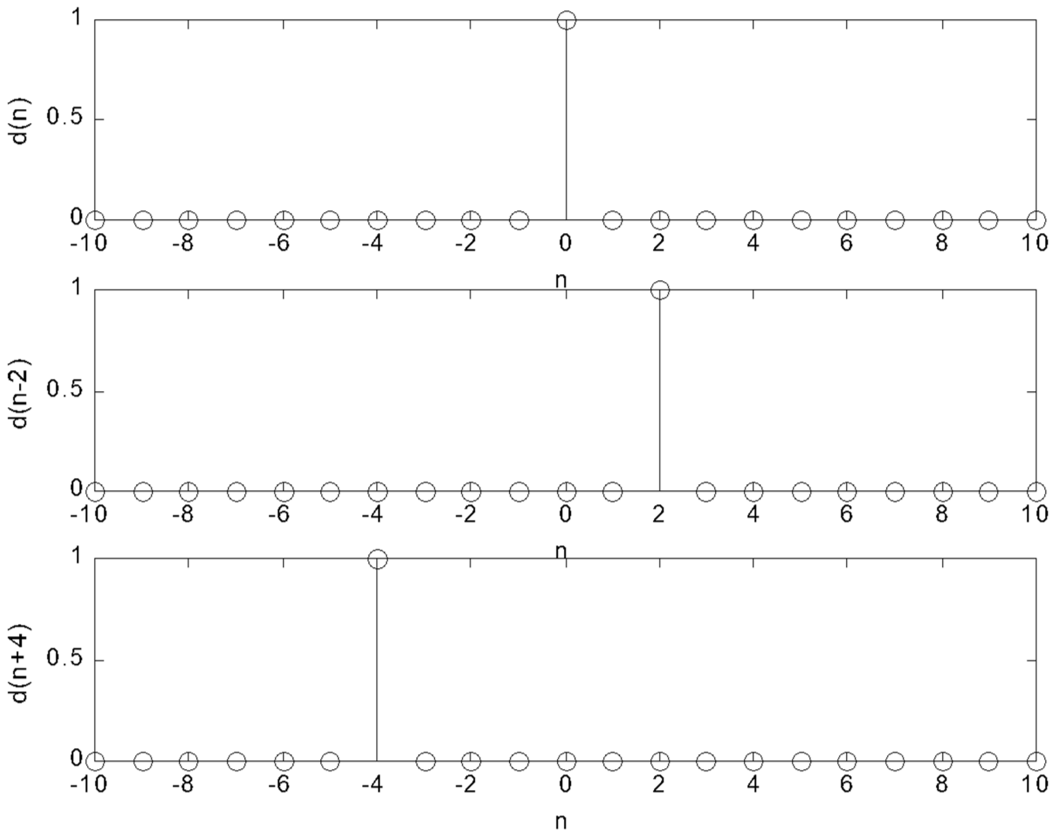
Συζυγές μιγαδικό σήμα
$x^*(n) = a(n) - j\,b(n) = |x(n)|\, e^{-j\varphi(n)}$

Σήμα μοναδιαίου δείγματος
(ακολουθία μοναδιαίου δείγματος)

$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1, n=n_0\\ 0, n\neq n_0\end{cases}$$

```
function [x,n]=sigimp(n0,n1,n2)
% impulse signal
% d(n-n0) n=n1..n2
n=[n1:n2];
x=[(n-n0)==0];
```

Σήμα μοναδιαίου δείγματος
Παράδειγμα: δ(n), δ(n-2), δ(n+4)

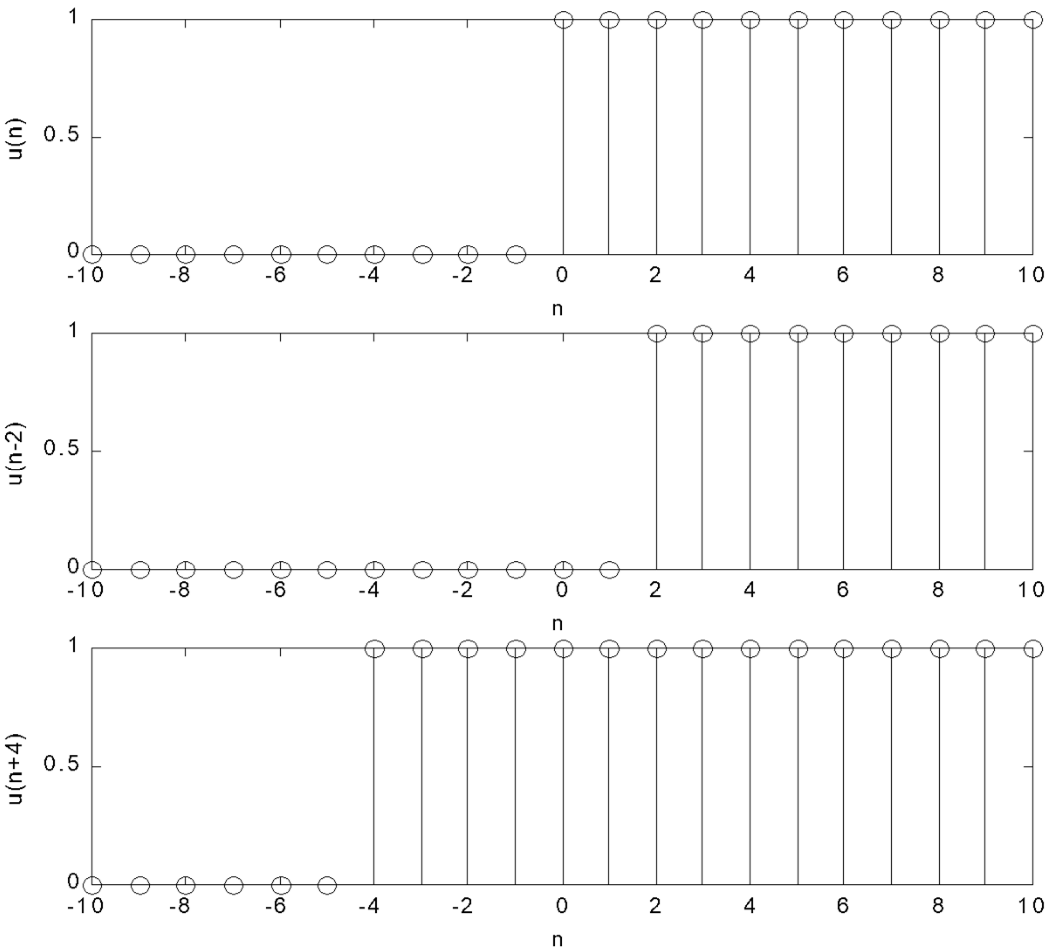


Σήμα μοναδιαίου βήματος (μοναδιαία βηματική ακολουθία)

$$u(n-n_0)=\begin{cases}1, n\geq n_0\\0, n<n_0\end{cases}$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

Σήμα μοναδιαίου βήματος
Παράδειγμα: u(n), u(n-2), u(n+4)

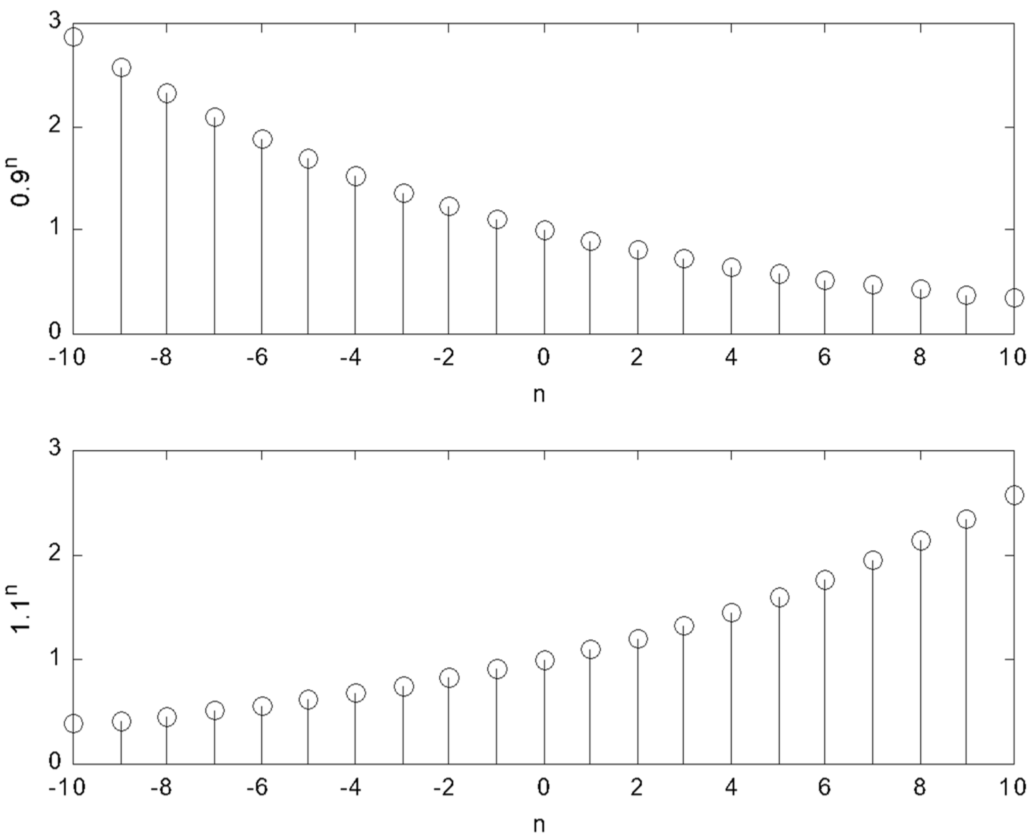


Πραγματικό εκθετικό σήμα

Πραγματικό εκθετικό σήμα

$x(n)=r^n$

Παράδειγμα: $x(n)=0.9^n$ $x(n)=1.1^n$

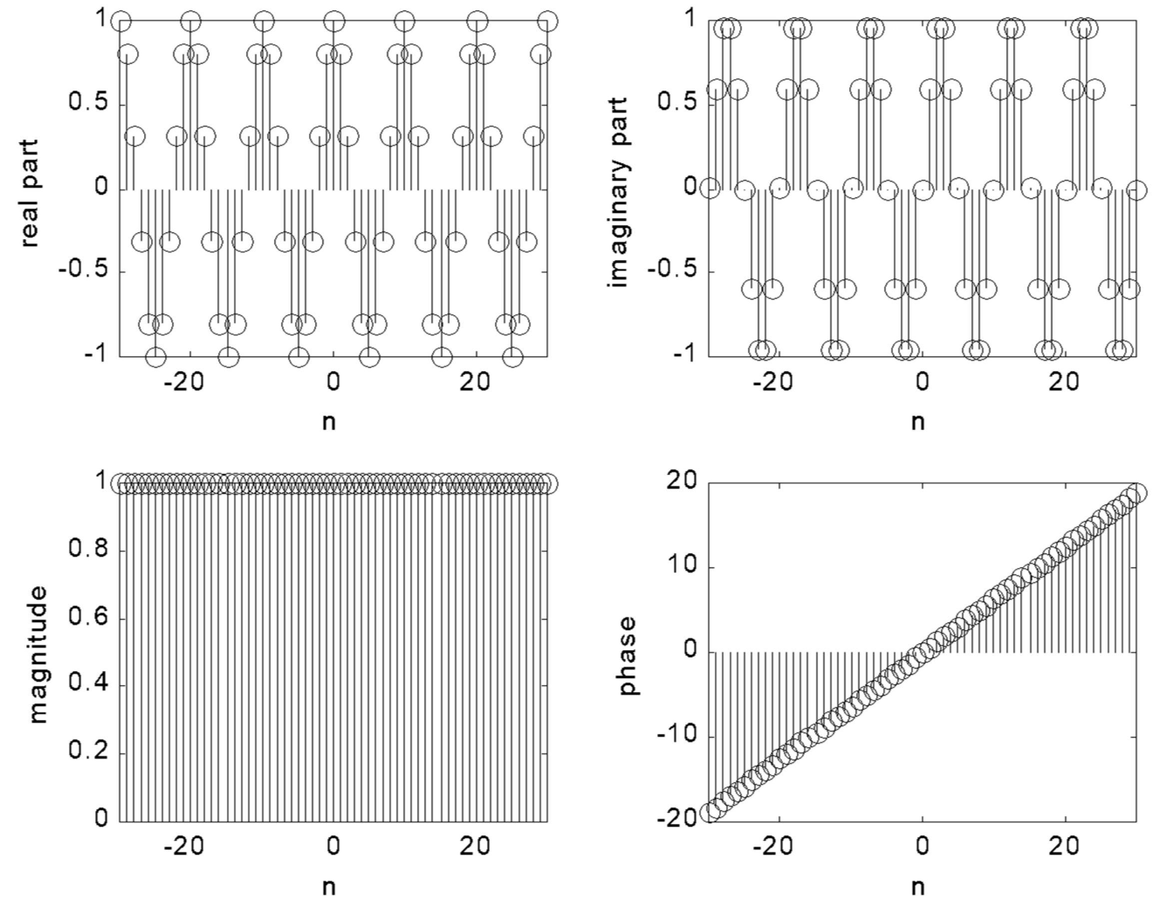


Φανταστικό εκθετικό σήμα

$$x(n)=e^{j\omega n}=\cos(\omega n)+j\sin(\omega n)$$

- η πραγματική συνιστώσα του σήματος είναι $\cos(\omega n)$
- η φανταστική συνιστώσα του σήματος είναι $\sin(\omega n)$
- το πλάτος του σήματος είναι 1
- η φάση του σήματος είναι ωn
- η ψηφιακή συχνότητα του σήματος είναι ω (σε rad)

Φανταστικό εκθετικό σήμα
Παράδειγμα: $x(n)=e^{j\pi n/5}$

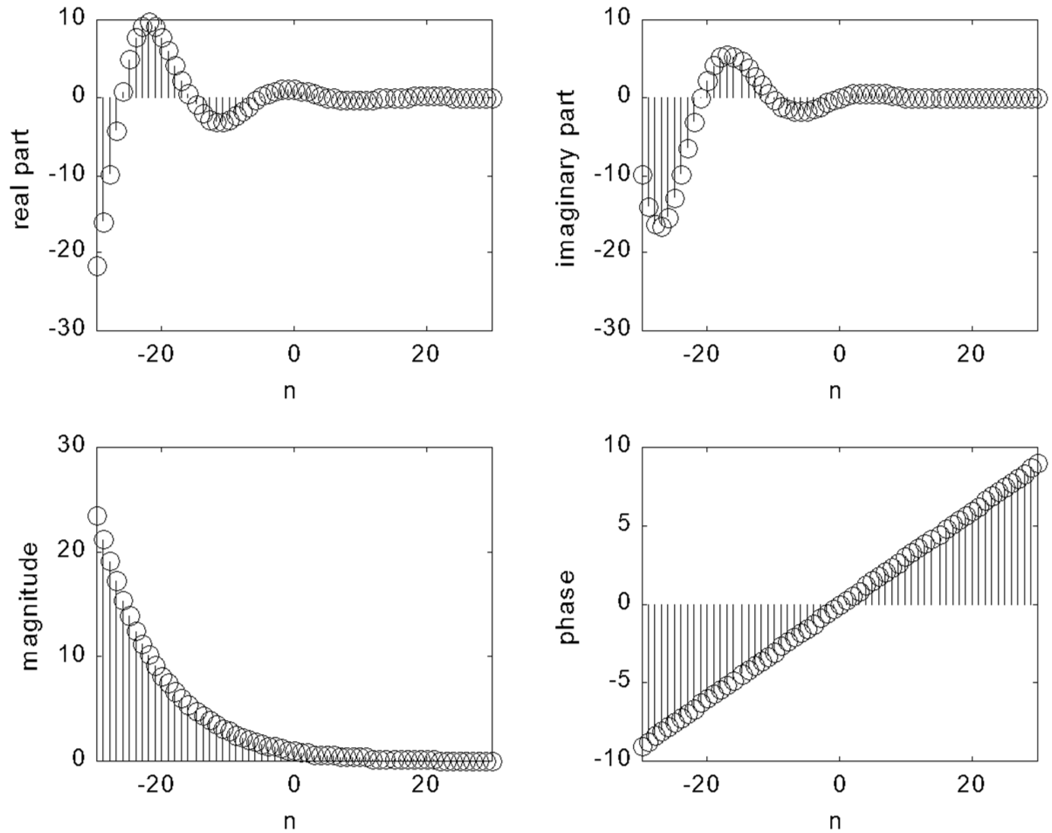


Μιγαδικό εκθετικό σήμα

$x(n)=r^n e^{j\omega n}=r^n[\cos(\omega n)+j\sin(\omega n)]$

- η πραγματική συνιστώσα του σήματος είναι $r^n\cos(\omega n)$
- η φανταστική συνιστώσα του σήματος είναι $r^n\sin(\omega n)$
- το πλάτος του σήματος είναι r^n
- η φάση του σήματος είναι ωn
- η ψηφιακή συχνότητα του σήματος είναι ω (σε rad)

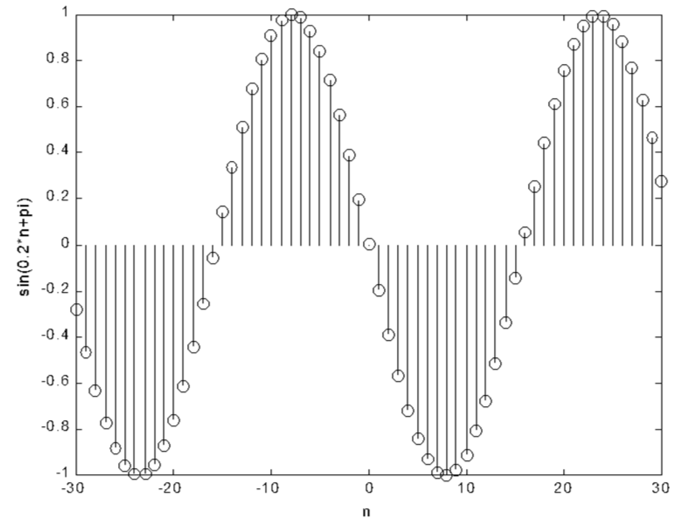
Μιγαδικό εκθετικό σήμα
Παράδειγμα: $x(n)=0.9^n e^{j0.3n}$



Ημιτονοειδές σήμα

$$x(n) = \operatorname{Im}\left\{e^{j\omega n+\phi}\right\} = \sin(\omega n + \phi)$$

- η συχνότητα του σήματος είναι ω
- η φάση του σήματος είναι φ



Παράδειγμα: $x(n)=\sin(0.2n+\pi)$

Διάρκεια σήματος διακριτού χρόνου

- Σήμα πεπερασμένου μήκους $x(n), n1 \le n \le n2$

- Σήμα απείρου μήκους

- Ακολουθία δεξιάς πλευράς $x(n), n0 \le n$
- Ακολουθία αριστερής πλευράς $x(n), n \le n0$
- Αμφίπλευρη ακολουθία $x(n), -\infty < n < +\infty$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ Συνεχή ΣΗΜΑΤΑ

Ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι **περιοδικό**
αν ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$x(t) = x(t+T) \ \forall t$$

Η **θεμελιώδης περίοδος** του σήματος
είναι ο ελάχιστος θετικός πραγματικός αριθμός T
για τον οποίο ισχύει η παραπάνω σχέση.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι **περιοδικό** αν ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{x(n) = x(n+N)\ \forall n}$$

Η **θεμελιώδης περίοδος** του σήματος είναι ο ελάχιστος ακέραιος θετικός αριθμός N για τον οποίο ισχύει η παραπάνω σχέση.

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$x(t) = x(t+T) \Rightarrow e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (T+t)}$$

Ισοδυναμία μεταξύ εκθετικής και ημιτονικής αναπαράστασης

- Σχέση του Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta,\ j = \sqrt{-1}$$

- Αντίστροφες σχέσεις του Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

- Κατά συνέπεια, το ημιτονικό σήμα παράγεται από το φανταστικό μέρος *Im*() του φανταστικού εκθετικού σήματος, ενώ το συνημίτονο παράγεται από το πραγματικό μέρος *Re*() του φανταστικού εκθετικού σήματος

Παράδειγμα

- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση του Euler για να αποδειχθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές σχέσεις:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Περιοδικό φανταστικό εκθετικό σήμα

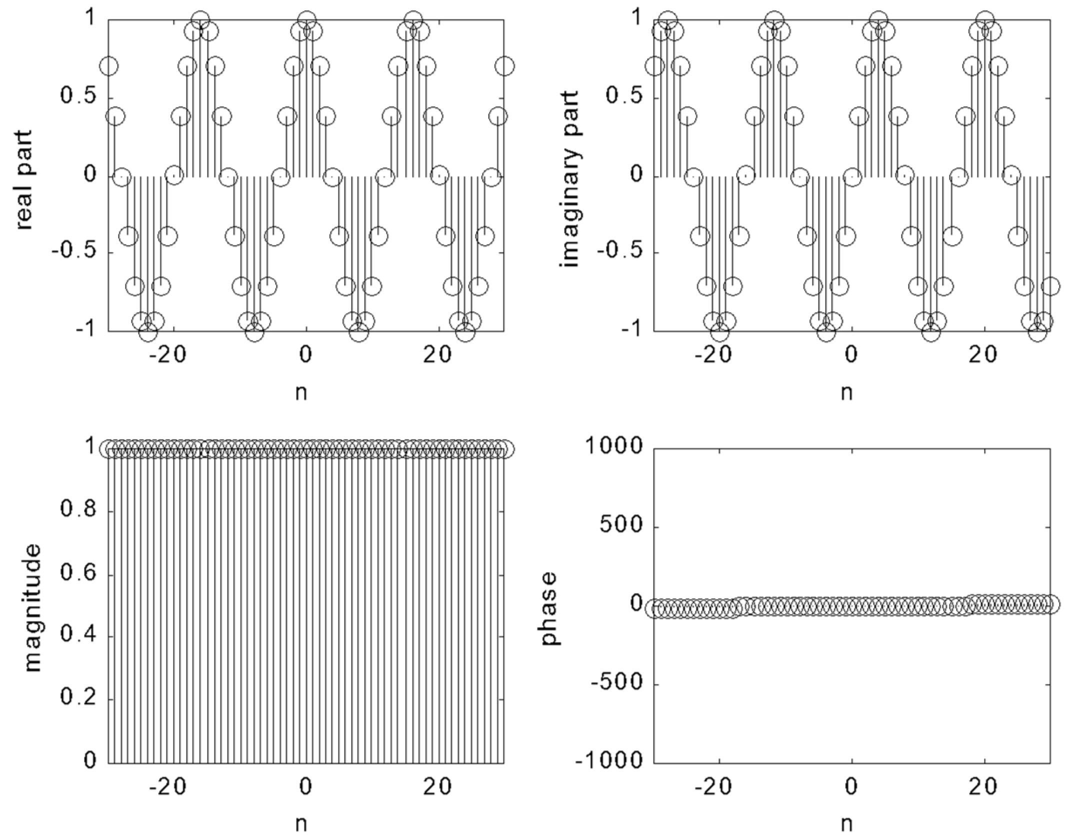
Το φανταστικό εκθετικό σήμα
$x(n) = e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j \sin(\omega n)$
είναι περιοδικό
αν η ψηφιακή συχνότητα του σήματος (ω)
είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π

Η θεμελιώδης περίοδος
του περιοδικού φανταστικού σήματος είναι
$\mathbf{N = 2\pi/\omega}$

Περιοδικότητα φανταστικού εκθετικού σήματος

Το φανταστικό εκθετικό σήμα $x(n)=e^{j\omega n}$ είναι περιοδικό
αν $x(n)=x(n+N)$, δηλαδή αν $e^{j\omega n} = e^{j\omega(n+N)}$
ή αν $e^{j\omega n} = e^{j\omega n}\, e^{j\omega N}$
ή αν $e^{j\omega N} = 1$
ή αν $\cos(\omega N) + j \sin(\omega N) = 1$
ή αν $\cos(\omega N) = 1$ και $\sin(\omega N) = 0$
ή αν $\omega N = 2k\pi$, όπου k φυσικός αριθμός
ή αν $\boldsymbol{\omega = 2\pi\, k/N}$
δηλαδή αν η ψηφιακή συχνότητα του σήματος (ω)
είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π
Για k=1 προκύπτει η θεμελιώδης περίοδος $\boldsymbol{N=2\pi/\omega}$
του περιοδικού φανταστικού σήματος

Περιοδικό φανταστικό εκθετικό σήμα
Παράδειγμα: $x(n)=e^{j\omega n}$ $\omega=\pi/8$ $N=2\pi/\omega=16$



Περιοδικό ημιτονοειδές σήμα

Το ημιτονοειδές σήμα sin(ωn+φ)
είναι περιοδικό
αν η συχνότητα του σήματος (ω)
είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π

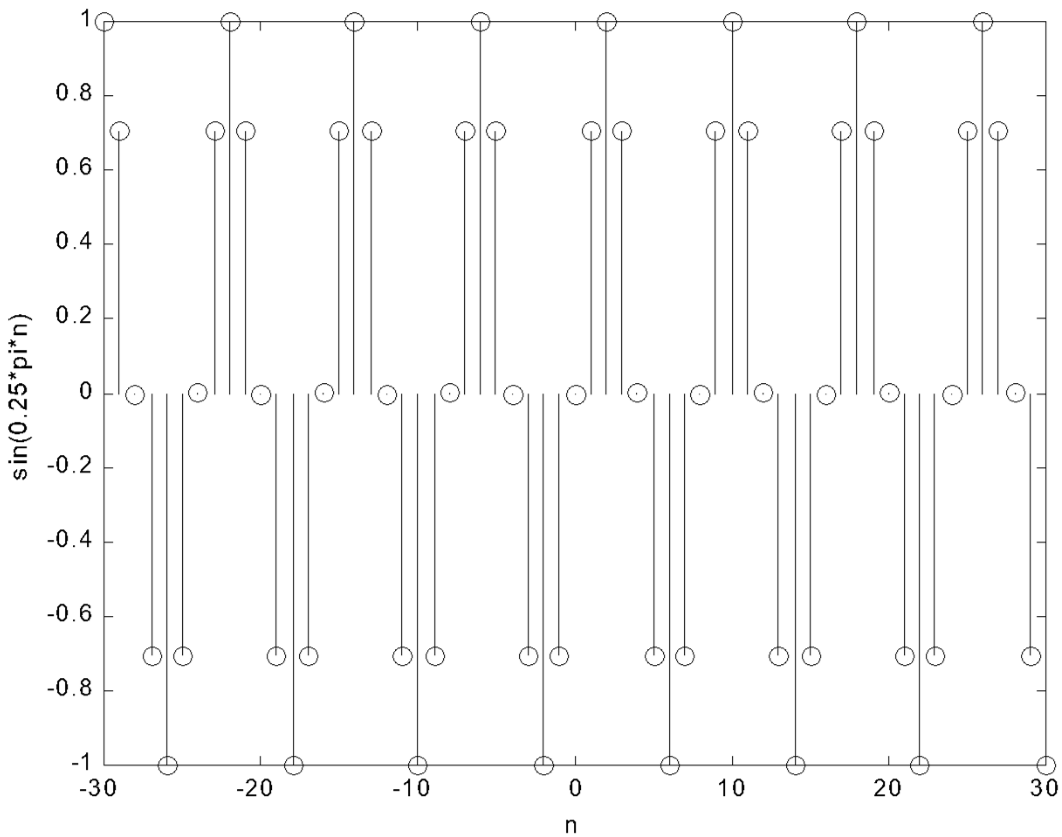
Η θεμελιώδης περίοδος
του περιοδικού ημιτονοειδούς σήματος είναι
N = 2π/ω

$$\sin\left(\omega n+\varphi\right)=\sin\left(\omega\left(n+N\right)+\varphi\right)\Rightarrow$$

$$\omega n+\varphi+2k\pi=\omega n+\omega N+\varphi\Rightarrow$$

$$2k\pi=\omega N\Rightarrow\omega=2\pi\frac{k}{N}$$

Περιοδικό ημιτονοειδές σήμα
Παράδειγμα: x(n)=sin(ωn) ω=π/4 N=8



Άθροισμα περιοδικών σημάτων

Αν το σήμα x1(n) είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο N1
και το σήμα x2(n) είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο N2
τότε το σήμα x(n)=x1(n)+x2(n)
είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο
N=N1·N2/ΜΚΔ(N1,N2)
Παρατήρηση: Αν N1=N2, τότε N=N1=N2

