ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι – Μελέτη συνάρτησης μίας μεταβλητής

Επαναληπτικές ασκήσεις στις πραγματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

Επιμέλεια : Μαρία Αδάμ

Παράγωγος-ένα εργαλείο για τη μελέτη συνάρτησης.

i) Υπολογισμός μονοτονίας=>πρόσημο πρώτης παραγώγου

ii) Ακρότατα=> εκεί όπου μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος, έστω x_0, είναι ακρότατο (αποδεικνύεται με δύο τρόπους):

α) αν εκατέρωθεν του σημείου x_0 αλλάζει η μονοτονία της συνάρτησης, και

β) εξαρτάται το είδος του ακροτάτου από το πρόσημο της 2ης παραγώγου στο x_0, αν $f''(x_0) > 0$, τότε x_0 είναι min ή αν $f''(x_0) < 0$, τότε x_0 είναι max.

iii) Σύνολο τιμών => υπολογίζεται από τις ακριανές τιμές, όπου υπήρχαν ακρότατα, και τις οριακές τιμές της συνάρτησης στα άπειρα (όταν αυτά ανήκουν στο π.ο. της συνάρτησης) ή εκατέρωθεν των τιμών όπου η συνάρτηση δεν ορίζεται. Από όλες αυτές τις τιμές χρησιμοποιείται η ελάχιστη και η μέγιστη για να περιγραφεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

iv) Κοίλα-κυρτά =>εκεί όπου μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος, έστω x_1, είναι σημείο καμπής όταν εκατέρωθεν του σημείου x_1 αλλάζει το πρόσημο της 2ης παραγώγου της συνάρτησης. Η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα άνω όπου ισχύει $f''(x) > 0$ και στρέφει τα κοίλα κάτω όπου ισχύει $f''(x) < 0$.

v) Ασύμπτωτες => α) Αναζητούμε (αν υπάρχει) οριζόντια ασύμπτωτη όταν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$ υπάρχει κάποιο άπειρο($+\infty$ ή $-\infty$). Τότε ελέγχουμε αν το $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (ή $\lim_{x\to-\infty} f(x)$) είναι πραγματικός αριθμός. Αυτός ο αριθμός είναι η οριζόντια ασύμπτωτη.

β)Αναζητούμε (αν υπάρχει) <u>κατακόρυφη ασύμπτωτη</u> όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι της μορφής $\mathbb{R}-\{x_0\}$. Όταν τα πλευρικά όρια καθώς x-> x0 είναι $+\infty$ (ή $-\infty$), τότε $x=x_0$ είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ) Αναζητούμε <u>πλάγια ασύμπτωτη</u> όταν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$ υπάρχει κάποιο άπειρο($+\infty$ ή $-\infty$). Σε αυτήν την περίπτωση ελέγχουμε

αν $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$, και $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=b\in\mathbb{R}$

(ή $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$, και $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=b\in\mathbb{R}$).

Τότε η πλάγια ασύμπτωτη δίνεται $y=\lambda x+b$.

<u>Παρατήρηση-Υπενθύμιση:</u> Τέλος, ο κανόνας L' Hospital για να εφαρμοστεί θα πρέπει να υπάρχει οπωσδήποτε μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$, και τότε εφαρμόζεται ο κανόνας όσες φορές χρειαστεί, συγκεκριμένα

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Άλυτες ασκήσεις

1). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\dfrac{\ln x}{x^2}$.

i) Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα, τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της και στη συνέχεια να δοθεί ένα πρόχειρο σκαρίφημα της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)$.

ii) Αν $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη συνάρτηση, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και x = λ>1, να βρεθούν

$$E(\lambda) \text{ και } \lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda).$$

2). Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

i) Οι συναρτήσεις να μελετηθούν και να συγκριθούν ως προς τα εξής κοινά τους χαρακτηριστικά: Ακρότατα, σημεία τομής των αξόνων, ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

ii) Να αναπτυχθεί σε σειρά MacLaurin η συνάρτηση $h(x) = e^{-x}$.

iii) Να υπολογισθούν οι $1^{\eta\varsigma}$ τάξης παράγωγοι των $f(x)$, $g(x)$ και να συγκριθεί η μορφή των συναρτήσεων κοντά στο $x = 0$ χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της σειράς MacLaurin.

3). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

i) Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία της. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα (αν υπάρχουν), να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)$, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)$ και στη συνέχεια να δοθεί ένα πρόχειρο σκαρίφημα της C_f .

ii) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \dfrac{1}{(1-x)^2}dx$.

iii) Αν $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από την C_f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 2$ και $x = \lambda > 2$, να βρεθούν

$$E(\lambda) \text{ και } \lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda).$$

iv) Να αναπτυχθεί σε σειρά MacLaurin η συνάρτηση $f(x)$, αφού πρώτα αποδείξετε ότι ισχύει $f^{(n)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$, $n \in \mathbb{N}$, και να υπολογισθούν οι τιμές του x για τις οποίες η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

v) Χρησιμοποιώντας το παραπάνω ερώτημα να υπολογισθεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}.$$

4). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{2x}}{2e^{2x} + 5e^{x} + 2}$.

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (αν υπάρχουν) η $f(x)$. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)$, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)$ με τους άξονες και στη συνέχεια να δοθεί ένα πρόχειρο σκαρίφημα της C_f.

ii) Αν $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 2$ και $x = \lambda > 2$, να βρεθούν

$$E(\lambda) \text{ και } \lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda).$$

iii) Να αναπτυχθεί σε σειρά MacLaurin η συνάρτηση $g(x) = e^{2x+1}$ και στη συνέχεια να υπολογισθούν οι τιμές του x για τις οποίες η σειρά συγκλίνει.