Παράδειγμα:

x1(n)=cos(πn/12) με θεμελιώδη περίοδο N1=24
x2(n)=sin(πn/18) με θεμελιώδη περίοδο N2=36
x(n)=x1(n)+x2(n)=cos(πn/12)+sin(πn/18)
με θεμελιώδη περίοδο
N=N1N2/ΜΚΔ(N1,N2)=24·36/12=72

Υποπερίπτωση αθροίσματος περιοδικών σημάτων

- Αν προσθέσουμε περιοδικά σήματα με την ίδια περίοδο, αλλά με διαφορετικό πλάτος και φάση, προκύπτει περιοδικό σήμα με την ίδια περίοδο

$$\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\phi_k} = A_k e^{j\phi_k}$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

- ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ
- ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Πράξεις Μετασχηματισμού Πλάτους

1. **πρόσθεση** σημάτων $y(n)=x1(n)+x2(n)$

2. **πολλαπλασιασμός** σημάτων $y(n)=x1(n)x2(n)$

3. **κλιμάκωση στο πλάτος** $y(n)=cx(n)$

Κλιμάκωση στο Πλάτος

$$y(n)=c \cdot x(n)$$

όπου c πραγματικός αριθμός

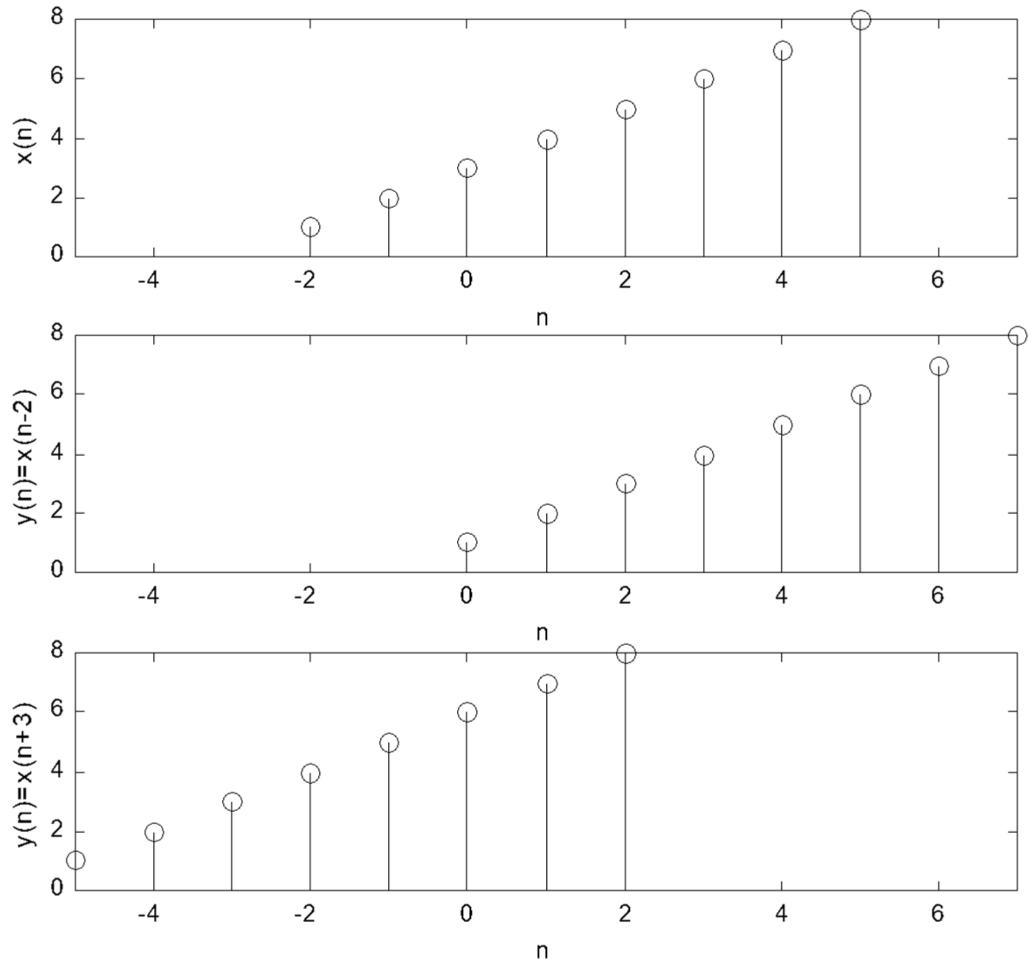
Πράξεις Μετασχηματισμού Χρόνου

1. **μετατόπιση** σήματος y(n)=x(n-n0)
Αν n0>0, τότε έχουμε <u>καθυστέρηση</u>
(το σήμα μετατοπίζεται δεξιά)
Αν n0<0, τότε έχουμε <u>πρωτοπορία</u>
(το σήμα μετατοπίζεται αριστερά)

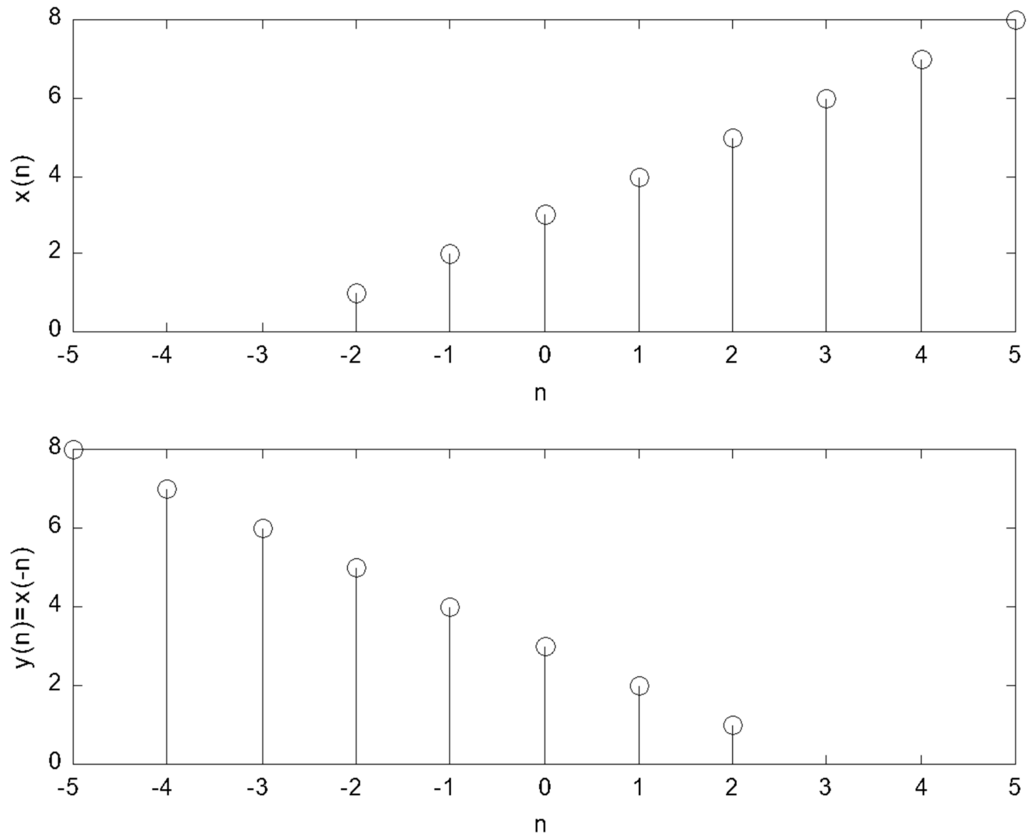
2. **αντιστροφή** σήματος y(n)=x(-n)

3. **κλιμάκωση στο χρόνο** y(n)=x(cn)
Αν c=M, τότε έχουμε <u>διαίρεση συχνότητας</u>
Αν c=1/M, τότε έχουμε <u>πολλαπλασιασμό συχνότητας</u>

Μετατόπιση: Παράδειγμα



Αντιστροφή: Παράδειγμα



Παράδειγμα: δείξτε ότι η μετατόπιση και η αντιστροφή δεν είναι μεταθετικές πράξεις

- Αντιστροφή: $A(x(n))=x(-n)$
- Μετατόπιση: $M_k(x(n))=x(n-k)$
- $M_k(A(x(n)))= M_k(x(-n))=x(-n-k)$
- $A(M_k(x(n)))=A(x(n-k))=x(-n+k)$

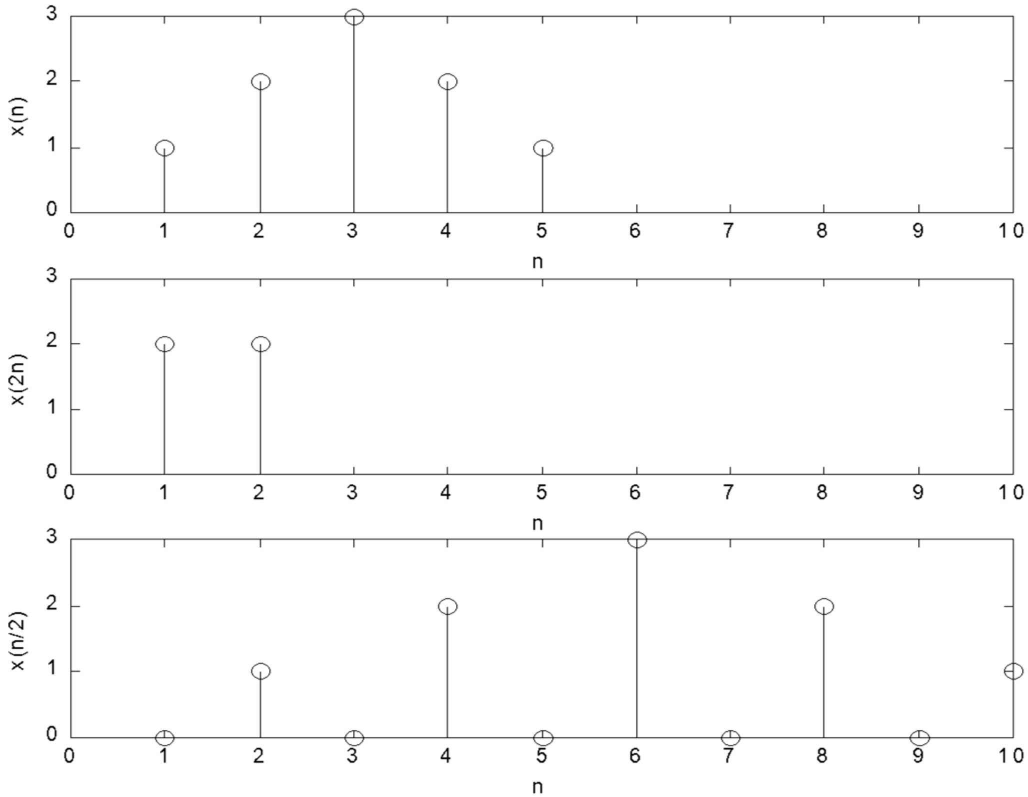
Διαίρεση Συχνότητας

```
function [y]=sigscaldiv(c,x)
% frequency division
% x(n) n=1:l
% y(n)=x(cn)
% c>1
nl=length(x);
m=floor(nl/c);
for i=1:m
   y(i)=x(i*c);
end;
```

Πολλαπλασιασμός Συχνότητας

```
function [y]=sigscalmul(c,x)
% frequency multiplication
% x(n) n=1:l
% y(n)=x(n/c)
% c>1
nl=length(x);
m=nl*c;
for i=1:m
   y(i)=0;
   if mod(i,c)==0
      y(i)=x(i/c);
   end;
end;
```

Κλιμάκωση στο Χρόνο: Παράδειγμα



Μετατώπιση και κλιμάκωση στο χρόνο

- Καθυστέρηση – Διαίρεση
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(n-n_0) \rightarrow x_2(n)=x_1(nM)=x(nM-n_0)$
- Διαίρεση – Καθυστέρηση
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(nM) \rightarrow x_2(n)=x_1(n-n_0)=x(nM-n_0M)$
- Προώθηση - Διαίρεση
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(n+n_0) \rightarrow x_2(n)=x_1(nM)=x(nM+n_0)$
- Διαίρεση – Προώθηση
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(nM) \rightarrow x_2(n)=x_1(n+n_0)=x(nM+n_0M)$
- Καθυστέρηση – Πολλαπλασιασμός
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(n-n_0) \rightarrow x_2(n)=x_1(n/M)=x(n/M-n_0)$
- Πολλαπλασιασμός – Καθυστέρηση
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(n/M) \rightarrow x_2(n)=x_1(n-n_0)=x(n/M-n_0 / M)$

- Μετατώπιση και κλιμάκωση στο χρόνο ΔΕΝ αντιμετατίθονται.
- Τυχαία η αντιμετάθεση είναι δυνατό να ισχύει:
- Καθυστέρηση – Διαίρεση $n_0=8$, $M=2$
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(n-8) \rightarrow x_2(n)=x_1(2n)=x(2n-8)$
- Διαίρεση – Καθυστέρηση $n_0=4$, $M=2$
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(2n) \rightarrow x_2(n)=x_1(n-4)=x(2n-8)$

Μετατώπιση και Αντιστροφή

- Καθυστέρηση και Αντιστροφή
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(n-n_0) \rightarrow x_2(n)=x_1(-n)=x(-n-n_0)$
- Αντιστροφή και Καθυστέρηση
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(-n) \rightarrow x_2(n)=x_1(n-n_0)=x(-n+n_0)$
- Προώθηση και Αντιστροφή
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(n+n_0) \rightarrow x_2(n)=x_1(-n)=x(-n+n_0)$
- Αντιστροφή και Προώθηση
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(-n) \rightarrow x_2(n)=x_1(n+n_0)=x(-n-n_0)$

Μετατώπιση και Αντιστροφή: **Δεν Αντιμετατίθενται**

Παράδειγμα

- Δίνεται το σήμα x(n)=[1,2,3,2,1], n=1,…,5. Υπολογίστε το x(-n-2).

	n	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
	x(n)									1	2	3	2	1		
Καθυστέρηση	**x(n-2)**											1	2	3	2	1
Καθ. Αντιστροφή	**x(-n-2)**	1	2	3	2	1										
Αντιστροφή	**x(-n)**			1	2	3	2	1								
Αντιστροφή και Προώθηση	**x(-n-2)**	1	2	3	2	1										

Κλιμάκωση στο χρόνο και Αντιστροφή

- Αντιστροφή - Διαίρεση συχνότητας
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(-n) \rightarrow x_2(n)=x_1(nM)=x(-nM)$
- Διαίρεση συχνότητας - Αντιστροφή
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(Mn) \rightarrow x_2(n)=x_1(-n)=x(-nM)$
- Αντιστροφή - Πολλαπλασιασμός συχνότητας
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(-n) \rightarrow x_2(n)=x_1(n/M)=x(-n/M)$
- Πολλαπλασιασμός συχνότητας - Αντιστροφή
  - $x(n) \rightarrow x_1(n)=x(n/M) \rightarrow x_2(n)=x_1(-n)=x(-n/M)$

Κλιμάκωση στο χρόνο και Αντιστροφή: **Αντιμετατίθενται**

Παραδείγματα

Δίνεται το σήμα s=[1,2,0,1] ορισμένο στο διάστημα [0,4].

- Να εκφραστεί σα γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων δ, με χρήση μετασχηματισμών πλάτους και χρόνου

$s(n)=\delta(n)-2\delta(n-1)+ \delta(n-3)$

- Να υπολογιστεί το $-2s(n)$
- Να υπολογιστεί το $s(n-3)$
- Να υπολογιστεί το $s(n/2)$

Παράδειγμα

Δίνεται $x(n) = \begin{cases} |n| - 3 \le x \le 3 \\ 0 \quad otherwise \end{cases}$

Υπολογίστε:

- y(n)=x(n-1)
- y(n)=x(n+1)
- y(n)=(1/3)(x(n-1)+x(n)+x(n+1))
- y(n)=median(x(n-1)+x(n)+x(n+1))

Δίνεται: $x(n) = nu(n)$

Υπολογίστε:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} x(k) + \sum_{k=0}^{n} x(k) = y(-1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

Παράδειγμα

- Δίνεται η ακολουθία $x(n)=(6-n)*[u(n)-u(n-6)]$. Υπολογίστε και σχεδιάστε την ακολουθία
  - $y(n)=x(2n-3)$ Πρώτα διαιρούμε τη συχνότητα με το 2. Μετά κάνουμε μετατόπιση προς τα δεξιά κατά 3 θέσεις
  - $y(n)=x(4-n)$ Πρώτα μετατόπιση κατά +4 (αριστερά) και μετά αντιστροφή (όχι ανάποδα).

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Ένα πραγματικό σήμα διακριτού χρόνου
είναι **άρτιο** αν

$$\mathbf{x(n)=x(-n)}$$

Ένα πραγματικό σήμα διακριτού χρόνου
είναι **περιττό** αν

$$\mathbf{x(n)=-x(-n)}$$

Άθροισμα τιμών συμμετρικού πραγματικού σήματος

άρτιο σήμα

$x(n)=x(-n)$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) + x(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} x(-n) + x(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) =$$
$$= x(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} x(n)$$

περιττό σήμα

$x(n)=-x(-n)$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) + x(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} x(-n) + x(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) =$$
$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} x(n) + x(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) =$$
$$= x(0) = 0$$

για $n=0$ είναι: $x(0)=-x(-0)=-x(0)$
οπότε $2\cdot x(0)=0$
άρα: $x(0)=0$

Γινόμενο άρτιου σήματος επί περιττό σήμα

Αν το σήμα $x_1(n)$ είναι άρτιο
και το σήμα $x_2(n)$ είναι περιττό,
τότε το σήμα $x(n)=x_1(n) \cdot x_2(n)$ είναι περιττό

Απόδειξη:

$x_1(n)=x_1(-n)$

$x_2(n)= -x_2(-n)$

$x(n)=x_1(n) \cdot \mathrm{x}_2(n)$

$x(-n)= x_1(-n) \cdot \mathrm{x}_2(-n) = \mathrm{x}_1(n) \cdot (-\mathrm{x}_2(n)) = - (x_1(n) \cdot x_2(n)) = -x(n)$

Ανάλυση σε άρτιο και περιττό σήμα

Κάθε πραγματικό σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$
μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα
άρτιου σήματος $x_e(n)$ και περιττού σήματος $x_o(n)$:

$$x(n)=x_e(n)+x_o(n)$$

όπου

$$x_e(n)=(½)\,[x(n) + x(-n)]$$

$$x_o(n)=(½)\,[x(n) - x(-n)]$$

Μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι:

$$x_e(n)=x_e(-n)$$

$$x_o(n)=-x_o(-n)$$

$$x_e(n)+x_o(n)=x(n)$$

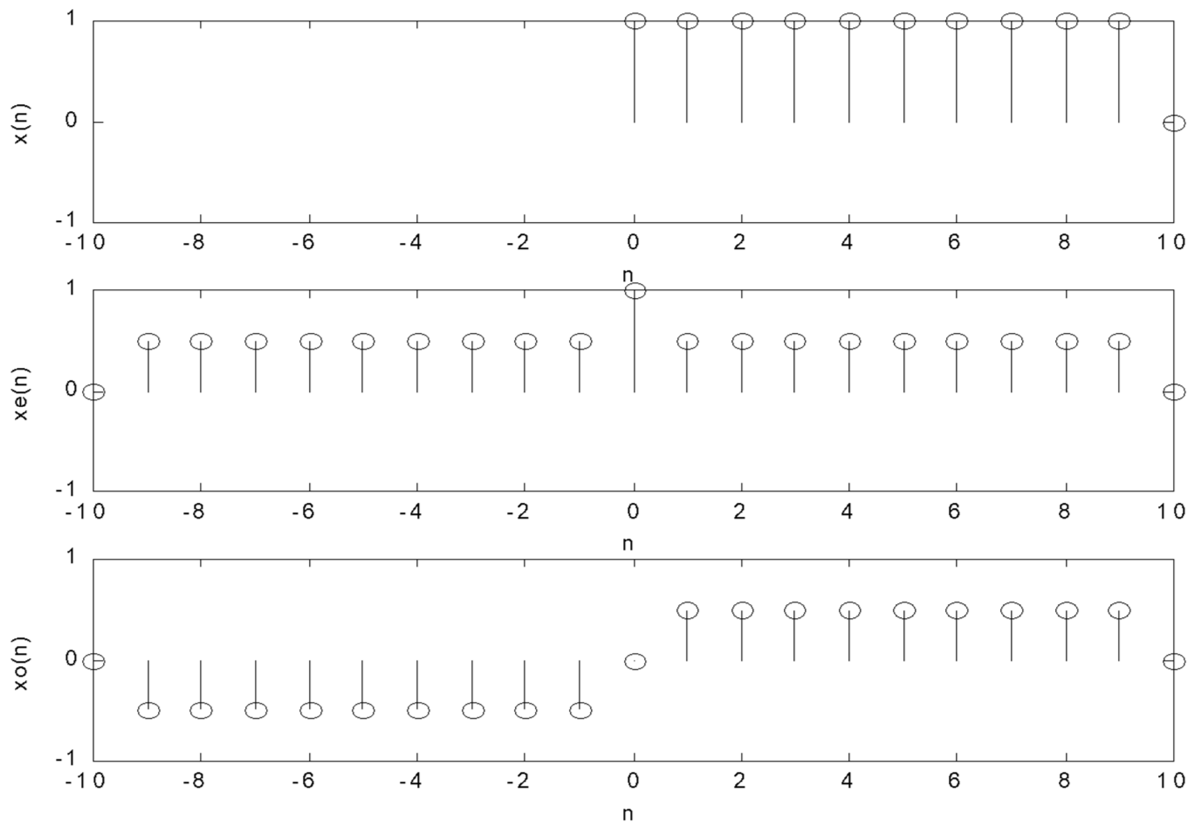
Παράδειγμα ανάλυσης σε άρτιο και περιττό σήμα

- Αναλύστε σε άρτιο και περιττό σήμα τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(n)$.

$$u_e = \frac{1}{2}\big(u(n) + u(-n)\big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1/2 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$u_o(n) = u(n) - u_e = u(n) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta(n)$$

Παράδειγμα ανάλυσης $u(n)$ σε άρτιο και περιττό σήμα



Παράδειγμα

Ισχύς ενός σήματος x(n) ορίζεται ως:

Εστω ότι το άρτιο μέρος του σήματος είναι $x_e = \left(\frac{1}{2}\right)^{abs(n)}$

Αν P=5 να βρεθεί η ισχύς του περιττού μέρους του x(n).

Ο 3ος όρος είναι 0, διότι το γινόμενο άρτιου * περιττό είναι περιττό σήμα, ενώ ο 1ος όρος υπολογίζεται ως 5/3.

Συμμετρία μιγαδικού σήματος

Ένα μιγαδικό σήμα διακριτού χρόνου είναι **συζυγές συμμετρικό** αν

$$x(n)=x^*(-n)$$

Ένα μιγαδικό σήμα διακριτού χρόνου είναι **συζυγές αντισυμμετρικό** αν

$$x(n)=-x^*(-n)$$

Παράδειγμα συμμετρικού μιγαδικού σήματος

Το σήμα $x(n)=je^{j\pi n/4}$
είναι συζυγές αντισυμμετρικό

Απόδειξη:

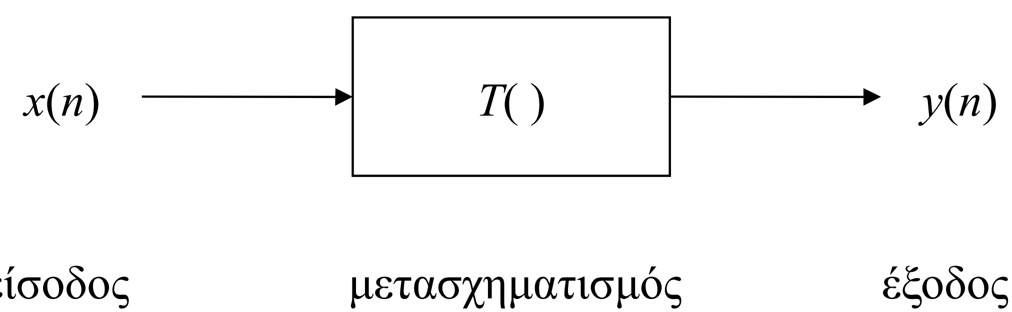
$$x(n)=je^{j\pi n/4} = j\,[\cos(\pi n/4) + j\,\sin(\pi n/4)] =$$
$$= -\sin(\pi n/4)] + j\,\cos(\pi n/4)$$
$$x(-n)= j\,[\cos(-\pi n/4) + j\,\sin(-\pi n/4)] =$$
$$= j\,[\cos(\pi n/4) - j\,\sin(\pi n/4)] =$$
$$= \sin(\pi n/4)] + j\,\cos(\pi n/4)$$
$$-x(-n) = -\sin(\pi n/4)] - j\,\cos(\pi n/4)$$
$$-x^*(-n) = -\sin(\pi n/4)] + j\,\cos(\pi n/4) = x(n)$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

- **ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ: ΟΡΙΣΜΟΙ**
- **ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ**
- **ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ**
- **ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ**

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ: ΟΡΙΣΜΟΙ

Ένα **σύστημα διακριτού χρόνου**
είναι ένας *μετασχηματισμός*.



απόκριση: $y(n)=T(x(n))$

Μνήμη συστήματος

- Σύστημα χωρίς μνήμη

Η έξοδος για $n=n_0$ εξαρτάται *μόνο* από την είσοδο για $n=n_0$

Παράδειγμα: $y(n)=x^2(n)$

- Σύστημα με μνήμη

Η έξοδος για $n=n_0$ εξαρτάται από τις εισόδους για $n\leq n_0$

Παράδειγμα: $y(n) = x(n)+x(n-1)$

Αρχή της επαλληλίας (αρχή της υπέρθεσης)

$$T[x_1(n)+x_2(n)] = \mathrm{T}[x_1(n)] + \mathrm{T}[x_2(n)]$$

Παράδειγμα: $y(n)=T[x(n)]=x(n)+x(-n)$

Ισχύει η αρχή της επαλληλίας (υπέρθεσης):

$$\begin{aligned}\mathrm{T}[x_1(n)+x_2(n)] &= (x_1(n)+x_2(n)) + (x_1(-n)+x_2(-n)) = \\ &= (x_1(n)+x_1(-n)) + (x_2(n)+x_2(-n)) = \\ &= \mathrm{T}[x_1(n)] + \mathrm{T}[x_2(n)]\end{aligned}$$

Ομογένεια

$$T[c\ x(\mathrm{n})] = c\ T[x(n)]$$

Παράδειγμα: $y(n)=\mathrm{T}[x(n)]=x^2(n)/x(n\text{-}1)$
Το σύστημα είναι ομογενές:
$T[c\ x(n)] = (c\ x(n))^2 \,/\, (c\ x(n\text{-}1)) =$
$= c\ x^2(n)/x(n\text{-}1) = c\ T[x(n)]$

Γραμμικό Σύστημα (Linear System)

$$T[c_1\, x_1(\mathrm{n}) + c_2\, x_2(n)] = c_1\, T[x_1(n)] + c_2\, T[x_2(n)]$$

Ισχύει η αρχή της επαλληλίας και η ομογένεια

Παράδειγμα: $y(\mathrm{n})=T[x(n)]=x(n)\sin(\pi n/2)$

Το σύστημα είναι γραμμικό:

$T[c_1\, x_1(n) + c_2\, x_2(n)]$

$= (c_1\, x_1(n) + c_2\, x_2(n))\, \sin(\pi n/2)$

$= c_1\, x_1(n)\, \sin(\pi n/2) + c_2\, x_2(n)\, \sin(\pi n/2)$

$= c_1\, T[x_1(n)] + c_2\, T[x_2(n)]$

Παράδειγμα: ελέγξτε την γραμμικότητα των παρακάτω συστημάτων

$$y(n) = T\left(x(n)\right) = x\left(n^2\right)$$

$$T\left(a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)\right) = a_1 x_1\left(n^2\right) + a_2 x_2\left(n^2\right)$$

$$T\left(a_1 x_1(n)\right) + T\left(a_2 x_2(n)\right) = a_1 T\left(x_1(n)\right) + a_2 T\left(x_2(n)\right) = a_1 x_1\left(n^2\right) + a_2 x_2\left(n^2\right)$$

Το σύστημα είναι γραμμικό

$$y(n) = T\left(x(n)\right) = x^2(n)$$

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_1(n)\right) = x^2{}_1(n) \\ T\left(x_2(n)\right) = x_2^2(n) \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 T\left(x_1(n)\right) + a_2 T\left(x_2(n)\right) = a_1 x_1^2(n) + a_2 x_2^2(n)$$

$$T\left(a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)\right) = \left(a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)\right)^2 = a_1^2 x_1^2(n) + a_2^2 x_2^2(n) + 2a_1 x_1(n) a_2 x_2(n)$$

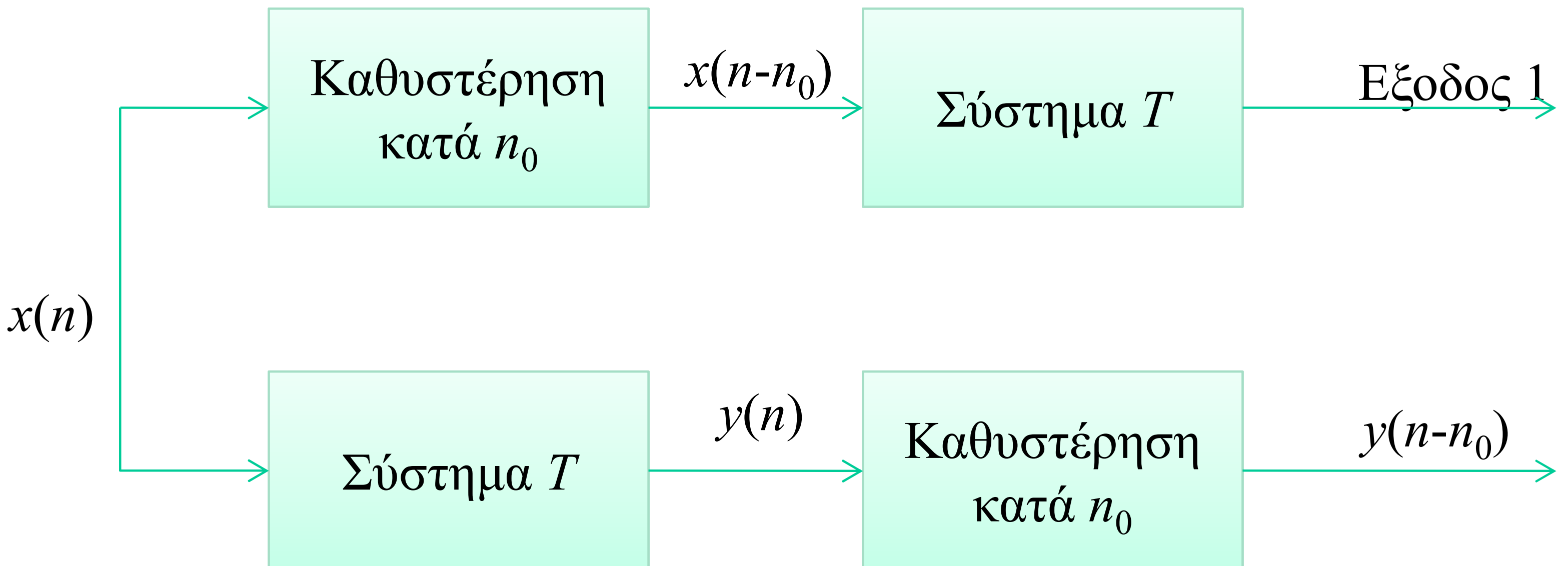
Το σύστημα δεν είναι γραμμικό

- $y(n)=median(x(n),x(n-1),x(n-2))$
- $y(n)=max(x(n),x(n-1),x(n-2))$
- $y(n)=log(x(n))$
- $y(n)=x(n)+1$

Σύστημα Αμετάβλητο Κατά τη Μετατόπιση (Time Invariant system)

Αν $y(n)=T[x(n)]$, τότε $y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$

Ελεγχος της αμεταβλητότητας μετατώπισης με εναλλαγή στη σειρά των υποσυστημάτων



- Συγκρίνουμε την Εξοδο 1 με το $y(n\text{-}n_0)$. Αν είναι ίσα, τότε το T είναι χρονικά αμετάβλητο.

- Είναι το σύστημα χρονικής αναστροφής $y(n)=x(-n)$ αμετάβλητο στη μετατώπιση ?
- Είναι το σύστημα χρονικής αναστροφής $y(n)=x^2(n)$ αμετάβλητο στη μετατώπιση ?

Γραμμικό Αμετάβλητο Κατά τη Μετατόπιση (ΓΑΚΜ) Σύστημα (Linear Time Invariant (LTI) System)

$$y(n) = T[x(n)] = T[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)] = \qquad \text{ανάλυση σημάτων}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{T}[x(k)\delta(n-k)] = \qquad \text{αρχή επαλληλίας}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\mathrm{T}[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h_k(n) = \qquad \text{ομογένεια}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \qquad \text{αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση}$$

$$y(n) = T[x(n)] \Rightarrow y(n-n_0) = T[x(n-n_0)]$$

$$h(n) = T[\delta(n)] \Rightarrow h(n-k) = T[\delta(n-k)] = h_k(n)$$

$h(n)$ κρουστική απόκριση (απόκριση για είσοδο $\delta(n)$)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n) \qquad \text{γραμμική συνέλιξη}$$

Αιτιότητα

Η έξοδος για n=n_0 εξαρτάται από τις εισόδους μέχρι n=n_0

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k), h(n-k)\,\forall k>n$$

LTI αιτιατό: $h(n)=0,\ n<0$

Παράδειγμα:

Αιτιατό: $y(n)=x(n)+x(n-1)$

Ευστάθεια

Bounded Input Bounded Output (BIBO) stability

Αν $|x(n)|<A$, τότε $|y(n)|<B$

LTI ευσταθές: $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \prec C$$

Απόδειξη της αναγκαίας συνθήκης για ευστάθεια LTI συστήματος:

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| |h(n-k)| \leq A \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(n-k)| \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(n-k)| \leq B$$

Παράδειγμα:

Ευσταθές: $h(n)=a^n u(n)$ αν $|a|<1$

Αντιστρεψιμότητα

Αν $x_1(n) \neq x_2(n)$, τότε $y_1(n) \neq y_2(n)$

Η είσοδος μπορεί να προσδιοριστεί από την έξοδο με μοναδικό τρόπο

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

Ιδιότητες Γραμμικής Συνέλιξης

ταυτοτικό στοιχείο της συνέλιξης είναι η το σήμα δ(n)

$$x(n)*\delta(n)=x(n)$$

αντιμεταθετική ιδιότητα

$$x_1(n)*x_2(n)=x_2(n)*x_1(n)$$

προσεταιριστική ιδιότητα

$$x_1(n)*[x_2(n)*x_3(n)]=[x_1(n)*x_2(n)]*x_3(n)$$

επιμεριστική ιδιότητα

$$x_1(n)*[x_2(n)+x_3(n)]=x_1(n)*x_2(n)+x_1(n)*x_3(n)$$

Απόδειξη της αντιμετάθεσης

$$y(n) = x(n) * h(n) =$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l) h(n-l) =$$

Αλλαγή μεταβλητής k=n-l

$$\sum_{k=+\infty}^{-\infty} x(n-k) h(k) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k) = h(n) * x(n)$$

Απόδειξη της προσεταιριστικότητας

$$x_1(n) * (x_2(n) * x_3(n)) = x_1(n) * \sum_k x_2(k) x_3(n-k) =$$

$$\sum_l x_1(l) \left(\sum_k x_2(k) x_3(n-l-k) \right) =$$

Αλλαγή μεταβλητής k=q-l

$$\sum_l x_1(l) \left(\sum_q x_2(q-l) x_3(n-q) \right)$$

$$\sum_q \sum_l x_1(l) x_2(q-l) x_3(n-q) =$$

$$\sum_q \left(\sum_l x_1(l) x_2(q-l) \right) x_3(n-q) =$$

$$(x_1(n) * x_2(n)) * x_3(n)$$

Γραμμική Συνέλιξη σημάτων πεπερασμένου μήκους

Όταν τα σήματα είναι πεπερασμένου μήκους,
τότε η συνέλιξή τους είναι και αυτή
ένα σήμα πεπερασμένου μήκους:
Αν το σήμα h(n) είναι πεπερασμένου μήκους L_h
στο διάστημα $[M_h,N_h]$
και το σήμα x(n) είναι πεπερασμένου μήκους L_x
στο διάστημα $[M_x,N_x]$,
τότε το σήμα $y(n)= h(n)*x(n)$ είναι πεπερασμένου μήκους L_y
στο διάστημα $[M_y,N_y]$
όπου $L_y=L_x+L_h-1$
$M_y=M_x+M_h$
$N_y=N_x+N_h$

Υπολογισμός Γραμμικής Συνέλιξης σημάτων πεπερασμένου μήκους

-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	n	
			1	2	3				x(n)	[1,3]
	1	2	3						h(n)	[-1,1]
	3	2	1						h(-n)	
3	2	1								
	3	2	1						$y(0)=1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0$	
		3	2	1					$y(1)=1\cdot2+2\cdot1+3\cdot0$	
			3	2	1				$y(2)=1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1$	
				3	2	1			$y(3)=1\cdot0+2\cdot3+3\cdot2$	
					3	2	1		$y(4)=1\cdot0+2\cdot0+3\cdot3$	
						3	2	1		
			1	4	10	12	9	9	$y(n)=x(n)*h(n)$	[0,4]

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης με μήτρα Toeplitz

- Ο πίνακας Toeplitz έχει κάθε στοιχείο της κύριας διαγωνίου του σταθερό. Αν y=x*h και το x ορίζεται στο [n1,n2]→το x γίνεται στήλη και το h πίνακας Toeplitz με διαστάσεις

$$\left(\left(L_x + L_h - 1\right) \times L_x\right)$$

$$\begin{bmatrix} y\left(n_1\right) \\ \ldots \\ y\left(n_2\right) \\ \ldots \\ y\left(n_2 + L_h - 1\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\left(L_y \times L_x\right) * \left(L_x \times 1\right)$$

Υπολογισμός Γραμμικής Συνέλιξης σημάτων πεπερασμένου μήκους με τη μέθοδο του πολυωνυμικού πολλαπλασιασμού

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x(n)	2	4	6	4	3	0	0	0
h(n)	3	-1	2	1				
	6	12	18	12	6	0	0	0
	0	-2	-4	-6	-4	-2	0	0
	0	0	4	5	12	8	4	0
	0	0	0	2	4	6	4	2
	-6	-10	-18	-13	-18	-12	-8	-2

Παράδειγμα - Συνέλιξη

- Δίνεται το σήμα x(n)=[1,1,1] με n=[0,2]. Υπολογίστε τη συνέλιξη x(n)*x(n).

$$x(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$x(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \big(\delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2)\big)\big(\delta(n-k) + \delta(n-k-1) + \delta(n-k-2)\big) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)\delta(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k-1)\delta(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k-2)\delta(n-k) +$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)\delta(n-k-1) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k-1)\delta(n-k-1) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k-2)\delta(n-k-1) +$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)\delta(n-k-2) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k-1)\delta(n-k-2) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k-2)\delta(n-k-2) =$$

$$\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4) =$$

$$\delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 2\delta(n-3) + \delta(n-4) = [1,2,3,2,1], n = [0,4]$$

Παράδειγμα - Συνέλιξη

- Σας δίνεται η κρουστική απόκριση και η είσοδος ενός συστήματος. Βρείτε την έξοδο του

$$x(n)=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-6}u(n),h(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n-3)$$

$$x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-6}u(k)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}u(n-k-3)=$$

$$\sum_{k=0}^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^{-6}\sum_{k=0}^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{-k}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}(6)^{6}\sum_{k=0}^{n-3}\left(\frac{3}{6}\right)^{k}=$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n}(6)^{6}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}(6)^{6}\left(1-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right),n\geq 3$$

Για n<3 η συνέλιξη είναι ίση με 0, όπως προκύπτει και από το πεδίο ορισμού των $x(n),h(n)$.

Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη σειρά: $\sum_{n=0}^{N-1}a^{n}=\frac{1-a^{N}}{1-a}$

Παράδειγμα - Συνέλιξη

- Σας δίνεται η κρουστική απόκριση και η είσοδος ενός συστήματος. Βρείτε την έξοδο του

$$x(n) = -n3^n u(-n), h(n) = u(-n-1)$$

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -k3^k u(-k)u(-(n-k)-1) =$$

$$\sum_{k=n+1}^{0} (-k)3^k = \sum_{k=0}^{-n-1} k3^{-k} = \frac{(-n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{-n+1} - (-n)\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} + \frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$\frac{9}{4}\left(-n\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} + n\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}\left(-\frac{1}{3} + n\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}(2n-1) + 1\right), n \le -1$$

Η συνέλιξη είναι ίση με 0 για $n > -1$, όπως προκύπτει και από το πεδίο ορισμού των 2 σημάτων.

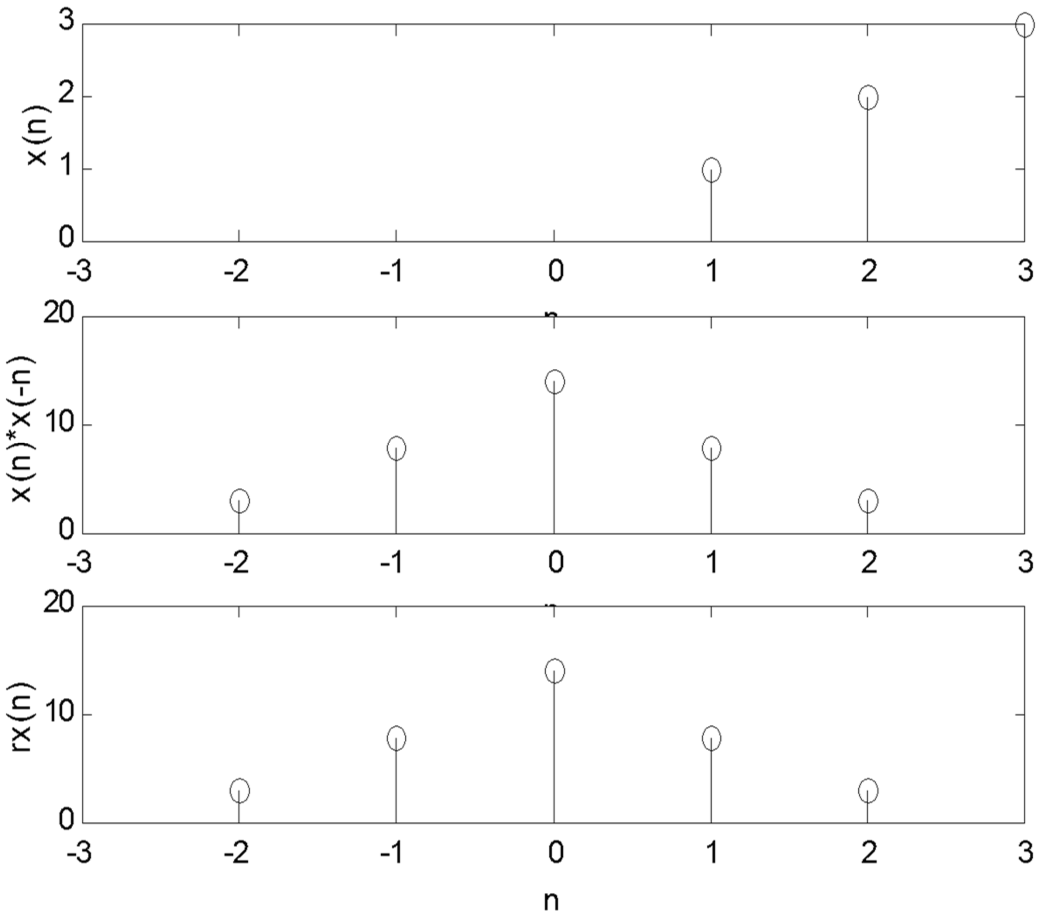
Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη σειρά: $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$

Ετεροσυσχέτιση (Cross-correlation)

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,y(n+k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,y(k-n) = x(n) * y(-n)$$

Αυτοσυσχέτιση (Autocorrelation)

$$r_x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n+k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k-n) = x(n) * x(-n)$$



Παράδειγμα εφαρμογής της συσχέτισης

- Εστω το x(n)=[1,1,1,1,1,1], n=0,1,…,5 και h(n)=[1,1,1], n=2,3,4. Να υπολογιστεί η συσχέτιση τους, καθώς και η συνέλιξη x(-n)*h(n).

ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

Η είσοδος $x(n)$ και η έξοδος $y(n)$
ενός συστήματος γραμμικού αμετάβλητου κατά τη μετατόπιση
(Linear Time Invariant – **LTI**)
συνδέονται με τη σχέση:

$$\boldsymbol{y(n)=x(n)*h(n)}$$

όπου
$h(n)$ είναι η **κρουστική απόκριση** του συστήματος,
δηλαδή η έξοδος του συστήματος
για είσοδο
$x(n)=\delta(n)$

Συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά

Αν ένα σύστημα που έχει είσοδο x(n), κρουστική απόκριση $h_1(n)$ και έξοδο $w(n)$ συνδεθεί **σε σειρά** με ένα σύστημα που έχει κρουστική απόκριση $h_2(n)$ και έξοδο $y(n)$, δηλαδή:

$$y(n) = w(n)* h_2(n)$$
$$w(n) = x(n)* h_1(n)$$

τότε το συνολικό σύστημα έχει είσοδο $x(n)$, έξοδο $y(n)$ και κρουστική απόκριση

$$h(n)= h_1(n) * h_2(n),$$

όπου $y(n)=x(n)*h(n)$

Συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα

Αν ένα σύστημα που έχει είσοδο x(n), κρουστική απόκριση h1(n) και έξοδο w(n) συνδεθεί **παράλληλα** με ένα σύστημα που έχει που έχει είσοδο x(n), κρουστική απόκριση h2(n) και έξοδο v(n) προσθέτοντας τις εξόδους των φίλτρων, δηλαδή:

$$y(n)=w(n)+v(n)$$
$$w(n)=x(n)*h1(n)$$
$$v(n)=x(n)*h2(n)$$

τότε το συνολικό σύστημα έχει είσοδο x(n), έξοδο y(n) και κρουστική απόκριση

$$\mathbf{h(n)=h1(n)+h2(n)}$$

όπου y(n)=x(n)*h(n)

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (φίλτρο) περιγράφεται με μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές (ΓΕΔΣΣ):

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a(k)y(n-k)$$

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου h(n)

είναι η λύση της εξίσωσης διαφορών για x(n)=δ(n)

Κατηγορίες Φίλτρων

Τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα φίλτρα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με το μήκος της κρουστικής τους απόκρισης:

- τα **φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης** (Finite-duration Impulse Response – **FIR**)
- τα **φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης** (Infinite-duration Impulse Response – **IIR**)

Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης

Τα **FIR** φίλτρα περιγράφονται από την εξίσωση διαφορών:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k)$$

Moving Average (**MA**)

Κρουστική Απόκριση φίλτρων **FIR**

$$h(n) = \sum_{k=0}^{M} b(k)\delta(n-k)$$

Φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης

Τα **IIR** φίλτρα περιγράφονται από τις εξισώσεις διαφορών:

$$y(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{N} a(k)\, y(n-k)$$

Auto Regressive (**AR**)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b(k)\, x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a(k)\, y(n-k)$$

Auto Regressive Moving Average (**ARMA**)

Επίλυση ΓΕΔΣΣ FIR Φίλτρων

Υπολογισμός κρουστικής απόκρισης h(n)

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

Παράδειγμα

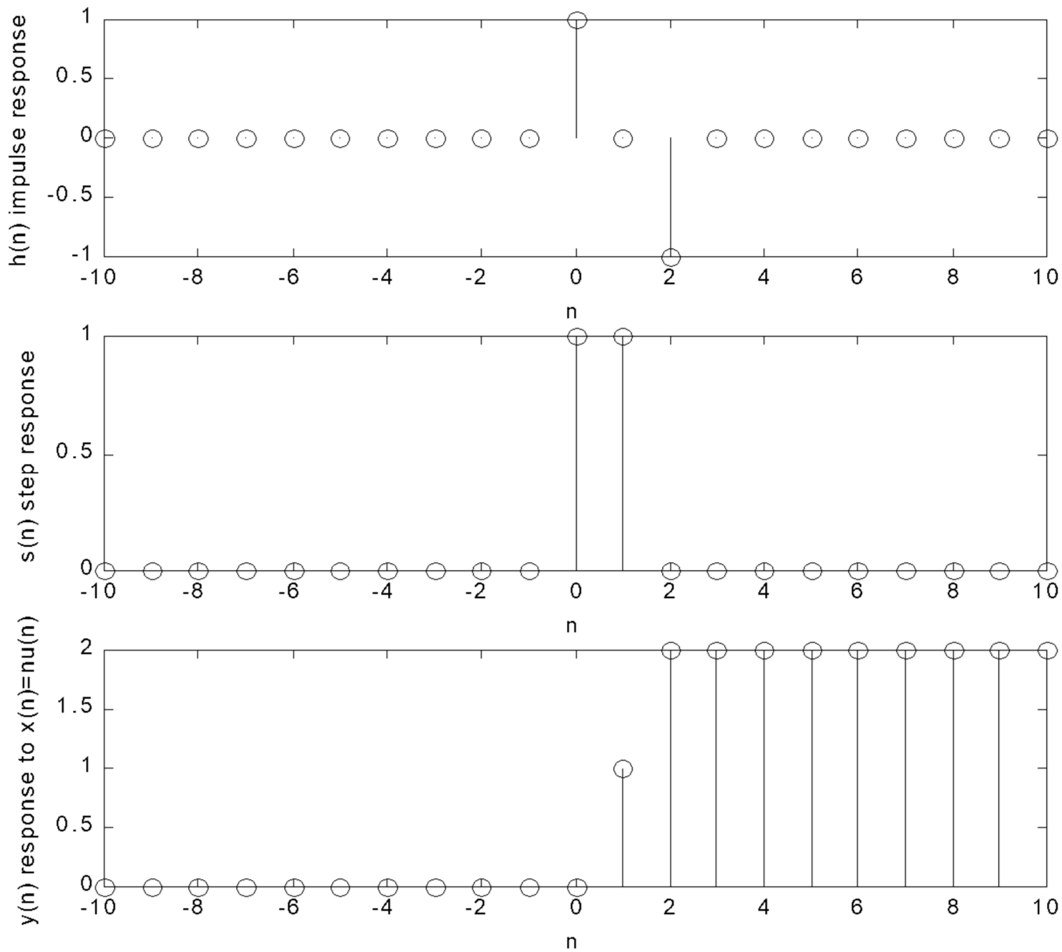
$$y(n)=x(n)-x(n-2)$$

$$x(n)=nu(n)$$

$$h(n)=\delta(n)-\delta(n-2)$$

$$y(n)=nu(n)-(n-2)u(n-2)=x(n)*h(n)$$

FIR (MA)
Παράδειγμα: y(n)=x(n)-x(n-2)



Επίλυση ΓΕΔΣΣ IIR Φίλτρων

$$y(n)=y_p(n)+y_h(n)$$

Η μερική λύση $y_p(n)$ ικανοποιεί τη ΓΕΔΣΣ
για τη *δεδομένη* είσοδο x(n)
με *μηδενικές* αρχικές συνθήκες: **ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ**

Η ομογενής λύση $y_h(n)$ αντιστοιχεί στην απόκριση του φίλτρου για *μηδενική* είσοδο x(n)=0
με τις *δεδομένες* αρχικές συνθήκες: **ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ**

Βήματα μεθόδου

- Για την κρουστική απόκριση:
  - Βρίσκουμε τις ρίζες a_i του Χ.Π.
  - Υπολογίζουμε τους συντελεστές των $(a_i)^n$,ως εξής:
    - Θεωρούμε μηδενικές όσες **αρχικές συνθήκες ηρεμίας** χρειάζεται, πχ y(-1)=y(-2)=0 για σύστημα με N=2
    - Υπολογίζουμε τις Αρχ. Συνθήκες για n>=0 από την ΓΕΔΣΣ

- Για να υπολογίσουμε την έξοδο, δοθείσας της ΓΕΔ, της εισόδου $x(n)$ και αρχικών συνθηκών $y(-1)$, $y(-2)$ κλπ
  - Υπολογίζουμε την **μερική απόκριση** $y_p(n)$ βάσει της εισόδου $x(n)$
  - Αντικαθιστούμε την $y_p(n)$ στην ΓΕΔ και υπολογίζουμε τις σταθερές της $y_p(n)$, χωρίς αρχικές συνθήκες
  - Υπολογίζουμε την **ομογενή απόκριση** $y_h(n)$
  - Βρίσκουμε τις ρίζες a_i του Χ.Π.
  - Υπολογίζουμε τους συντελεστές των $(a_i)^n$,ως εξής:
    - Χρησιμοποιούμε τις δοθείσες **αρχικές συνθήκες ηρεμίας**, πχ y(-1), y(-2) για σύστημα με N=2

- Υπολογίζουμε τις Αρχ. Συνθήκες για $n>=0$ από την ΓΕΔΣΣ (πχ $y(0)$ και $y(1)$ για $N=2$)
- Αντικαθιστούμε την συνολική y(n)= $y_p(n)+ y_h(n)$ στην ΓΕΔ και υπολογίζουμε τις τιμές των συντελεστών

Μερική Λύση

Όρος στην είσοδο $x(n)$	**Μερική Λύση**
C	c_1
$c\cdot n$	$c_1\cdot \mathrm{n}+c_2$
$c\cdot a^n$	$c_1\cdot \mathrm{a}^{\mathrm{n}}$
$C\cdot\cos(\omega n)$	$c_1\cdot\cos(\omega \mathrm{n})+c_2\cdot\sin(\omega \mathrm{n})$
$c\cdot\sin(\omega \mathrm{n})$	$c_1\cdot\cos(\omega \mathrm{n})+c_2\cdot\sin(\omega \mathrm{n})$
$c\cdot\delta(\mathrm{n})$	0

Ομογενής Λύση

$$y_h(n)=z^n$$

Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο

$$z^N + a(1)z^{N-1} + a(2)z^{N-2} + \ldots + a(N-1)z + a(N) = 0$$

Αν το Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο
έχει απλές ρίζες, τότε

$$y_h(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k z_k^n$$

Οι συντελεστές A_k υπολογίζονται έτσι ώστε
να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες

Παράδειγμα Επίλυσης ΓΕΔΣΣ φίλτρου IIR

$y(n) = ay(n-1) + x(n), \quad y(-1) = 0$

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση $\mathrm{h}(n)$ (για $x(n) = \delta(n)$).

Μερική λύση $\mathrm{y}_p(n) = 0$

Ομογενής λύση $\mathrm{y}(n) - ay(n-1) = 0$

$y(n) = z^n \Rightarrow z^n - az^{n-1} = 0 \Rightarrow z^{n-1}(z-a) = 0 \Rightarrow z = a$

$y_h = Aa^n$

$y(0) = y_p(0) + y_h(0) = A = \delta(0) + ay(-1) = 1 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow$

$h(n) = y(n) = y_p(n) + y_h(n) = a^n$

Παρατηρούμε ότι η κρουστική απόκριση έχει άπειρο μήκος.

Παράδειγμα Επίλυσης ΓΕΔΣΣ

$$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+2x(n),\quad y(-1)=0$$

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση $\mathrm{h}(n)$ ($\gamma\iota\alpha\; x(n)=\delta(n)$).

- kljkhg

Μερική λύση $\mathrm{y}_p(n)$=0

Ομογενής λύση $\mathrm{y}_h(n)=z^n, x(n)=0 \Rightarrow y_h(n)+\sum_{k=1}^{N} a(k)\,y(n-k)=0$

$\mathrm{A}\lambda\lambda\acute{\alpha}\; N=1, a(1)=-\frac{1}{2} \Rightarrow y_h(n)=A\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Υπολογισμός του Α βάσει οριακών συνθηκών:

$$\mathrm{y}(0)=\frac{1}{2}y(-1)+2\delta(0)=2$$

$$y(0)=A\left(\frac{1}{2}\right)^0=A \Rightarrow A=2$$

$\mathrm{T}\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\alpha}: h(n)=y_p(n)+y_h(n)=2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Παράδειγμα Επίλυσης ΓΕΔΣΣ IIR Φίλτρου

$$y(n) = x(n) + \tfrac{1}{5} y(n-1), y(-1) = 0, x(n) = u(n)$$

Μ*ερική λύση*

$$y_p(n) = c \Rightarrow c = x(n) + \tfrac{1}{5} c = 1 + \tfrac{1}{5} c \Rightarrow c = \tfrac{5}{4} \Rightarrow y_p(n) = \tfrac{5}{4}$$

Ο*μογενής λύση*

$$y_h(n) = z^n \;\kappa\alpha\iota\; x(n) = 0 \Rightarrow y_h(n) = \tfrac{1}{5} y_h(n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^n = \tfrac{1}{5} z^{n-1} \Rightarrow z^{n-1}(z - \tfrac{1}{5}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_h(n) = A(\tfrac{1}{5})^n$$

$$y(n) = y_p(n) + y_h(n) = \tfrac{5}{4} + A(\tfrac{1}{5})^n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = \tfrac{5}{4} + A(\tfrac{1}{5})^0 \\ y(0) = x(0) + \tfrac{1}{5} y(-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y(0) = \tfrac{5}{4} + A \\ y(0) = 1 + 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \tfrac{5}{4} + A = 1 \Rightarrow A = -\tfrac{1}{4}$$

$$y(n) = \tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{4} (\tfrac{1}{5})^n$$

Συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος: Εναλλακτική προσέγγιση

- Εναλλακτικά, επιλύουμε το ίδιο LTI σύστημα για είσοδο x(n)=δ(n), υπολογίζουμε το h(n) και στη συνέχεια για οποιαδήποτε είσοδο (πχ x(n)=u(n)), υπολογίζουμε τη συνέλιξη x(n)*h(n):

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{5} y(n-1),\ y(-1) = 0$$

$$x(n) = \delta(n)$$

Μερική λύση: $\mathrm{y}_p(n) = 0$

Ομογενής λύση: $\mathrm{y}_h(n) = z^n \Rightarrow z^n - \frac{1}{5} z^{n-1} = z^{n-1}\left(z - \frac{1}{5}\right) = 0$ (Χαρακτηριστικό πολυώνυμο)

$$y_h(n) = A\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Υπολογισμός του Α: $\mathrm{y}(0) = A = x(0) + \frac{1}{5} y(-1) = 1 \Rightarrow y_h(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$

Εξοδος για $x(n) = \delta(n) : y(n) = h(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$

Εξοδος για $x(n) = u(n) : y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-k} u(n-k) u(k) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{5}\right)^n \sum_{k=0}^{n} (5)^k = \left(\frac{1}{5}\right)^n \frac{1-5^{n+1}}{1-5} = \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(-\frac{1}{4} + \frac{5^{n+1}}{4}\right) = \frac{5}{4} 5^n \left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Παράδειγμα Επίλυσης ΓΕΔΣΣ IIR Φίλτρου

$$y(n)=\frac{3}{4}y(n-1)-\frac{1}{8}y(n-2)+x(n)-x(n-1) \quad \text{Αρχικές συνθήκες: } y(-2)=y(-1)=0$$

Μερική λύση: $x(n)=\delta(n)\Rightarrow y_p(n)=0$

Ομογενής λύση:

$$y_h=z^n, x(n)=0\Rightarrow z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}=0\Rightarrow z_1=\frac{1}{2}, z_2=\frac{1}{4}$$

$$y_h(n)=A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+A_2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$y(n)=y_p(n)+y_h(n)\Rightarrow\begin{cases} n=0\Rightarrow y(0)=A_1+A_2 \\ n=1\Rightarrow y(1)=A_1\frac{1}{2}+A_2\frac{1}{4}\end{cases}$$

Από τον ορισμό του $y(n)$

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=\frac{3}{4}y(-1)-\frac{1}{8}y(-2)+\delta(0)-\delta(-1)=1 \\ y(1)&=\frac{3}{4}y(0)-\frac{1}{8}y(-1)+\delta(1)-\delta(0)=-\frac{1}{4}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \mathrm{A}_1=-2, \mathrm{A}_2=3$$

Παράδειγμα Επίλυσης ΓΕΔΣΣ IIR Φίλτρου με χαρακτηριστικό πολυώνυμο με μιγαδικές ρίζες

$y(n) = y(n-1) - y(n-2) + 0.5x(n) - 0.5x(n-1)$, $x(n) = 0.5^n u(n)$

Αρχικές συνθήκες $y(-2) = 0.25$, $y(-1) = 0.75$

Μερική λύση:

$x(n) = 0.5^n u(n), \Rightarrow y_p(n) = c_1 0.5^n$

Αντικαθιστούμε στη ΓΕΔΣΣ:

$c_1 0.5^n = c_1 0.5^{n-1} - c_1 0.5^{n-2} + 0.5^n u(n) - 0.5\left(0.5^{n-1}\right)u(n-1), n \geq 0$

$c_1 = c_1 (0.5)^{-1} - c_1 (0.5)^{-2} + 0.5 - 0.5\frac{1}{0.5} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_p(n) = \frac{1}{2}(0.5)^n$

Ομογενής λύση: $y_h = z^n, x(n) = 0 \Rightarrow$

$$z^{n-2}\left(z^2 - z + 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}\left(1 + j\sqrt{3}\right) = e^{j\frac{\pi}{3}} \\ z_2 = \frac{1}{2}\left(1 - j\sqrt{3}\right) = e^{-j\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

$$y(n) = y_p(n) + y_h(n) = \frac{1}{2}(0.5)^n + A_1 e^{j\frac{\pi}{3}n} + A_2 e^{-j\frac{\pi}{3}n} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0.5 + A_1 + A_2 \\ y(1) = \frac{1}{2}0.5 + A_1 e^{j\frac{\pi}{3}} + A_2 e^{-j\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

Από τις αρχικές συνθήκες του $\mathrm{y}(n)$

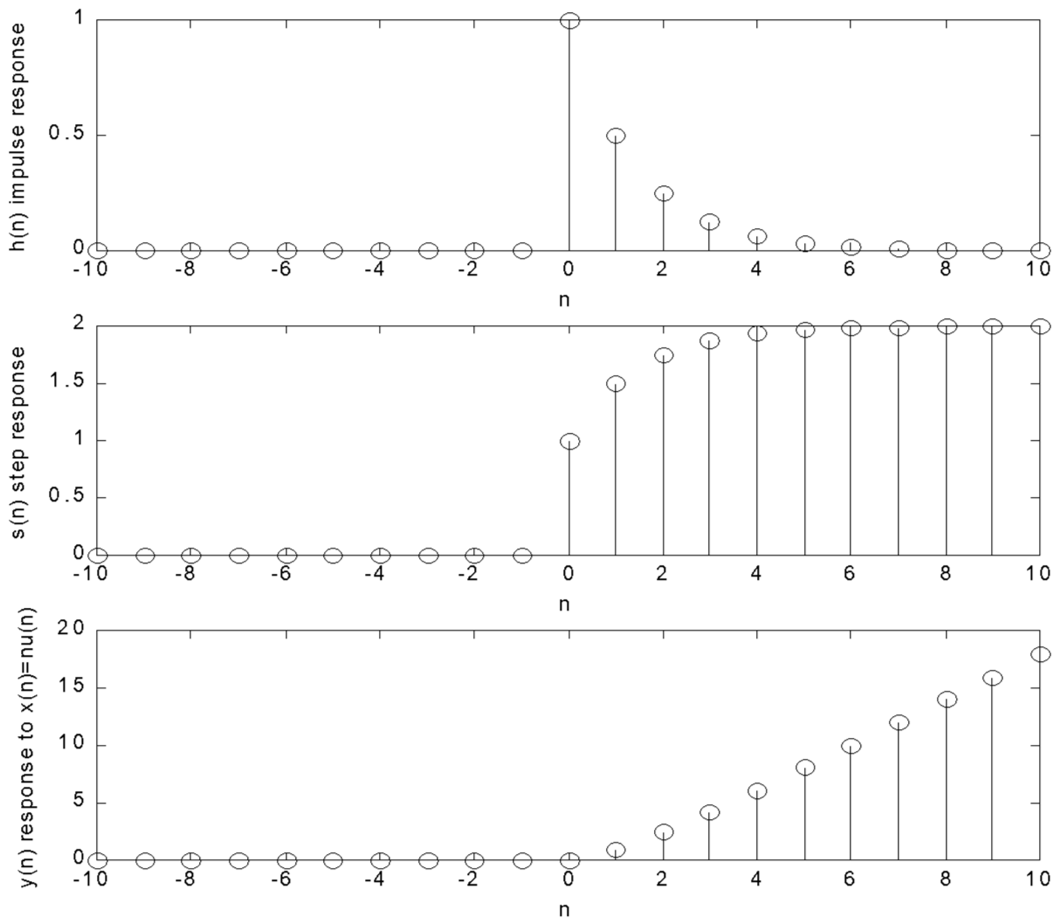
$$n = 0 \Rightarrow y(0) = y(-1) - y(-2) + 0.5(0.5)^0 u(0) + 0.5(0.5)^{-1} u(-1) = 0.75 - 0.25 + 0.5 + 0 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow y(1) = y(0) - y(-1) + 0.5(0.5)^1 u(1) + 0.5(0.5)^0 u(0) = 1 - 0.75 + 0.25 + 0.5 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{j\frac{\pi}{3}} & e^{-j\frac{\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = j\frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}} - \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}} + \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

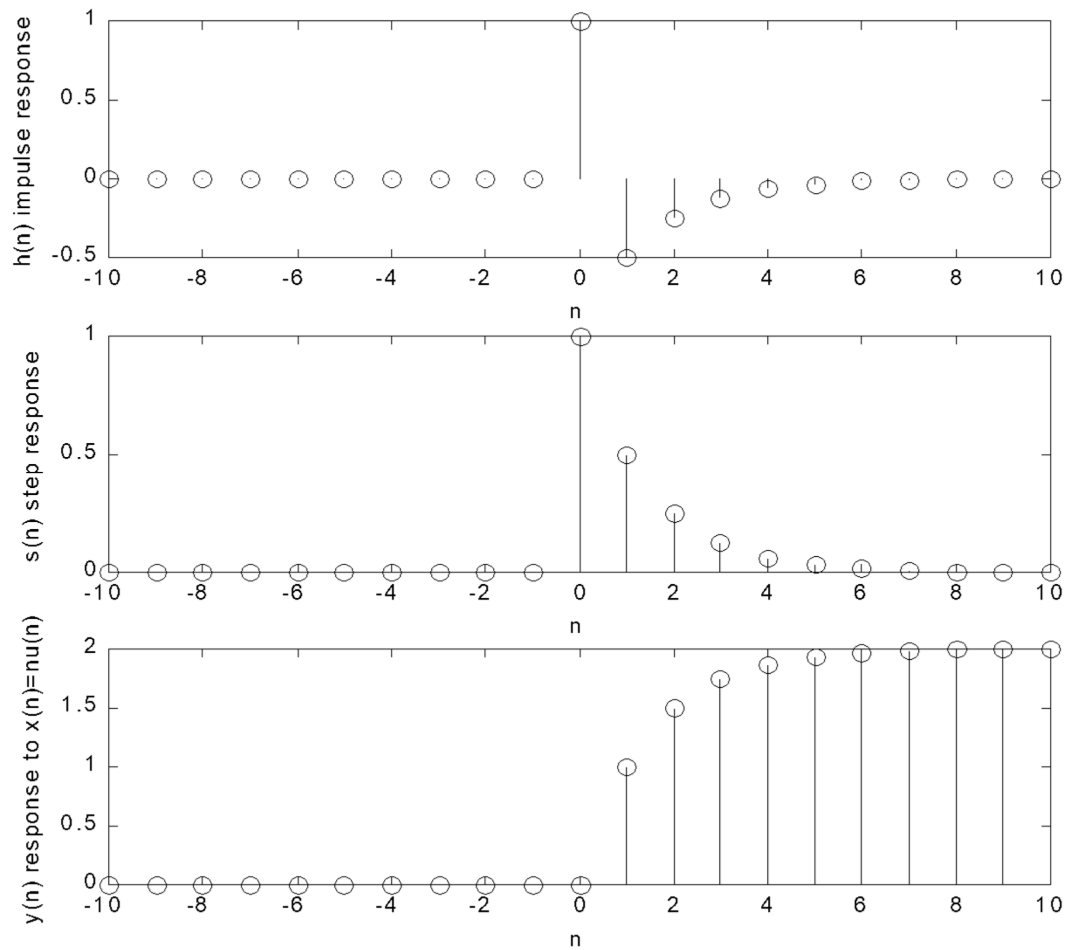
IIR (AR)

Παράδειγμα: $y(n)=x(n)+0.5y(n-1)$



IIR (ARMA)

Παράδειγμα: $y(n)=x(n) - x(n-1)+0.5y(n-1)$



Παράδειγμα

- Δίνεται LTI με $y(n)=0.75y(n-1)-(1/8)y(n-2)+x(n)-x(n-1)$.
- Να βρεθεί η $h(n)$ και η έξοδος αν $x(n)=(1/2)^n u(n)$

$$z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}=\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)$$

$$h_h(n)=\left(A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+A_2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)u(n)$$

$$y_p(n)=0$$

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$y(0)=\frac{3}{4}y(-1)-\frac{1}{8}y(-2)+x(0)-x(-1)=1$$

$$y(1)=\frac{3}{4}y(0)-\frac{1}{8}y(-1)+x(1)-x(0)=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} n=0\Rightarrow A_1+A_2=1 \\ n=1\Rightarrow \frac{1}{2}A_1+\frac{1}{4}A_2=-\frac{1}{4} \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} A_1=-1 \\ A_2=3 \end{array}$$

- Για την έξοδο αν $x(n)=(1/2)^n u(n)$, ορίζουμε την $y_p(n)=Cn(1/2)^n$, αντί της $y_p(n)=C(1/2)^n$, διότι το (1/2) είναι ήδη ρίζα του Χ.Π.

Ομογενής λύση: $y_h(n)=\left(A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+A_2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)u(n)$

Μερική λύση: $y_p(n)=Cn\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

Αντικαθιστούμε την yp στην ΓΕΔ και προσδιορίζουμε το C:

$$y_p(n)=\frac{3}{4}y_p(n-1)-\frac{1}{8}y_pn(-2)+x(n)-x(n-1)=\frac{3}{4}C(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{8}C(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$Cn\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{3}{4}C(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{8}C(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$Cn=\frac{3}{4}C(n-1)2-\frac{1}{8}C(n-2)4+1-2\Rightarrow Cn=\frac{3}{2}Cn-\frac{3}{2}C-\frac{1}{2}Cn+Cn-1\Rightarrow C=-2$$

Αντικαθιστούμε την y_p+y_h στην ΓΕΔ και προσδιορίζουμε τα A_1, A_2:

$$y(n)=y_p(n)+y_h(n)=\left(-2n\left(\frac{1}{2}\right)^2+A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+A_2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)u(n)\Rightarrow\begin{cases} y(0)=A_1+A_2 \\ y(1)=-2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{4}A_2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} n=0\Rightarrow y(0)=\dots \\ n=1\Rightarrow y(1)=\dots\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l} A_1=4 \\ A_2=3\end{array}$$

- Εναλλακτικός υπολογισμός του $y(n)$, αφού έχουμε βρει την $h(n)$

$$h(n)=\left(-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right)u(n)$$

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$$

$$x*h=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u(k)\left(-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}+3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\right)u(n-k)=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}+3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\right)=-2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}+3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}=-2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}(4)^{k}$$

$$=-2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}(2)^{k}=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(n+1)+3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=$$

$$=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(n+1)-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\left(1-2^{n+1}\right)=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-2n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+6\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-2n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

Time-Domain Analysis

$$x(t) \longrightarrow \text{System} \longrightarrow y(t)$$

$$\text{Total response} = \underbrace{\begin{matrix}\text{zero-input} \\ \textit{Forced}\end{matrix}\ \text{response}}_{\substack{x(t)=0 \\ \text{internal system conditions only}}} + \underbrace{\begin{matrix}\text{zero-state} \\ \textit{natural}\end{matrix}\ \text{response}}_{\substack{\text{response to non-zero } x(t) \\ \text{all initial conditions are zero}}}$$

Each component can be computed independently of other

System satisfies linearity property if zero-input response is zero (i.e. all initial conditions are zero)

Zero-state response is convolution of impulse response and input signal

Παράδειγμα: ευρεση κρουστικής απόκρισης $h(t)$ συνεχούς LTI

- Εστω LTI με είσοδο και ΓΔΕ $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$

Αναζητούμε την απόκριση h(t) που ικανοποιεί: $\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=\delta(t)$

$$partial\ solution: h_p(t)=0.$$

$$Homogeneous:$$

$$h_h(t)=Be^{st}u(t)\Rightarrow \frac{dh_h(t)}{dt}+2y_h(t)=0\Rightarrow sBe^{st}+2Be^{st}=0\Rightarrow s=-2$$

Η σταθερά B υπολογίζεται με αντικατάσταση της (h_h+h_p) στην ΓΔΕ:

$$\frac{d}{dt}\left(Be^{-2t}u(t)\right)+2Be^{-2t}=\delta(t)\Rightarrow -2Be^{-2t}u(t)+Be^{-2t}\delta(t)+2Be^{-2t}u(t)=\delta(t)\Rightarrow B=1$$

Παράδειγμα: ευρεση κρουστικής απόκρισης *h*(*t*) συνεχούς LTI, Τρόπος B

- Εστω LTI με είσοδο και ΓΔΕ $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$

Βρίσκουμε την ομογενή επιλυοντας: $\frac{dh_h(t)}{dt}+2h_h(t)=0.$

$Homogeneous: h_h(t)=Be^{-2t}u(t)\Rightarrow$

Η σταθερά B υπολογίζεται με ΑΣ : μόνο η παράγωγος τάξης (N-1) ίση με $1/a_{\text{N}}$ και όλες οι μικρότερης τάξης παράγωγοι ίσες με 0:

$h_h^{(0)}(0)=1\Rightarrow B=1$

Αντικαθιστούμε την h_h στο δεξί μέρος της ΓΔΕ:

$h(t)=h_h(t)=e^{-2t}u(t)$

Παράδειγμα: ευρεση κρουστικής απόκρισης *h*(*t*) συνεχούς LTI

- Εστω LTI με είσοδο και ΓΔΕ $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)+x'(t)$

Αναζητούμε την απόκριση h(t) που ικανοποιεί: $\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=\delta(t)+\delta'(t)$

$partial\ solution : h_p(t)=c_1\delta(t).$

$Homogeneous : h_h(t)=Be^{-2t}u(t)$

Οι σταθερές B, c_1 υπολογίζονται με αντικατάσταση της $\left(h_h+h_p\right)$ στην ΓΔΕ:

$$\frac{d}{dt}\left(Be^{-2t}u(t)+c_1\delta(t)\right)+2\left(Be^{-2t}+c_1\delta(t)\right)=\delta(t)+\delta'(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2Be^{-2t}u(t)+Be^{-2t}u'(t)+c_1\delta'(t)+2Be^{-2t}u(t)+2c_1\delta(t)=\delta(t)+\delta'(t)$$

$$\Rightarrow -2Be^{-2t}u(t)+B\delta(t)+c_1\delta'(t)+2Be^{-2t}u(t)+2c_1\delta(t)=\delta(t)+\delta'(t)$$

$$\Rightarrow +B\delta(t)+c_1\delta'(t)+2c_1\delta(t)=\delta(t)+\delta'(t)\Rightarrow \begin{matrix} B+2c_1=1 \\ c_1=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} B=-1 \\ c_1=1 \end{matrix}$$

Παράδειγμα: εύρεση κρουστικής απόκρισης $h(t)$ συνεχούς LTI, Τρόπος Β

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση συστήματος με ΓΔΕ

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) + x'(t)$$

Βρίσκουμε την ομογενή συνιστώσα της $h(t)$ επιλύοντας : $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$

$$Homogeneous: h_h(t) = Be^{-2t}u(t) \Rightarrow$$

Η σταθερά Β υπολογίζεται με ΑΣ : μόνο η παράγωγος τάξης (N-1) ίση με $1/\text{a}_\text{N}$ και όλες οι μικρότερης τάξης παράγωγοι ίσες με 0:

$$h_h^{(0)}(0) = 1 \Rightarrow B = 1$$

Αντικαθιστούμε την h_h στο δεξί μέρος της ΓΔΕ:

$$h(t) = h_h(t) = e^{-2t}u(t) + \frac{d}{dt}\left(e^{-2t}u(t)\right) = e^{-2t}u(t) - 2e^{-2t}u(t) + e^{-2t}\delta(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

Παράδειγμα: εύρεση κρουστικής απόκρισης $h(t)$, Τρόπος Β

Εστω σύστημα με ΓΔΕ: $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$

Βρίσκουμε το ομογενές κομμάτι $h_h(t)$ της $h(t)$ επιλυοντας: $\frac{d^2 h_h(t)}{dt^2} + 3\frac{dh_h(t)}{dt} + 2h_h(t) = 0.$

Χαρ. Πολυωνυμο: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1) \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$

$h_h(t) = \left(c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}\right) u(t) \Rightarrow$

Οι σταθερές c_1, c_2 υπολογίζονται με ΑΣ στο 0^+ : μόνο η παράγωγος τάξης $(N\text{-}1)$ ίση με $1/a_N$ και όλες οι μικρότερης τάξης παράγωγοι ίσες με 0:

$$\left.\begin{aligned} h_h^{(0)}\left(0^+\right) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ h_h^{(1)}\left(0^+\right) = 1 \Rightarrow -2c_1 - c_2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = -1, c_2 = 1$$

Παράδειγμα: ευρεση κρουστικής απόκρισης $h(t)$ συνεχούς LTI, Τρόπος Β

Εστω σύστημα με ΓΔΕ $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+9y(t)=2\frac{dy(t)}{dt}+9x(t)$

Βρίσκουμε την ομογενή επιλυοντας: $\frac{d^2h_h(t)}{dt^2}+6\frac{dh_h(t)}{dt}+9h_h(t)=0.$

Χαρ. Πολυωνυμο: $\lambda^2+6\lambda+9=(\lambda+3)^2 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-3$

$Homogeneous: h_h(t)=(c_1+c_2t)e^{-3t}u(t) \Rightarrow$

Η σταθερές c_1, c_2 υπολογίζεται με ΑΣ: μόνο η παράγωγος τάξης $(N\text{-}1)$ ίση με $1/a_N$ και όλες οι μικρότερης τάξης παράγωγοι ίσες με 0:

$$\left.\begin{aligned} h_h^{(0)}(0^+)&=0 \Rightarrow c_1=0 \\ h_h^{(1)}(0^+)&=1 \Rightarrow -3c_2te^{-3t}+c_2e^{-3t}=1 \Rightarrow c_2=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1=0, c_2=1$$

- Αντικαθιστούμε την λύση της ομογενούς $h_h(t)$ στο δεξί σκέλος και κάνουμε πράξεις:

$$h(t) = 2\frac{dh_h(t)}{dt} + 9h_h(t) = 2\frac{d}{dt}\left(te^{-3t}\right) + 9te^{-3t} = 2\left(e^{-3t} + t(-3)e^{-3t}\right) + 9e^{-3t} = \left(2e^{-3t} + 3te^{-3t}\right)u(t)$$

Επίλυση συνεχούς συστήματος

- Βήμα 1: Βρίσκουμε την εξαναγκασμένη απόκριση –forced response- ή μερική λύση –partial or particular:
  - Βάσει της εισόδου και του σχετικού πίνακα, με άγνωστους συντελεστές
  - Αντικαθιστούμε στην ΓΔΕ και βρίσκουμε τους συντελεστές
  - Δεν χρειαζόμαστε Α.Σ.
- Βήμα 2: Φυσική απόκριση – Natural response-
  - Βρίσκουμε το Χαρακτ. Πολυώνυμο και τις ρίζες του
  - Γράφουμε την Φυσική απόκριση σαν εκθετικά με άγνωστους σταθερές
- Συνολική απόκριση = Forced + Natural
  - Χρησιμοποιούμε το ΑΘΡΟΙΣΜΑ Forced + Natural και τις δοθείσες ΑΣ 0- για τους συντελεστές της Natural

Επίλυση συνεχούς συστήματος

- Βήμα 1: Βρίσκουμε την απόκριση μηδενικής εισόδου –Z.I.:
  - Βρίσκουμε το Χαρακτ. Πολυώνυμο και τις ρίζες του
  - Γράφουμε την Z.I. σαν εκθετικά με άγνωστες σταθερές
  - Βάσει της εισόδου και του σχετικού πίνακα
  - Αντικαθιστούμε στην ΓΔΕ και βρίσουμε τις σταθερές με Α.Σ. 0-, δηλ. τις δοθείσες
- Βήμα 2: Βρίσκουμε την κρουστική απόκριση
  - Βρίσκουμε το Χαρακτ. Πολυώνυμο και τις ρίζες του
  - Αντικαθιστούμε στην ΓΔΕ και βρίσκουμε τις σταθερές με Α.Σ. 0+, ΟΧΙ τις δοθείσες
- Βήμα 3: βρίσκουμε την Z.State. Response = κρουστική απόκριση * Είσοδος
- Συνολική απόκριση = Z.I. + Z.S.

Παράδειγμα υπολογισμού εξόδου συνεχούς συστήματος

Εστω LTI με είσοδο $x(t)$, να βρεθεί η έξοδος $y(t)$, αν $y(0)=2$

$$x(t) = Ke^{-4t}u(t) \qquad \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$partial\ solution : y_p(t) = Ae^{-4t} \Rightarrow -4Ae^{-4t} + 2Ae^{-4t} = Ke^{-t}u(t) \Rightarrow 2A = K \Rightarrow y_p(t) = \frac{K}{2}e^{-4t}.$$

$$Homogeneous : y_h(t) = Be^{st} \Rightarrow \frac{dy_h(t)}{dt} + 2y_h(t) = 0 \Rightarrow sBe^{st} + 2Be^{st} = 0 \Rightarrow s = -2$$

$$Output : y(t) = y_p(t) + y_h(t) = Be^{-2t} + \frac{K}{2}e^{-4t}, t \geq 0$$

$$x(t) = 0, t < 0 \Rightarrow y(0) = 2 = B + \frac{K}{2} \Rightarrow B = 2 - \frac{K}{2}$$

$$y(t) = \underbrace{\frac{K}{2}e^{-4t}}_{\text{Μερική}} + \underbrace{\left(2 - \frac{K}{2}\right)e^{-2t}}_{\text{Ομογενής}}, t \geq 0$$

- We rewrite the previous Eq. to obtain the output for zero input and the output for zero state (zero Initial Conditions)

$$y(t) = \underbrace{2e^{-2t}}_{Z.I.} + \underbrace{\frac{K}{2}\left(e^{-4t} - e^{-2t}\right)}_{Z.S.}, t \geq 0$$

- The output for zero state is identical to the convolution $x*h$

$$h(t) = h_h(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$h * x = \int e^{-2s}u(s)Ke^{-4(t-s)}u(t-s)ds = \int_0^t e^{-2s}Ke^{-4(t-s)}ds$$

$$= Ke^{-4t}\int_0^t e^{2s}ds = \frac{K}{2}e^{-4t}\left[e^{2s}\right]_0^t = \frac{K}{2}\left(e^{-4t} - e^{-2t}\right)$$

- Παρατήρηση: η εξοδος $y(t)$ περιλαμβάνει το αποτέλεσμα της συνέλιξης $x(t)*h(t)$, αλλά και το Zeros Input response, διότι το σύστημα δεν είναι γραμμικό:
- Η μη γραμμικότητα οφείλεται στις μη-μηδενικές αρχικές συνθήκες
  - If y(0)=0 → Linear system
- Παρακάτω ελέγχεται η γραμμικότητα:

- Ελεγχος γραμμικότητας του συστήματος
- Let $x_1(t)$ and $x_2(t)$ be input in the system

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=x(t)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy_1(t)}{dt}+ay_1(t)=x_1(t)\\ \dfrac{dy_2(t)}{dt}+ay_2(t)=x_2(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1\dfrac{dy_1(t)}{dt}+ac_1y_1(t)=c_1x_1(t)\\ c_2\dfrac{dy_2(t)}{dt}+ac_2y_2(t)=c_2x_2(t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1\frac{dy_1(t)}{dt}+c_2\frac{dy_2(t)}{dt}+ac_1y_1(t)+ac_2y_2(t)=c_1x_1(t)+c_2x(t)$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(c_1y_1(t)+c_2y_2(t)\right)+a\left(c_1y_1(t)+a_2y_2(t)\right)=c_1x_1(t)+c_2x(t)$$

$$y(0)=c_1y_1(0)+c_2y_2(0), only\,if\;\; y(0)=0$$

$$y(0)\neq 0\,then\,non-linear$$

Προηγούμενο Παράδειγμα, Τρόπος Β

Με χρήση Z.I., Z.S.

Zero Input

$\lambda + 2 = 0, \mathrm{z}_{ZI} = c_1 e^{-2t}, t > 0$

$y\left(0^-\right) = c_1 = 2 \Rightarrow \mathrm{z}_{ZI} = 2e^{-2t}$

Κρουστική απόκριση: $h\left(t\right) = de^{-2t}$

$y\left(0^+\right) = d = 1 \Rightarrow h\left(t\right) = e^{-2t} u\left(t\right)$

Zero State: $z_{ZS}\left(t\right) = x * h = Ke^{-4t} u\left(t\right) * e^{-2t} u\left(t\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Ke^{-4s} u\left(s\right) e^{-2\left(t-s\right)} u\left(t-s\right) ds$

$$= K\int\limits_0^t e^{-4s} e^{-2\left(t-s\right)} ds = Ke^{-2t} \int\limits_0^t e^{-2s} ds = Ke^{-2t} \frac{-1}{2}\left[e^{-2s}\right]_0^t = Ke^{-2t} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)$$

Συνολική έξοδος (απόκριση):

$$y\left(t\right) = y_{ZI} + y_{ZS} = 2e^{-2t} + Ke^{-2t} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right) = 2e^{-2t} + \frac{K}{2}\left(e^{-2t} - e^{-4t}\right) u\left(t\right)$$

Παράδειγμα υπολογισμού εξόδου συνεχούς LTI

Έστω LTI $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ με είσοδο, $x(t)=Ke^{-4t}u(t)$

Να βρεθεί η έξοδος $y(t)$, αν $y(0)=2$

$$partial\ solution: y_p(t) = Ae^{-4t} \Rightarrow -4Ae^{-4t} + 2Ae^{-4t} = Ke^{-t}u(t) \Rightarrow 2A = K \Rightarrow y_p(t) = \frac{K}{2}e^{-4t}.$$

$$Homogeneous: y_h(t) = Be^{st} \Rightarrow \frac{dy_h(t)}{dt} + 2y_h(t) = 0 \Rightarrow sBe^{st} + 2Be^{st} = 0 \Rightarrow s = -2$$

$$Output: y(t) = y_p(t) + y_h(t) = Be^{-2t} + \frac{K}{2}e^{-4t}, t \geq 0$$

$$x(t) = 0, t < 0 \Rightarrow y(0) = 2 = B + \frac{K}{2} \Rightarrow B = 2 - \frac{K}{2}$$

$$y(t) = \underbrace{\frac{K}{2}e^{-4t}}_{\text{Μερική}} + \underbrace{\left(2 - \frac{K}{2}\right)e^{-2t}}_{\text{Ομογενής}}, t \geq 0$$

Ηεκτρικά και μηχανικά συστήματα

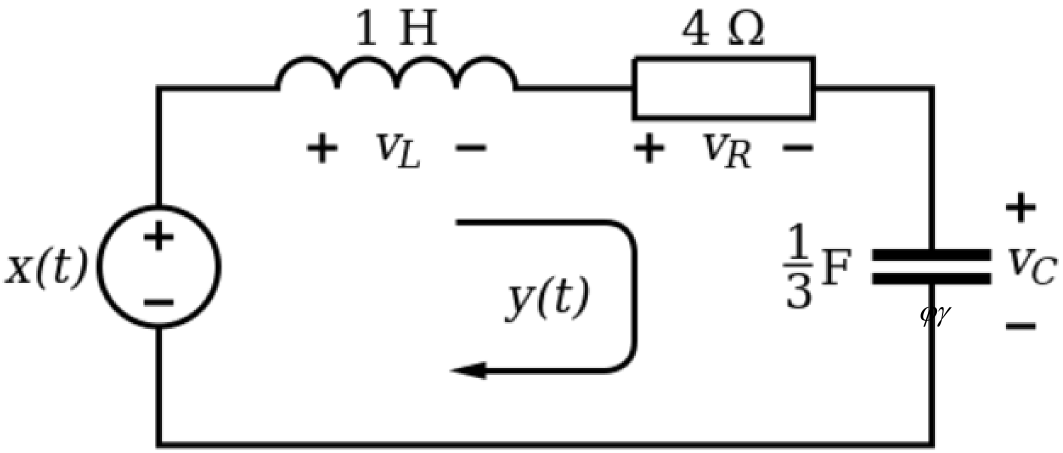
$$Ry(t)+L\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}y(s)\,ds=x(t)\Rightarrow$$

$$R\frac{dy(t)}{dt}+L\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{1}{C}y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{LC}y(t)=\frac{1}{L}\frac{dx(t)}{dt}$$

Παράδειγμα με κύκλωμα RLC

- Είσοδος $x(t)$=8e^{-2t}, Α.Σ. $y(t)$=0, $V_c(0)$=2V



$$y(0)=0 \Rightarrow V_R(0)=Ry(0)=0$$
$$V_C(0)=2$$
$$x(0^-)=0$$
$$V_L(0)=-2=L\frac{dy(0)}{dt} \Rightarrow y'(0)=-2volt$$

$$V_L=L\frac{dy}{dt}, V_R=Ry, V_C=\frac{1}{C}\int ydt$$
$$x(t)=L\frac{dy}{dt}+Ry+\frac{1}{C}\int ydt \Rightarrow x'=Ly''+Ry'+\frac{1}{C}y$$
$$y''+4y'+3y=x'$$

Ορθογωνιότητα συναρτήσεων

$$\int_a^b f_k(x) f_l^*(x)\, dx = \begin{cases} 0, k \neq l \\ > 0, k = l \end{cases}$$

- Παράδειγμα Ορθογωνιότητας μιγαδικών εκθετικών

Θεμελειώδης περίοδος: $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

$$m = 0 \Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t} dx = T_0$$

$$m \neq 0 \Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t} dx = \frac{1}{jm\omega_0} e^{jm\omega_0 t}\Big|_{t_0}^{t_0+T_0} = \frac{1}{jm\omega_0}\left(e^{jm\omega_0(t_0+T_0)} - e^{jm\omega_0 t_0}\right) = 0$$

Σειρές Fourier για περιοδικά σήματα Fourier Series (FS)

Εστω περιοδικό σήμα

$$x(t) = x(t+T), \forall t$$

Το $x(t)$ μπορεί να γραφτεί σαν άπειρο άθροισμα μιγαδικών εκθετικών

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- Παρατηρείστε ότι η κυκλική συχνότητα των μιγ. εκθετικών είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της θεμελειώδους ω_0.

Η περίπτωση πραγματικού σήματος

- Αν το x(t) πραγματικό σήμα, τότε μιγαδική συζυγία μεταξύ των συντελεστών

$$x(t) \in \Re \Leftrightarrow c_{-k} = (c_k)^*$$

- Ετσι η τριγωνομετρική σειρά Fourier γίνεται:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\cos k\omega_0 t + j\sin k\omega_0 t\right) =$$

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k + c_{-k}\right)\cos k\omega_0 t + j\left(c_k - c_{-k}\right)\sin k\omega_0 t$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t\right) \Rightarrow \begin{cases} c_0 = \dfrac{a_0}{2} \\ a_k = \left(c_k + c_{-k}\right) \\ b_k = j\left(c_k - c_{-k}\right) \end{cases}$$

- Τριγωνομετρική FS μόνο με συνημίτονα

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) =$$

$$a_0 + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos nx + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin nx\right)$$

Οι συντελεστές γράφονται: $c_k = \|c_k\| e^{j\varphi_k}$

$$\begin{aligned} a_k &= \left(c_k + c_{-k}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(c_k\right) \\ b_k &= j\left(c_k - c_{-k}\right) = 2\,\mathrm{Im}\left(c_k\right) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} = \dfrac{\mathrm{Re}\left(c_k\right)}{\|c_k\|} = \cos\varphi_k \\ \dfrac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} = \dfrac{\mathrm{Im}\left(c_k\right)}{\|c_k\|} = \sin\varphi_k \end{cases}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) =$$

$$a_0 + 2\left|c_k\right|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\varphi_k \cos nx + \sin\varphi_k \sin nx\right)$$

$$= a_0 + 2\left|c_n\right|\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(nx - \varphi_n\right)$$

Παράδειγμα FS περιοδικού σήματος

$$x(t)=\begin{cases}0, & -\pi\le t<0\\ 1, & 0\le t<\pi\end{cases}, f(t+2\pi)=f(t)$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}, \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{2\pi}=1$$

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}1\cdot dt=\frac{1}{2}$$

$$c_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}x(t)e^{-jkt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}1\cdot e^{-jkt}dt=\frac{1}{2\pi kj}\left(1-e^{-jk\pi}\right)$$

$$c_{-k}=\frac{-1}{2\pi kj}\left(1-e^{jk\pi}\right)$$

- Οι συντελεστές για τις τριγωνομετρικές σειρές Fourier:

$$a_0 = 2c_0 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

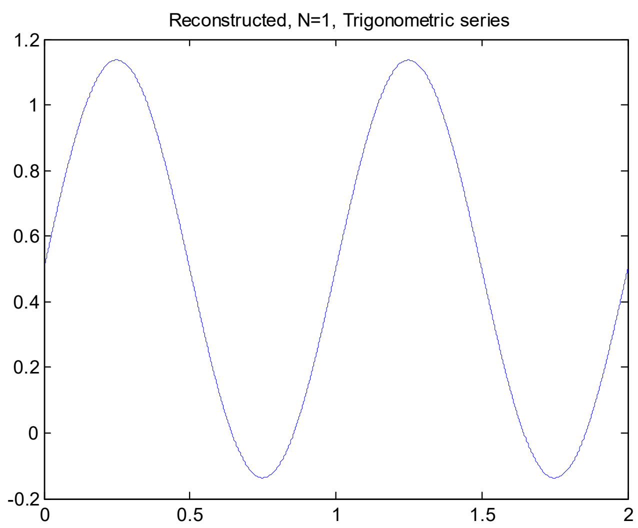
$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{1}{2\pi kj}\left(\left(1 - e^{-jk\pi}\right) - \left(1 - e^{jk\pi}\right)\right) = \frac{1}{2\pi kj}\left(e^{jk\pi} - e^{-jk\pi}\right) = \frac{\sin k\pi}{k\pi} = 0$$

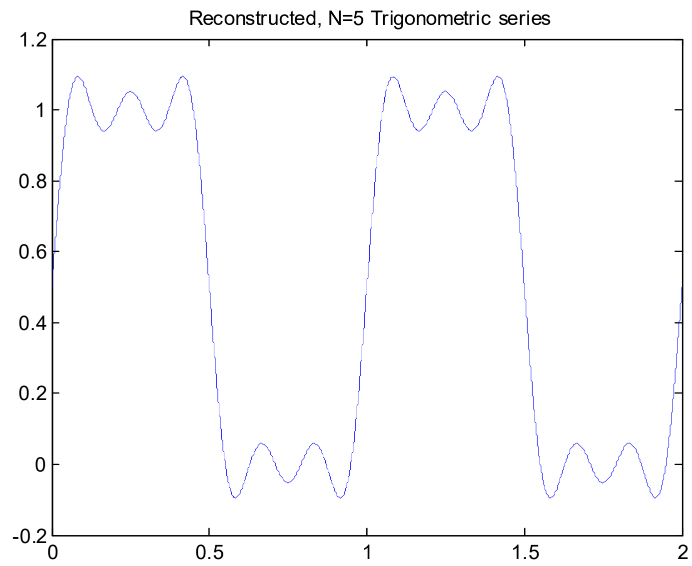
$$b_k = j\left(c_k - c_{-k}\right) = j\frac{1}{2\pi kj}\left(\left(1 - e^{-jk\pi}\right) + \left(1 - e^{jk\pi}\right)\right) = \frac{1}{2\pi k}\left(2 - \left(e^{jk\pi} + e^{-jk\pi}\right)\right)$$

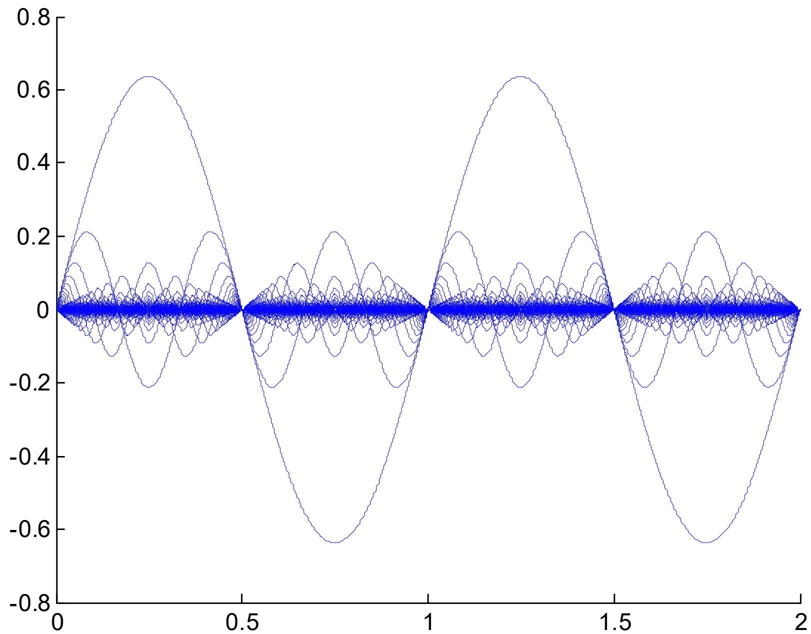
$$= \frac{1 - \cos k\pi}{k\pi} = \begin{cases} \dfrac{2}{k\pi}, k : \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o} \\ 0, k : \ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o \end{cases}$$

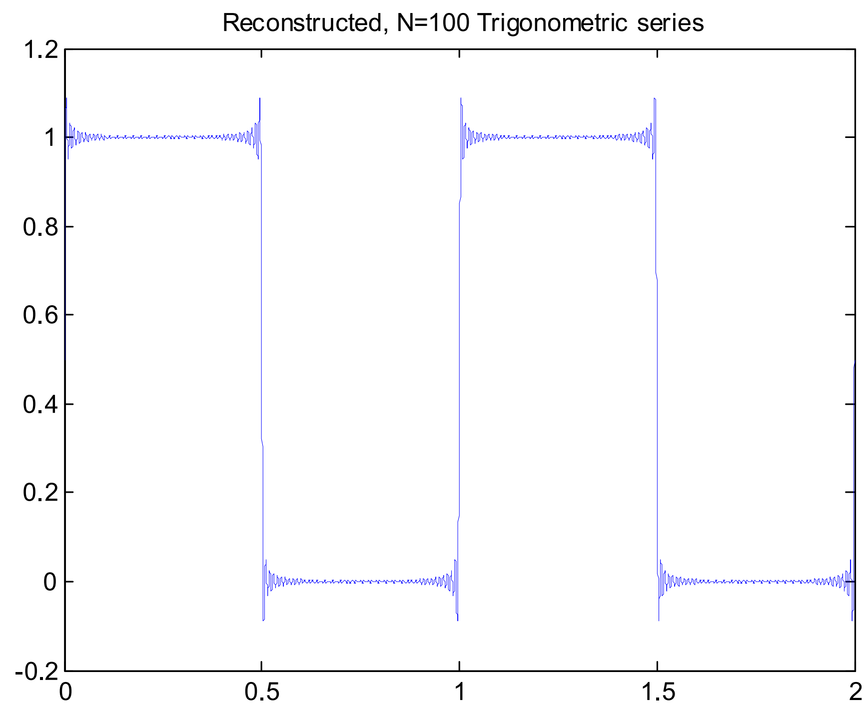
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt \right)$$

$$= 1 + \frac{2}{\pi} \sin t + \frac{2}{3\pi} \sin 3t + \frac{2}{5\pi} \sin 5t + \frac{2}{7\pi} \sin 7t + \frac{2}{9\pi} \sin 9t + \ldots$$


Reconstructed, N=1, Trigonometric series
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
0.5
1
1.5
2


Reconstructed, N=5 Trigonometric series
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
0.5
1
1.5
2





- Το αποτέλεσμα με χρήση 100 συχνοτήτων

Συνεχής Μετασχηματισμος Fourier για μη περιοδικά σήματα Continuous FT - CFT

- Εστω συνεχές x(t)

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

Πεδίο χρόνου — Πεδίο Συχνότητας

- Αποδεικνύεται ότι

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Φάσμα Fourier

- Οι συντελεστές $X(\omega)$ είναι μιγαδικοί (στη γενική περίπτωση)

$$X(\omega) = \left|X(\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\left|X(\omega)\right|: \text{ Μέτρο}$$

$$\varphi(\omega): \text{ Φάση}$$

- Ικανή συνθήκη για ύπαρξη CFT του $x(t)$, (συνθήκη Diriclet):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right| dt < \infty$$

Ιδιότητες CFT

- Γραμμικότητα, χρονική μεταφορά και αντιστροφή

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$$

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$$

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

- Μεταφορά στη συχνότητα $x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$

$$x(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt = X(\omega-\omega_0)$$

- Παραγώγιση $\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow j\omega X(\omega)$

$$\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}dt\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, j\omega e^{j\omega t}dt$$

- CFT πραγματικού σήματος

$$x(t) \in \Re \Leftrightarrow c(-\omega) = \left(c(\omega)\right)^*$$

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(e^{-j\omega t}\right)^* dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt\right)^* = X^*(\omega)$$

- Ολοκλήρωση

Ιδιότητα: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt \leftrightarrow \pi X(0)\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}X(\omega)$

- Συνέλιξη / Πολλαπλασιασμός

$$x_1(t)*x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$$

$$x_1(t)\cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_2(\omega)$$

Απόδειξη

$$x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1(s)x_2(s-t)\,ds \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(s)x_2(t-s)\,ds\right)e^{j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x_1(s)\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-s)e^{j\omega t}dt\right)}_{e^{-j\omega s}X_2(\omega)}ds = X_2(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} x_1(s)e^{-j\omega s}ds = X_1(\omega)X_2(\omega)$$

Παραδείγματα CFT

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \Rightarrow u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0$$

$$x(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt =$$

$$\frac{1}{a-j\omega}e^{(a-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a-j\omega} = \frac{(a+j\omega)}{(a-j\omega)(a+j\omega)} = \frac{(a+j\omega)}{a^2+\omega^2}$$

Παράδειγμα (duality property)

$$x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at}, t > 0 \\ e^{at}, t < 0 \end{cases}, a > 0$$

$$x(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt =$$

$$\frac{1}{a-j\omega} e^{(a-j\omega)t} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a^2}{a^2+\omega^2}$$

Να βρεθεί ο FT του: $x(t) = \dfrac{1}{a^2+t^2}$

Οπως δείξαμε πιο πάνω: $e^{-a|t|} \leftrightarrow \dfrac{2a}{a^2+\omega^2} \Rightarrow \dfrac{2a}{a^2+t^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-a|-\omega|} \Rightarrow \dfrac{1}{a^2+t^2} \leftrightarrow \dfrac{\pi}{a} e^{-a|-\omega|}$

Να δειχθεί ότι: $\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$

$$x(t)=1:\ \delta(t)\leftrightarrow 1 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega)=2\pi\delta(\omega)\ \text{(duality property)}$$

$$\Rightarrow e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)\ \text{(freq. shift)}$$

$$e^{-j\omega_0 t}=e^{j(-\omega_0)t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)\ \text{(χρονική αντιστροφή)}$$

$$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)\leftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

- Να βρεθεί ο CFT του $x(t)\cos\omega_0 t$

$$x(t)\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)$$

Αλλος τρόπος

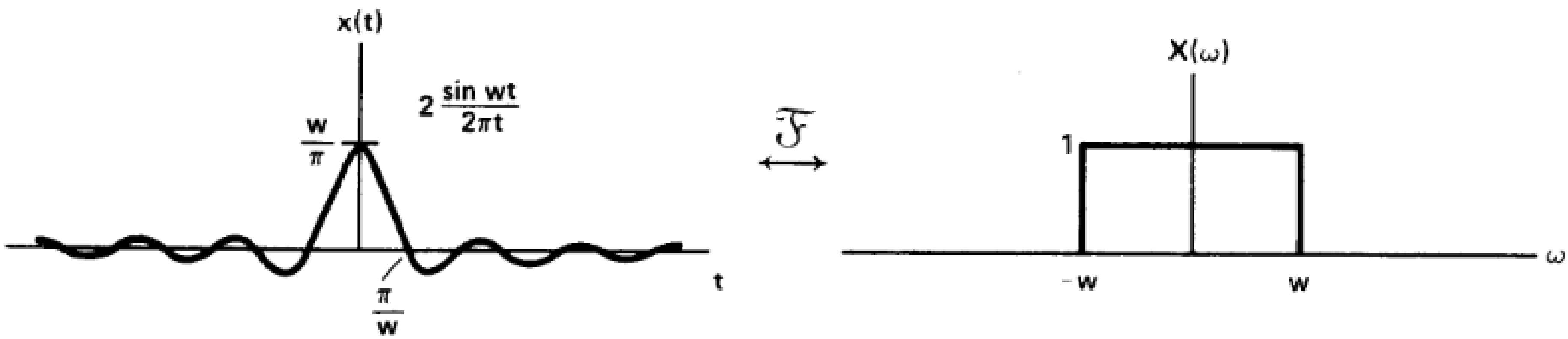
$$x(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow 2\pi X(\omega) * \frac{1}{2}\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right)$$

$$= \pi X(\omega-\omega_0) + \pi X(\omega+\omega_0)$$

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του ιδανικού χαμηλοπερατού (συνεχούς) φίλτρου:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_0 \\ 0, & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{--\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi t}\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) = \frac{1}{\pi t}\sin\omega_0 t = \omega_0 \frac{\sin\omega_0 t}{\pi\omega_0 t}$$

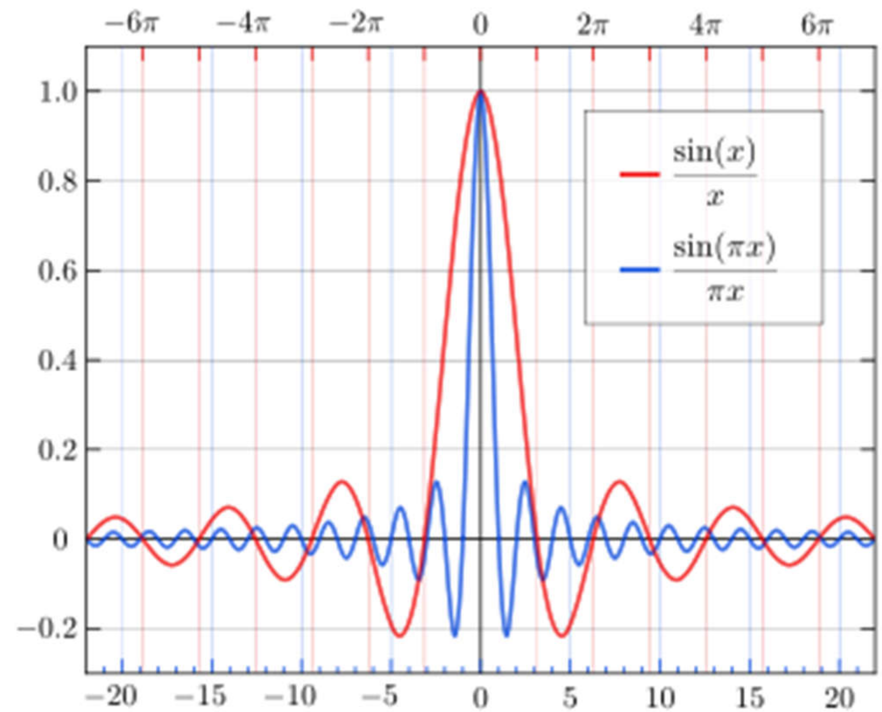


Η συνάρτηση sinc$x$

- (sinus cardinalis, 1952)

$$\sin c(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, t \neq 0 \\ 1, \qquad t = 0 \end{cases}$$

Normalized sinc: $\sin c(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{\pi t}, t \neq 0 \\ 1, \qquad t = 0 \end{cases}$

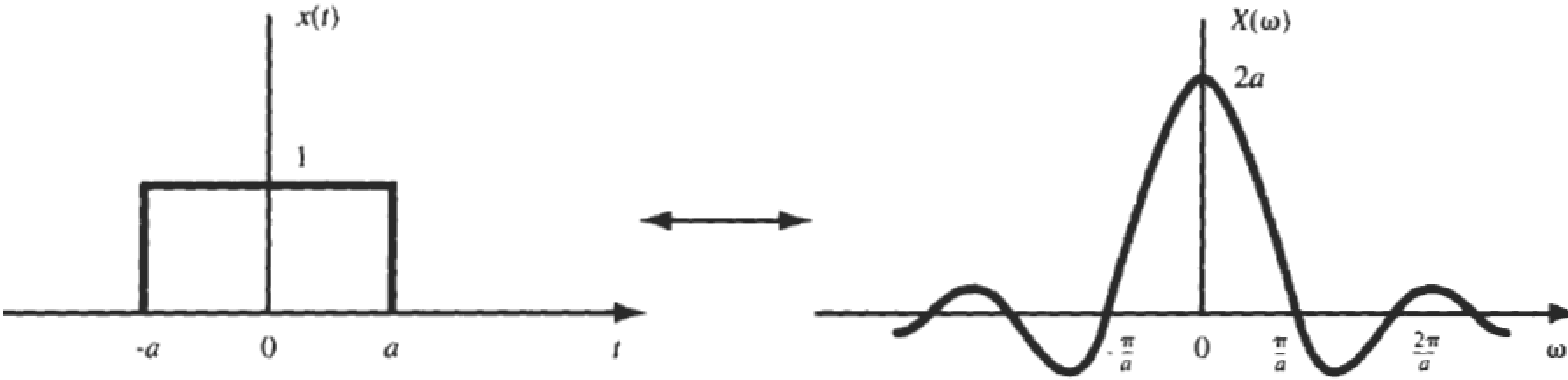


$$x(t) = p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases} \qquad (5.135)$$

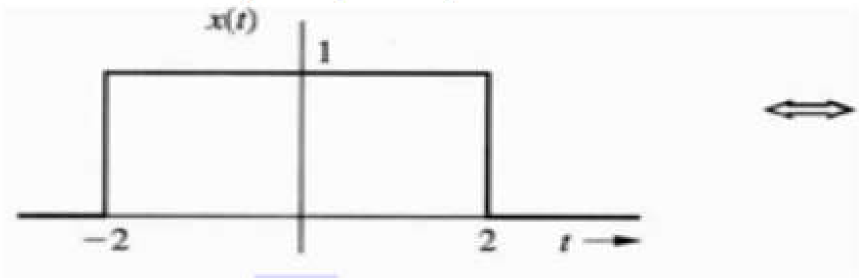
By definition (*5.31*)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-a}^{a} e^{-j\omega t}\, dt$$

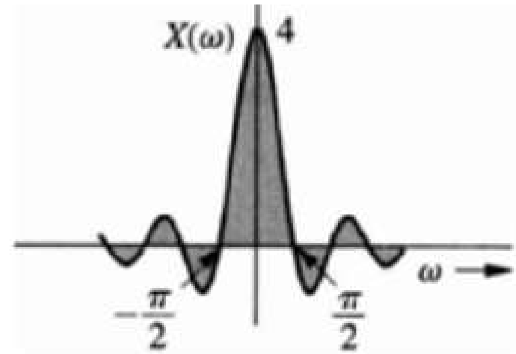
$$= \frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}\right) = 2\frac{\sin \omega a}{\omega} = 2a\frac{\sin \omega a}{\omega a}$$



Find the spectrum of $x(t)\cos 10t$ where $x(t) = rect(t/4)$. using convolution property.

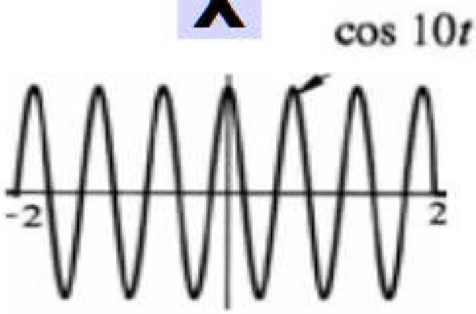


⇔

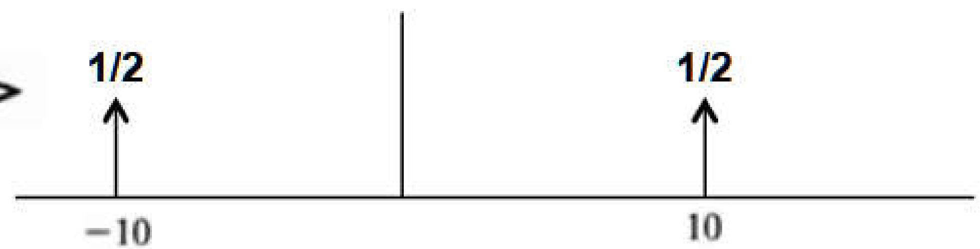


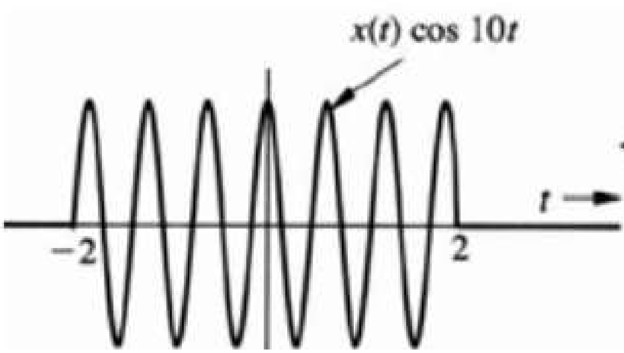
x

*****

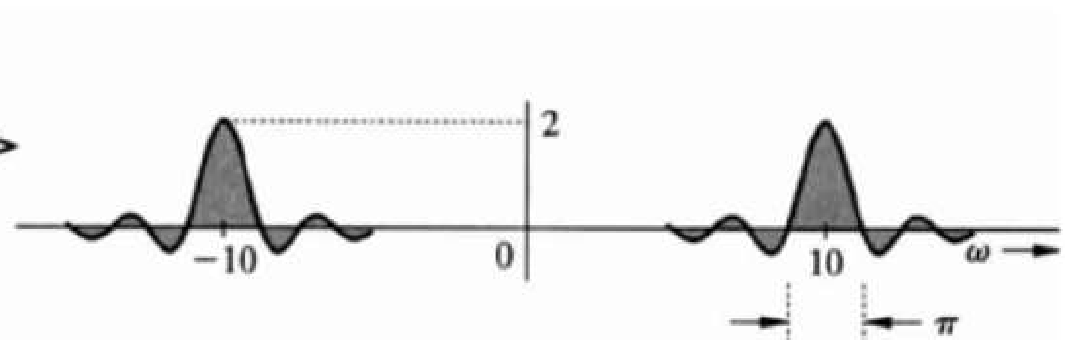


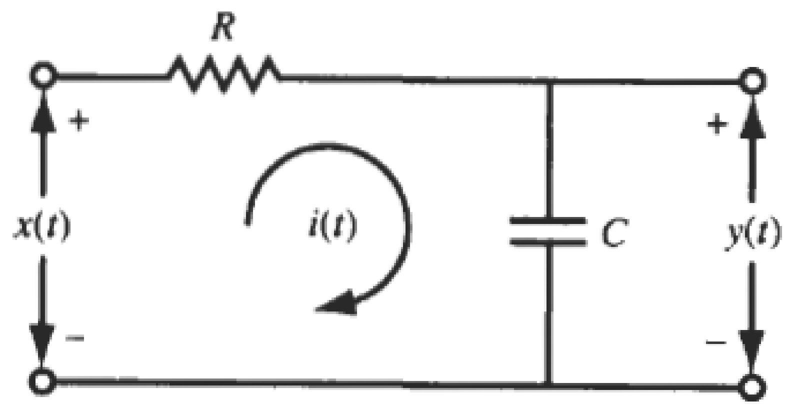
⇔





⇔





$$V_{in} - IR - V_c = 0$$

Χρησιμοποιώντας $I = C\dfrac{dV_c}{dt} \Rightarrow$

$$V_{in} - RC\frac{dV_c}{dt} - V_c = 0 \Rightarrow RC\frac{dV_c}{dt} + V_c = V_{in} \Rightarrow RC\dot{y} + y = x$$

$$j\omega RCY(\omega) + Y(\omega) = X(\omega) \Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Αντίστροφος FT

- Παράδειγμα

$$X(\omega)=\frac{2}{1+2j(\omega-1)}=\frac{1}{\frac{1}{2}+j(\omega-1)}\leftrightarrow x(t)=e^{jt}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

Freq. translation property: $e^{j\omega_0 t}x(t)\leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$

$$X(\omega)=\frac{\omega^2+21}{\omega^2+9}=\frac{\omega^2+9}{\omega^2+9}+2\frac{2\cdot 3}{\omega^2+3^2}=1+2\frac{2\cdot 3}{\omega^2+3^2}\leftrightarrow x(t)=\delta(t)+2e^{-3|t|}$$

- Ιδανικό Lowpass

$$X(\omega)=\begin{cases} A, |\omega| \le T \\ 0, |\omega| > T \end{cases} \leftrightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}dt=\frac{A}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{j\omega t}dt=$$

$$\frac{A}{2\pi}\frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega T}-e^{-j\omega T}\right)=\frac{A}{\pi\omega}\sin(\omega T)=\frac{AT}{\pi}\frac{\sin(\omega T)}{\omega T}=\frac{AT}{\pi}\sin c(\omega T)$$

Β τρόπος (με ιδιότητες)

$$x(t)=\begin{cases} A, |x| \le T \\ 0, |x| > T \end{cases} \leftrightarrow X(\omega)=2AT\frac{\sin \omega T}{\omega T}$$

duality property: $x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

$$X(\omega)=\begin{cases} A, |\omega| \le T \\ 0, |\omega| > T \end{cases} \leftrightarrow 2\pi x(t)=2AT\frac{\sin(-\omega T)}{-\omega T} \Rightarrow x(t)=\frac{AT}{\pi}\frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ (DTFT)

- **ΟΡΙΣΜΟΣ DTFT**
- **ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ**
- **ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΕΔΣΣ ΜΕ DTFT**
- **ΦΙΛΤΡΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ**

ΟΡΙΣΜΟΣ DTFT

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (Discrete Time Fourier Transform – **DTFT**) ενός σήματος $x(n)$ ορίζεται ως ακολούθως:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος $x(n)$ υπάρχει αν ισχύει η σχέση:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| = S < \infty$$

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι περιοδικός ως προς ω με περίοδο 2π

Ζευγάρια DTFT

σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$	μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) $X(e^{j\omega})$
$\delta(n)$	1
$\delta(n-n_0)$	$e^{-j\omega n0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega 0n}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$a^n u(n)$, $-1<a<1$	$1/(1-ae^{-j\omega})$
$(n+1)a^n u(n), \lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2}$
$\cos(n\omega_0)$	$\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)$

Παράδειγμα: Υπολογισμός DTFT

$$x(n) = a^n u(n), |a| < 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n u(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$\left|ae^{-j\omega}\right| = |a|\left|e^{-j\omega}\right| = |a||\cos(-\omega) + j\sin(-\omega)| = |a|1 = |a| < 1$$

Υπολογιστική υλοποίηση του DTFT

- Εστω σήμα x(n) με n_1<=n<=n_2 , N=n_2-n_1+1
- Η ω είναι συνεχής μεταβλητή. Προβαίνουμε σε δειγματοληψία της ω στο διάστημα [–π,π] με πλήθος δειγμάτων K, ανεξάρτητο του N.

```
k=0:1/(K-1):1;
w=k*π/K;
```

- Υπολογίζουμε για κάθε ω το άθροισμα $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$

```
for k=0:K
   X=[X,sum(x.*exp(-jωn))];
end
```

- Υπολογιστική υλοποίηση του DTFT με χρήση πινάκων:

$$x(n)=[1,0,-0.5], n=0,1,2, \omega=\frac{k\pi}{4}, k=-4:4$$

$$X\left(e^{j(-\pi)}\right)=x(0)e^{-j0(-\pi)}+x(1)e^{-j1(-\pi)}+x(2)e^{-j2(-\pi)}$$

$$X\left(e^{j\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}\right)=x(0)e^{-j0\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}+x(1)e^{-j1\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}+x(2)e^{-j2\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$X\left(e^{j\left(-\frac{2\pi}{4}\right)}\right)=x(0)e^{-j0\left(-\frac{2\pi}{4}\right)}+x(1)e^{-j1\left(-\frac{2\pi}{4}\right)}+x(2)e^{-j2\left(-\frac{2\pi}{4}\right)}$$

....

Τα παραπάνω μπορούν να γραφούν με φορφή πίνακα:

$$W=\begin{pmatrix} e^{-j0\left(-\frac{4\pi}{4}\right)} & e^{-j1\left(-\frac{4\pi}{4}\right)} & e^{-j2\left(-\frac{4\pi}{4}\right)} \\ e^{-j0\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} & e^{-j1\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} & e^{-j2\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} \\ & \cdots & \cdot\cdot \\ e^{-j0\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} & e^{-j1\left(\frac{4\pi}{4}\right)} & e^{-j3\left(\frac{4\pi}{4}\right)} \end{pmatrix}, X\left(e^{j\omega}\right)=W\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{pmatrix}$$

Αριθμητικά σφάλματα της υπολογιστικής υλοποίησης του DTFT

- Τα αριθμητικά σφάλματα οφείλονται στο ότι η συνεχής μεταβλητή ω διακριτοποιείται σε αυθαίρετο αριθμό δειγμάτων K<> N (πλήθος δειγμάτων στο πεδίο του χρόνου).
- Για παράδειγμα, η ορθογωνιότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βάσης

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega k} e^{j\omega n} d\omega = \begin{cases} 2\pi, k = n \\ 0, k \neq n \end{cases}$$

- ισχύει προσεγγιστικά

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega k} e^{j\omega n} d\omega = \sum_{\omega=-\pi}^{\pi} e^{-j\omega k} e^{j\omega n} d\omega = \frac{2\pi}{K} \sum_{\omega=-\pi}^{\pi} e^{-j\omega k} e^{j\omega n}$$

Όταν K→άπειρο, το άθροισμα τείνει στο 0 (k<>n).

Ιδιότητες DTFT

ιδιότητα μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)	σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$	μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) $X(e^{j\omega})$
γραμμικότητα	$c_1\, x_1(n) + c_2\, x_2(n)$	$c_1\, X_1(e^{j\omega}) + c_2\, X_2(e^{j\omega})$
μετατόπιση στο χρόνο	$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n0}\, X(e^{j\omega})$
αντιστροφή στο χρόνο	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{-j\omega n0}\, x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega o)})$
συνέλιξη στο χρόνο	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega})\, X_2(e^{j\omega})$

Απόδειξη Ιδιοτήτων DTFT

- Ομογένεια – υπέρθεση

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c_1x_1(n)+c_2x_2(n)\right)e^{-j\omega n}=c_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)e^{-j\omega n}+c_2\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n)e^{-j\omega n}=$$

$$c_1X_1\left(e^{j\omega}\right)+c_2X_2\left(e^{j\omega}\right)$$

- Μετατόπιση στο χρόνο

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n-n_0)e^{-j\omega n}=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)e^{-j\omega(n-n_0)}\right)e^{-j\omega n_0}=e^{-j\omega n_0}X_1\left(e^{j\omega}\right)$$

- Αντιστροφή στο χρόνο

$$DTFT\left(x(-n)\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(-n)e^{-j\omega n}=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(-\omega)n}}_{\alpha\lambda\lambda\alpha\gamma\acute{\eta}\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\acute{\eta}\varsigma\ n=-n}=X\left(e^{-j\omega}\right)$$

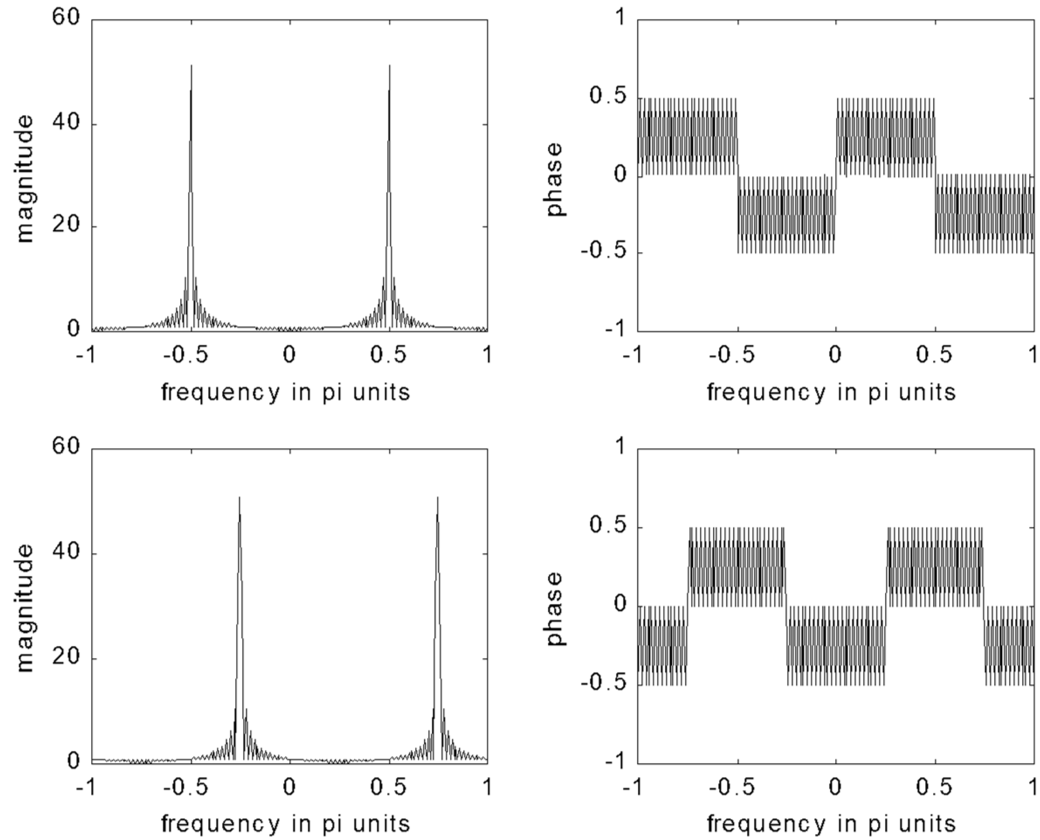
- Συνέλιξη

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = FT\left(y(n)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)\right)e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)e^{-j\omega(n-k)n}\right)e^{-j\omega k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k)e^{-j\omega(n-k)n} = X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

Μετατόπιση στη συχνότητα
Παράδειγμα: $x(n)=\cos(\pi n/2)$ $y(n)=e^{jn\pi/4}\,x(n)$



Συμμετρία στον DTFT

- Μιγαδική συζυγία

$$FT\left(x^*(n)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) e^{-j\omega n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{+j\omega n}\right)^* = FT^*\left(x(-n)\right)$$

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

- FT μίας πραγματικής συνάρτησης

$$x_R(n) = \frac{1}{2}\left(x(n) + x^*(n)\right) \Rightarrow$$

$$FT\left(x_R(n)\right) = \frac{1}{2}\left(FT\left(x(n)\right) + FT\left(x^*(n)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right) + \mathrm{X}^*\left(e^{-j\omega}\right)\right)$$

$$\Gamma\iota\alpha\ \forall z \Rightarrow z(n) + z^*(-n) = z_R(n) + z_I(n) + z_R(-n) - z_I(-n) =$$

$$\underbrace{z_R(n) + z_R(-n)}_{even} + \underbrace{z_I(n) - z_I(-n)}_{odd}$$

Το φάσμα μίας πραγματικής συνάρτησης έχει άρτιο πραγματικό μέρος και περιττό φανταστικό μέρος

- FT μίας φανταστικής συνάρτησης

$$x(n)=\frac{1}{2}\left(y(n)-y^*(n)\right)=\frac{1}{2}\left(Y\left(e^{j\omega}\right)-Y^*\left(e^{-j\omega}\right)\right)$$

$$\Gamma\iota\alpha\ \forall z \Rightarrow z(n)-z^*(-n)=z_R(n)+z_I(n)-z_R(-n)+z_I(-n)=$$

$$\underbrace{z_R(n)-z_R(-n)}_{odd}+\underbrace{z_I(n)+z_I(-n)}_{even}$$

Το φάσμα μίας φανταστικής συνάρτησης έχει άρτιο πραγματικό μέρος και περιττό φανταστικό μέρος

Συμμετρία (συνέχεια)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)\cos\left(\omega n\right)+j\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)\sin n\left(\omega n\right)$$

- $x(n)$ πραγματική και άρτια: $X(e^{j\omega})$ πραγματική και άρτια

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)\cos\left(\omega n\right)+j\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)\sin n\left(\omega n\right)}_{\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha*\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)\cos\left(\omega n\right)$$

$$X\left(e^{-j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(-n\right)\cos\left(-\omega n\right)=X\left(e^{j\omega}\right)$$

- $x(n)$ φανταστική και περιττή $\rightarrow X(e^{j\omega})$ πραγματική και άρτια

$$X\left(e^{j\omega}\right)=j\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left(x\left(n\right)\right)\cos\left(\omega n\right)}_{\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha*\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}+j\sum_{n=-\infty}^{\infty}j\,\mathrm{Re}\left(x\left(n\right)\right)\sin n\left(\omega n\right)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left(x\left(n\right)\right)\sin\left(\omega n\right)$$

$$X\left(e^{-j\omega}\right)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left(x\left(-n\right)\right)\sin\left(-\omega n\right)=-X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)\cos\left(\omega n\right)+j\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)\sin n\left(\omega n\right)$$

- $x(n)$ πραγματική και περιττή: $X(e^{j\omega})$ φανταστική και άρτια

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)\cos n\left(\omega n\right)}_{\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha*\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}+j\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)\sin\left(\omega n\right)=j\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)\sin\left(\omega n\right)$$

$$X\left(e^{-j\omega}\right)=j\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(-n\right)\sin\left(-\omega n\right)=X\left(e^{j\omega}\right)$$

- $x(n)$ φανταστική και άρτια $\rightarrow X(e^{j\omega})$ φανταστική και άρτια

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}j\left\|x\left(n\right)\right\|\cos\left(\omega n\right)+j\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}j\left\|x\left(n\right)\right\|\sin n\left(\omega n\right)}_{\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha*\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\|x\left(n\right)\right\|\cos\left(\omega n\right)$$

$$X\left(e^{-j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\|x\left(-n\right)\right\|\cos\left(-\omega n\right)=X\left(e^{j\omega}\right)$$

Παράδειγμα

- Να βρεθεί ο DTFT της

$$x(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{|n|}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u(n)+\left(\frac{1}{4}\right)^{-n}u(-n)-\delta(n)\Rightarrow$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}+\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{j\omega}}-1$$

- Να βρεθεί ο DTFT της x*(-n)

$$DTFT\left(x^{*}(-n)\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{*}(-n)e^{-j\omega n}\underbrace{=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{*}(n)e^{j\omega n}}_{\alpha\lambda\lambda\alpha\gamma\acute{\eta}\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\acute{\eta}\varsigma\ n=-n}=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}\right)^{*}=X^{*}\left(e^{j\omega}\right)$$

Υπολογισμός αντίστροφου DTFT

- Ο αντίστροφος DTFT (IDTFT) υπολογίζει το σήμα $x(n)$, δεδομένου του μετασχηματισμού $X(e^{j\omega})$.
- Προσοχή: ο DTFT προυποθέτει διακριτό χρόνο και συνεχή συχνότητα ω →ο IDTFT παράγεται με ολοκλήρωμα αντί για διακριτό άθροισμα.

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x\left(k\right)e^{-j\omega k}\Rightarrow e^{j\omega n}X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x\left(k\right)e^{-j\omega k}e^{j\omega n}\Rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega n}X\left(e^{j\omega}\right)d\omega=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x\left(k\right)e^{-j\omega k}e^{j\omega n}d\omega=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x\left(k\right)\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j\omega k}e^{j\omega n}d\omega$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j\omega k}e^{j\omega n}d\omega=\begin{cases}1 k=n\\0 k\neq n\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega n}X\left(e^{j\omega}\right)d\omega=2\pi x\left(n\right)\Rightarrow x\left(n\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega n}X\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

Παράδειγμα υπολογισμού συνέλιξης στο πεδίο του χώρου και της συχνότητας

- Υπολογισμός της συνέλιξης στο πεδίο του χρόνου

$$x(n)=\delta(n)+\delta(n-1)$$

$$x(n)*x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\delta(k)+\delta(k-1)\right)\left(\delta(n-k)+\delta(n-k-1)\right)=$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(k)\delta(n-k)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(k)\delta(n-k-1)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(k-1)\delta(n-k)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(k-1)\delta(n-k-1)=$$

$$\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-1)+\delta(n-2)=\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)$$

- Εφαρμογή FT και υπολογισμός της συνέλιξης ως γινόμενο

$$x(n)=\delta(n)+\delta(n-1)\leftrightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=1+e^{-j\omega}$$
$$x(n)*x(n)\leftrightarrow H\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=\left(1+e^{-j\omega}\right)\left(1+e^{-j\omega}\right)=1+2e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}$$

- Αντίστροφος FT του X($e^{j\omega}$).X($e^{j\omega}$)

$$H\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=1+2e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}\leftrightarrow\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)$$

Παράδειγμα της ισοδυναμίας συνέλιξης – πολλαπλασιασμού στο πεδίο συχνότητας

Παράδειγμα υπολογισμού συνέλιξης στο πεδίο του χώρου και της συχνότητας

- Υπολογισμός της συνέλιξης στο πεδίο του χρόνου

$$h(n) = a^n u(n), |a| < 1$$

$$x(n) = b^n u(n), |b| < 1$$

$$h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u(k) b^{n-k} u(n-k)$$

$$u(k) \Rightarrow k \geq 0$$

$$u(n-k) \Rightarrow n \geq k$$

$$h(n) * x(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = b^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^k = b^n \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1 - \frac{a}{b}} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}$$

- Εφαρμογή FT και υπολογισμός της συνέλιξης ως γινόμενο

$$h(n)=a^n u(n),|a|<1 \Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(ae^{-j\omega}\right)^n=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$x(n)=b^n u(n),|b|<1 \Rightarrow X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-be^{-j\omega}}$$

$$h(n)*x(n)=H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\frac{1}{1-be^{-j\omega}}$$

- Μετατροπή του $H(e^{j\omega}).X(e^{j\omega})$ σε άθροισμα γνωστού FT

$$H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\frac{1}{1-be^{-j\omega}}=\frac{A}{1-ae^{-j\omega}}+\frac{B}{1-be^{-j\omega}}=\frac{A+B-(Ab+Ba)e^{-j\omega}}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)\left(1-be^{-j\omega}\right)}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ Ab+Ba=0 \end{cases} \Rightarrow B=-\frac{b}{a-b}, A=\frac{a}{a-b}$$

$$x(n)*y(n)=IFT\left(\frac{a}{a-b}\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}+\frac{b}{a-b}\frac{1}{1-be^{-j\omega}}\right)=$$

$$\left(\frac{a}{a-b}\right)a^n u(n)-\left(\frac{b}{a-b}\right)b^n u(n)=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}u(n)$$

Παρέδειγμα εφαρμογής της ιδιότητας της συνέλιξης

Παράδειγμα

- Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT της

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \cos^2 \omega$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2j\omega} + \frac{1}{4}e^{-2j\omega} + \frac{1}{2} \leftrightarrow \delta\left(n-2\right) + \frac{1}{4}\delta\left(n+2\right) + \frac{1}{2}\delta\left(n\right)$$

Παράδειγμα: κλιμάκωση συχνότητας

- Εστω η $y(n)$ που αποτελεί κλιμάκωση συχνότητας της $x(n)$.

$$y(n)=\begin{cases} x\left(\dfrac{n}{L}\right), n=kL \\ 0, n\neq kL \end{cases}$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nL)e^{-j\omega nL}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega nL}=X\left(e^{j\omega L}\right)$$

- Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ιδιότητα, να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT της συνάρτησης:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j10\omega}} \leftrightarrow x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{10}} u(n)$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) $H(e^{j\omega})$ της κρουστικής απόκρισης $h(n)$ ονομάζεται **απόκριση συχνότητας**:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) $X(e^{j\omega})$ της εισόδου $x(n)$ και
ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) $Y(e^{j\omega})$ της εξόδου $y(n)$ του φίλτρου
συνδέονται με τη σχέση:

$$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})\,X(e^{j\omega})$$

- Εστω σύστημα Τ με κρουστική απόκριση $h(n)$ που δέχεται για είσοδο το ημιτονοειδές $e^{i\omega n}$. Τότε η έξοδος θα είναι

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_k h(k) x(n-k) = e^{jn\omega} \sum_k h(k) e^{-jk\omega} = H\left(e^{j\omega}\right) e^{jn\omega}$$

- όπου

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

- Αρα, **αν και μόνο αν** το $x(n)$ είναι ημιτονοειδές, τότε

$$y(n) = H\left(e^{j\omega}\right) x(n)$$

- Η απόκριση συχνότητας H είναι μιγαδικός και μπορεί να γραφεί σαν μέτρο και φάση μιγαδικού → ένα ημιτονοειδές που διέρχεται από το T θα υφίσταται αλλαγή του πλάτους και της φάσης του, αλλά όχι της συχνότητάς του.

Απόδειξη του προηγούμενου

Εστω ΓΑΚΜ με πραγματική κρουστική απόκριση $h(n)$ που δέχεται είσοδο $x(n)=\cos(n\omega_0)$. Τότε:

$$x(n)=\frac{1}{2}e^{jn\omega_0}+\frac{1}{2}e^{-jn\omega_0}\Rightarrow$$

Αντίστροφη σχέση Euler

$$y(n)=\frac{1}{2}H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{jn\omega_0}+\frac{1}{2}H\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-jn\omega_0}=$$

Υπέρθεση

$$\frac{1}{2}H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{jn\omega_0}+\frac{1}{2}H^*\left(e^{j\omega_0}\right)e^{-jn\omega_0}=$$

Συζηγής συμμετρία της H

$$\frac{1}{2}H_M e^{jH_\Phi}e^{jn\omega_0}+\frac{1}{2}H_M e^{-jH_\Phi}e^{-jn\omega_0}=$$

H_M και H_Φ το μέτρο και η φάση της H

$$\frac{1}{2}H_M\left(e^{jn\omega_0+H_\Phi}+e^{-jn\omega_0-H_\Phi}\right)=H_M\cos\left(n\omega_0+H_\Phi\right)$$

Ιδιότητες της απόκρισης H FIR

- Περιοδικότητα με περίοδο 2π:

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)=\sum_k h(k)e^{-j(\omega+2\pi)k}=\sum_k h(k)e^{-j\omega k}e^{-j2\pi k}=\sum_k h(k)e^{-j\omega k}=H\left(e^{j\omega}\right)$$

- Συζηγής συμμετρία: ισχύει όταν $h(k)$ πραγματικός, δηλ $h(k)=h^*(k)$:

$$H^*\left(e^{j\omega}\right)=\left(\sum_k h(k)e^{-j\omega k}\right)^*=\sum_k h^*(k)e^{+j\omega k}=\sum_k h(k)e^{-j(-\omega)k}=H\left(e^{-j\omega}\right)$$

Παράδειγμα

- Εστω LTI με κρουστική απόκριση $h(n)=0.8^n\, u(n)$.
- Αν η είσοδος είναι $x(n)=\cos(2\pi 2n/100)$, να βρεθεί η έξοδος και να επιβεβαιωθεί η διαφορά φάσης εισόδου εξόδου καθώς και η μεταβολή του πλάτους

$$h(n)=0.8^n u(n)\leftrightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-0.8e^{-j\omega}}$$

Αφού η είσοδος είναι ημιτονοειδές ισχύει: $\mathrm{y}(n)=H\left(e^{j\omega}\right)x(n)$

$$x(n)=\cos(2\pi 2n/100)\Rightarrow \omega_0=\frac{4\pi}{100}$$

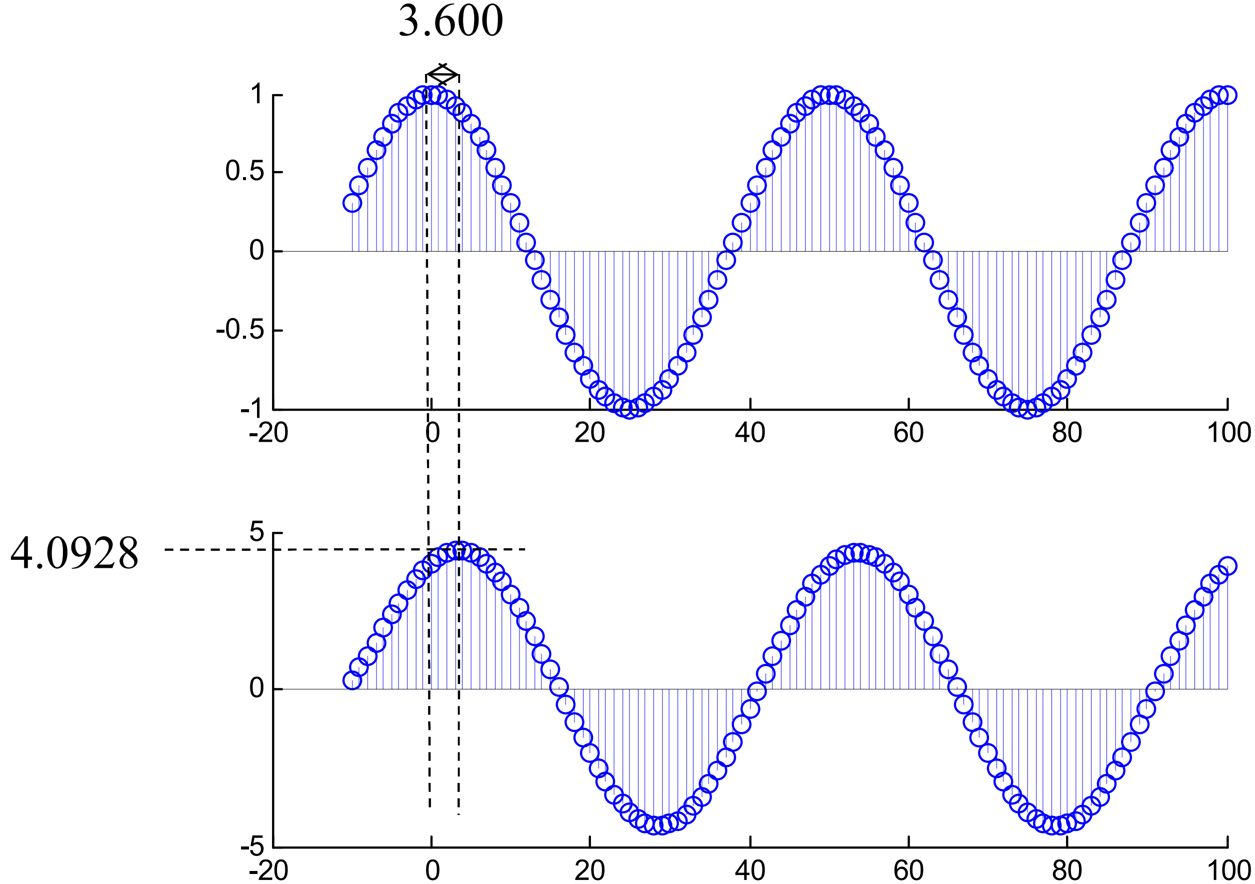
Υπολογισμός μέτρου: $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\sqrt{H^*\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-0.8e^{-j\omega}\right)\left(1-0.8e^{j\omega}\right)}}$

$$\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|=4.0928$$

Υπολογισμός φάσης: $\Phi(\omega)=\tan^{-1}\dfrac{-0.8\sin\omega}{1-0.8\cos\omega},\Phi(\omega_0)=1.6894$

$$y(n)=\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\left(\frac{4\pi}{100}n+\Phi(\omega_0)\right)=4.0928\cos\left(\frac{4\pi}{100}n+1.6894\right)=4.0928\cos\left(\frac{4\pi}{100}(n+3.600)\right)$$

- Υπολογισμός του νέου πλάτους και της διαφοράς φάσης της εξόδου



Παράδειγμα

- Εστω FIR με b_k={1,2,1}. Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας.

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=0}^{2} b_k e^{-j\omega k}=1+2e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}=$$

$$e^{-j\omega}\left(e^{j\omega}+2+e^{-j\omega}\right)=e^{-j\omega}\left(2+2\cos\omega\right)$$

- Μέτρο: 2+cosω
- Φάση: -ω

- Εστω ότι στο προηγούμενο FIR δίνουμε ως είσοδο το x(n)=2cos(nπ/3-π/2). Να υπολογιστεί η έξοδος.

$$y(n) = H\left(e^{j\omega}\right)x(n)$$

$$\omega = \frac{\pi}{3} \Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right) = \left(2 + 2*\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)e^{-j\frac{\pi}{3}} = 3e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)x(n) = 3e^{-j\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 3e^{-j\frac{\pi}{3}}\left(e^{j\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)}\right) = 3\left(e^{j\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}\right)$$

$$= 3\cos\left(\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

→Πολλαπλασιασμός μέτρου και πρόσθεση φάσης.

- Υπολογισμός του προηγούμενου βάσει συνέλιξης (για αλγεβρική απλότητα θεωρήσαμε την φαση του x(n) ίση με 0).

$$x(n)*h(n)=\sum_{k=0}^{2}x(n-k)h(k)=\cos\frac{n\pi}{3}+2\cos\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$\cos\frac{n\pi}{3}+2\cos\frac{n\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{n\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}=$$

$$=\cos\frac{n\pi}{3}+\cos\frac{n\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}+3\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}=$$

$$\left(\cos\frac{n\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{n\pi}{3}=$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{n\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}=3\cos\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$e^{-j\omega}2(\cos\omega+1),\omega=\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}=-\cos\frac{2\pi}{3}=0.5$$

Παράδειγμα: Υπολογισμός απόκρισης συχνότητας

$$h(n) = \delta(n) + 5\delta(n-1) + 4\delta(n-2)$$

$$H(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j\omega n} = h(0)e^{-j\omega 0} + h(1)e^{-j\omega} + h(2)e^{-j2\omega} =$$

$$1 + 5e^{-j\omega} + 4e^{-j2\omega}$$

$$h(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} u(n-2)$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} u(n-2) e^{-j\omega n} =$$

$$\sum_{n=+2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} e^{-j\omega n} = \sum_{n=+2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} e^{-j\omega n} = \frac{1}{16} \sum_{n=+2}^{\infty} \left(\frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)^{n} =$$

$$\frac{1}{16}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^{n} - \left(\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^{0} - \left(\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^{1}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - 1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)$$

Παράδειγμα: Υπολογισμός απόκρισης συχνότητας του φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής

$$y(n)=\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M}x(n-k)\Rightarrow h(n)=\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M}\delta(n-k)\Rightarrow$$

$$H\left(e^{-j\omega}\right)=\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-k)e^{-jn\omega}=\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M}e^{-jk\omega}=\frac{1}{M+1}\frac{1-e^{-j(M+1)\omega}}{1-e^{-j\omega}}=$$

$$\frac{1}{M+1}\frac{e^{-j\frac{(M+1)}{2}\omega}\left(e^{+j\frac{(M+1)}{2}\omega}-e^{-j\frac{(M+1)}{2}\omega}\right)}{e^{-j\omega\frac{1}{2}}\left(e^{+j\omega\frac{1}{2}}-e^{-j\omega\frac{1}{2}}\right)}=\frac{1}{M+1}e^{-j\frac{M}{2}\omega}\frac{\sin\left(\frac{(M+1)}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Παράδειγμα

- Εστω σύστημα με είσοδο $x(n)$ και έξοδο $y(n)$. Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση και να επιβεβαιωθεί η ορθότητα της συνέλιξης

$$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n),\, y(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

$$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\Rightarrow X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$y(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)\Rightarrow \mathrm{Y}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\mathrm{Y}\left(e^{j\omega}\right)}{\mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\Rightarrow h(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u(n-1)$$

$$h(n)*x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)x(k-n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k u(k)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}u(n-k)-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}u(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}u(n-k)=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

Παράδειγμα

- Εστω σύστημα με είσοδο $x(n)$=u(n) και έξοδο $y(n)$=δ(n). Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση και να επιβεβαιωθεί η ορθότητα της συνέλιξης

$$x(n)=u(n)\Rightarrow X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}$$

$$y(n)=\delta(n)\Rightarrow \mathrm{Y}\left(e^{j\omega}\right)=1$$

$$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\mathrm{Y}\left(e^{j\omega}\right)}{\mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1}{\dfrac{1}{1-e^{-j\omega}}}=1-e^{-j\omega}\Rightarrow h(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$$

$$h(n)*x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\big(\delta(k)-\delta(k-1)\big)u(n-k)=$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(k)u(n-k)-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(k-1)u(n-k)=\delta(0)u(n)-\delta(0)u(n-1)=u(n)-u(n-1)=\delta(n)$$

Παράδειγμα

- Εστω LTI με $$x(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$ $$y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} u(n-2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} u(n-3)$$
- Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση

$$x(n) = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = FT\left((n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right) - FT\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right) = \frac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2} - \frac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)} = \frac{\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}+\frac{1}{4}e^{-2j\omega}}$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = e^{-2j\omega}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} - \frac{1}{2}e^{-3j\omega}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)} = \frac{\left(e^{-2j\omega}-\frac{1}{2}e^{-3j\omega}\right)\left(1-e^{-j\omega}+\frac{1}{4}e^{-2j\omega}\right)}{\frac{1}{2}e^{-j\omega}\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}\left(e^{-j\omega}-\frac{3}{2}e^{-2j\omega}+\frac{3}{4}e^{-3j\omega}-\frac{1}{8}e^{-4j\omega}\right)$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΕΔΣΣ ΜΕ DTFT

ΓΑΚΜ και ΓΕΔΣΣ

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a(k)y(n-k)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b(k)e^{-jk\omega}X(e^{j\omega}) - \sum_{k=0}^{N} a(k)e^{-jk\omega}Y(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b(k)e^{-jk\omega}}{1+\sum_{k=0}^{N} a(k)e^{-jk\omega}}$$

Απόδειξη του προηγούμενου τύπου

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}b(k)x(n-k)-\sum_{k=1}^{N}a(k)y(n-k)\Rightarrow$$

$$FT\big(y(n)\big)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{M}b(k)x(n-k)-\sum_{k=1}^{N}a(k)y(n-k)\right)e^{-j\omega n}$$

$$\sum_{k=0}^{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty}b(k)x(n-k)e^{-j\omega n}-\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a(k)y(n-k)e^{-j\omega n}=$$

$$=\sum_{k=0}^{M}b(k)e^{-j\omega k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-k)e^{-j\omega(n-k)}-\sum_{k=1}^{N}a(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n-k)e^{-j\omega(n-k)}=$$

$$=X\left(e^{j\omega}\right)\sum_{k=0}^{M}b(k)e^{-j\omega k}-Y\left(e^{j\omega}\right)\sum_{k=1}^{N}a(k)e^{-j\omega k}\Rightarrow$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b(k)e^{-j\omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a(k)e^{-j\omega k}}$$

Απόδειξη του προηγούμενου τύπου (Β τρόπος)

- Γνωρίζουμε ότι ένα LTI αν έχει απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ και έχει είσοδο $x(n)=e^{j\omega n0}$, τότε παράγει έξοδο $e^{j\omega n0} H(e^{j\omega})$
- Εφαρμόζοντας εν προκειμένω:

$$y(k)=\sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k)-\sum_{k=1}^{N} a(k)y(n-k)\Rightarrow$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}=\sum_{k=0}^{M} b(k)e^{j\omega(n-k)}-\sum_{k=1}^{N} a(k)H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega(n-k)}\Rightarrow$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b(k)e^{-j\omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a(k)e^{-j\omega k}}$$

Παράδειγμα Επίλυσης ΓΕΔΣΣ με DTFT

$$y(n) = x(n) - x(n-2) + \tfrac{1}{4} y(n-1), x(n) = \delta(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1-e^{-2j\omega}}{1-\tfrac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$x\left(n\right) = \delta\left(n\right) \Rightarrow X(e^{j\omega}) = 1$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\tfrac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{e^{-2j\omega}}{1-\tfrac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$y(n) = (\tfrac{1}{4})^{n} u(n) - (\tfrac{1}{4})^{n-2} u(n-2)$$

Παράδειγμα

- Δίνεται LTI με απόκριση συχνότητας: $H\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1+e^{-2j\omega}}{2-e^{-j\omega}+0,5e^{-2j\omega}}$
- Να βρεθεί η εξίσωση διαφορών που υλοποιεί το σύστημα

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1+e^{-2j\omega}}{2-e^{-j\omega}+0,5e^{-2j\omega}}=\frac{0.5+0.5e^{-2j\omega}}{1-0.5e^{-j\omega}+0.25e^{-2j\omega}}=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}\Rightarrow$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)-0.5e^{-j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)+0.25e^{-2j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)=0.5X\left(e^{j\omega}\right)+0.5e^{-2j\omega}X\left(e^{j\omega}\right)\Rightarrow$$

$$y\left(n\right)=0.5y\left(n-1\right)-0.25y\left(n-2\right)+0.5x\left(n\right)+0.5x\left(n-2\right)$$

Παράδειγμα

- Δίνεται LTI με κρουστική απόκριση : $h(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)u(n)$
- Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας και η εξίσωση διαφορών που υλοποιεί το σύστημα

$$h(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{n\pi}{3}}+e^{-j\frac{n\pi}{3}}\right)u(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{2}e^{j\frac{n\pi}{3}}u(n)+\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{2}e^{-j\frac{n\pi}{3}}u(n)\leftrightarrow$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j\omega}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\omega}}=\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\omega}+1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\omega}\right)}=$$

$$\frac{1}{2}\frac{2-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}+e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}+e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)+e^{-2j\omega}}=\frac{1}{2}\frac{2-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+e^{-2j\omega}}=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}\Rightarrow$$

$$2Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}e^{-j\omega}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)Y\left(e^{j\omega}\right)-2e^{-2j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)+2X\left(e^{j\omega}\right)-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)X\left(e^{j\omega}\right)\Rightarrow$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{4}e^{-j\omega}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)Y\left(e^{j\omega}\right)-e^{-2j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)+X\left(e^{j\omega}\right)-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$y(n)=0.25\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)y(n-1)-y(n-2)+x(n)-0.25\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)x(n-1)$$

Παράδειγμα

- Δίνεται LTI $y(n) = bx(n) + x(n-1) + ay(n-1)$

  $a, b \in \mathbb{R}, |a| < 1$

- Πότε $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 1$

$$H\left(e^{i\omega}\right) = \frac{b + e^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$\left|H\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 = H\left(e^{i\omega}\right) H^*\left(e^{i\omega}\right) = \frac{b + e^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \frac{b + e^{+j\omega}}{1 - ae^{+j\omega}} = \frac{b^2 + 1 + b\left(e^{-j\omega} + e^{j\omega}\right)}{1 + a^2 + a\left(e^{-j\omega} + e^{j\omega}\right)}$$

$$= \frac{b^2 + 1 + 2b\cos(\omega)}{1 + a^2 + 2a\cos(\omega)}$$

$$\left|H\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 = 1 \Rightarrow a = -b$$

Παράδειγμα

- Αποδείξτε την ορθότητα του παρακάτω ζεύγους DTFT:

$$(n+1)a^n u(n), |a|<1 \leftrightarrow \frac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \leftrightarrow h(n)*h(n) = \left(a^n u(n)\right)*\left(a^n u(n)\right) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u(k) a^{n-k} u(n-k) = \sum_{k=0}^{n} a^k a^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^n = (n+1)a^n u(n)$$

Συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά

Αν ένα σύστημα που έχει είσοδο $x(n)$, απόκριση συχνότητας $H_1(e^{j\omega})$ και έξοδο w(n) συνδεθεί **σε σειρά** με ένα σύστημα που έχει απόκριση συχνότητας $H_2(e^{j\omega})$ και έξοδο $y(n)$, δηλαδή:

$$Y(e^{j\omega})= H_2(e^{j\omega})\, W(e^{j\omega})$$

$$W(e^{j\omega})= H_1(e^{j\omega})\, X(e^{j\omega})$$

τότε το συνολικό σύστημα έχει είσοδο x(n), έξοδο y(n) και απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})\, H_2(e^{j\omega}),$$

όπου $Y(e^{j\omega})= H(e^{j\omega})\, X(e^{j\omega})$

Συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα

Αν ένα σύστημα που έχει είσοδο $x(n)$, απόκριση συχνότητας $H_1(e^{j\omega})$ και έξοδο $w(n)$ συνδεθεί **παράλληλα** με ένα σύστημα που έχει που έχει είσοδο $x(n)$ απόκριση συχνότητας $H_2(e^{j\omega})$ και έξοδο $v(n)$ προσθέτοντας τις εξόδους των φίλτρων, δηλαδή:

$$Y(\mathrm{e}^{j\omega}) = W(e^{j\omega})\ \mathrm{V}(e^{j\omega})$$

$$W(\mathrm{e}^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})\ \mathrm{X}(e^{j\omega})$$

$$V(\mathrm{e}^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega})\ \mathrm{X}(e^{j\omega})$$

τότε το συνολικό σύστημα έχει είσοδο $x(n)$, έξοδο $y(n)$ και απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$$

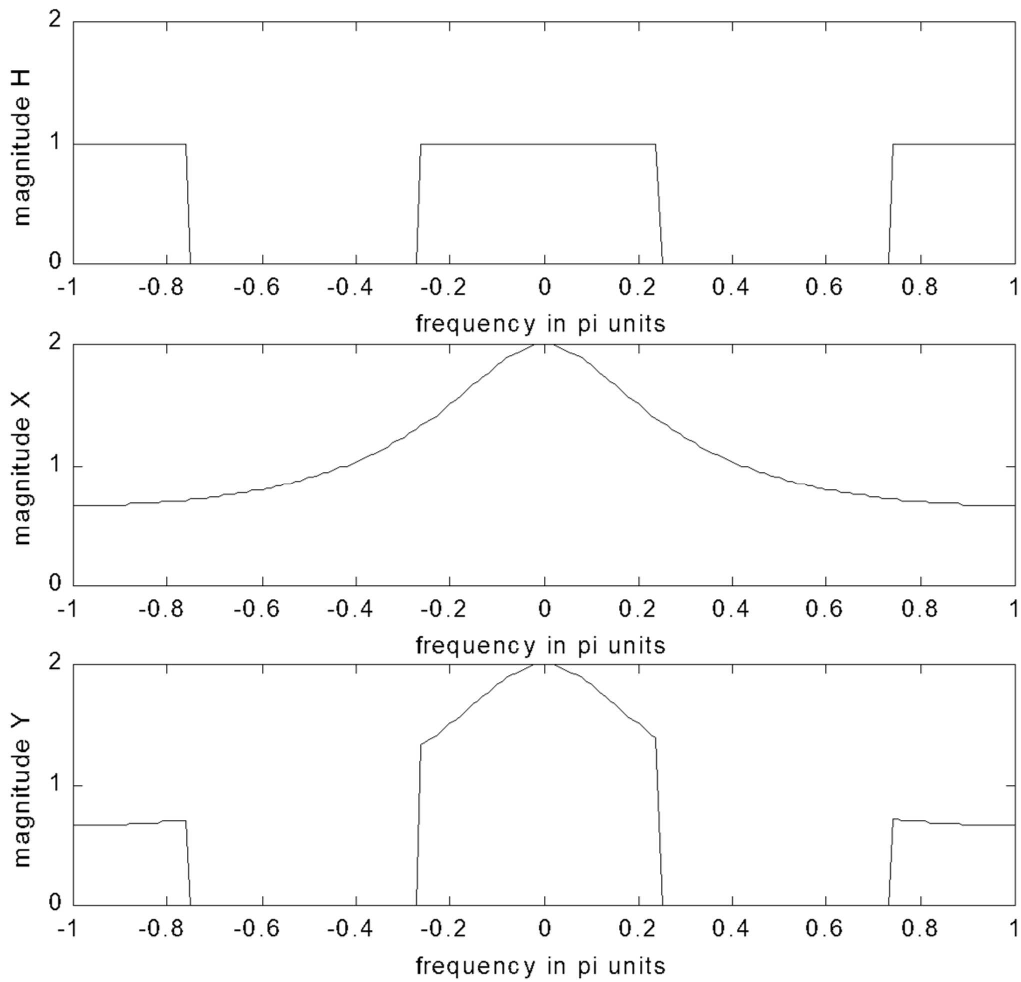
όπου $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\ X(e^{j\omega})$

ΦΙΛΤΡΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Τα **ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων** έχουν **κατά τμήματα σταθερό πλάτος απόκρισης συχνότητας**

- **χαμηλοπερατά** φίλτρα (**Low Pass**)
  $H(e^{j\omega})=1$ για $\omega\in[-\omega_c, \omega_c]$ όπου $0<\omega_c<\pi$
- **υψηπερατά** φίλτρα (**High Pass**)
  $H(e^{j\omega})=1$ για $\omega\notin [-\omega_c, \omega_c]$ όπου $0< \omega_c <\pi$
- **ζωνοπερατά** φίλτρα (**Band Pass**)
  $H(e^{j\omega})=1$ για $\omega\in[-\omega_2,-\omega_1]$ και για $\omega\in[\omega_1,\omega_2]$ με $0<\omega_1<\omega_2<\pi$
- **ζωνοφρακτικά** φίλτρα (**Band Stop**)
  $H(e^{j\omega})=1$ για $\omega\notin [-\omega_2,-\omega_1]$ και για $\omega\in[\omega_1,\omega_2]$ με $0<\omega_1<\omega_2<\pi$

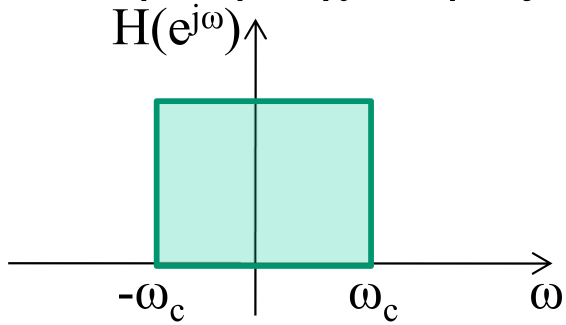
Band Stop



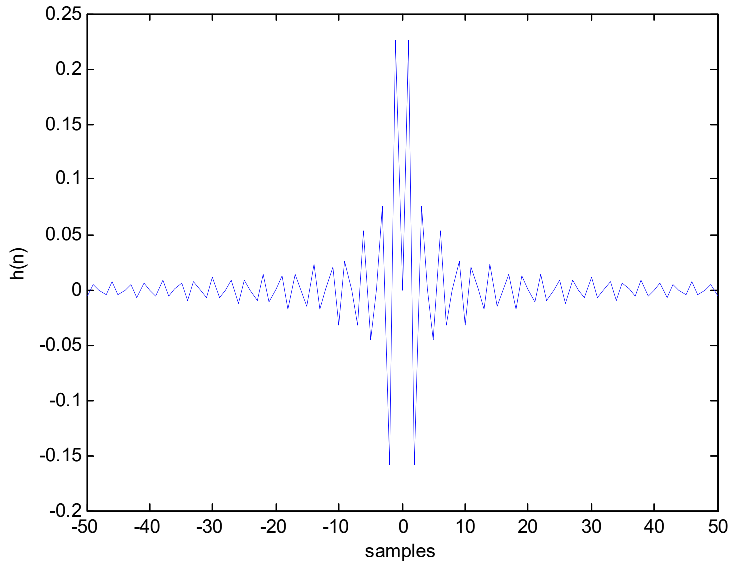
2
1
0
magnitude H
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
frequency in pi units
magnitude X
magnitude Y

Παράδειγμα: Το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο συχνοτήτων

- Το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής ω_c έχει απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$



$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|\geq\omega_c\end{cases}$$



$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{jn\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{jn\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{nj}e^{jn\omega}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}=$$

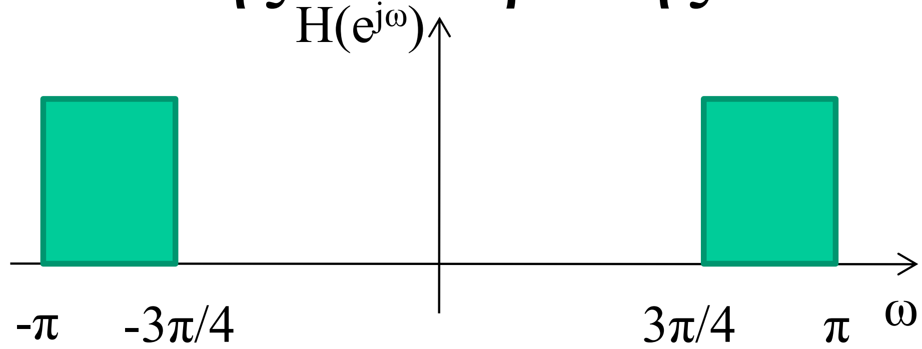
$$\frac{1}{\pi n}\frac{1}{2j}\left(e^{jn\omega_c}-e^{-jn\omega_c}\right)=\frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi},n\neq 0$$

$$n=0\Rightarrow h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)d\omega=\frac{1}{2\pi}2\omega_c=\frac{\omega_c}{\pi}$$

Η κρουστική απόκριση h(n) για $\omega_c=\pi/4$

Παράδειγμα: Ιδανικό υψηπερατό φίλτρο: υπολογισμός κρουστικής απόκρισης

- Να βρεθεί η κρουστική απόκριση ενός LTI συστήματος που έχει την ακόλουθη απόκριση συχνότητας H(e$^{j\omega}$)



$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{jn\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}e^{jn\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{4}}e^{jn\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{nj}e^{jn\omega}\Big|_{3\pi/4}^{\pi}+\frac{1}{2\pi}\frac{1}{nj}e^{jn\omega}\Big|_{-\pi}^{-3\pi/4}=$$

$$\frac{1}{\pi n}\frac{1}{2j}\left(e^{jn\pi}-e^{jn\frac{3\pi}{4}}+e^{-jn\frac{3\pi}{4}}-e^{-jn\pi}\right)=\frac{1}{\pi n}\frac{1}{2j}\left(-e^{jn\frac{3\pi}{4}}+e^{-jn\frac{3\pi}{4}}\right)=\frac{1}{\pi n}\frac{1}{2j}e^{jn\pi}\left(-e^{jn\left(\frac{3\pi}{4}-\pi\right)}+e^{-jn\left(\frac{3\pi}{4}-\pi\right)}\right)=$$

$$\frac{1}{\pi n}\frac{1}{2j}e^{jn\pi}\left(-e^{jn\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)}+e^{-jn\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)}\right)=\frac{1}{\pi n}\frac{1}{2j}e^{jn\pi}\left(-e^{jn\frac{\pi}{4}}+e^{-jn\frac{\pi}{4}}\right)=\left(-1\right)^{n}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n\pi}=$$

$$\left(-1\right)^{n}h_{lowpass}\left(\omega_c=\frac{\pi}{4}\right)$$

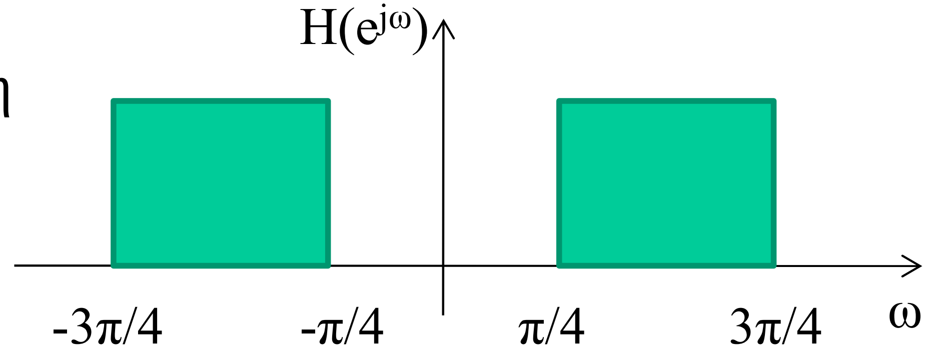
Παράδειγμα: Ιδανικό υψηπερατό φίλτρο: Β τρόπος υπολογισμού κρουστικής απόκρισης

- Παρατηρούμε ότι η απόκριση συχνότητας H προκύπτει από την απόκριση συχνότητας του ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου, μετατοπισμένη προς τα δεξιά κατά π. → Βάσει των ιδιοτήτων του DTFT:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_{lowpass}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) \leftrightarrow h(n) = e^{jn\pi}\, h_{lowpass}(n)\Big|_{\omega_c=\frac{\pi}{4}} = (-1)^n \frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n}{4}\pi\right)$$

Παράδειγμα: Ιδανικό φίλτρο Band pass

- Να βρεθεί η κρουστική απόκριση LTI που έχει την ακόλουθη απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$



$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{jn\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}e^{jn\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}e^{jn\omega}d\omega=$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{nj}e^{jn\omega}\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4}+\frac{1}{2\pi}\frac{1}{nj}e^{jn\omega}\Big|_{-3\pi/4}^{-\pi/4}=\frac{1}{\pi n}\frac{1}{2j}\left(e^{jn\frac{3\pi}{4}}-e^{-jn\frac{3\pi}{4}}\right)-\frac{1}{\pi n}\frac{1}{2j}\left(e^{jn\frac{\pi}{4}}-e^{-jn\frac{\pi}{4}}\right)=$$

$$\frac{\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}{n\pi}-\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n\pi}=h_{lowpass}(n)\Big|_{\omega_c=\frac{3\pi}{4}}-h_{lowpass}(n)\Big|_{\omega_c=\frac{\pi}{4}}$$

Παράδειγμα: Ιδανικό ολοπερατό φίλτρο

- Το ιδανικό ολοπερατό φίλτρο έχει απόκριση συχνότητας:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = c, \forall \omega$$

- Παράδειγμα ολοπερατού φίλτρου

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{e^{-j\omega} - a}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = H^*\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\left(e^{-j\omega} - a\right)\left(e^{j\omega} - a\right)}{\left(1 - ae^{-j\omega}\right)\left(1 - ae^{j\omega}\right)} =$$

$$\frac{1 - ae^{-j\omega} - ae^{j\omega} + a^2}{1 - ae^{-j\omega} - ae^{j\omega} + a^2} = \frac{1 + a^2 - 2a\cos\omega}{1 + a^2 - 2a\cos\omega} = 1$$

- Η κρουστική απόκριση υπολογίζεται ως:

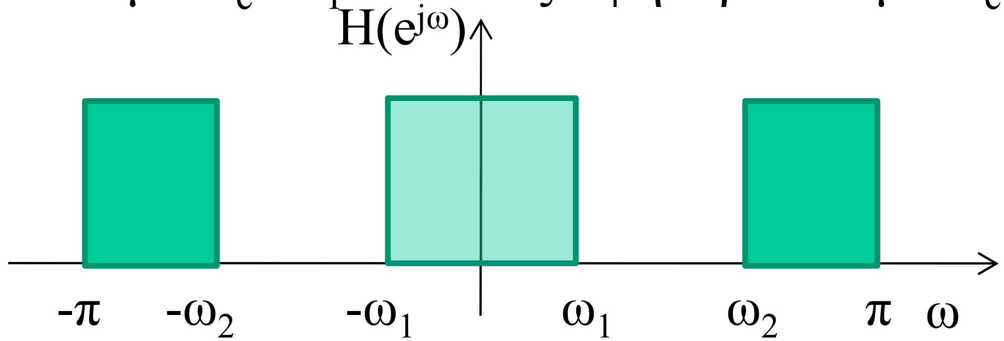
$$h\left(n\right) = a^{n-1}u\left(n-1\right) - a.a^n u\left(n\right)$$

Παράδειγμα: Ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο Bandstop

- Το ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο έχει απόκριση συχνότητας:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1,|\omega|\le\omega_1,\omega_2\le|\omega|\le\pi\\ 0,\alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

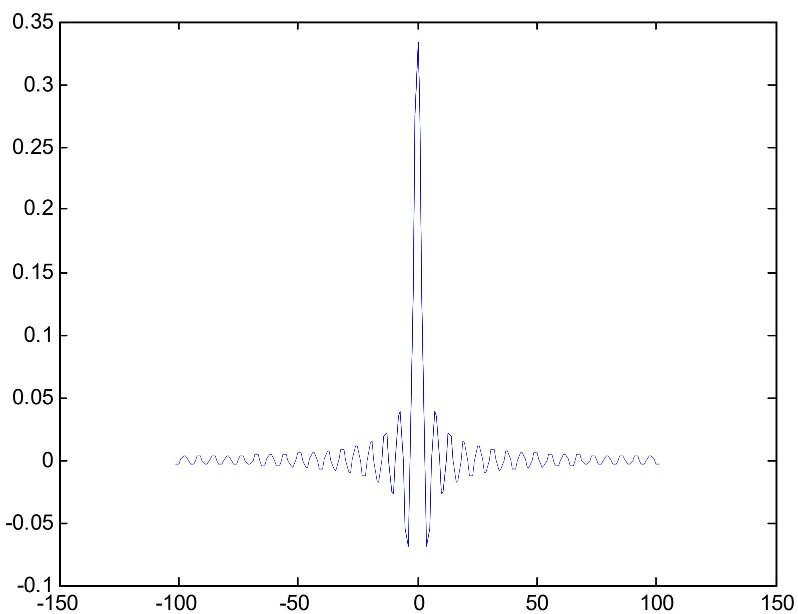
- Το ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο υλοποιείται σαν σειριακή σύνδεση ενός βαθυπερατού με $\omega_c=\omega_1$ και ενός υψηπερατού με $\omega_c=\omega_2$ με $\omega_2 > \omega_1$



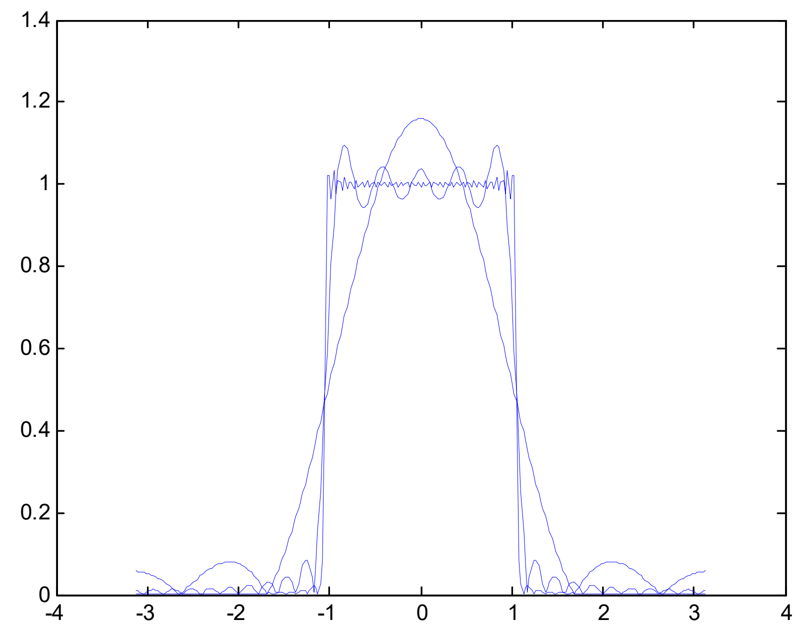
$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\omega_H}H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_L}^{\omega_L}H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_H}^{\pi}H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sin(\omega_L n)-\sin(\omega_H n)}{\pi n}, & n\neq 0\\ \dfrac{\pi+\omega_L-\omega_H}{\pi}, & n=0\end{cases}$$

Προσέγγιση του ILP με συχνότητα αποκοπής π/3 με FIR μήκους 7, 31 και 203.

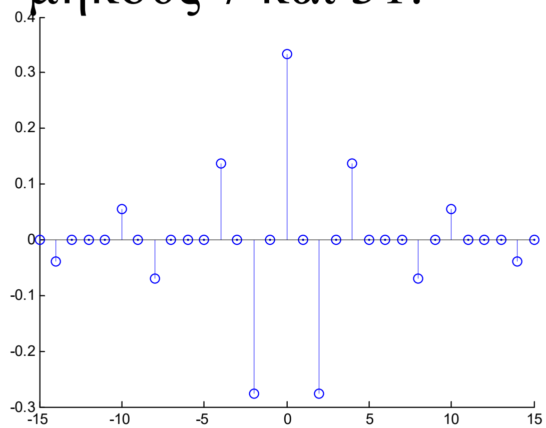


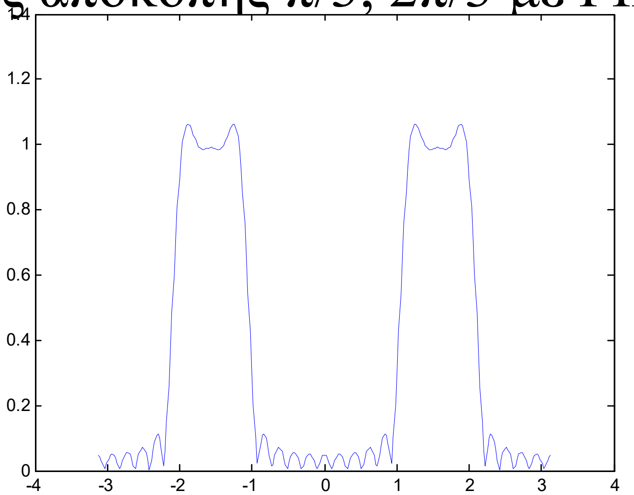
Κρουστική απόκριση

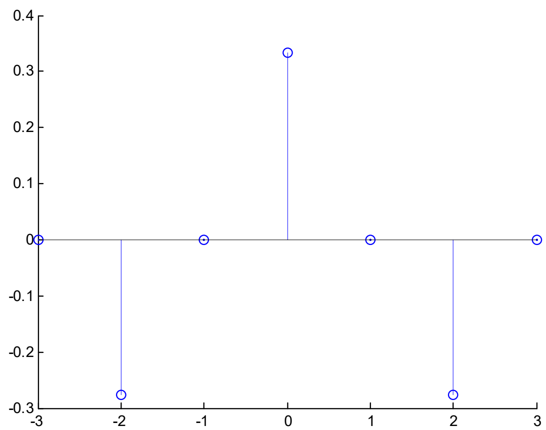


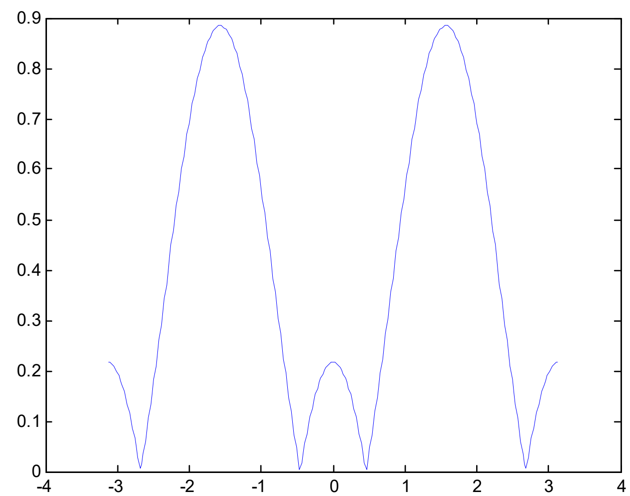
Απόκριση συχνότητας

- Προσέγγιση του IZP με συχνότητες αποκοπής π/3, 2π/3 με FIR μήκους 7 και 31.



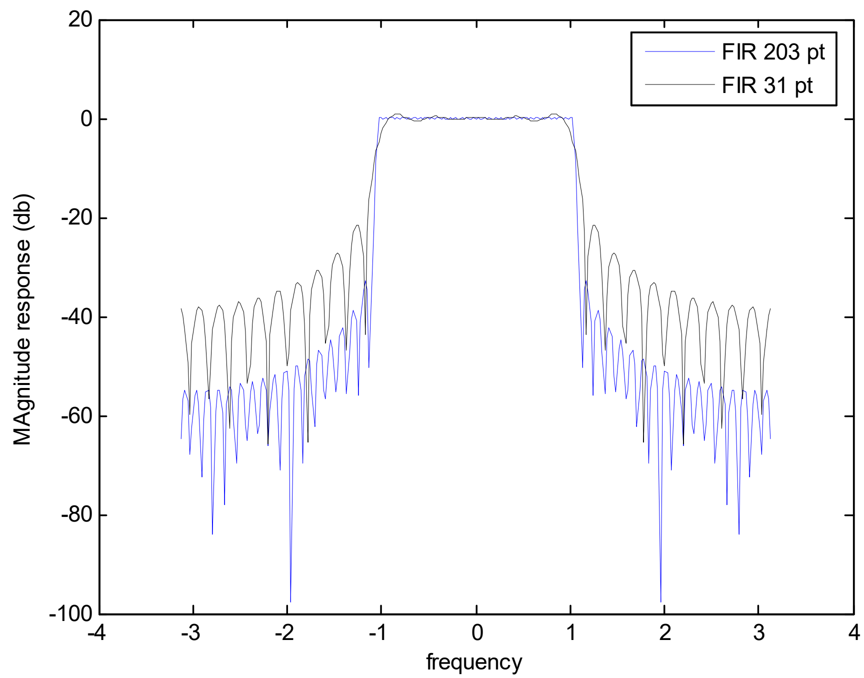






Απόκριση συχνότητας σε ημιλογαριθμική κλίμακα

- Για καλύτερη μελέτη της συμπεριφοράς του φίλτρου χρησιμοποιείται ημιλογαριθμική κλίμακα στον άξονα *Y* και απεικονίζεται η ποσότητα $20\log_{10}(\mathrm{abs}(H))$.
- Οι μονάδες του άξονα *Y* είναι σε decibel (db).

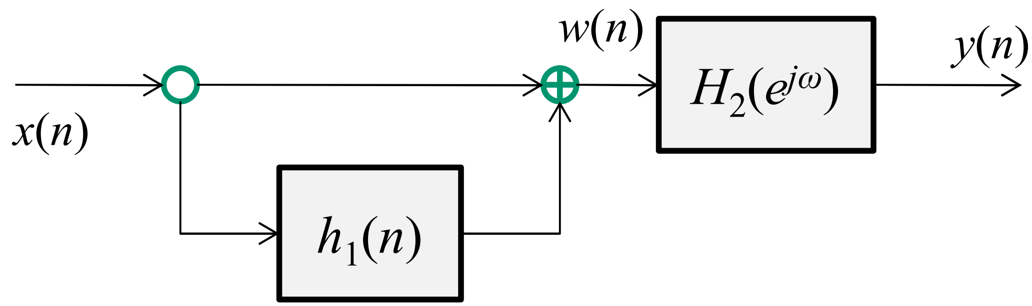


Παράδειγμα: διασύνδεση LTI

- Θεωρείστε τα ακόλουθα δύο LTI με την απεικονιζόμενη διασύνδεση. Να βρεθεί η έξοδος, αν ισχύει:

$$h_1(n) = \delta(n-1),$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$



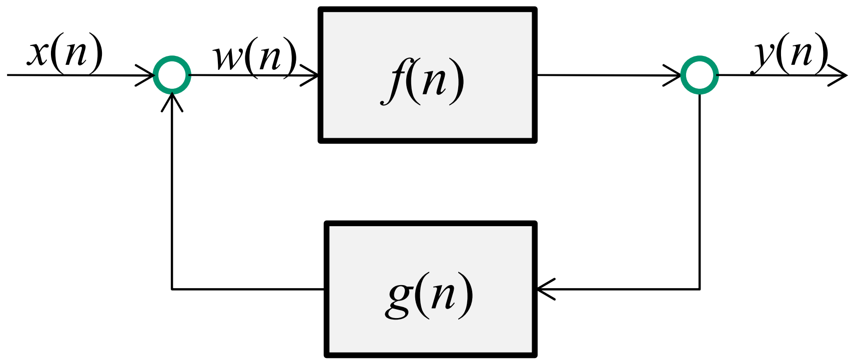
$$h_2(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_2(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}$$

$$y(n) = h_2(n) * w(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2(k)w(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{n\pi}\big(\delta(n-k) - \delta(n-1-k)\big) =$$

$$\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} - \frac{\sin((n-1)\pi/2)}{n\pi}$$

Παράδειγμα: διασύνδεση LTI

- Θεωρείστε την ακόλουθη διασύνδεση (σύστημα ανάδρασης). Υπολογίστε την συνολική απόκριση συχνότητας.



$$w(n) = x(n) + g(n) * y(n)$$

$$\left.\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) + G(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) \\ Y(e^{j\omega}) &= F(e^{j\omega})W(e^{j\omega}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = F(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) + F(e^{j\omega})G(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{F(e^{j\omega})}{1 - G(e^{j\omega})F(e^{j\omega})} X(e^{j\omega})$$

Παράδειγμα

- Η είσοδος ενός LTI με κρουστική απόκριση h(n), είναι x(n). Να βρεθεί η έξοδος του.

$$x(n) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 3\sin\left(\frac{3n\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right),\ h(n) = 2\frac{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)}{(n-1)\pi}$$

$$h(n) = 2\frac{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)}{(n-1)\pi} = 2h_1(n-1),$$

όπου h_1 είναι η κρουστική απόκριση του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2h_1(n-1)e^{-jn\omega} = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_1(n)e^{-j(n+1)\omega} = 2e^{-j\omega}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_1(n)e^{-jn\omega} = 2e^{-j\omega}H_1\left(e^{j\omega}\right)$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} 2e^{-j\omega}, |\omega| \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0,\ \dfrac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

Παράδειγμα

- Εστω $h(n)$ η κρουστική απόκριση ενός ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής $\omega_c=3\pi/4$. Αν η είσοδος και η έξοδος πολλαπλασιαστούν (διαμορφωθούν) με τον παράγοντα $(-1)^n$, ποια είναι η απόκριση συχνότητας του συστήματος που προκύπτει ?

$$y(n)=(-1)^n h(n)*\left((-1)^n x(n)\right)=(-1)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)(-1)^{n-k} x(n-k)=$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h(k)(-1)^{k-n} x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left((-1)^k h(k)\right)x(n-k)=\left((-1)^n h(n)\right)*x(n)$$

- Η απόκριση συχνότητας υπολογίζεται ως εξής

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h(n)e^{-jn\omega}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\pi}h(n)e^{-jn\omega}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-jn(\omega-\pi)}=H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$

- → Η απόκριση συχνότητας είναι αυτή του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου, μετατωπισμένη δεξιά στον άξονα των συχνοτήτων κατά π.
- Η νέα ΓΕΔΣΣ υπολογίζεται ως εξής: $|\omega|<\omega_c$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b(k) e^{-jk\omega}}{1 + \sum_{k=0}^{N} a(k) e^{-jk\omega}} \Rightarrow$$

$$H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b\left(k\right) e^{-jk(\omega-\pi)}}{1 + \sum_{k=0}^{N} a\left(k\right) e^{-jk(\omega-\pi)}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} e^{jk\pi} b\left(k\right) e^{-jk\omega}}{1 + \sum_{k=0}^{N} e^{jk\pi} a\left(k\right) e^{-jk\omega}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} \left(-1\right)^k b\left(k\right) e^{-jk\omega}}{1 + \sum_{k=0}^{N} \left(-1\right)^k a\left(k\right) e^{-jk\omega}}$$

- → Οι περιττοί όροι των $a(k)$ και $b(k)$ γίνονται αρνητικοί.